APLICACIONES DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS EN ECONOMÍA

El Colegio de México

Sergio Ortiz Rosas

Agosto de 2007

Asesor: Dr. Jorge Fernández Ruíz

Resumen

Se hace una revisión de la literatura en cuanto a la aplicación de la teoría de conjuntos borrosos en economía en áreas como medición de la pobreza, organización industrial, teoría de juegos y economía del bienestar. Asimismo se analizan algunos artículos que hacen uso de esta teoría y se detallan sus procedimientos e implicaciones en problemas prácticos como análisis de la estructura de mercado, medición de la pobreza, derechos de propiedad y comportamiento colusivo. Se encontró que la teoría de conjuntos borrosos es relevante en el ámbito económico para modelar la ambigüedad o subjetividad que se hace a un lado con enfoques tradicionales.

Al Dios Todopoderoso...

Índice general

Introducción

Según una anéctoda en McNeill y Freiberger (1993), el concepto de *conjunto borroso* no habría surgido si a Lofti A. Zadeh (profesor de la Universidad de California en Berkeley) no le hubieran cancelado una cena una tarde de julio de 1964; aquella tarde mientras meditaba en la solución de un problema, de una lista que siempre llevaba consigo, es que surgió la idea. Zadeh dio a conocer esta idea en su artículo pionero de 1965, 'Fuzzy Sets'. Posteriormente, de concepto pasó a ser *la teoría de conjuntos borrosos* cuando Zadeh y Bellman (1970) la introdujeron como una disciplina matemática que facilitaría la toma de decisiones en condiciones de ambigüedad. Algunos autores describen esta teoría como:

"... un cuerpo de conceptos y técnicas que dan precisión matemática al proceso cognoscitivo humano el cual es impreciso y ambiguo por naturaleza según la matemática clásica..." *Kaufman y Gupta, (1988).*

"... un marco matemático estricto en el cual fenómenos conceptualmente vagos pueden ser estudiados precisa y rigurosamente." *Zimmermann, (1983).*

Esta teoría permite capturar la subjetividad del pensamiento humano a través de modelos matemáticos que se pueden utilizar para el análisis cuantitativo de fenómenos o conceptos que son imprecisos por naturaleza. Generalmente esta imprecisión toma un aspecto de incertidumbre, aunque cabe señalar que la fuente de incertidumbre de dichos fenómenos no es estocástica, sino borrosa. En otras palabras, 'borrosidad' y 'aleatoriedad' son aspectos de incertidumbre que difieren conceptualmente. Aleatoriedad implica una incertidumbre que es producto de la ocurrencia de un evento; esta incertidumbre se disipa con el paso del tiempo o a través de una prueba. En cambio, la borrosidad no es incertidumbre que pueda ser eliminada con el paso del tiempo, ni con una prueba, sino está asociada a la ambigüedad inherente al significado de las palabras o conceptos cuya interpretación es subjetiva.

La teoría de conjuntos borrosos ha sido utilizada como herramienta analítica con gran éxito en diversas áreas como ingeniería, sistemas de control e incluso sociología y ciencias políticas, por mencionar algunas. Dentro de este último grupo, el de las ciencias sociales, la incursión de esta teoría en la economía ha sido lenta y de modesto alcance (Mansur, 1995).

Se identifican dos razones por las que no se ha explotado el potencial de esta teoría en el ámbito económico:

1. La forma tradicional de representar la incertidumbre es hacer uso de modelos probabilísticos. La teoría de la probabilidad tiene ya una reputación; su aplicación en muchas ciencias ha creado gran confianza en sus resultados. Por su parte, la teoría de conjuntos borrosos es una disciplina matemática relativamente nueva (40 años aproximadamente) cuyos resultados o alcance todavía es desconocido en algunas ciencias.

2. La teoría de conjuntos borrosos es considerada un enfoque poco formal porque involucra la subjetividad inherente al comportamiento humano.

El presente trabajo tiene por objetivo una revisión de la literatura de algunas aplicaciones de la teoría de conjuntos borrosos en economía. En el capítulo uno se describen los conceptos y herramientas básicas de la teoría de conjuntos borrosos que ayudarán a una mejor compresión de las aplicaciones. En el capítulo 2 se hace una breve revisión de la literatura acerca de la aplicación de la teoría de conjuntos borrosos en economía y en otras áreas y posteriormente se describen las aplicaciones seleccionadas poniendo especial énfasis en el tema que guía este trabajo. En el último apartado se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. Conjuntos borrosos

La diferencia fundamental entre la teoría de conjuntos convencional y la de conjuntos borrosos es la *noción de pertenencia*. En la teoría de conjuntos la pertenencia de un objeto es un concepto preciso: un elemento pertenece a un conjunto o no, según las características que lo definen. En otras palabras, si se considéra un conjunto de objetos Ω (conjunto universo) y se define una función $\mu : \Omega \to \{0, 1\}$ que indique la pertenencia de un objeto x a un conjunto A, sólo se tienen dos posibilidades:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

a $\mu_A(\cdot)$ se le conoce como la función de pertenencia.

Pero ¿qué pasa si la pertenencia de un elemento a un determinado conjunto es dudosa? Situaciones en donde la pertenencia de un elemento a un conjunto no es clara son comúnes. Considérese el concepto de pobreza, por ejemplo. Para determinar si un individuo es pobre o no, en los estudios de pobreza generalmente se toma como marco de referencia el ingreso y se define un monto (línea de pobreza) para discriminar entre individuos pobres y no pobres; si el ingreso de un individuo es menor que el que define la línea de pobreza entonces es considerado como pobre. Pero que pasa en el caso de dos individuos cuyos ingresos sólo difieren en un peso y están en el límite de la línea de pobreza. Bajo este enfoque, un individuo pertenecería al conjunto de pobres y el otro no, sin embargo, no es claro que el individuo que no es pobre tenga menos carencias que el otro.

Entonces, las preguntas que surgen son: ¿es realista la decisión que una persona toma bajo el criterio de conjuntos ordinarios? ¿Cómo se puede tomar en cuenta la ambigüedad de un problema al tomar una decisión?

La respuesta a estas preguntas yace precisamente en la función de pertenencia. Zadeh (1965) generalizó la función de pertenencia permitiéndole tomar valores en el intervalo $[0,1]$ con el fin de capturar una forma gradual de pertenencia o representar la pertenencia parcial de un elemento a un conjunto. Esto dio lugar al concepto de conjunto borroso, el cual contempla una idea de pertenencia que ya no es precisa.

Definición 1.1 *Conjunto borroso.*

Sea Ω el conjunto universo y considérese un conjunto ordinario $A \subseteq \Omega$. Un conjunto borroso $\widetilde{A}$ se define como:

$$\widetilde{A} = \left\{ \ (x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) \mid x \in A, \ \mu_{\widetilde{A}}(x) \in [0,1] \right\} \tag{1.1}$$

donde $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es la función de pertenencia que especifica el grado en el que x pertenece al conjunto borroso $\widetilde{A}$.

Otra forma de leer esta definición es: del par $(x, \mu_{\widetilde{A}}(x))$, x es un elemento de un conjunto ordinario A que satisface cierta propiedad parcialmente; $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ indica en que medida o grado el elemento x satisface dicha propiedad.

La función de pertenencia $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ asocia a cada elemento x es un número real en el intervalo $[0,1]$. La interpretación de $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es acorde al valor que toma: valores cercanos a 1 indican que la pertenencia de x en $\widetilde{A}$ se acerca a su totalidad y valores cercanos a cero indican una baja pertenencia de x en $\widetilde{A}$. Cabe señalar que $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ puede ser discreta o continua.

La forma de construir $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es variada pero existe controversia en su determinación aún en la actualidad. En 1966 en un coloquio en la UCLA, un experto en análisis de decisión le preguntó a Zadeh '¿De dónde provienen los valores de pertenencia?' y él contestó: 'De nuestra cabeza, son subjetivos, la teoría borrosa no ofrece forma de precisarlos objetivamente sino que requiere de esta habilidad'[1]. Esto permite darse cuenta de no hay un método

[1] Fragmento tomado de McNeill y Freiberger (1993), p. 46.

para construir la función de pertenencia, sino que dependiendo del contexto del problema y de la interpretación del analísta, se pueden proporcionar diferentes deficiones matemáticas de dicha función, cuidando que refleje adecuadamente la información que se desea modelar.

No obstante, aunque actualmente sigue sin existir consenso, algunos autores ya han desarrollado formas específicas de la función de pertenencia según el contexto del problema. En economía, Novak realizó una revisión de la literatura acerca de métodos para generar funciones de pertenencia y que pueden ser usados por 'expertos de mercado' en un contexto oligopólico; Kuz'min utiliza métodos paramétricos para generar grados de pertenencia. Estos son solo algunos ejemplos que se pueden encontrar en la literatura; el lector interesado puede encontrar mayor información en Mansur (1995).

Así como con los conjuntos ordinarios se pueden realizar operaciones, con los conjuntos borrosos también. A continuación se presentan algunas operaciones básicas.

Considérense dos conjuntos borrosos $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ y un conjunto universo Ω. Las operaciones con estos conjuntos se definen en términos de operaciones entre sus funciones de pertenencia $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ y $\mu_{\widetilde{B}}(x)$.

- *Contención*
  $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ si $\forall\ x \in \Omega,\ \mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x)$
- *Complemento*
  $\widetilde{A}^c$ es el complemento de $\widetilde{A}$ si $\mu_{\widetilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x)$
- *Unión*
  $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \left\{(x, \mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x))\right\}$ donde $\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = \text{máx}\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}$
- *Intersección*
  $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \left\{(x, \mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x))\right\}$ donde $\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x) = \text{mín}\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}$

Nótese que con conjuntos borrosos es posible que $\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c \neq \varnothing$ y $\widetilde{A}\cup\widetilde{A}^c \neq \Omega$. Existen más operaciones que no necesitan se detallas para los propósitos de este trabajo pero que se pueden encontrar en Mansur (1995) y Bojadziev (1997).

