



**EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.**  
**CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS**

***“BURBUJAS Y ROMPIMIENTOS EN UN ENTORNO DISCRETO:  
HETEROGENEIDAD DE LOS AGENTES EN DOS DIMENSIONES”***

**TESIS PRESENTADA POR:**

**EDUARDO EMILIO THEUREL FÉLIX**

PROMOCIÓN 2001-2004

MÉXICO D.F.

FEBRERO DE 2010



**EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.**  
**CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS**

***“BURBUJAS Y ROMPIMIENTOS EN UN ENTORNO DISCRETO:  
HETEROGENEIDAD DE LOS AGENTES EN DOS DIMENSIONES”***

**TESIS PRESENTADA POR:**

**EDUARDO EMILIO THEUREL FÉLIX**

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

**DOCTOR EN ECONOMÍA**

PROMOCIÓN 2001-2004

DIRECTOR DE TESIS

DOCTOR JORGE FERNÁNDEZ RUÍZ

MÉXICO D.F.

FEBRERO DE 2010

## **Hoja de aceptación**

A mi madre, que se fue durante este proceso, pero nunca se irá de mí.

## **Agradecimientos**

A mi esposa y a mis hijos, de quienes robé el tiempo dedicado a esta tesis.

A mis padres, por todo.

A Jorge Fernández, director de esta tesis, quien hace muchos años aceptó ser parte de esto y desde entonces no ha dejado de ayudarme. Si él este trabajo no hubiera sido posible.

A El Colegio de México, por esta oportunidad que cambió mi vida.

A mis hermanos, por estar siempre conmigo.

A David Cantala, por ayudarme cuando más difícil era el camino.

A Gara Afonso y José Romero, lectores de esta tesis, de quienes obtuve consejos muy valiosos.

A mis grandes amigos, Lázaro Ávila padre e hijo, con quienes compartí muchos momentos en el tiempo en que cursé el doctorado.

A mis suegros, por su gran apoyo.

A Luis Moreno, por creer en mí y por su enorme paciencia.

# Burbujas y rompimientos en un entorno discreto: heterogeneidad de los agentes en dos dimensiones

---

## **Síntesis de los tres artículos que componen este trabajo de tesis doctoral.**

En un primer artículo se desarrolla un modelo en tiempo discreto. En él es caracterizada la conducta de algunos agentes propietarios de algún activo ante la existencia de una burbuja especulativa que se da en el precio de éste. En virtud de algún impacto positivo que se da en los fundamentales del activo, su precio comienza a crecer a una tasa más elevada de lo que normalmente lo hace. Sin embargo, la fuerza de aquel impacto poco a poco se va diluyendo, por lo que tarde o temprano el precio mayor comienza a estar soportado por razones artificiales, especulativas.

Aquí se supone que cada instante que pasa un agente se va dando cuenta de la presencia de la burbuja (esta es una de las bondades de modelar en tiempo discreto). Sin embargo, y este es un elemento crucial del modelo, cuando un agente “despierta” no sabe cuántos más lo han hecho hasta ese momento. Esto se maneja en el modelo con una función de probabilidad. El que exista una probabilidad positiva de que un agente que se percata de la burbuja sea de los primeros en hacerlo, lo invita a no vender el activo de inmediato, sino beneficiarse un poco con la burbuja. Este modelo es muy similar al publicado en 2003 por Abreu y Brunnermeier en *Econometrica* y que se titula “Bubbles and Crashes”, sólo que en el se modela en tiempo continuo.

En el trabajo de Abreu y Brunnermeier (AB), la forma de resolver el modelo pone un énfasis mayor en la confrontación de estrategias por parte de los agentes involucrados. La conclusión general de este primer artículo es que, debido a la ausencia de conocimiento común de la aparición de la burbuja, el no saber si los demás saben o no, es lo que posibilita que agentes racionales no puedan coordinarse y la burbuja se mantenga. Esto es, el precio puede alejarse de los fundamentales, aun bajo la presencia de agentes racionales. Esto no había sido demostrado para el caso de un entorno discreto y aquí se logró. La anterior es una conclusión similar a la que se desprende del trabajo de AB, por lo que ahora se puede asegurar que ella es válida tanto en un

entorno continuo como en uno discreto, no bien, en éste último se puede presentar la multiplicidad de equilibrios, aunque por razones estrictamente elementales, como se relata en el artículo.

En el segundo artículo se introduce a un agente diferente a los del primero en dos aspectos: por un lado, éste tiene más información; por otro, al tratarse de un líder de opinión, su venta (la cual se supone aquí justo por esa razón que es observable) desencadena el rompimiento de la burbuja. Esta es una aportación del presente trabajo, pues la literatura no había considerado, al menos en este contexto, esa posibilidad. Aquí se demuestra que ante la presencia de este líder la espera del resto de los agentes se reduce. Esto era evidente, pues un agente no querría saber que fue aplastado por la burbuja porque aquél vendió y ahora su activo cayó súbitamente de precio. Empero, la contribución más importante que ofrece este artículo es que se demuestra que cuando el líder está muy bien informado, esto hace que el tiempo que los agentes montan la burbuja sea mayor que cuando el líder no lo está. Esto se debe a que el líder también actúa estratégicamente y a través de los juegos que se establecen en este artículo es que se puede verificar esto.

Finalmente, en el tercer artículo se conserva la figura de este líder, pero ahora se supone que es una especie de regulador. Éste no tiene el mínimo interés en montar la burbuja, sino que, por el contrario, se esfuerza por romperla. No obstante, como este regulador puede tardar en enterarse de la existencia de la burbuja (al igual que los otros agentes), al momento en que da el anuncio se establece un juego entre quienes ya sabían y entre quienes por este medio se enteraron. El resultado es que el anuncio puede hacer que el período de vida de la burbuja se acorte (lo cual era lo que la intuición sugiere), pero en el trabajo se demuestra que bajo ciertas circunstancias la duración se puede alargar, así que termina el anuncio siendo inútil o incluso contraproducente. Esto obedece a que la noticia sirve para que algunos agentes se enteren que son de los mejores informados, lo que hasta entonces había sido para ellos una incógnita, y esto les anime a montar la burbuja por más tiempo.

## ÍNDICE GENERAL

Primer artículo	
<b>Burbujas y rompimientos en un entorno discreto</b>	<b>4</b>
1. Introducción y relación con la literatura	5
2. El modelo	9
2.1 Solución del modelo	16
2.2 Una forma alternativa de resolver el modelo	26
3. Multiplicidad de Equilibrios	33
4. Análisis de resultados y ejemplo numérico	36
5. Conclusiones	42
Segundo artículo	
<b>Burbujas y rompimientos en un entorno discreto: el modelo con un agente líder</b>	<b>44</b>
1. Introducción y relación con la literatura	45
2. El modelo	48
2.1 Síntesis del modelo sin líder	48
2.2 Probabilidades	50
2.3 Pagos y estrategias	56
2.4 Equilibrio	68
3. Ejemplo numérico y discusión de resultados	68
4. Conclusiones	76
Tercer artículo	
<b>Burbujas especulativas e intervención reguladora</b>	<b>78</b>
1. Introducción	79
2. El modelo	81
2.1 Introducción	81
2.2 Conducta de los Rezagados	84
2.3 Conducta de los Anticipados	92
2.4 Probabilidades conjuntas	109
2.5 Equilibrio	111
3. Resultados	111
4. Conclusiones	114
Apéndice primer artículo	116
Apéndice segundo artículo	127
Apéndice tercer artículo	134
BIBLIOGRAFÍA	138



Primer artículo

## **Burbujas y rompimientos en un entorno discreto**

# Burbujas y rompimientos en un entorno discreto

## 1. Introducción y relación con la literatura

La aparición de burbujas especulativas es uno de los fenómenos más inquietantes que hay en la economía. El que una figura económica, por ejemplo el precio de un activo, sea mantenido en niveles extraordinarios (hacia arriba o hacia abajo) a causa de una especie de consenso psicológico, más allá de que la lógica promovida por los fundamentales del activo diga lo contrario, es un hecho que revela la gran importancia de la psicología de los agentes económicos. Un evento tan atrayente como una burbuja no podría pasar inadvertido en la literatura económica. Sin embargo, no ha habido un acuerdo general en lo referente a la verosimilitud y posibilidad de vida de una burbuja.

Con motivo de la conferencia que en agosto de 2005 organizaran la Universidad de Indiana, junto con el *Review of Financial Studies*, Maureen O'Hara (2008) delineó una taxonomía de las diferentes perspectivas en que la literatura ha abordado al tema de las burbujas. En términos generales, segmenta a dicha literatura en cuatro campos: 1) Aquellos trabajos que suponen agentes racionales y mercados racionales. Aquí el enfoque neoclásico es el que nutre esta propuesta y se niega la existencia de burbujas, pues todos los agentes tienen la misma dotación de información y ellos actúan de forma racional (Tirole, 1982). 2) Los que asumen agentes racionales pero mercados irracionales, como en el caso del trabajo de Kindleberger (1996), donde la llamada falacia de la composición hace que lo que es válido para un agente, no lo sea para todo el mercado. 3) Los que consideran agentes irracionales y mercados irracionales. Este grupo está ligado a la idea de que los agentes se ven influenciados por modas y son proclives a imitar. 4) Finalmente, los que encuadran su trabajo con agentes irracionales pero mercados racionales.

Esta caracterización es muy cercana a la que hace Brunnermeier (2008) (quien por cierto también participó en dicha conferencia) de una manera más formal en *The New Palmgrave Dictionary of Economics*. Ahí, además de definir a una burbuja en el sentido de que “*Bubbles arise if the price exceeds the asset's fundamental value*”, igualmente reconoce cuatro vertientes de modelos. Primero, *Rational bubbles under symmetric information*, burbujas racionales bajo

información simétrica; aquí igualmente pone como ejemplo el artículo de Tirole (1982), así como el de Blanchard y Watson (1982), entre otros, para argüir que la idea general de esta vertiente consiste en negar la existencia de las burbujas. En segundo término, habla de burbujas de información asimétrica (*Asymmetric information bubbles*); en esta parcela sí se acepta la posibilidad de existencia de burbujas, en un contexto donde los agentes poseen diferente información, aunque una distribución de probabilidad para hacerse de ella similar; aquí se cita como ejemplo a Brunnermeier (2001). Una tercera la denomina *Bubbles due to limited arbitrage* y aquí cita a DeLong, *et. al.*, (1990), donde se da una mezcla entre participantes del mercado: por un lado están los agentes racionales bien informados y por otro aquéllos cuyas acciones están influenciadas por sesgos psicológicos. En general, esta vertiente sí acepta la posibilidad de que existan burbujas. Finalmente, un cuarto grupo lo ubica en lo que llama *Heterogeneous beliefs bubbles*, y para ello cita a Miller (1977), Ofek y Richardson (2003) y a Scheinkman y Xiong (2003), principalmente. Aquí la idea básica radica en que los agentes pueden tener distribuciones de probabilidad a priori diferentes, debido a sesgos psicológicos. Esto, en conjunción con restricciones a vender puede detonar la creación de burbujas especulativas.

Si se quisiera forzar a las cuatro posiciones, ya sea las de O'Hara o bien las de Brunnermeier, a conformar dos posturas, una detractora y otra defensora, dentro del primer flanco se encontraría sobresalientemente a la Teoría Neoclásica estándar. Sus proponentes han ubicado en la *racionalidad* el más fuerte argumento para desechar la posibilidad de la aparición de burbujas. En esta línea, son varias las trincheras desde las que se cuestiona su factibilidad. De ellas destaca la que tiene que ver con la inducción hacia atrás. La idea es simple<sup>1</sup>: bajo condiciones razonables, el precio de un activo que ha venido apreciándose debe tener un límite superior. Después de éste, ninguna apreciación es posible y el alto precio no es sostenible en equilibrio. Pero si no lo es en este momento tampoco lo será en el previo, y por inducción hacia atrás tampoco lo será en ninguno anterior, incluyendo el primer instante.

---

<sup>1</sup> Chamley, 2004. p. 378.

Si un agente que se presume racional sabe que una burbuja va a estallar en un momento dado, ¿por qué no incorpora en el presente esta información y vende un poco antes de que la burbuja truene? Y si puede hacer esto, ¿por qué no vende en general *siempre* antes de que la burbuja vaya a estallar? Esto deriva en una pregunta: ¿por qué deja que el precio de un activo se aleje del valor del mismo, si cortar esta tendencia le genera beneficios? Para que estos argumentos sean válidos, el referido límite superior deberá presentarse en tiempo finito. No obstante, también en modelos de horizonte infinito se puede descartar la presencia de burbujas, por ejemplo esgrimiendo argumentos de condiciones de transversalidad (Santos y Woodford, 1997).

El flanco defensor de la posibilidad de las burbujas, por otra parte, se ha habituado a proponer a la irracionalidad de los agentes como su principal explicación. La Ciencia Económica Conductual (*Behavioural Economics*) se ha encargado de delinear un diferente perfil para el agente otrora racional. A decir de ésta, la razón económica de los individuos está influenciada por temores, modas, imitación, conducta de rebaño, seguimiento de tendencias, etc. Todo se conjuga para hacer posible la existencia de burbujas. Como ejemplo de esta literatura se puede ver al artículo de Bikhchandani, S., D. Hirshleifer, e Ivo Welch (1992).

Abreu y Brunnermeier (2003) (AB de aquí en adelante) llevaron la discusión a un nuevo nivel. Aún suponiendo agentes racionales, bien informados colectivamente, aunque con divergencias entre ellos, puede acreditarse la existencia de burbujas. El supuesto clave de su modelo es el siguiente: no todos los agentes racionales se percatan simultáneamente de la existencia de cierta burbuja. Por el contrario, éstos lo hacen de manera secuencial. Pero no sólo eso, sino que cuando un agente en particular se percata del evento, ignora cuántos más lo han hecho. No sabrá si su hallazgo se da tarde o temprano respecto al resto de los agentes. Por ello se presenta una descoordinación temporal que habilita la creación de una burbuja especulativa. A decir de ellos, no es lo mismo el conocimiento mutuo de la burbuja que el conocimiento común de la misma. En el primer caso todos los agentes saben que existe, mientras que en el segundo todos saben que todos saben que existe y así sucesivamente. Su principal conclusión es que, a la sazón de la ausencia de conocimiento común, los agentes optan por “montar” la burbuja un determinado lapso antes de vender, debido a que piensan (racionalmente) que la masa de agentes informados es aún baja y que por ello la burbuja durará un poco más.

Es escasa, si no nula, la contribución del presente trabajo por lo que respecta al debate en torno a la factibilidad de las burbujas especulativas. Ese no es su propósito fundamental. Aquí se parte del trabajo de AB con dos propósitos esenciales: primero, el de intentar esclarecer algunos pasajes que a juicio de quien escribe precisan algo más de luz, y segundo, llevar a cabo el análisis en un entorno discreto para averiguar si los resultados de AB prevalecen, al mismo tiempo de contribuir con ese enfoque poco explorado, pues la matemática que conlleva es más engorrosa que cuando se desarrolla el modelo en tiempo continuo.

Uno de los supuestos del modelo de AB (y también de este modelo), es que una burbuja va siendo detectada secuencialmente por agentes racionales. Ahí, al modelar en tiempo continuo, se establece que a cada instante transcurrido un cohorte de agentes de cierta masa se percata del hecho. En aquellos casos en que el mercado esté compuesto por un número finito de agentes (y particularmente, un número reducido), de tal forma que se tenga interés por saber cómo es que se soporta una burbuja en tales condiciones, una versión discreta del modelo puede resultar más útil y más ilustrativa, pues dicho cohorte sería poco nítido. Al tratarse de individuos identificables, una buena opción es usar matemáticas discretas. Por ejemplo, en el modelo que aquí se desarrolla sí puede caracterizarse la conducta, por decir algo, de los diez propietarios de algún terreno en cierto fraccionamiento, al igual que la de miles de inversionistas de algún instrumento financiero.

Otro argumento a favor del uso de este marco discreto radica en que se tiene aquí la intención de ejemplificar numéricamente el modelo, y para tal propósito resulta más adecuado usar algún método computacional que opere bajo una lógica discreta. Finalmente, también en defensa de este marco, el modelo en tiempo discreto prepara de mejor forma el terreno para la introducción de un agente, identificable, que tendrá características especiales, que se llamará el líder y que aparecerá en el segundo artículo de esta serie.

Hay una contribución adicional del presente trabajo en lo que respecta al rediseño del modelo de AB. Mientras que allá el equilibrio al que se llega tiene como una de sus

características la unicidad, aquí se demuestra que en un entorno discreto puede haber múltiples equilibrios. Empero, este resultado no es para echar campanas al vuelo, pues surge justamente de las diferentes condiciones en que se dan los procesos de optimización en términos discretos.