Las siguientes definiciones serán útiles más adelante:

Definición 1.2 *Conjunto borroso convexo.*

Un conjunto borroso $\widetilde{A}$ *es convexo si y sólo si dados* x, $y \in A$ *el grado de pertenencia de* $z \in A$, tal que $x \leq z \leq y$,*no es menor que el mínimo de los grados de pertenencia de* x *y* y. *Formalmente:*

$$\forall\, x, y \in A \;\; \mu_{\widetilde{A}}[\lambda x + (1-\lambda)y] \geq \text{mín} \; \left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\; \mu_{\widetilde{A}}(y)\right\} \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Definición 1.3 *Conjunto borroso normal.*

Un conjunto borroso $\widetilde{A}$ *es normal si* $\exists\; x \in A$ *tal que* $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$. *Es decir, normalidad en un conjunto borroso implica que al menos uno de sus elementos tiene grado de pertenencia igual a 1.*

Un conjunto borroso se puede representar gráficamente como se muestra en la figura 1.1. En ella se puede observar que $\mu_{\widetilde{A}}(z) > \text{mín} \; \left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\; \mu_{\widetilde{A}}(y)\right\}$ $\forall\; x, y \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\widetilde{A}$ es un conjunto borroso convexo; adicionalmente, $\widetilde{A}$ es un conjunto borroso normal porque $\exists\; w \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_{\widetilde{A}}(w) = 1$.

Definición 1.4 *Corte* α

Un corte α, denotado por A_α, *del conjunto borroso* $\widetilde{A}$ *es un conjunto ordinario que define de la siguiente forma:*

$$A_\alpha = \left\{x \in A \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\right\}$$

Es decir, un corte α *es un conjunto ordinario cuyos elementos pertenecen al conjunto borroso* $\widetilde{A}$ *con un grado de pertenencia mayor o igual a* α.

1.2. Números borrosos

Una clase particular de conjuntos borrosos que es utilizada por su relevancia como herramienta analítica son los números borrosos.

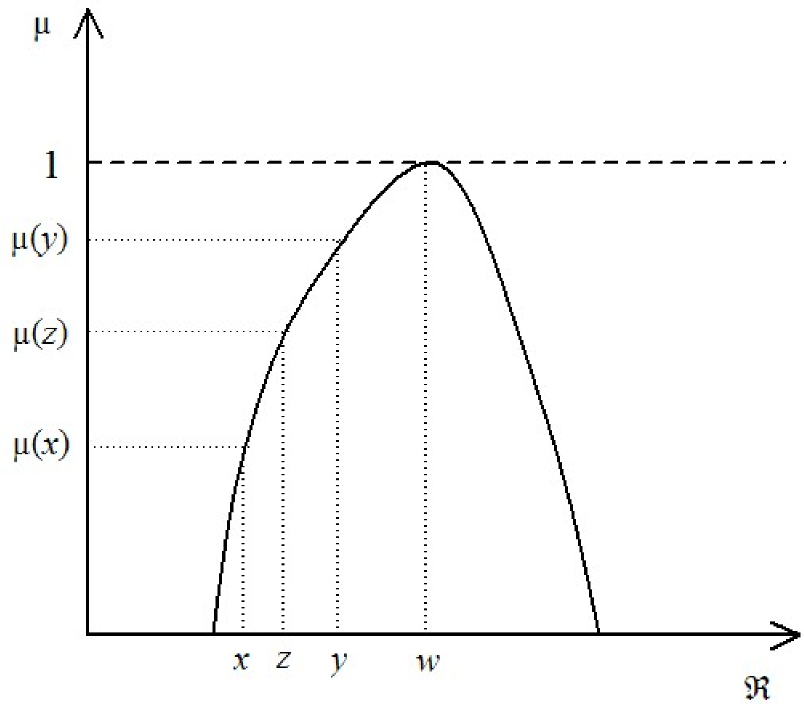

Figura 1.1: Representación gráfica de un conjunto borroso

Definición 1.5 *Número borroso.*

Un número borroso $\mathcal{A}$ es un subconjunto borroso de números reales que es convexo y normal.

Por la forma que toma su representación gráfica, se destacan dos tipos de números borrosos:

1. *Número borroso triangular*

   La terna $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ es un número borroso triangular donde a_2 es el elemento del conjunto borroso que alcanza el grado de pertenencia máximo, esto es, $\mu_{\mathcal{A}}(a_2) = 1$; para $x \in (a_1, a_3)$, la función de pertenencia está formada por dos segmentos lineales como se define a continuación:

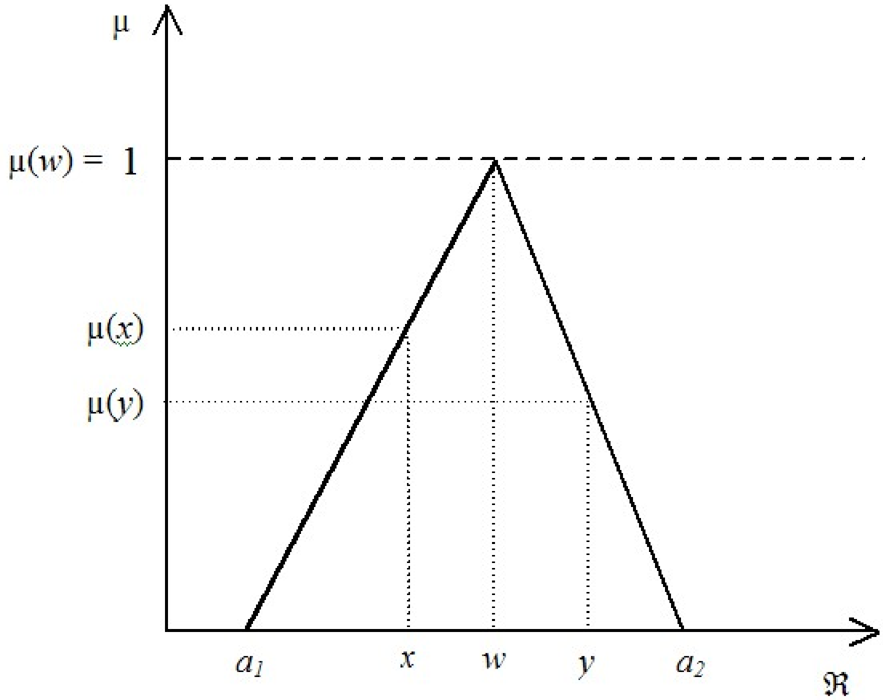

Figura 1.2: Representación gráfica de un número borroso triangular

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & si\ a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & si\ a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \tag{1.2}$$

Alternativamente, un número borroso triangular se puede definir en términos de un *corte* α, denominado también *intervalo soporte*, de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha,\ a_3 - (a_3 - a_2)\alpha] \tag{1.3}$$

Un número borroso triangular (a_1, a_2, a_3) permite representar expresiones como ‘aproximadamente a_2’ cuando no se está seguro del valor de a_2.Gráficamente este número borroso luce como un triángulo (Figura 1.2).

2. *Número borroso trapezoidal*

   $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ es un número borroso trapezoidal si $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\ \forall\ x \in [a_2, a_3]$; para $x \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4)$ la función de pertenencia está formada por segmentos lineales, como en el caso del número borroso triangular, y $\forall\ x \in (-\infty, a_1] \cup [a_4, \infty)\ \mu_{\mathcal{A}}(x) = 0$.Gráficamente este número borroso es un trapezoide. Un número borroso trapezoidal (a_1, a_2, a_3, a_4) sirve para representar expresiones como 'aproximadamente entre a_2 y a_3'.

Existen diversas operaciones con números borrosos, pero para los fines de este trabajo sólo se detallan algunas a continuación. Nótese que las operaciones con números borrosos trapezoidales son análogas a las de números borrosos triangulares.

- *Adición de números borrosos*

  Sean $\mathcal{A}$ =(a_1, a_2, a_3) y $\mathcal{B}$ =(b_1, b_2, b_3) números borrosos triangulares. El método para sumarlos consiste en considerar sus intervalos soporte y sumarlos para cada *corte* α. Esto es:

$$\begin{aligned} A_\alpha + B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1 + b_1 + (a_2 + b_2 - a_1 - b_1)\alpha, \\ &\quad\; a_3 + b_3 - (a_3 + b_3 - a_2 - b_2)\alpha] \end{aligned}$$

  Así, $\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

- *Multiplicación de un número borroso por un número ordinario*

  Sean $\mathcal{A}$ =(a_1, a_2, a_3) y $x \in \mathbb{R}$. Esta operación consiste en multiplicar directamente el intervalo soporte $\mathcal{A}_\alpha$ y por x. Esto es:

$$\begin{aligned} x \cdot A_\alpha &= [x \cdot a_1^{(\alpha)}, x \cdot a_2^{(\alpha)}] \\ &= [x \cdot a_1 + x \cdot (a_2 - a_1)\alpha,\ x \cdot a_3 - x \cdot (a_3 - a_2)\alpha] \end{aligned}$$

  Así, $x \cdot \mathcal{A} = (x \cdot a_1, x \cdot a_2, x \cdot a_3)$

- *Convolución max-min*

  Sean X, $Y \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} \subset X$, $\mathcal{B} \subset Y$, entonces:

  $$\mu_{A*B}(z) = \text{máx}\left\{\text{mín}\left\{\mu_A(x), \mu_B(y)\right\}\right\}$$

  donde $z = x * y$ y $*$ puede ser $+, -, \cdot, \div$

- *Principio de extensión*

  Sean $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times\ \Omega_n$ y $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2,\ \ldots\ , \widetilde{A}_n$ conjuntos borrosos en $\Omega_1, \Omega_2, \ldots\ , \Omega_n$ respectivamente. También sea $f : \Omega \to Y$ una función que mapea elementos del producto cartesiano de conjuntos universo Ω a un conjunto ordinario Y. Entonces un conjunto borroso $\widetilde{B}$ de Y se define como:

  $$\widetilde{B} = \left\{(y, \mu_{\widetilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, x_2,\ \ldots\ , x_n)\right\}$$

  donde

  $$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x_1,\ldots,x_n} \left\{\text{mín}\left\{\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1),\ \ldots\ , \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right\}\right\} & si\ y = f(x_1, x_2,\ \ldots\ , x_n) \\ 0 & si\ f^{-1}(y) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

  Si se construye un conjunto borroso con los elementos resultantes de un mapeo, este principio permite determinar los grados de pertenencia de tales elementos. Si más de un elemento de Ω es mapeado en el mismo $y \in Y$, entonces el máximo de los grados de pertenencia de estos elementos es seleccionado como el grado de pertenencia de y. Si $f^{-1}(y) = 0$, esto es, ningún $x \in \Omega$ es mapeado en y, entonces su grado de pertenencia en $\widetilde{B}$ es cero.