## 2. El modelo

En las siguientes líneas se desarrolla un modelo cuyo basamento es muy parecido al que usan AB en el suyo, sólo que mientras que en él el tiempo es continuo, aquí el modelo se desarrolla en un entorno discreto. Como AB argumentan, históricamente los momentos de cambio estructural han traído consigo la aparición de burbujas. Esto está vinculado a la distinta lectura que del hecho hacen los participantes del mercado. Por un lado, aquellos más sofisticados entienden que el impacto de tales cambios gradualmente se va difuminando. Por el contrario, los participantes menos refinados suelen pensar en que el efecto es permanente, esto en razón de su elevado optimismo y/o su incapacidad de percatarse del momento de agotamiento de la fuerza de la modificación en la estructura.

La anterior idea se puede plantear a través de un proceso de precios del activo sobre el que se crea la burbuja. Antes de cierta fecha, por decir alguna  $t = 0$ , el precio de algún activo coincide con su valor fundamental. Éste, se supondrá aquí, crece normalmente a una tasa similar a la tasa de interés para instrumentos libres de riesgo,  $r$ . Justo en  $t = 0$ , y como consecuencia de algún impacto positivo en los fundamentales de la o las empresas detrás de dicho, su precio comienza a crecer a la tasa mayor  $g$ . Aquí se ha suscitado un cambio estructural y la diferente estimación de la duración de su impacto, atribuida a la también desigual dotación de información disponible, habrá de ser aquí la única fuente de heterogeneidad de los agentes del modelo.

Como el transcurrir del tiempo se mide en intervalos discretos, el proceso de precios estará dado por:

$$P_t = (1 + r)^t \text{ hasta antes de } t = 0 \text{ (normalizado),}$$

$$P_t = (1 + g)^t \text{ para } t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

con  $0 < r < g < 1$ , y  $P_t$  el precio en el período  $t$ .

En algunos períodos siguientes a  $t = 0$ , el precio coincide con su valor fundamental. No obstante, después de cierto momento empieza a agotarse la fuerza de tal cambio y los precios no están ya sustentados por los fundamentales, sino que comienzan a estarlo por razones artificiales, especulativas. El precio y el valor fundamental empiezan a divergir a partir de ahí. Sea  $t_0$  este instante. Después de  $t_0$  el precio es mantenido ficticiamente en  $P_t = (1 + g)^t$  por los agentes conductuales (*behavioural traders*), quienes no se percatan inmediatamente de que el precio mayor tiene ya un contenido meramente especulativo.

Así, para  $t \geq t_0$ , el valor fundamental será  $P_t \left( -\beta(t - t_0) \right)$ , con  $\beta : \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow [0, \bar{\beta}]$  función creciente. Después de  $t_0$ , sólo una fracción del precio,  $(1 - \beta(t - t_0))$ , está respaldada por los fundamentales, mientras que el resto,  $\beta(t - t_0)$ , será obra de la burbuja. En particular, se supondrá para simplificar que esta función tiene la forma:

$$\beta(t - t_0) = 1 - \left( \frac{1 + r}{1 + g} \right)^{t - t_0}$$

Si  $t = t_0$ , se tendrá que  $\beta(t - t_0) = 0$  y el contenido especulativo del precio será nulo, pero a medida que  $t$  se aleja, éste va creciendo. Después de  $t_0$  la trayectoria vuelve crecer a la tasa  $r$ .<sup>2</sup>

Otro supuesto consiste en que un conjunto de  $m$  diferentes tipos de agentes,  $M$ , son propietarios del activo. Sin embargo, de ellos sólo participa activamente un conjunto  $N \subseteq M$  de  $n \leq m$  tipos. Ellos son los que tienen a su alcance alguna forma de conocer el momento de la divergencia, o dicho de otro modo, son quienes tienen al menos la mínima dosis de información para hacerlo, ya sea tarde o temprano. Después de que  $n$  agentes se percatan de la desviación, todo el conjunto  $N$  tendrá conocimiento del hecho, por lo que el lapso  $[t_0, t_0 + n - 1]$  representará la “ventana de conciencia” (*“awareness window”*), ya que se supone que desde  $t_0$  un tipo de agentes se va percatando en cada momento. Desde luego,  $N$  es el conjunto de los  $n$  mejor

<sup>2</sup> Para que esto suceda, deberá ser que:  $(1 + g)^t \left( -\beta(t - t_0) \right) = (1 + g)^{t_0} (1 + r)^{t - t_0}$  y de aquí se despeja la tasa de crecimiento  $r$ .

informados tipos de agentes. El resto se puede ver como propietarios de la acción cuyo nivel de información es nulo. Cuando se llega  $t_0 + n - 1$ , todos los agentes con información saben de la divergencia, pero nadie sabrá que todos sus similares a su vez ya lo saben.

Como era de suponerse,  $t_0$  es desconocido para los agentes. Lo único que saben es que se trata de una variable aleatoria discreta distribuida geoméricamente, por lo que su función de probabilidad es:

$$\text{prob}_{t_0}(t_0) = p(1-p)^{t_0-1}, \quad \text{para } t_0 = 1, 2, 3, \dots \quad 0 < p < 1.$$

Esta función de probabilidad tiene como parámetro a  $p$ , y posee la característica, para la notación que aquí se contempla, de que  $E(t_0) = 1/p$ . Como se dijo ya, se normalizó a  $t = 0$  como el instante en que se presenta la noticia o acontecimiento que provoca la elevación del precio. Así, en el caso extremo de que  $p = 1$ , la burbuja habrá nacido al instante siguiente, pues se tendría que  $E(t_0) = 1$ , y si  $p$  disminuye, entonces  $t_0$  se alejará de  $t$ . En Estadística se conoce a  $p$  como la probabilidad de éxito de un experimento y usualmente se emplea la notación  $q = 1 - p$ . A lo largo de esta tesis será usado  $q$ , para así ahorrar un poco de notación.

Otro elemento esencial del modelo consiste en la heterogeneidad de los agentes en algo que tiene que ver con la información: quien se entere de inmediato será quien tenga un acceso más pronto a la información. No existe diferencia en la calidad o precisión de la información que los agentes obtienen. Todos se percatan de lo mismo. Lo único que varía es el instante en que lo hacen. Aquí se ha de suponer que la naturaleza concede a todos los agentes la misma probabilidad de ser los mejor informados<sup>3</sup>, de tal suerte que para  $t_0$  dado se tendrá:

$$\text{prob}(Y = t_i | X = t_0) = \frac{1}{n}, \quad \text{para } Y \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + n - 1\},$$

---

<sup>3</sup> En realidad la naturaleza no hace que uno u otro sea el mejor informado. De esto se habrá de encargar, además de otras cosas, los recursos que el agente asigne para la obtención de información. La cuestión es que aquí se supone que cada agente no sabe cómo es su información respecto a la de los otros, por lo que será la mejor con probabilidad  $1/n$ , la segunda mejor con la misma probabilidad y así sucesivamente.



donde  $Y$  representa la variable aleatoria que da cuenta del “despertar” del agente  $i$ , en tanto que  $X$  representa la v. a. del momento de la divergencia.

Para que el precio retorne a sus fundamentales, es preciso que cierto número de agentes poseedores de acciones venda, para que en un esfuerzo colectivo la burbuja se rompa. Las ventas individuales no sólo son inofensivas, sino también son imperceptibles. Específicamente, se supone aquí que se requiere vendan al menos  $k$  de los agentes participantes directamente,  $N$ .<sup>4</sup> Esto se debe a que es precisamente  $k$  la capacidad de absorción de los agentes conductuales. Si el número de agentes vendiendo no llega a  $k$ , la burbuja no truena. Sin embargo, se supondrá también que por razones exógenas ésta tronará invariablemente justo después del período  $t_0 + \bar{\tau}$ , ya que por alguna circunstancia no puede tener un tamaño superior a  $\bar{\beta} = \beta(\bar{\tau})$ . La Gráfica 1 brinda una explicación visual del proceso de precios.

Quien se percata de la existencia de la burbuja no sabe cuántos más lo han hecho, tampoco sabe cuántos han vendido hasta entonces. Si despierta en el período  $t_i$ , sólo sabrá que  $t_0 \in \{t_i - n + 1, t_i - n + 2, \dots, t_i\}$ . Esto origina que cada agente tenga su creencia posterior de  $t_0$  en función del momento en que él notó la divergencia, tal como lo expresa la Gráfica 2, donde a su vez se manifiestan las creencias de tres tipos de agentes.