Capítulo 2

APLICACIONES EN ECONOMÍA

2.1. Revisión de la literatura existente

Desde sus inicios la teoría de conjuntos borrosos despertó el interés y la curiosidad en muchas áreas donde su aplicación era factible. Actualmente es reconocida como una disciplina importante para la modelación y solución de problemas donde la subjetividad se hace presente y ha sido aplicada exitosamente en muchas áreas.

Entre las revisiones de la literatura existentes acerca de la teoría de conjuntos borrosos y sus aplicaciones de forma general, destacan los trabajos de Gaines y Kohout (1977) y Kaufmann y Gupta (1988). Otras revisiones con el mismo objetivo pero que se enfocan a áreas específicas son la de Zimmermann (1983), quién revisa la literatura en investigación de operaciones y Lai y Hwang (1994), quién revisa la literatura en la toma de decisiones con objetivos múltiples. En ingeniería, la aplicación de esta teoría es vasta en áreas como teoría de sistemas, cibernética, planeación y control, bases de datos, robótica (Terano, Asai y Sugeno, 1987).

En economía, la teoría de conjuntos borrosos se ha aplicado en:

- *Organización industrial.* Se destacan las contribuciones de Greenhut, Greenhut y Mansur (1995) modelando la competencia oligopólica y la de Goodhue (1998), quien analiza la colusión vía estrategías borrosas de disparo.

- *Medición de la pobreza.* La literatura existente se centra en los trabajos de Cerioli y Zani (1990) y Cheli y Lemmi (1995). Los primeros autores proponen un enfoque multidimensional de medición de la pobreza utilizando conjuntos borrosos, mientras que Cheli y Lemmi modifican esta propuesta con el fin de mejorar este enfoque de estudio.

- *Teoría de juegos.* El trabajo pionero es el de Butnariu (1978), según lo indica la literatura, quien plantea una formulación de juegos borrosos no cooperativos en la que las creecias acerca de las estrategias de los otros jugadores son descritas con conjuntos borrosos. Billot(1992) retoma el trabajo de Butnariu para identificar las estrategias de equilibrio de un juego en forma normal utilizando preferencias borrosas. Song y Kandel (1999) examinan una variación del dilema del prisionero donde el grado en el que un jugador desea delatar o cooperar es borroso.

- *Economía del bienestar.* Richardson (1998) prueba una versión del Teorema de Imposibilidad de Arrow donde las preferencias de la sociedad sean relaciones borrosas y las condiciones de transitividad de estas preferencias son débiles. Llamazares (2005), por su parte, estudia y caracteriza diferentes formas de factorizar relaciones borrosas de preferencia débil que, en contraste con el enfoque ordinario, dicha factorización es única.

La teoría de conjuntos borrosos es importante en economía porque permite capturar la ambigüedad o subjetividad presente en muchos problemas económicos que simplemente es omitida con los enfoques tradicionales. Ejemplos de estos problemas son: el determinar si un individuo es pobre o no, cómo establecer las fronteras que delimitan el tipo de estructura en un mercado e incluso, en algunos países, cómo definir los derechos de grupos de individuos de forma flexible; en todas estas cuestiones la subjetividad del tomador de decisiones está presente y es, por tanto, conveniente tener a la mano una herramienta que permita tomar en cuenta dicha subjetividad.

En las secciones siguientes se describen los artículos que se seleccionaron para esta revisión, poniendo especial énfasis en la modelación con conjuntos borrosos y los motivos que justifican su aplicación en problemas económicos.

2.2. Aplicación: Competencia oligopólica

Un mercado oligopólico está conformado por 'pocas' empresas las cuales hacen conjeturas acerca de los patrones de comportamiento de sus rivales; no importa si una empresa es grande o tiene una presencia débil en el mercado, dichas conjeturas involucran un grado de incertidumbre que tiene que ser tomado en cuenta por una empresa al momento de tomar una decisión.

En esta sección se analiza el artículo 'Oligopoly and Behavioral Uncertainty: An Application of Fuzzy Set Theory' de John G. Greenhut, Melvin L. Greenhut y Yusuf Mansur (1995), quienes muestran que la teoría de conjuntos borrosos es relevante para modelar la competencia oligopolística.

2.2.1. Mercado oligopólico

Un mercado oligopólico se puede definir como aquel en el que pocas empresas interdependientes estratégicamente producen bienes similares. Greenhut et al. analizan los aspectos ambiguos o que están sujetos a interpretación de esta definición. Por ejemplo, 'pocas empresas' se refiere a dos o más empresas generalmente, pero una vez que se fija un número de empresas, ¿estas empresas dejan de ser competidores oligopolísticos o la interdependencia entre ellas se rompe si una empresa adicional entra al mercado? La respuesta no es clara. Los autores consideran que para capturar la flexibilidad de la palabra 'pocas' se pueden utilizar números borrosos como 'aproximadamente 5' o 'aproximadamente entre 2 y 10'.

La principal razón que los autores citan para el uso de la teoría de conjuntos borrosos en vez de un enfoque probabilístico, es la presencia de términos lingüísticos ambiguos en la definición de mercado oligopólico: 'pocas empresas', 'empresas interdependientes' y 'productos similares'. Su análisis se centra en modelar estas descripciones con tres diferentes conjuntos borrosos para después determinar el grado con el que cada empresa pertenece al mercado oligopólico.

De esta forma, definen el número borroso triangular $\widetilde{F}$ para representar 'pocas empresas' como 'aproximadamente i empresas' donde $i \in \mathbb{N}$. El grado de pertenencia en este conjunto describe la creencia que el representante de cada empresa tiene acerca del número de empresas que hay en el mercado.

El supuesto implícito en este caso es que no existen barreras de entrada o salida.

El siguiente aspecto que es modelado es la interdependencia entre empresas. Los autores definen $\widetilde{I}$ como el conjunto borroso de empresas cuyos grados de pertenencia representan el nivel de interdependencia percibido por el representante de cada empresa con respecto a una empresa representativa que se supone tiene un grado de pertenencia completo en el mercado oligopólico.

El último aspecto que se trata de capturar es que las empresas no elaboran productos idénticos. Por esta razón, se define $\widetilde{S}$ como el conjunto borroso de productos en el mercado, cada uno con un grado de pertenencia que describe su grado de similitud con el producto elaborado por la empresa representativa.

Una vez capturada la ambigüedad de la definición, Greenhut et al. proceden a caracterizar el mercado oligopólistico en función de $\widetilde{F}$, $\widetilde{I}$ y $\widetilde{S}$ como el conjunto borroso de empresas $\widetilde{O}$, en el cual el grado de pertenencia de cada empresa se obtiene aplicando el *principio de extensión (1.4)*; el grado de pertenencia indica el nivel de inclusión de cada empresa en el mercado oligopólico desde el punto de vista del analista. Esta información puede ser utilizada por una empresa para evaluar la posibilidad de que otra empresa sea una competidor oligopólico, o bien, para catalogar a sus rivales como fuertes o débiles dependiendo de su nivel de inclusión en $\widetilde{O}$.

2.2.2. Índice de Herfindahl-Hirschman borroso

El índice de Herfindahl-Hirschman (IHH) se define como la suma de las participaciones de mercado al cuadrado:

$$IHH = \sum_{i=1}^{n} S_i^2 \tag{2.1}$$

donde S_i es la proporción de ventas de la empresa i con respecto a las ventas totales de la industria. Específicamente, si la industria tiene un solo vendedor (monopolio puro), el IHH es igual a 10,000; si una industria fuera puramente competitiva, el valor de IHH sería cero; en medio yace un área ambigua de competencia imperfecta y juicios subjetivos de las autoridades anticolusión.[2]

[2] En EU, de acuerdo con los lineamientos DOJ-1992 para evaluar fusiones, una agencia califica al mercado con base en el IHH post-fusión como: ‘no concentrado’ si es menor

La aplicación de Greenhut et al. se centra en construir un IHH borroso. Para ello identifican la fuente de ambigüedad de este índice en la participación de mercado S_i; comentan que en la práctica no se pueden observar las ventas de las empresas en cualquier momento, por lo que sólo se dispone de datos aproximados más que exactos. Basados en este argumento, proponen que las ventas de cada empresa (Q_i) sean estimadas con un número borroso $\widetilde{Q_i}$ tal como 'cercano a Q_i' o 'aproximadamente Q_i'.