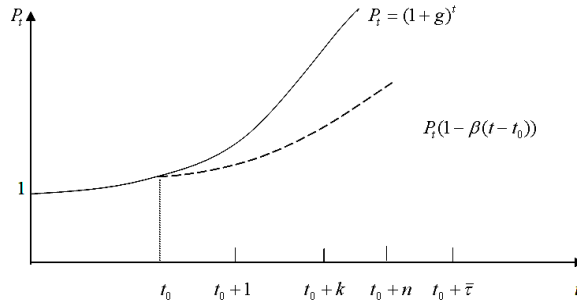
Es precisamente esta disparidad en la información lo que habilita al crecimiento de la burbuja. De haber información perfecta entre los agentes, todos sabrían cuándo la burbuja rompería, por lo que se adelantarían a vender un período. Pero esta acción también sería del conocimiento de todos, lo cual los obligaría a adelantarse un tiempo más y así sucesivamente hasta que todos vendieran en  $t_0$  y ninguna burbuja podría ser creada. De esto se volverá a hablar unos párrafos más adelante.

Bajo esta forma de modelar, donde el tamaño de la burbuja en el período  $t$  está dado por  $\beta(t - t_0)$ , y donde se ha supuesto que el primer agente “despierta” justo en  $t_0$ , una pregunta natural puede ser: ¿de qué se entera este primer agente, si la burbuja aún no ha nacido? La

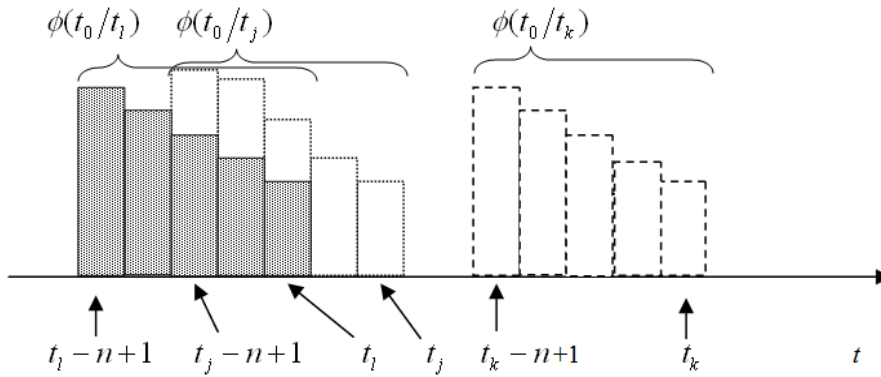
---

<sup>4</sup> Para facilitar el relato, supóngase que cada tipo está compuesto por un solo agente.

respuesta es que a pesar de que, en efecto,  $\beta(t_0 - t_0) = 0$ , en realidad los agentes usan información fundamental para intentar determinar en qué momento los fundamentales detrás del activo dejan de soportar el precio alto.



Gráfica 1. Proceso de precios.



Gráfica 2. Creencias Posteriores

En la gráfica anterior están plasmadas algunas distribuciones condicionales a los períodos  $t_i$ ,  $t_j$  y  $t_k$ . En las siguientes líneas se verá cómo son éstas obtenidas. Sea:

$$\phi(t_0 | t_i) \equiv \text{prob}(t_0 | Y = t_i) \tag{1}$$

Aplicando la Regla de Bayes:

$$\phi(t_i | t_0) = \frac{\text{prob}(t_i | X = t_0) \text{prob}(t_0)}{\text{prob}(t_i)} \quad (2)$$

Empleando las respectivas distribuciones de  $X$  e  $Y$ , el numerador de (2) será:

$$\text{prob}(t_i | X = t_0) \text{prob}(t_0) = \frac{1}{n} pq^{t_0-1}. \quad (3)$$

Por su parte, el denominador se obtiene usando la Ley de la Probabilidad Total y el hecho de que  $X \in \{t_i - n + 1, t_i - n + 2, \dots, t_i\}$ :

$$\begin{aligned} \text{prob}(t_i) &= \text{prob}(Y = t_i, X = t_i - n + 1) + \text{prob}(Y = t_i, X = t_i - n + 2) + \dots + \text{prob}(Y = t_i, X = t_i) \\ &= \frac{1}{n} pq^{t_i-n} + \frac{1}{n} pq^{t_i-n+1} + \dots + \frac{1}{n} pq^{t_i-1} = \frac{p}{n} \left( \frac{q^{t_i-n} - q^{t_i}}{1-q} \right) \Rightarrow \text{prob}(t_i) = \left( \frac{q^{t_i-n} - q^{t_i}}{n} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo (2.1.3) y (2.1.4) en (2.1.2), y con algo de álgebra se obtiene:

$$\phi(t_i | t_0) = \frac{pq^{n-1-(t_i-t_0)}}{1-q^n}, \quad (5)$$

para  $t_0 \in \{t_i - n + 1, t_i - n + 2, \dots, t_i - n + (n-1), t_i\}$ , y ésta será finalmente la función de probabilidad de  $t_0$  respecto a cada  $t_i$ .

En este trabajo se usan dos supuestos que pueden ser catalogados como fuertes. Primero, las ventas individuales no tiene repercusión alguna en el precio del activo; de hecho, son imperceptibles. Sólo hay una venta que sí se hace notar y es la que termina rompiendo la burbuja. Aquí los inversionistas “despiertan” secuencialmente, pero en un orden aleatorio, y al hacerlo ignoran cuántos otros agentes también lo han hecho (y por ende no saben si han despertado tarde o temprano). Sin embargo, se puede esgrimir que los agentes pudieran usar el precio del activo para investigar indirectamente cuántos agentes han vendido hasta ese momento y así estimar el tamaño de la burbuja. No obstante, es justamente este supuesto de que el precio del activo no se altera con las ventas individuales lo que evita tal averiguación. Éste se soporta

aquí con la siguiente idea: el precio es exógeno a las ventas, pues cuando la burbuja está activada, crece a la tasa  $g$ , independientemente de si los agentes venden o no.

Si un agente vende el activo y encuentra comprador (los compradores son agentes conductuales), el precio no varía más de lo que ya experimentó por causa de  $g$ . Sin embargo, en el momento en que un vendedor no encuentra comprador es cuando el precio sí registra una caída súbita. Una modelación más elaborada sería considerar además de este desplome abrupto un desliz paulatino en el precio provocado por las ventas individuales. Aunque, es necesario señalarlo, gran parte de los resultados de este modelo se verían amenazados en una situación así.

El segundo supuesto fuerte del modelo radica en el hecho de que si la burbuja no es desactivada por las ventas de los agentes, tarde o temprano llegará un momento en que ésta revienta, incluso si no hay venta alguna. Este punto resulta controversial, no sólo por el hecho de que la burbuja puede tronar sin que alguien venda, sino que al saber todos los agentes que ella tiene una vida limitada, y más aún, al tener conocimiento pleno de su máximo tamaño, aún así decidan montarla por un lapso. Normalmente, cuando esto ocurre, en la literatura de burbujas se suele hablar de un proceso de *backward induction*, en el cual un agente encontrará conveniente adelantar la venta un período antes de que la burbuja alcance su máximo nivel, pero si él lo hace sabrá que los demás agentes también lo pueden hacer, así que mejor se adelantará dos, pero también sabrá que los otros se adelantarán dos y así sucesivamente hasta que se llegue al extremo de que no puede ser generada burbuja alguna (Brunnermeier y Morgan, 2006, tratan este hecho en varios pasajes de su artículo). Aquí la defensa a la que se recurre es que si bien todos los agentes conocen el tamaño máximo de la burbuja, no coinciden al calcular el período en el cual se dará tal situación, todo debido al despertar secuencial que se va dando, el cual, como ya se dijo arriba, podría matizarse si las ventas individuales tuvieran algún efecto en el precio del activo.

Ambos supuestos son fuertes, pero también ambos están presentes en el trabajo de AB.

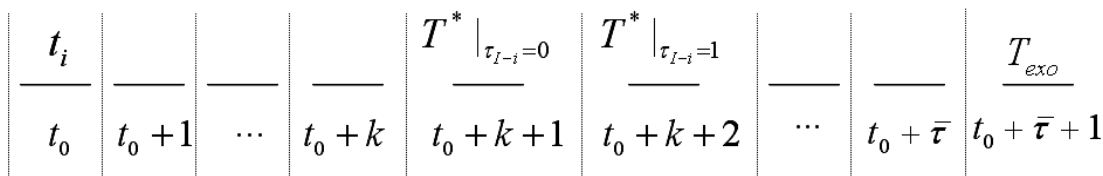
## 2.1 Solución del modelo

Para identificar a cada agente racional, se usa aquí el período en el que cada uno de ellos se percató de la existencia de la burbuja. Así,  $i$  será el agente que “despierta” justamente en  $t_i$ . Como el agente  $i$  al despertar no sabe cuántos más lo han hecho, usará (5) para tratar de averiguar en qué momento la trayectoria de precios sufrió la alteración. Sin embargo, en razón de que en cada momento desde  $t_0$  un tipo de agentes se percató, y esto lo sabe  $i$ , él usa una forma alternativa de apreciar  $t_0$ : a través de su posible *ranking*, que no es más que su posición en el ordenamiento de los agentes de acuerdo a su nivel de información, desde el mejor informado, que aquí se ha supuesto que despierta en  $t_0$ , hasta el peor de los  $n$ , que lo hace en  $t_0 + n - 1$ .