Considerando esta representación, la participación de mercado ahora es el número borroso $\widetilde{S}_i$ ('aproximadamente S_i') resultado de dividir 'aproximadamente Q_i' entre el tamaño total del mercado relevante T :

$$\widetilde{S}_i = \frac{\widetilde{Q_i}}{T}$$

donde el número ordinario $T = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{O}}(i) Q_i$ es la suma ponderada de la producción de cada empresa (Q_i) y el peso es su grado de pertenencia en $\widetilde{O}$.

Con esta reinterpretación de las participaciones de mercado, Greenhut et al. construyen el IHH borroso $\widetilde{h}$. Este índice borroso se puede usar en el mismo sentido que el índice convencional, sólo que ahora $\widetilde{h}$ permite analizar la estructura de mercado de una forma más flexible al ser una medida borrosa de la concentración del mercado.

El análisis con el IHH borroso requiere de la definición de varios términos lingüísticos para describir diferentes tipos de competencia en el mercado: 'muy competitivo', 'más o menos competitivo', 'casi oligopólico', 'oligopólico', 'más o menos monopólico' y 'monopólico'. Si a cada uno de estos términos se les asocia un número borroso triangular, cuyo elemento con el grado de pertenencia máximo toma valores en el intervalo abierto $(0, 10000)$, entonces la estructura del mercado lucirá como en la figura 2.1.

Para ejemplificar el uso del IHH borroso los autores proponen el siguiente ejemplo. Sean $\mathcal{A} = (1600, 1800, 1900)$ y $\mathcal{B} = (1700, 2400, 2500)$ los números borrosos triangulares asociados a las estructuras de mercado 'oligopólico' y 'más o menos monopólico' y considérese que el IHH borroso estimado por

a 1,000; 'moderadamente concentrado' si se encuentra entre 1,000 y 1,800; 'altamente concentrado' si es mayor a 1,800. Con base en esto, las autoridades autorizan o declinan las fusiones.

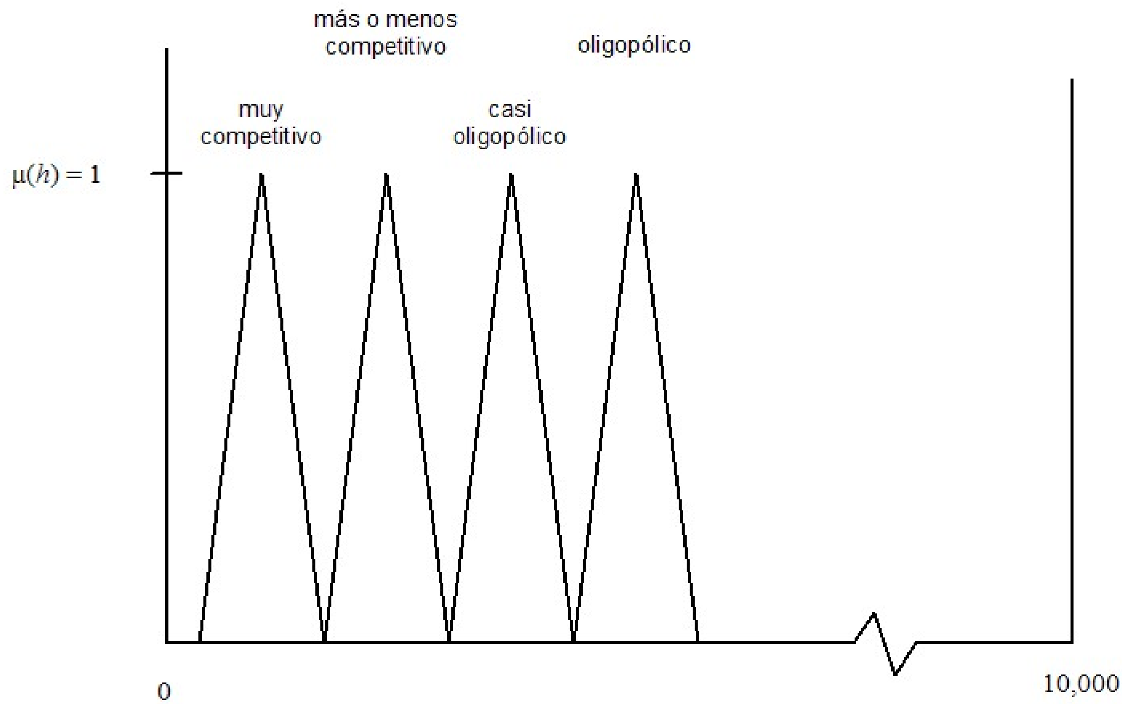

Figura 2.1: Representación de la estructura de mercado utilizando números borrosos.

un experto[3] es 'aproximadamente 2300', esto es, $\widetilde{h}^1 = (1400, 2300, 2600)$. La intuición que manejan los autores es que el mercado que se evalúa utilizando $\widetilde{h}^1$, tendrá la estructura de aquel en el que el IHH borroso tenga la mayor incidencia. Lo anterior se traduce en calcular la intersección de $\widetilde{h}^1$ con cada número borroso y en determinar la magnitud de esta intersección. Reescribiendo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\widetilde{h}^1$ en términos de sus *cortes* α se tiene que:

$\mathcal{A}_\alpha = [1600 + 200\alpha,\ 1900 - 100\alpha]$

$\mathcal{B}_\alpha = [1700 + 700\alpha,\ 2500 - 100\alpha]$

$\widetilde{h}^1_\alpha = [1400 + 900\alpha,\ 2600 - 300\alpha]$

Luego la intersección de $\mathcal{A}_\alpha$ y $\widetilde{h}^1_\alpha$ es:

[3] Los autores hacen énfasis en que la representación con conjuntos borrosos de las estructuras de mercado debe ser realizada por un experto el cual se supone conoce la información pertinente para asignar los grados de pertenencia.

$$\mathcal{A}_\alpha \cap \widetilde{h}^1_\alpha = [\text{mín}\{1600 + 200\alpha, 1400 + 900\alpha\}, \\ \text{mín}\{1900 - 100\alpha, 2600 - 300\alpha\}]$$

De manera análoga la intersección de $\mathcal{B}_\alpha$ y $\widetilde{h}^1_\alpha$ es:

$$\mathcal{B}_\alpha \cap \widetilde{h}^1_\alpha = [\text{mín}\{1700 + 700\alpha, 1400 + 900\alpha\}, \\ \text{mín}\{2500 - 100\alpha, 2600 - 300\alpha\}]$$

Las intersecciones resultantes se definen para cualquier α. Si se considera $\alpha = 0.7$ se tiene que:

Intersección	Magnitud
$\mathcal{A}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [1740, 1830]$	90
$\mathcal{B}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [2030, 2390]$	**360**

Dado que $\widetilde{h}^1$ tiene mayor representación en $\mathcal{B}$ que en $\mathcal{A}$ para $\alpha = 0.7$ Greenhut et al. concluyen que el tipo de competencia que mejor describe al mercado es 'más o menos monopólica'; así mismo añaden que la evaluación económica de la competencia no necesariamente cambia cuando el IHH borroso es utilizado. Finalmente, los autores consideran que las barreras elásticas definidas por la función de pertenencia para cada tipo de estructura de mercado, es una metodología que puede ser utilizada por las autoridades para determinar si las fusiones de empresas provocan un cambio en la estructura de mercado, de un estado deseable a uno indeseable.

2.2.3. Comentarios

El enfoque sugerido por Greenhut et al. es interesante, sin embargo, algunos de sus supuestos, procedimientos y conclusiones no están bien fundamentados.

Una cuestión que no es precisada es el porqué diferenciar entre la producción y las ventas de cada empresa al calcular las participaciones borrosas de mercado. Claramente ambas son números aproximados más que exactos, sin embargo, modelan las ventas de cada empresa con un número borroso y su producción con un número ordinario. No lo mencionan como supuesto y tampoco proporcionan justificación.

Otra cuestión que no es obvia es el cálculo del IHH borroso usando (2.1). Una vez que se tiene la participación de mercado, que es un número borroso, el cálculo de su cuadrado es un procedimiento que requiere de supuestos adicionales dada la aritmética de los números borrosos.

Por otro lado, los grados de pertenencia que usan en sus ejemplos son subjetivos. De hecho el procedimiento que utilizan, que parece estar basado en la convolución max-min (aunque no lo especifican), no permite ver claramente como sería utilizado el IHH borroso por las autoridades anticolusión. Adicionalmente, para este trabajo se realizaron los siguientes ejercicios para aclarar este punto:

Considérense $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\widetilde{h}^1$ descritos en la sección anterior y el número borroso 'aproximadamente 2900' $\mathcal{C} = (2200, 2900, 3200)$; este último representa el tipo de competencia 'monopólica'. Con el procedimiento del artículo se obtienen los siguientes resultados considerando $\alpha = 0,7$:

Intersección	**Magnitud**
$\mathcal{A}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [1740, 1830]$	90
$\mathcal{B}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [2030, 2390]$	360
$\mathcal{C}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [2030, 2390]$	360

Nótese que la magnitud de la intersección de $\widetilde{h}^1$ con $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es la misma. Esto se puede interpretar como que también el tipo de competencia 'monopólica' describe mejor al mercado dada la alta incidencia de $\widetilde{h}^1$ en $\mathcal{C}$. Bajo el mismo razonamiento, incluso el tipo de competencia 'monopólica pura' podría describir el mercado porque presentaría la misma incidencia. El utilizar este procedimiento no disipa la ambigüedad acerca del tipo de competencia que define mejor al mercado. Los autores no comentan que hacer en este caso.

En este trabajo se propone la siguiente metodología para identificar claramente el tipo de competencia. Considerando el mismo ejemplo, se calculó la intersección de $\widetilde{h}^1$ con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ como conjuntos borrosos y posteriormente se fijó $\alpha = 0.7$ obteniendo los siguentes resultados:

Intersección	**Magnitud**
$\mathcal{A}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [1713, 1865]$	152
$\mathcal{B}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [2138, 2408]$	**270**
$\mathcal{C}_{.7} \cap \widetilde{h}^1_{.7} = [2396, 2516]$	120

Con este procedimiento es claro que $\widetilde{h}^1$ tiene mayor incidencia en $\mathcal{B}$ y por tanto, un tipo de competencia 'más o menos monopólica' es la que describe mejor al mercado.

El IHH se utiliza principalmente para evaluar fusiones de empresas en una industria. Con un IHH borroso, un ejercicio importante debería ser analizar qué sucedería con la estructura de mercado ante un incremento en este índice, lo cual no se hace en el artículo y sólo se menciona superficialmente. Entonces se propuso el siguiente ejercicio: si el IHH borroso post-fusión aumenta en 'aproximadamente 250', esto es, $\widetilde{h}^2 = (1900, 2550, 2800)$, a continuación se analiza que sucede con la estructura de mercado siguiendo a los autores:

Intersección	**Magnitud**
$\mathcal{A}_{,7} \cap \widetilde{h}^2_{,7} = [1740, 1830]$	90
$\mathcal{B}_{,7} \cap \widetilde{h}^2_{,7} = [2190, 2430]$	240
$\mathcal{C}_{,7} \cap \widetilde{h}^2_{,7} = [2355, 2625]$	**270**

Esta tabla muestra que el índice borroso post-fusión señala que la estructura de mercado pasaría a un nivel de concentración más alto al tener mayor incidencia en $\mathcal{C}$ el cual describe un estructura 'monopólica' de mercado.

Sin embargo, este resultado no se mantiene si se calcula la intersección de los conjuntos borrosos por definición:

Intersección	**Magnitud**
$\mathcal{A}_{,7} \cap \widetilde{h}^2_{,7} = \varnothing$	0
$\mathcal{B}_{,7} \cap \widetilde{h}^2_{,7} = [2262, 2444]$	**182**
$\mathcal{C}_{,7} \cap \widetilde{h}^2_{,7} = [2508, 2688]$	180

En este caso se observa que un incremento del IHH borroso de 'aproximadamente 250' no provoca necesariamente un cambio en la estructura de mercado como lo indicaba anteriomente. Este resultado es más coherente que el anterior por dos razones: refleja realmente que $\widetilde{h}^2$ ya no tiene presencia en $\mathcal{A}$, lo cual no sucede con el enfoque del artículo y permite identificar claramente en que conjunto borroso tiene mayor incidencia aunque las magnitudes sean similares; cabe señalar que este último resultado se mantuvo para diferentes valores de α.

Finalmente queda abierta la pregunta acerca de cuál es la mejor forma de modelar con conjuntos borrosos.

2.3. Aplicación: Medición multidimensional de la pobreza

Como medir la pobreza de la manera más adecuada es un tema que se ha sido muy estudiado en el ámbito económico y que ha dado paso a distintos enfoques. El enfoque tradicional parte de la suposición de que el nivel de pobreza de un individuo se puede determinar mediante un único indicador: el ingreso; con base en éste, aquellos individuos cuyo ingreso cae por debajo de cierto monto de dinero (conocido como línea de pobreza) son considerados pobres. Sin embargo, en la literatura es díficil encontrar un consenso en cuanto a la definición de este límite. De hecho algunos autores (Cerioli y Zani, 1990; Cheli y Lemi, 1994) argumentan que entre los motivos por los que no se llega a un consenso es porque la partición de un grupo de individuos en pobres y no pobres no es realísta, pues individuos con ingresos aproximadamente iguales (que difieran por algunos pesos), pero en diferentes lados de la línea de pobreza, pueden ser clasificados de forma distinta. Por el contrario, en general se acepta que la transición de un estado de pobreza a uno sin privaciones es gradual. Debido a la ambigüedad que rodea la medición de la pobreza, su marco de análisis representa una aplicación de la teoría de conjuntos borrosos.

La aplicación que se analiza es del artículo "Measuring Multidimensional Poverty: An Empirical Comparison Of Various Approches" de Joseph Deutsch y Jacques Silber (2005). Estos autores utilizan un enfoque multidimensional de medición de la pobreza porque consideran que el concepto de pobreza es más amplio de lo que una sola variable monetaria puede reflejar bajo el enfoque tradicional. El enfoque multidimensional busca capturar información no sólo del ingreso o de los gastos de un individuo sino también de su calidad de vida. Un problema que presentan las fuentes de información (generalmente los censos) es la confiabilidad de los datos; en cuanto al ingreso, por ejemplo, las familias generalmente reportan un ingreso por debajo del real, de manera que las inferencias que se pudieran realizar con base en esta información no se apegarían a la realidad. Sin embargo, de los censos se puede obtener información confiable y detallada de los estándares de vida de las familias como, por ejemplo, información referente a los bienes durables que tienen a su disposición.

No obstante, el usar la información de posesión de bienes durables genera otra cuestión: el tener que construir medidas de naturaleza multidimensional que reflejen correctamente los estándares de vida de individuos. No se puede utilizar el enfoque unidimensional del ingreso sino que se tienen que generar nuevas medidas de pobreza y estándares de vida.

En este sentido, el objetivo del artículo es comparar empíricamente cuatro diferentes enfoques multidimensionales de medición de la pobreza utilizando información de bienes durables como proxy del estándar de vida; dichos enfoques son: *la teoría de conjuntos borrosos, la teoría de la información, la función de distancia y la derivación axiomática de índices de pobreza.* Cabe señalar que se pondrá especial énfasis en el enfoque de la teoría de conjuntos borrosos.

2.3.1. Análisis de la pobreza: enfoque con conjuntos borrosos

La idea de un conjunto borroso puede ser de utilidad para modelar la ambigüedad del concepto de pobreza porque muchas veces no es fácil distinguir cuando un individuo es pobre o no lo es. Esto sucede particularmente cuando se trabaja en el marco de estudio multidimensional de medición de la pobreza pues de acuerdo a ciertos criterios un individuo puede ser clasificado como pobre, no así de acuerdo a otros criterios. En la literatura los principales enfoques 'borrosos' de medición de la pobreza son dos:

Enfoque Totalmente Borroso

Cerioli y Zani (1990) fueron los primeros en aplicar el concepto de conjunto borroso a la medición de la pobreza dada su naturaleza multidimensional, denominando a este enfoque *totalmente borroso.*

Considérese un conjunto con n individuos u hogares y un conjunto de m variables o indicadores cualitativos o cuantitativos del nivel de vida. El objetivo de Cerioli y Zani es llevar a cabo una asignación adecuada de cada uno de estos individuos a un conjunto borroso que refleje sus características de privación o pobreza de acuerdo a estos indicadores. Parte de esta tarea es seleccionar la función de pertenencia apropiada de acuerdo a cada variable. Cerioli y Zani distinguen al menos tres tipos de variables, cada una de las cuales se denotará por ξ_{ij} e indicará el estatus del individuo i con respecto al bien j:

1. *Variables dicotómicas*

   Por definición ξ_{ij} es una variable binaria que indica si el individuo i posee el bien j o no. En este caso se define el conjunto borroso de individuos Ξ_j que se caracterizan por la privación del bien j; el grado de pertenencia de un individuo en este conjunto es:

$$\mu_{\Xi_j}(i) = \begin{cases} 1 & si\ \xi_{ij} = 0 \\ 0 & si\ \xi_{ij} = 1 \end{cases}$$

   Cabe señalar que este conjunto no es propiamente borroso porque no existe ambigüedad en la posesión de dicho bien. Los autores utilizan indicadores que reflejan la posesión de bienes: teléfono, televisión, lavadora, computadora, etc.

2. *Variables categóricas*

   Son variable cualitativas que indican diferentes situaciones de privación de un individuo. En este caso se define un conjunto borroso de individuos Ξ_j que se caracterizan tener cierto grado de privación de acuerdo con el indicador j. Suponiendo que los valores cualitativos de este tipo de variables se pueden ordenar en forma creciente de acuerdo al grado de privación, se les asigna a cada uno un valor númerico, $\psi_{i1}^j < \psi_{i2}^j < \ ... \ < \psi_{ik}^j$, y el grado de pertenencia del individuo i en Ξ_j se define como una función lineal creciente del grado de privación:

$$\mu_{\Xi_j}(i) = \frac{\psi_i^j \ - \ \psi_{i1}^j}{\psi_{ik}^j \ - \ \psi_{i1}^j} \quad para\ \psi_{i1}^j \leq \psi_i^j \leq \psi_{ik}^j$$

   Las variables de este tipo que se utilizan en el artículo son: número de cuartos en el hogar, año de construcción del inmueble y número de autos en el hogar.

3. *Variables continuas*

   Si ξ_{ij} es una variable continua se define un conjunto borroso de individuos Ξ_j que están en situación desfavorable según este indicador j. En este caso es necesario definir dos umbrales, uno superior y uno inferior, para construir una función de pertenencia lineal decreciente con respecto al nivel de privación o pobreza del individuo i. El ingreso y los gastos de un individuo son los ejemplos más comunes de este tipo de variables. Los autores no utilizan este tipo de variables en el ejercicio empírico.