Sea  $D_i$  la variable aleatoria que denota el ranking del agente  $i$ . Sea a su vez  $R_i(b) = \text{prob}(D_i = b | t_i)$ . Es decir:

$$R_i(b) = \frac{pq^{n-b}}{1-q^n}, \text{ para } b = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

La estrategia de  $i$  estará dada por el número de instantes que espera para vender, una vez que se ha percatado de la burbuja. Sea  $\tau_i$  dicho número. Este agente se verá en un juego en el cual su pago depende de su estrategia,  $\tau_i$ , pero también de la estrategia del resto de los agentes, que se denotará aquí como  $\tau_{-i}$ , y de los designios de la naturaleza expresados en  $D_i = b$ . Si por ejemplo, se diera que  $b = 1$  y si se denota como  $T^*$  el instante en que se rompe la burbuja por razones endógenas, el agente  $i$  estaría en un escenario como el que ilustra la siguiente gráfica:



Gráfica 3. Rompimiento endógeno y rompimiento exógeno

Vale decir que ningún agente encontrará óptimo esperar más de  $\bar{\tau}$  instantes, ya que con probabilidad uno la burbuja entonces ya habría estallado. Si el resto de los agentes no espera momento alguno para vender,  $i$ , al esperar también cero instantes, obtendrá el precio entonces vigente, es decir,  $P_{t_i}$ . Pero si aguarda un poco más, mejorará su ingreso al hacerse de  $P_{t_i+1}$ . Esto lo puede continuar haciendo hasta que espere  $k$  períodos (se sigue suponiendo por ahora que  $b=1$ ). De esperar uno más, se empezaría a meter en problemas, ya que la burbuja ya habrá sido tronada por el resto de los agentes e  $i$  sólo obtendría  $(P_{t_i+k+1})\llbracket-\beta(k+1)\rrbracket$ , el precio post rompimiento de entonces.

Al ir aguardando más instantes, el resto de los agentes le proporcionan a  $i$  la oportunidad de esperar más y así obtener un pago mayor. Esta externalidad a su favor se detiene cuando llega la presión del estallido por motivos exógenos. Si  $i$  supiera con certeza que el resto esperará  $\bar{\tau}$ , su estrategia óptima sería aguardar el mismo lapso. Pero, como es obvio, esto va más allá de la información que posee. Tampoco le será óptimo siempre esperar al menos  $k$  períodos porque tampoco sabe lo que la naturaleza le ha designado. Recuérdesse que éste sólo es el caso para el que  $b = 1$ , pero en realidad  $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Al momento de optimizar su estrategia,  $i$  trae a valor presente los pagos futuros del instante  $t$ , multiplicando su pago respectivo por el factor  $\frac{1}{\llbracket+r\rrbracket^{t_0}}$ . Por otro lado, gracias al simplificador que aquí se ha hecho sobre  $\beta(\cdot)$ , se tendrá que:

$$\beta\llbracket-t_0\rrbracket = 1 - \left(\frac{1+r}{1+g}\right)^{\llbracket-t_0\rrbracket}. \quad (7)$$

Sea:  $S \equiv \left(\frac{1+g}{1+r}\right)$ . Sustituyendo, se llega a  $1 - \beta\llbracket-t_0\rrbracket = S^{\llbracket-t_0\rrbracket}$ .

Para cada estrategia del resto de los agentes,  $i$  seleccionará la que le brinde un pago esperado mayor. El equilibrio del juego se logrará cuando  $i$  elija una estrategia maximizadora y que ésta coincida con el nivel de espera de  $I-i$  del que la misma se desprendió. Esto se puede establecer así gracias a que el juego es simétrico y a que, si bien cada agente tiene diferente información, el

hecho de ninguno de ellos sepa cómo es la suya respecto a la del resto, permite tratarlos de forma homogénea.

Vale advertir en este momento que aquí y en lo sucesivo el enfoque de este trabajo se centrará en el estudio de los equilibrios simétricos. La justificación de esto descansa en el hecho de que si bien los agentes son diferentes por tener diferente información, y por lo tanto “despertar” en diferentes momentos, *a priori* ninguno de ellos sabe cómo es su información respecto a la del resto de los agentes. Sin embargo, lo que sí comparten todos los agentes es una misma función de distribución para efecto de indagar su “ranking”, de tal forma que en este renglón sí son iguales los agentes.

Desde el punto de vista del agente  $i$ , la burbuja se puede romper por alguna de las siguientes razones (o por ambas, como puede darse el caso):

$$(i) \quad b + \tau_i > k + \tau_{I-i}$$

$$(ii) \quad b + \tau_i > \bar{\tau} + 1$$

Mientras que la primera es para cuando el rompimiento de la burbuja se da por motivos endógenos, la segunda alude al estallido exógeno.

Sea  $\rho \in (\tau_{I-i}, \tau_i) \equiv \min \{k + \tau_{I-i} - \tau_i, \bar{\tau} + 1 - \tau_i\}$ . El pago esperado para  $i$ , en función de lo que haga el resto de los agentes y de su propia espera, quedará:

$$G_i(\rho, \tau_{I-i}) \equiv \sum_{b=1}^{\rho} R_i(b) S^{\tau_i} + \sum_{b=\rho+1}^n R_i(b) S^{1-b} \quad (8)$$

Es decir, el pago esperado será una combinación convexa entre obtener un pago alto ( $S^{\tau_i}$ ) y uno bajo ( $S^{1-b}$ ). Los pesos de dicha combinación estarán dados por las probabilidades de vender antes de que la burbuja reviente y hacerlo después, respectivamente. A su vez, tales probabilidades dependen de  $\rho$ , que ha sido definido arriba y que sirve para determinar la duración de la burbuja, en función de la espera del agente representativo y del resto de ellos. Así,

$\rho$  divide al conjunto de posibles rankings que el agente puede tomar,  $b = \{2, \dots, n\}$ , en aquellos que le arrojan un pago alto y en los que le dan uno bajo.

Trabajando individualmente cada término de la anterior expresión, usando que  $p = 1 - q$  y con algo de álgebra el primer término quedaría:

$$\sum_{b=1}^{\rho} R_i(b) S^{\tau_i} = \sum_{b=1}^{\rho} \frac{pq^{n-b}}{1-q^n} S^{\tau_i} = \frac{pq^n}{1-q^n} \sum_{b=1}^{\rho} q^{-b} S^{\tau_i} = \frac{q^n}{1-q^n} (q^{-\rho} - 1) S^{\tau_i}. \quad (9)$$

Ahora el segundo:

$$\sum_{b=\rho+1}^n R_i(b) S^{1-b} = \frac{pq^n S}{1-q^n} \sum_{b=\rho+1}^n q^{\geq b} = \frac{pq^n S}{1-q^n} \left[ \frac{q S^{\geq n} - q S^{\geq \rho}}{1-qS} \right]. \quad (10)$$

Juntando (9) y (10) y sustituyendo en 1:

$$G_i(\tau_i, \tau_{-i}) = \frac{q^n}{1-q^n} (q^{-\rho} - 1) S^{\tau_i} + \frac{pq^n S}{1-q^n} \left[ \frac{q S^{\geq n} - q S^{\geq \rho}}{1-qS} \right]$$

Con algo de álgebra:

$$G_i(\tau_i, \tau_{-i}) = \frac{q^n}{1-q^n} \left[ S^{\tau_i} (q^{-\rho} - 1) + \frac{pS}{1-qS} (q S^{\geq n} - q S^{\geq \rho}) \right]. \quad (11)$$

Se presenta a continuación la siguiente definición que habrá de guiar la obtención del equilibrio del modelo:

**Definición 1.** Si para cada  $\tau_{-i}$ ,  $i$  elige su mejor movimiento,  $\tau_i^*(\tau_{-i})$ , dado por  $\tau_i^*(\tau_{-i}) = \arg \max_{\tau_i} G_i(\tau_i, \tau_{-i})$ , el Equilibrio Bayesiano Perfecto de Nash (EBPN) del juego se dará con todos los agentes  $I$  esperando  $\tau_i^*$ , tal que  $\tau_i^* = \tau_i^*(\tau_{-i}) = \tau_{-i}$ , con  $G_i(\cdot, \cdot)$  tal y como se definió arriba en (11).