Enfoque Totalmente Borroso y Relativo

La forma en que se pueden definir las funciones de pertenencia de variables como las anteriores no es única. Cheli y Lemmi (1995) propusieron otra forma de definirlas denominándo a su propuesta *enfoque totalmente borroso y relativo.*

Para el caso de una variable categórica define la función de pertenencia de la siguiente forma:

$$\mu_{\Xi_j}(i) = \begin{cases} \mu_{\Xi_j}(\psi^j_{i(h-1)}) + \dfrac{F_j(\psi^j_i) - F_j(\psi^j_{i(h-1)})}{1 - F_j(\psi^j_{i1})} & si\ \psi^j_i = \psi^j_{ih} \\ & h = 2,\ \ldots\ , k \\ 0 & si\ \psi^j_i = \psi^j_{i1} \end{cases}$$

donde $\mu_{\Xi_j}(\psi^j_{i(h-1)})$ representa el grado de pertenencia al conjunto Ξ_j de un individuo que muestra la modalidad inmediata anterior de la variable ξ_{ij}; F_j representa la función de distribución de la variable ξ_{ij}. Con esta formulación el grado de pertenencia toma el valor cero cuando el estado de privación es mínimo y 1 cuando es máximo. Para valores intermedios, el grado de pertenencia de cada individuo es creciente con respecto al nivel de pobreza en el intervalo $[0, 1]$.

Para variables continuas definen la función de pertenencia de dos forma dependiendo de si el grado de privación crece o decrece con el valor de ξ_{ij}. En el primer caso la función de pertenencia se define como: $\mu_{\Xi_j}(i) = F_j(\xi_{ij})$; mientras que en el segundo caso $\mu_{\Xi_j}(i) = 1 - F_j(\xi_{ij})$. Cheli y Lemmi consideran que esta formulación es menos arbitraria que la propuesta por Cerioli y Zani en donde se deben definir valores para los umbrales.

2.3.2. Índice borroso de pobreza.

El siguiente paso en el análisis es agregar la información disponible de los grados de pertenencia que cada individuo tiene asociado en los diferentes conjuntos borrosos; como se señaló anteriormente estos conjuntos son el resultado de los diferentes tipos de variables que indican nivel de privación o pobreza. La idea es reducir a una dimensión estos m indicadores para determinar el grado de pertenencia de cada individuo a un conjunto borroso de 'individuos pobres' denotado por P. De esta forma la pobreza de un individuo se puede mirar como un cúmulo de situaciones de privación, reflejadas en los conjuntos borrosos Ξ_1, Ξ_2, ... , Ξ_m.

La idea más intuitiva para realizar esta agregación es asociar a cada indicador j un peso $w_j \geq 0$; esta ponderación es resultado de suponer que unos indicadores tienen más importancia que otros en lo que a nivel de vida se refiere. Por tanto, el grado de pertenencia del individuo i al conjunto borroso de pobres P, denotado por $\mu_P(i)$, se define como la suma ponderada de los grados de pertenencia asociados a este individuo en cada Ξ_j:

$$\mu_P(i) = \sum_{j=1}^{m} w_j \ \mu_{\Xi_j}(i)$$

$\mu_P(i)$ representa el nivel de pobreza del individuo $i - \acute{e}simo$.

Tal vez el paso más importante en la construcción de un *índice borroso de pobreza* es la elección adecuada de los pesos. Cerioli y Zani proponen la siguiente especificación:

$$w_j = \frac{\ln(\overline{\mu}_{\Xi_j})}{\sum\limits_{j=1}^{m} \ln(\overline{\mu}_{\Xi_j})}$$

donde $\overline{\mu}_{\Xi_j} = (\frac{1}{n})\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_{\Xi_j}(i)$ es la proporción de individuos pobres de acuerdo al indicador j.

Esta definición de w_j permite dar mayor importancia a indicadores que reflejan un estándar de vida mínimo, y por tanto, a individuos que ni siquiera alcanzan este estándar mínimo de vida.

Finalmente, habiendo evaluado el nivel de pobreza de cada individuo, se construye un *índice borroso de pobreza* I_f para toda la población, el cual se calcula como el promedio de los grados de pertenencia de todos los individuos en P:

$$I_f = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\mu_P(i)$$

En general, I_f es una función creciente del grado de pobreza de cada individuo y se cumple $0 \leq I_f \leq 1$.

Aunque no lo mencionan, los autores utilizan este índice como umbral para discriminar entre individuos pobres y no pobres, de manera que si el grado de pertenencia del individuo i en P es mayor que este índice ($\mu_P(i) \geq I_f$), entonces i es etiquetado como pobre, no así cuando $\mu_P(i) < I_f$.

2.3.3. El ejercicio empírico

Utilizando el censo Israelí de 1995, el ejercicio empírico de Deutsch y Silber consistió en recolectar información acerca de la posesión de bienes durables para 204,098 hogares. Consideraron 15 indicadores en total, entre dicotómicos y categóricos. Posteriormente calcularon ocho índices de pobreza de acuerdo a los cuatro enfoques multidimensionales: tres índices con el enfoque de conjuntos borrosos, dos índices con la teoría de la información, un índice con la función de distancia y dos índices con utilizando la derivación axiomática. Con base en estos índices clasificaron la muestra de hogares en pobres y no pobres de acuerdo al procedimiento particular de cada enfoque.

Teniendo en cuenta estos cuatro escenarios de pobreza para el conjunto de hogares, en un siguiente paso Deutsch y Silber analizaron el impacto que tienen algunos determinantes de la pobreza en estas medidas multidimensionales. Para ello estimaron regresiones tipo logit donde la variable dependiente es la probabilidad de ser pobre y las variables explicativas son las siguientes variables exógenas: años de escolaridad, tamaño del hogar y su cuadrado, edad el jefe de familia y su cuadrado, género, religión del jefe de familia (cuatro variables dummy: judío, musulmán, cristiano, druze), variable dummy que indica si el jefe de familia inmigró a israel después de 1989, estado marital (tres variables dummy: casado, soltero, divorciado), situación laboral del jefe de familia (un variable dummy), área de residencia del hogar (tres variables dummy: Jerusalem, Tel-aviv, Haifa). Adicionalmente consideraron variables de interacción entre el género y el estado marital y el género y su situación laboral.

El resultado principal que sobresale de la comparación de las estimaciones entre los cuatro enfoques, es que casi todos los coeficientes de las variables explicativas resultaron significativos y mostraron el mismo efecto en la probabilidad de ser pobre. En cuanto a su magnitud o impacto en la probabilidad de ser pobre, las estimaciones del enfoque de la derivación axiomática fueron las más grandes.

La principales conclusiones de Deutsch y Silber es que los índices multidimensionales de pobreza que obtienen agregando la información de bienes durables proporcionan resultados que no distan mucho entre sí y que el impacto en la medición de la pobreza de utilizar un enfoque multidimensional no es muy diferente del unidimensional.

2.3.4. Comentarios

Si se centra la atención en el enfoque de conjuntos borrosos, las conclusiones que se pueden observar en este artículo se comentan a continuación.

En comparación con los otros enfoques, el enfoque totalmente borroso es el segundo que identifica mejor a los hogares pobres. Esta comparación se hace con base en el poder predictivo del modelo, es decir, con base en el porcentaje de correctas clasificaciones. Así mismo, entre índices borrosos el que tiene el mejor poder predictivo es el enfoque totalmente borroso (79.6 %) seguido por el enfoque totalmente borroso y relativo (77.9 %). Que el poder predictivo entre estos enfoques sea muy parecido es de esperarse, porque se utilizan indicadores dicotómicos en su mayoría y su modelación con conjuntos borrosos es la misma en ambos enfoques.

Un resultado análogo se obtiene cuando se realiza una comparación binaria entre estos índices. El objetivo de esta comparación es determinar el porcentaje de hogares que son clasificados como pobres por ambos índices. Se encuentra que ambos índices borrosos identifican los mismos hogares pobres casi en su totalidad; el argumento del párrafo anterior puede justificar este resultado.

Lo anterior se puede utilizar como evidencia (empírica) de que la teoría de conjuntos borrosos permite obtener resultados confiables de la medición multidimensional de la pobreza tomando en cuenta la subjetividad involucrada en este concepto.

2.4. Aplicación: Derechos de propiedad

El artículo que se revisa en esta sección tiene por título 'Fuzzy Access: Modeling Grazing Rights in Sub-Saharan Africa' de Rachael Goodhue y Nancy McCarthy, quienes proponen modelar con conjuntos borrosos los derechos de acceso a áreas de pastoreo en función de precipitaciones fluviales en el contexto de África Subsahariana.

Goodhue y McCarthy analizan los derechos de acceso que tienen grupos de pastoreo a diferentes áreas donde pueden llevar a alimentar a sus rebaños. Ponen énfasis en que el acceso a áreas de pastoreo no corresponde al concepto tradicional de propiedad común, donde un número fijo de grupos tienen acceso completo al forraje disponible, sino a un concepto de derechos de acceso los cuales se caracterizan por ser incompletos y contingentes; incompletos porque los grupos de pastoreo no pueden acceder libremente a dichas áreas y contingentes, porque el acceso está condicionado por el estado de la naturaleza, específicamente por las perturbaciones climáticas.

Su objetivo es modelar con conjuntos borrosos estas dos características de los derechos de acceso, para después comparar los beneficios de los grupos de pastoreo bajo este sistema de derechos de acceso 'borroso' con los beneficios que obtendrían bajo el régimen tradicional de derechos de propiedad (privada y común).

2.4.1. Modelo de derechos de acceso borroso

El modelo es el siguiente: se consideran dos grupos de pastoreo A y B cuyos rebaños pueden pastar en dos áreas 1 y 2. Adicionalmente se supone un solo periodo (temporada) y que cada grupo de pastoreo tiene un área *base*, esto es, un área en la que tiene acceso sin restricciones; el área base de A es 1 y la de B es 2.

El acceso que cada grupo de pastoreo tiene al área *base* del otro grupo se modela con conjuntos borrosos en función de las realizaciones de lluvia de cada área denotadas por r_j ($0 \leq r_j \leq 1;\ j = 1, 2$) que se suponen independientes e idénticamente distribuidas en las dos áreas. De esta forma, se definen los siguientes conjuntos borrosos:

- $Sequía = \{(1, max\{0, 1 - \gamma r_1\}),\ (2, max\{0, 1 - \gamma r_2\})\}$ con $\gamma > 1$. *Sequía* es un conjunto borroso de áreas de pastoreo donde el grado de pertenencia representa el nivel de sequía del área en el periodo; $\gamma > 1$ se introduce con el fin de tomar en cuenta que algunas realizaciones de lluvia corresponden a una temporada de sequía.

- $Peor = \{(1, max\{0, r_2 - r_1\}),\ (2, max\{0, r_1 - r_2\})\}$. *Peor* también es un conjunto borroso de áreas; el grado de pertenencia en este caso refleja en que magnitud un área está más seca que otra.

Goodhue y McCarthy utilizan estos conjuntos para definir las reglas de acceso borroso de cada grupo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Acceso_A &= \{(1,1),\ (2, P_{A2})\} \\ Acceso_B &= \{(1, P_{B1}),\ (2,1)\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde:

$$P_{A2} = min\left\{\mu_{sequía}(2),\ \mu_{peor}(2),\ X_{A2}\right\} \tag{2.3}$$

$$P_{B1} = min\left\{\mu_{sequía}(1),\ \mu_{peor}(1),\ X_{B1}\right\} \tag{2.4}$$

$$X_{A2} = \begin{cases} 1 - \sqrt{\beta(a+b)/(\alpha(r_2 - r_1) + \beta a)} & si\ \alpha(r_2 - r_1) + \beta a > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$X_{B1} = \begin{cases} 1 - \sqrt{\beta(a+b)/(\alpha(r_1 - r_2) + \beta b)} & si\ \alpha(r_1 - r_2) + \beta b > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

y a, b son el tamaño del rebaño de A y B respectivamente; α es un parámetro de productividad de forraje (αr_j es la producción de forraje disponible en el área j) y β es un parámetro que refleja la externalidad causada por el rebaño del otro grupo en el área de pastoreo; se suponen los mismos parámetros para ambas áreas.

En este caso, el grado de pertenencia del conjunto de acceso borroso a la otra área (expresiones (2.3) y (2.4)) representa el nivel de acceso que, por ejemplo, A tiene al área 2, esto es, representa la proporción de la temporada que A puede pasar en 2. Goodhue y McCarthy establecen esta forma tan particular de la función de pertenencia, introduciendo el término X_{ij}, para garantizar que bajo el régimen de acceso borroso, i no usará el área j más de lo que lo haría bajo el régimen de propiedad común; X_{ij} es precisamente la proporción de la temporada que i decide estar en el área j y que maximiza su beneficio bajo el régimen de propiedad común, es decir, cuando tiene acceso libre esta área. En este punto, cabe aclarar que los beneficios están en función de la proporciones de la temporada que cada grupo pasa en el área del otro y de las realizaciones de lluvia.

Posteriormente analizan los incentivos que cada grupo tiene para moverse al área base del otro grupo; dichos incentivos están relacionados con las realizaciones de lluvia y con la producción de forraje disponible. Un grupo deseará moverse al área base del otro grupo si su propia área está más seca ($r_2 - r_1 > 0$ ó $r_1 - r_2 > 0$) y además lo hará si la otra área tiene forraje para compartir, esto es, si la producción de forraje del área a la que se quiere mover considerando la externalidad causada por los dos rebaños es mayor que la producción de forraje de su área considerando sólo su externalidad.

Con base en lo anterior, se deduce que A y B no se mueven simultáneamente, esto es, A se mueve a 2 ó B se mueve a 1, pero no ambas, resultado que está directamente relacionado con las realizaciones de lluvia pues el grupo de pastoreo cuya área base se encuentre más seca, decidirá ejercer su derecho de acceso borroso y moverse al área del otro grupo; por su parte, este último no decidirá moverse pues la primera área pasa por una temporada de sequía. De hecho, las autoras demuestran que estas estratégias forman un equilibrio de Nash si cada grupo ejerce su derecho de acceso borroso según su propia restricción de compatibilidad con incentivos.

Luego para evaluar si un régimen de derechos de acceso borroso es recomendable, Goodhue y McCarthy comparan los beneficios que un grupo de pastoreo obtendría bajo este régimen con los que se obtendría bajo un esquema de derechos de propiedad privada y común. Llegan a dos conclusiones principales:

1. Los grupos de pastoreo se mueven menos bajo el sistema de derechos de acceso borroso que bajo el régimen de propiedad común; el supuesto bajo esta conclusión es que las realizaciones de lluvia son independientes y se distribuyen idéntica y uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

2. Los beneficios esperados totales bajo el sistema de derechos de acceso borroso, son al menos tan grandes que los esperados bajo el régimen de propiedad común. Esto también se cumple para los beneficios de cada grupo de pastoreo y bajo una suposición idéntica para las realizaciones de lluvia como la anterior y para un valor de γ pequeño.

Las implicaciones de política que se desprenden del artículo es que un sistema de derechos de acceso borroso sería preferible a un régimen de derechos 'bien definidos' como el común, pues los beneficios sociales del primero serían más altos, bajo ciertas condiciones, que los beneficios sociales del segundo. Un modelo así incluso puede ayudar a los hacedores de política a evaluar intervenciones en el caso de África subsahariana.

2.4.2. Comentarios

Las conclusiones de este artículo se basan en la suposición, tal vez fuerte, de no considerar costos de ningún tipo en la función de beneficios: los principales serían costos de producción y los costos asociados con la movilidad.

Por otro lado, en cuanto a la definición de los conjuntos borrosos, en este artículo se detectó lo siguiente: el objetivo de definir el conjunto de acceso borroso como en (2.2), es que la función de pertenencia 'controle' el acceso que tiene el otro grupo, esto es, incremente (decremente) la proporción de la temporada que puede pasar en la otra área, si su área base está más (menos) seca. La definición del conjunto borroso *peor* no permite lograr este objetivo; de hecho restringe el acceso al área del otro grupo aún cuando dicha área no sea la más seca; en la terminología del artículo, si $r_2 - r_1 > 0$ entonces $P_{A2} = 0$ porque $\mu_{peor}(2) = 0$; análogamente si $r_1 - r_2 > 0$ entonces $P_{B1} = 0$ porque $\mu_{peor}(1) = 0$; esto limita el acceso en ambos casos. Para evitar esto, se sugiere sustituir *peor* por el siguiente conjunto borroso:

$$\{(1, max\,\{0, r_1 - r_2\}),\ (2, max\,\{0, r_2 - r_1\})\}$$

Este conjunto borroso es una representación a la afirmación 'el área j es la menos seca' y su grado de pertenencia refleja la veracidad de esta afirmación. Con el grado de pertenencia definido de esta forma el problema anterior ya no se presenta: el grado de acceso al área del otro grupo aumenta (disminuye) conforme las realizaciones de lluvia en dicha área son mayores (menores).

Consideran las definiciones de X_{A2} y X_{B1}, también se observó que (2.3) y (2.4) están acotadas superiormente por 1 pero pueden tomar valores menores a 0 y, por tanto, no cumple con la definición de función de pertenencia. Esto requiere de supuestos adicionales para los valores de α, β, a y b que no son mencionados en el artículo.

También se encontraron situaciones en que el grado de acceso borroso no es coherente cuando las restricciones de incentivos se cumplen, esto es, cuando un grupo tiene incentivos a moverse al área de otro grupo, su derecho de acceso borroso no se lo permite porque el grado de pertenencia en el conjunto de acceso borroso es cero. Para aclarar esta cuestión se requiere de un ejercicio empírico detallado. En el artículo no se menciona nada al respecto.

2.5. Aplicación: Comportamiento colusivo

En esta sección se analiza el artículo 'Sustaining Collusion via a Fuzzy Trigger' de Rachael Goodhue quien estudia la habilidad de las empresas para mantener la colusión utilizando una estrategía borrosa de disparo (fuzzy trigger) cuando la incertidumbre que enfrentan estas empresas se debe a información vaga o imprecisa de la demanda.

Anteriormente, Green y Porter analizaron el comportamiento colusivo en un oligopolio, utilizando una estrategía de disparo basada en el precio y demostraron que ninguna empresa se desvía en equilibrio; sin embargo, a veces perturbaciones de la demanda ocasionan una caída en el nivel de precios y entonces una guerra de precios es iniciada para después volver al equilibrio; este mecanismo lo utilizan las empresas como disciplina del cartel. Su modelo proporciona evidencia de que las guerras de precios para mantener la colusión son observadas en periodos donde la demanda es baja.

Basada en el modelo de Green y Porter, la principal modificación que Goodhue hace es representar con conjuntos borrosos la incertidumbre de la demanda en lugar de considerar un modelo estocástico.

2.5.1. Modelo con conjuntos borrosos

El siguiente análisis se hace destacando las diferencias más importantes entre los dos modelos.

En el modelo de Green y Porter los beneficios de cada empresa dependen de su propia producción y del precio de mercado públicamente observado; una empresa no observa la producción de las otras y el precio de mercado depende de una perturbación de la demanda no observada, así como de la producción agregada; adicionalmente la demanda se supone estocástica.

Considerando el espacio de posibles precios de mercado $P \subseteq \mathbb{R}$, Goodhue agrupa estos precios en conjuntos borrosos (denotados por $\widetilde{P}_i$) que describen el nivel de precios en términos lingüísticos, tales como 'el precio es bajo', 'el precio es alto', etc., en total un número finito de estos conjuntos; el grado de pertenencia asociado a cada precio refleja la medida en que la afirmación que describe al conjunto borroso es cierta. Nótese que un mismo precio puede pertenecer a diferentes conjuntos borrosos.