Ahora procede ir en busca del mejor movimiento de  $i$  ante lo que presuntamente haría el resto de los agentes y de la duración máxima de la burbuja. De entrada, en el óptimo no deberá ser que  $\rho \leq 0$ , ya que siempre se tendría un pago post rompimiento. O sea, deberá ser que  $\rho > 0$

$\Rightarrow \min \{k+1 + \tau_{I-i} - \tau_i, \tau + 1 - \tau_i\} > 0$ , por lo que:

$$\tau_i < \min \{k+1 + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1\}, \quad (12)$$

lo cual resulta bastante obvio. Esta será una restricción por arriba para la maximización del pago esperado.

Primero, si  $\rho \geq n$ , su pago será siempre pre rompimiento, por lo que obtendrá  $S^{\tau_i}$ . Para que así sea, deberá ser necesario que  $\tau_i \leq \min \{k+1 + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1\} > n$ , y por supuesto, de este conjunto de esperas, la que le maximizará el pago será:  $\tau_i = \min \{k+1 + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1\} > n$ , o con mayor precisión:

$$\tau_i^* = \max \{0, \min \{k+1 + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1\} > n\} \quad (13)$$

y su respectivo pago quedará:

$$S^{\max \{0, \min \{k+1 + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1\} > n\}} \quad (14)$$

En este tipo de espera el agente  $i$  no corre ningún riesgo. Su postura es cautelosa, ya que no hay forma alguna de que la burbuja le truene si su tiempo de espera está dado por (13). Sin embargo, se puede ir más allá de este simple posicionamiento, pues bien puede ser que al agente le convenga correr un poco de riesgo para maximizar así su pago esperado.

Ahora se puede suponer que se juega una estrategia más arriesgada, de tal suerte que  $\rho < n$ , lo cual implica que  $\tau_i > \min \{k+1 + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1\} > n$ . En este caso el problema será:

$$\max_{\tau_i} \frac{q^n}{1-q^n} \left[ S^{\tau_i} (q^{-\rho} - 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{-\rho} \right) \right] \quad (15)$$

$$\text{s.a.} \quad \tau_i < \min \left\{ k + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1 \right\}$$

Primero hay que suponer que el rompimiento se da de forma endógena, asumiendo que  $\bar{\tau}$  es muy grande (aunque esto suena ambiguo, sólo será por el momento, ya luego se habrá de formalizar). Además, en equilibrio, deberá ser que  $\tau_i^* = \tau_{I-i}$ . Ambos factores combinados dan como resultado que  $\rho = k + \tau_{I-i} - \tau_i$ . Sustituyendo en la función objetivo del problema, ésta quedará:

$$\max_{\tau_i} \frac{q^n}{1-q^n} \left[ S^{\tau_i} (q^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i} - 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i} \right) \right]$$

Simplificando:

$$\max_{\tau_i} S^{\tau_i} (q^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i} - 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i} \right)$$

De acuerdo a las Condiciones de Primer Orden (CPO),  $\tau_i^*$  debe ser el menor entero para el que se satisfaga<sup>5</sup>:

$$S^{\tau_i^*+1} (q^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i^*+1} - 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i^*+1} \right) \leq S^{\tau_i^*} (q^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i^*} - 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{-k-\tau_{I-i}+\tau_i^*} \right) \geq 0$$

Es decir,  $\tau_i^*$  debe ser tal que si se añade una unidad más de espera, el cambio en el pago esperado sea negativo, con lo que efectivamente  $\tau_i^*$  será la espera que maximice dicho pago. Nótese que aquí se ha tenido el cuidado de exigir que  $\tau_i^*$  sea el número más chico para el cual la condición de arriba se cumpla, por lo que incluso cuando  $\tau_i^*$  resulte ser cero, el llevar la espera a uno haría

---

<sup>5</sup> En el Apéndice A1 se discute el tema de qué tanto esta condición asegura no sólo un máximo local, sino también uno global.

que disminuyera el pago esperado. Esto podría ocurrir cuando desde el inicio se tenga una curva de rendimiento esperado que ya vaya en descenso.

Como es estándar en los procesos de optimización, el quedarse al nivel de las condiciones de primer orden, y no explorar las de segundo orden, podría llevar a un grave error: considerar como un máximo a algo que en realidad es mínimo (o un “punto silla”). Este riesgo aquí no se corre, justamente por la explicación dada en el párrafo anterior. En el supuesto de que se tenga una curva primero descendente y luego ascendente (que conduciría a un mínimo), en lugar de una que sea primero ascendente y luego descendente (que conduciría a un máximo), el decir que  $\tau_i^*$  será el menor entero para el que se satisfaga la condición supradicha, hará que se elija no el punto donde la curva alcanza su mínimo, sino donde ésta inicia, o sea, en cero. Así, no debe preocupar el que las condiciones de segundo orden desmientan la optimización que se está llevando a cabo, pues como lo señala este razonamiento, no lo harán.

Una vez aplicadas las CPO ya se puede usar que en equilibrio  $\tau_i^* = \tau_{i-1}$ . Sustituyendo:

$$S^{\tau_i^*+1}(q^{1-k} - 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{1-k} \right) \geq S^{\tau_i^*}(q^{-k} - 1) - \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{-k} \right) \geq 0.$$

Factorizando:

$$S^{\tau_i^*} (Sq^{1-k} - S - q^k + 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{1-k} - (qS)^{-n} + (qS)^{-k} \right) \geq 0.$$

Simplificando y con algo de álgebra:

$$\tau_i^* \geq \frac{\ln \left( \frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k} \right)}{\ln S},$$

o bien, introduciendo la notación que  $\lceil x \rceil$  se refiere al entero próximo mayor a  $x$ , o a  $x$  si ya es entero, quedará:

$$\tau_i^* = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k}\right)}{\ln S} \right\rceil. \quad (16)$$

Ahora, ¿qué pasa si  $\frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k} \leq 0$ , de tal forma que no exista

$$\ln\left(\frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k}\right)?$$

En esa circunstancia la solución al problema tendría necesariamente que ser por la vía del rompimiento exógeno. Supóngase que  $\bar{\tau}$  ya no es tan grande. En particular, que  $k + \tau_{I-i} > \bar{\tau} + 1$ .

Sustituyendo en la función objetivo planteada por (15), ésta quedará:

$$\max_{\tau_i} \frac{q^n}{1-q^n} \left[ S^{\tau_i} (q^{-(\bar{\tau}+1-\tau_i)} - 1) + \frac{pS}{1-qS} \left( (qS)^{-n} - (qS)^{-(\bar{\tau}+1-\tau_i)} \right) \right]$$

A su vez, el problema puede ser expresado así:

$$\max_{\tau_i} (qS)^{\tau_i} q^{-\bar{\tau}-1} \left( 1 - \frac{pS^{-\bar{\tau}}}{1-qS} \right) - S^{\tau_i}.$$

Por las CPO, el óptimo será el menor entero para el que:

$$q^{-\bar{\tau}-1} \left( 1 - \frac{pS^{-\bar{\tau}}}{1-qS} \right) (qS)^{\tau_i+1} - (qS)^{\tau_i} \geq S^{\tau_i+1} - S^{\tau_i} \geq 0.$$

Con algo de álgebra y usando que  $\ln q < 0$ , un sencillo despeje lleva finalmente a que:

$$\tau_i^* \geq \frac{\ln\left(\frac{(S-1)q^{\bar{\tau}+1}}{qS-1+pS^{-\bar{\tau}}}\right)}{\ln q},$$

o con la notación arriba introducida:

$$\tau_i^* = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{(S-1)q^{\bar{\tau}+1}}{qS-1+pS^{-\bar{\tau}}}\right)}{\ln q} \right\rceil. \quad (17)$$

Todo lo anterior puede ser recapitulado en la siguiente proposición, la cual muestra cómo, dependiendo de los valores de los parámetros, el equilibrio puede ser uno u otro<sup>6</sup>:

Proposición 1:

- 1) Si  $\frac{pS}{(1-qS)+(S-1)q^k} > S^{\bar{\tau}}$ , entonces el agente  $i$  optimizará su pago esperado si aguarda

$$\tau_i^* = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{(S-1)q^{\bar{\tau}+1}}{qS-1+pS^{-\bar{\tau}}}\right)}{\ln q} \right\rceil \text{ instantes.}$$

- 2) Si  $\frac{pS}{(1-qS)+(S-1)q^k} \leq S^{\bar{\tau}}$ , entonces esperará

$$\tau_i^* = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{pS^{1-k}}{(1-qS)+(S-1)q^k}\right)}{\ln S} \right\rceil \text{ momentos.}$$

---

<sup>6</sup> Esta Proposición, al igual que la Proposición 2, hacen mención a un equilibrio del juego. Como se puede leer, no se dice nada acerca de la unicidad o multiplicidad del mismo. Posteriormente se ahondará en tal cuestión.