Posteriormente, modela la incertidumbre que enfrentan las empresas acerca de las realizaciones de la demanda con conjuntos borrosos; esto es posible debido a que las empresas pueden conjeturar el nivel relativo de demanda con base en la información que disponen disponible (como puede ser información específica de la industria o de tipo macroeconómico) y aunque no estén seguras de su exacta realización. Si se denomina d a la realización de la demanda en términos del nivel de precios ($d \in P$), $\widetilde{D}_j$ es el conjunto borroso que describe estas realizaciones lingüísticamente; también se considera un número finito de estos conjuntos.

Así mismo, en Green y Porter se considera una fase colusiva y una fase de castigo; en la fase colusiva todas las empresas producen el mismo nivel $\widehat{q}$ y en la fase de castigo producen el nivel de equilibrio q^* del juego de una sola etapa; esta última fase es desencadenada cuando el precio de mercado cae por debajo del precio de disparo $\widehat{p}$ (trigger price) y dura $\widehat{T}$ periodos para después regresar a la fase colusiva. De esta forma, la estratégia óptima de disparo basada en el precio queda caracterizada por $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, q^* y $\widehat{T}$.

En el mismo contexto del juego anterior, Goodhue evalúa la posibilidad de un desvío con base en los conjuntos borrosos de precios y demanda; para ello define una función $f : P \times P \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma con el fin de obtener alguna señal de desvío:

$$f(p,d) = max\,\{d - p, 0\} \tag{2.5}$$

$f(\cdot) > 0$ indica que alguna empresa se desvió del nivel de producción colusivo $\widehat{q}$ reflejado en un decremento en p.

Luego, mediante el principio de extensión (1.4) se construyen conjuntos borrosos con estas evaluaciones de desvío, resultado de aplicar f a los posibles escenarios de d; estos conjuntos, denotados por $\widetilde{C}_k$, describen las oportunidades de desvío lingüísticamente y la función de pertenencia denota la posibilidad de que alguien se desvíe para cualquier p.

Goodhue utiliza $\widetilde{C}_k$ para evaluar la posibilidad de desvío y por tanto de que el castigo sea impuesto. Cabe señalar que, debido a la definición de P_j, ahora el precio (fuzzy trigger price) que detona la fase de castigo no es único, y cada uno de éstos puede estar asociado a diferentes $\widetilde{C}_k$, es decir, a diferentes posibilidades de desvío. Por esta razón, se identifica el conjunto borroso $\widetilde{C}^*$ con la posibilidad de desvío más baja con el fin de considerar a todos los potenciales deviantes.

Considerando lo anterior, primero define la posibilidad de que el castigo no sea impuesto dada la realización de la demanda d como $\gamma_d(\widetilde{C}_k)$. Luego, siguiendo el plateamiento de Green y Porter, sustituye en las ecuaciones del valor presente de los beneficios y de la restricción de no desvío, la probabilidad de que el precio quede por debajo del de disparo, por la posibilidad de que el castigo sea impuesto $(1 - \gamma_d(\widetilde{C}_k))$ y la probabilidad de que el precio esté por arriba del de disparo, por la posibilidad de que no haya castigo $(\gamma_d(\widetilde{C}_k))$. Por tanto, dichas ecuaciones son idénticas a las del modelo original sólo que dependen de $\widetilde{C}_k$ y ahora la estrategía óptima de cada empresa será aquella que maximice el valor presente de los beneficios $v(\widetilde{C}_k)$ sujeta a la restricción de no desvío. En este caso la estratégia borrosa óptima de disparo queda caracterizada por el conjunto borroso que detona la fase de castigo $\widetilde{C}_k = \widetilde{C}^*$ y $\widehat{q}$, q^* y $\widehat{T}$, definidos como en el modelo original.

Con este modelo, se obtienen dos resultados principales:

- *Las guerras de precios para mantener la colusión se observan en periodos en que la demanda es alta.* Esto ocurre porque la posibilidad de que alguna empresa se desvíe $(\widetilde{C}_k)$ se incrementa cuando la realización borrosa de la demanda es 'la demanda es alta' (D_j para alguna j), (de acuerdo con (2.5)) y por tanto se observaría una guerra de precios.

- *En mercados con precios relativamente volátiles también se observan guerras de precios para mantener la colusión.*

Finalmente, se resalta el hecho de que la primera conclusión es opuesta a la predicción de guerras de precios cíclicas de Green y Porter y Goodhue muestra que existe evidencia empírica que apoya sus conclusiones.

Conclusiones

El presente trabajo inició con una breve introducción a la teoría de conjuntos borrosos poniendo énfasis en las definiciones y conceptos principales que sientan las bases de su estructura formal. Además, se citaron diversas referencias bibliográficas referentes a las aplicaciones de esta teoría en áreas diferentes. Finalmente, se revisaron a detalle diversos trabajos de investigación, que se consideraron relevantes, sobre la aplicación de la teoría de conjuntos borrosos en problemas de economía.

Durante el análisis de los artículos seleccionados se pudo observar que la teoría de conjuntos borrosos es una teoría formal pero muy flexible pues no existe una única o mejor forma de modelar con conjuntos borrosos y además el grado de complejidad en la modelación puede ser variado. El aplicarla a casos reales e incluso teóricos requiere de una adaptación muy cuidadosa.

Los resultados de las aplicaciones de esta teoría son relevantes en el ámbito económico pues muestran otra perspectiva de cómo tomar en cuenta la ambigüedad al analizar problemas como la pobreza, donde no está bien marcada la línea que permita observar cuando un índividuo es pobre; el análisis de la estructura de mercado, que también es objeto de decisiones subjetivas e incluso cuestiones de derechos de propiedad, los cuales son difusos en algunos países. No obstante, para poder tener una visión critica exhaustiva en cuanto a la aplicación de los conjuntos borrosos se debe tener un dominio considerable de esta teoría.

También se puede concluir que los conjuntos borrosos en economía se han aplicado más en forma teórica que empírica, a excepción de la medición de la pobreza. Muchas de las aplicaciones de esta teoría en otras áreas han mostrado resultados exitosos en el ámbito empírico, probablemente de ahí su buena reputación y que dichos resultados no sean tan cuestionados.

La teoría de conjuntos borrosos representa otra posibilidad en la búsqueda de nuevas soluciones a problemas económicos en la medida que haya más expertos en el tema.

Bibliografía

[1] Bellman, R.E. y Zadeh, L.A. (1970) 'Decision-Making in a Fuzzy Environment'. *Management Science 17(4), 141-164.*

[2] Billot, A. (1992) 'Economic Theory of Fuzzy Equilibria: An Axiomatic Analysis'. *Springer-Verlag Telos.*

[3] Bojadziev, G. y Bojadziev, M. (1997) 'Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management'. *World Scientific.*

[4] Butnariu, D. (1978). 'Fuzzy Games: a Description of the Concept'. *Fuzzy Sets and Systems 1,181–192.*

[5] Cerioli, A. y Zani, S. (1990) 'A Fuzzy Approach to the Measurement of Poverty'. *Dagum & Zenga (eds). Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty, Studies in Contemporary Economics, Springer Verlag Berlin, 272–84.*

[6] Cheli, B. y Lemmi, A. (1995) 'Totally Fuzzy and Relative Approach to the Multidimensional Analysis of Poverty', *Economic Notes 24(1), 115–134.*

[7] Deutsch, J. y Silber, J. (2005) 'Measuring Multidimensional Poverty: an Empirical Comparison of Various Approaches'. *Review of Income and Wealth 51(1), 145-174.*

[8] Fudenberg, D. y Tirole, J. (1991) 'Game Theory'. *MIT Press.*

[9] Gaines, B. R. y Kohout, L. J. (1977) 'The Fuzzy Decade: a Bibliography of Fuzzy Systems and Closely Related Topics'. *International Journal of Man-Machine Studies 9(1), 1-68.*

[10] Goodhue, R. (1998) 'Sustaining Collusion via a Fuzzy Trigger'. *Review of Industrial Organization 13, 333-345.*

[11] Goodhue, R. y McCarthy, N. 'Fuzzy Access: Modeling Grazing Rights in Sub-Saharan Africa'. *The 6^{th} Meeting on Game Theory and Practice.*

[12] Greenhut, J.,Greenhut, M. y Mansur, Y. (1995) 'Oligopoly and Behavioral Uncertainty: An Application of Fuzzy Set Theory'. *Review of Industrial Organization 10*, *269-288.*

[13] Kaufmann, A. y Gupta, M.M. (1988) 'Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science'*. North-Holland.*

[14] Lai, Y.J. y Hwang, C.L. (1994) 'Fuzzy Multiple Objective Decision Making Methods and Applications', *Springer-Verlag: Berlin.*

[15] Llamazares, B. (2005) 'Factorization of Fuzzy Preferences'. *Social Choice and Welfare 24(3), 475-496.*

[16] Mansur, Yusuf M. (1995) 'Fuzzy Sets and Economics. Applications of Fuzzy Mathematics to Non-Cooperative Oligopoly'. *Edward Elgar.*

[17] McNeill, Daniel y Freiberger, Paul (1993) 'Fuzzy Logic'. *Simon & Schuster.*

[18] Richardson, G. (1998) 'The Structure of Fuzzy Preferences: Social Choice Implications'. *Social Choice and Welfare 15(3), 359-369.*

[19] Song, Q. y Kandel, A. (1999). 'A Fuzzy Approach to Strategic Games'. *Fuzzy Sets and Systems 7(6), 634–642.*

[20] Terano, T., Asai, K y Sugeno, M. (1987) 'Fuzzy Systems Theory and Its Applications'. *Academic Press, Inc.*

[21] Zadeh, L.A. (1965). 'Fuzzy Sets' *Information and Control 8, 338-353.*

[22] Zimmermann, H.J. (1983) 'Using fuzzy sets in operational research'. *European Journal of Operational Research 13, 201-216.*