PRUEBA:

Los tiempos de espera óptimos ya fueron probados previamente. Sólo resta verificar el punto de división entre una espera y otra. Para llegar a la Ecuación (17) se asumió que  $k + \tau_{I-i} \geq \bar{\tau} + 1$   $\Rightarrow \tau_{I-i} > \bar{\tau} - k$ . Como el enfoque aquí está fijado en los equilibrios simétricos, se tendrá que:

$$\tau_{I-i} = \tau_i^* = \left[ \frac{\ln\left(\frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k}\right)}{\ln S} \right],$$

así que deberá ser:

$$\frac{\ln\left(\frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k}\right)}{\ln S} > \bar{\tau} - k.$$

por lo que trabajando algebraicamente la anterior expresión se llega a que, para que se aplique esta espera, debe ser que<sup>7</sup>:

$$\frac{pS}{(1-qS) + (S-1)q^k} > S^{\bar{\tau}}. \quad \text{LCDD}$$

La anterior proposición nos pone de manifiesto la espera óptima del agente  $i$ . Cuando se brinca el umbral dado por la combinación de parámetros indicada en la proposición, el agente cambia su principal temor. Es decir, si se da  $\frac{pS}{(1-qS) + (S-1)q^k} > S^{\bar{\tau}}$ , entonces su preocupación está en el período máximo de duración de la burbuja, en tanto que si sucede lo contrario, será la espera del resto de los agentes la que motive la determinación de su espera.

---

<sup>7</sup> Esta condición es equivalente a que  $\beta^* > \bar{\beta}$ , con  $\beta^*$  tal como será definida en la próxima sección.

## 2.2 Una forma alternativa de resolver el modelo

En esta sección es presentada una forma alternativa de resolver el modelo. Ésta es parecida a la utilizada originalmente por AB, sólo que aquí es desplegada para un entorno de tiempo discreto, además de que elude el uso de Lemas y Teoremas que ellos sí usan. En lugar de ver lateralmente lo que probablemente esperarán el resto de los agentes, aquí se adopta un enfoque intertemporal y sobre esta base es que los agentes toman su decisión de espera. Esta vía es muy semejante a la que usa Jonathan Levin, académico de la Universidad de Stanford, sólo que él lo hace para el modelo continuo y aquí se hace para la versión discreta.<sup>8</sup>

Se había dicho ya que las creencias de  $t_i$  respecto a  $t_0$  estaban dadas por la función de probabilidad:

$$\phi(t_0 | t_i) = \begin{cases} \frac{pq^{n-1-(t_i-t_0)}}{1-q^n} & \text{para } t_0 \in \{t_i - n + 1, t_i - n + 2, \dots, t_i - 1, t_i\}. \\ 0 & \text{para } t_0 \notin \{t_i - n + 1, t_i - n + 2, \dots, t_i - 1, t_i\}. \end{cases} \quad (18)$$

Su función de probabilidad acumulativa será:

$$\Phi(t_0 | t_i) = \begin{cases} 0 & \text{para } t_0 < t_i - n + 1, \\ \frac{1 - q^{n-(t_i-t_0)}}{1 - q^n} & \text{para } t_0 \in \{t_i - n + 1, t_i - n + 2, \dots, t_i - 1, t_i\}, \\ 1 & \text{para } t_0 \geq t_i. \end{cases} \quad (19)$$

---

<sup>8</sup> De estar vigente el servidor, como lo estuvo en enero de 2008, estos apuntes pueden ser consultados en [http://www.princeton.edu/~markus/research/papers/bubbles\\_crashes\\_Levin\\_lecture\\_notes.pdf](http://www.princeton.edu/~markus/research/papers/bubbles_crashes_Levin_lecture_notes.pdf).

Sea  $\xi$  el lapso después del cual la burbuja trueno. O sea, lo hará justo en  $t_0 + \xi$ . En ese caso, la duración de la burbuja será  $(t_0 + \xi) - t_0 - 1 = \xi - 1$ . Ahora es necesario trasladar las creencias del agente  $i$  de  $t_0$  usando como dato  $t_i$ , hacia el instante en que la burbuja habrá de romperse. ¿Cuál es la probabilidad de que si un agente espera  $\tau_i$  períodos para vender, la burbuja revienta justo en ese instante? Esto implicaría que:

$$t_i + \tau_i = t_0 + \xi. \quad (20)$$

Para obtener dicha probabilidad simplemente se usa la función de probabilidad para  $t_0$  expresada por (18):

$$\Pr(t_i + \tau_i = t_0 + \xi | t_i) = \Pr(t_0 = t_i + \tau_i - \xi | t_i) = \phi(t_0 = t_i + \tau_i - \xi | t_i).$$

Sea precisamente  $\pi(\tau_i | t_i)$  la probabilidad de que la burbuja truene justo al esperar  $\tau_i$  instantes, dado que el agente se ha percatado de la existencia de la misma en el período  $t_i$ . Así, se tendrá que:

$$\pi(\tau_i | t_i) = \frac{pq^{n-1+\tau_i-\xi}}{1-q^n}, \quad (21)$$

para  $\tau_i \in \{\xi - n + 1, \xi - n + 2, \dots, \xi\}$  y cero en otro caso. Se puede obtener la respectiva función de probabilidad acumulada,  $\Pi(\tau_i | t_i)$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Pi(\tau_i | t_i) &= \sum_{x=\xi-n+1}^{\tau_i} \frac{pq^{n-1+x-\xi}}{1-q^n} = \dots = \frac{1-q^{n-\xi+\tau_i}}{1-q^n} \\ \therefore \Pi(\tau_i | t_i) &= \begin{cases} 0 & \text{para } \tau_i < \xi - n + 1, \\ \frac{1-q^{n+\tau_i-\xi}}{1-q^n} & \text{para } \tau_i \in \{\xi - n + 1, \xi - n + 2, \dots, \xi\}, \\ 1 & \text{para } \tau_i \geq \xi. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$



Ésta última indica qué probabilidad hay de que si se sabe que la burbuja estallará en  $t_0 + \xi$  y se esperan  $\tau_i$  instantes para vender, la burbuja ya haya tronado en el ínterin. Así, para  $t_i$  el pago esperado de vender en el período  $t_i + \tau_i$ , será:

$$\sum_{y=t_i}^{t_i+\tau_i} \frac{1}{(1+r)^y} \left[ -\beta(\xi) \bar{P}(y) \pi(y/t_i) + \frac{1}{(1+r)^{t_i+\tau_i}} P(t_i + \tau_i) \left[ -\Pi(t_i + \tau_i/t_i) \right] \right] \quad (23)$$

Esto es, el valor esperado de lo que obtendría si la burbuja tronara en el lapso entre  $t_i$  y  $t_i + \tau_i$ , lo cual es indicado por el primer término, más lo que recibiría si ésta no lo hace, multiplicado por la probabilidad de que ello suceda. Si se obtiene una ecuación en diferencias de (23) con respecto a  $\tau_i$ , se llegará al período de venta óptimo para  $t_i$ . De ello se encarga el Lema 1.

Lema 1. Dado el período de rompimiento aleatorio,  $t_0 + \xi$ , el agente  $t_i$  optimizará su pago esperado si vende en  $t$  tal que (Apéndice A2):

$$h(t_i + \tau_i) = \frac{\pi(t_i + \tau_i)}{1 - \Pi(t_i + \tau_i)} \geq \frac{S-1}{qS\beta(\xi)} = \frac{\frac{1+g}{1+r} - 1}{q \frac{1+g}{1+r} \beta(\xi)}, \quad (24)$$

donde  $h(t/t_i)$  es la probabilidad de que la burbuja truene en  $t$ , dado que no lo ha hecho hasta ese momento. Tal probabilidad también se conoce en la literatura como *hazard rate*.

La expresión  $\frac{S-1}{qS\beta(\xi)}$  es equivalente a la razón de costo-beneficio. Así, la ecuación (24) manifiesta el hecho de que el inversionista  $i$  estaría dispuesto a vender tan pronto como el *hazard rate* exceda (o al menos alcance) tal razón de costo-beneficio.

Si ahora, por otro lado, se usan (21) y (22) para obtener  $h(\bullet | t_i)$ :

$$h(t_i + \tau_i) = \frac{p}{q - q^{1+\xi-\tau_i}} \quad (25)$$

Se puede confrontar (24) y (25), para luego despejar  $\tau_i$ . Un poco de álgebra conduce a este resultado:

$$\tau_i \geq \xi - \frac{\ln\left(1 - \frac{pS\beta(\xi)}{S-1}\right)}{\ln q} = \xi - \frac{\ln\left(1 - \frac{p \frac{1+g}{1+r} \beta(\xi)}{\frac{1+g}{1+r} - 1}\right)}{\ln q} \quad (26)$$

Como ya se dijo,  $\xi - 1$  es la duración máxima de la burbuja, la cual puede romperse, ya sea en  $t_0 + \bar{\tau} + 1$  por motivos exógenos, o en  $t_0 + k + \tau_i$  por impulso endógeno. De esta forma:

$$\xi = \min \left[ k + \tau_i, \bar{\tau} + 1 \right] \quad (27)$$

Esto es así porque en equilibrio  $\tau_i = \tau_{I-i}$ , ya que hay simetría entre los agentes<sup>9</sup>.

Primero se asume que el estallido de la burbuja se da por razones endógenas. Esto es,

$\xi = k + \tau_i$ . Sustituyendo en (26):

$$\tau_i \geq k + \tau_i - \frac{\ln\left(1 - \frac{pS\beta(k + \tau_i)}{S-1}\right)}{\ln q} \Rightarrow k \leq \frac{\ln\left(1 - \frac{pS\beta(k + \tau_i)}{S-1}\right)}{\ln q}.$$

---

<sup>9</sup> Como se ha venido adelantando en los anteriores pies de nota, esta igualdad se habrá de matizar después. Por ahora no es conveniente profundizar. Básicamente, la idea estriba en que en un ambiente discreto no tiene que ser necesariamente que  $\tau_i = \tau_{I-i}$  para que quede introducida la condición de simetría. Por ejemplo, ésta se podría satisfacer si  $\tau_i = \tau_{I-i} - x$ , para  $x \in [0,1)$ . Esta modificación, como ya se verá en su tiempo, puede dar lugar a múltiples equilibrios. No obstante, ella no altera en forma alguna la validez de los resultados que ahora se han obtenido. Ya se habrá de referir al caso en el que  $x = 0$ , el que aquí se analiza, como el *equilibrio base*. El resto de los equilibrios, si es que los hay, guardarán una íntima relación con el *base*, pues serán obtenidos justo de la misma forma en que fue obtenido éste, sólo que considerando otros valores permitidos para  $x$ .

Despejando:  $\beta(k + \tau_i) \geq \frac{(1 - q^k)(S - 1)}{pS}$ . Sea justamente  $\beta^* \equiv \frac{(1 - q^k)(S - 1)}{pS}$ , entonces se tendrá que:

$$\beta(k + \tau_i) \geq \beta^*. \quad (28)$$

Se había dicho que  $\beta(x) = 1 - \left(\frac{1+r}{1+g}\right)^x = 1 - S^{-x}$ , por lo que  $1 - S^{-k-\tau_i} = \beta^*$ , y despejando se

llega finalmente a:

$$\tau_{i\text{endo}}^* \geq -\frac{\ln(1 - \beta^*)}{\ln S} - k, \text{ o con la notación que se introdujo antes:}$$

$$\tau_{i\text{endo}}^* = \left\lceil -\frac{\ln(1 - \beta^*)}{\ln S} - k \right\rceil. \quad (29)$$

Evidentemente, si por ejemplo  $\beta^* \geq 1$ , será imposible calcular la anterior expresión. ¿Qué se podría hacer entonces? La respuesta la da  $\bar{\beta} = \beta(\bar{\tau}) < 1$ , el tamaño máximo posible de la burbuja. Cuando  $\beta^* \geq \bar{\beta}$ , la burbuja se romperá por la ruta exógena, por lo que será el caso en el que  $\xi = \bar{\tau} + 1$ , y si se sustituye este hecho en (26), se llega a:

$$\tau_i \geq \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{pS\beta(\bar{\tau} + 1)}{S - 1}\right)}{\ln q} \quad \Rightarrow \quad \tau_i \geq \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{pS(1 - S^{-(\bar{\tau} + 1)})}{S - 1}\right)}{\ln q}$$

$$\therefore \tau_{iexo}^* = \left[ \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln \left( 1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}})}{S - 1} \right)}{\ln q} \right] = \left[ \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln \left( 1 - \frac{p \left( \frac{1+g}{1+r} - S^{-\bar{\tau}} \right)}{\frac{1+g}{1+r} - 1} \right)}{\ln q} \right]. \quad (30)$$

Formalmente, un *equilibrio de intercambio* consistirá en una pareja  $(\tau_i, \xi)$  que satisfaga simultáneamente (26) y (27). Se puede recapitular el resultado en la siguiente proposición, que contempla ambos casos, el de rompimiento exógeno y el de endógeno.

Proposición 2. *Un resultado del juego definido arriba, en donde un agente  $i$  optimiza su estrategia de espera, consiste en un equilibrio de intercambio en el que:*

1. Si  $\beta^* \equiv \frac{(1-q^k) \left( \frac{1+g}{1+r} - 1 \right)}{p \frac{1+g}{1+r}} \geq \bar{\beta}$ , al percatarse de la burbuja cada agente venderá después de

$$\tau_{iexo}^* = \max \left\{ 0, \left[ \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln \left( 1 - \frac{p \left( \frac{1+g}{1+r} - \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^{-\bar{\tau}} \right)}{\frac{1+g}{1+r} - 1} \right)}{\ln q} \right] \right\} \text{ períodos y ésta tronará exógenamente al}$$

tiempo  $t_0 + \bar{\tau} + 1$ .

2. Si  $\beta^* < \bar{\beta}$ , cada uno de los agentes esperará  $\tau_{i\text{endo}}^* = \max\left\{0, \left\lceil -\frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln\frac{1+g}{1+r}} - k \right\rceil\right\}$  períodos

para vender y la burbuja se romperá de manera endógena al tiempo:

$$t_0 + k + \tau_{i\text{endo}}^* = t_0 + k + \max\left\{0, \left\lceil -\frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln\frac{1+g}{1+r}} - k \right\rceil\right\} \leq t_0 + \bar{\tau} + 1.$$

La desigualdad del lado derecho de la anterior expresión se debe precisamente al supuesto de que  $B_i^* < \bar{\beta}$ . Si de aquí despejamos  $\bar{\tau}$ , se podrá verificar que ésta se cumple.

### Comparación de soluciones

En esta sección y en la que le antecede se ha llegado a alguna estrategia óptima para cada agente involucrado en el juego definido<sup>10</sup>. Se pueden comparar tales estrategias de espera de ambos métodos para darse cuenta de que son equivalentes. Es decir, estrictamente no debería hablarse de dos métodos sino de uno solo, visto desde dos perspectivas. En el apéndice se encuentra la demostración de esta afirmación (Apéndice A3). En el caso del primer método la optimización se hace considerando la posible espera del resto de los agentes y sobre ella se maximiza el pago esperado. Por otro lado, en el segundo método no se desdobra el conjunto de esperas que potencialmente pueden usar los otros agentes, sino que sólo se habla de una espera. Luego, una vez hecha la optimización del pago esperado, el cual fue creado con una función de probabilidad creada respecto al posible momento del rompimiento, se igualan por simetría las esperas de todos los agentes y finalmente se despeja la estrategia de equilibrio. En el segundo método, la forma de construir la función de probabilidad del momento del estallido es una simple traslación de la función respecto al nacimiento de la burbuja, suponiendo que el resto de los agentes espera cierto número de períodos. Así, aquí se fija el número de periodos y la optimización se da sobre el

---

<sup>10</sup> Lo de “alguna” obedece a que, como ya se verá, podrá haber más de una solución de equilibrio. En esta comparación entre métodos se usa lo que en su momento se llamará *Equilibrio Base*.

tiempo de espera propio, pero la base de la función de probabilidad sigue siendo la misma que en el otro método. Es por eso que la maximización por ambas vías conduce a los mismos resultados.

Antes de proseguir, es pertinente hacer una aclaración fundamental. Para evitar que los agentes racionales vendan antes de enterarse de la existencia de la burbuja, y con ello el modelo pierda todo su atractivo, será necesario fijar algunos supuestos acerca de los parámetros. En concreto, se deberá suponer que  $\beta \ll \beta^*$ , ya que de lo contrario ningún agente tendrá incentivo alguno para conservar el activo en cuestión.

Lo anterior se logra si los parámetros son tales que  $\frac{1-S^{-k}}{1-S^{-1}} < \frac{1-q^k}{1-q}$ , con  $S = \frac{1+g}{1+r}$ .

### 3. Multiplicidad de Equilibrios

Se vio en las secciones 2.1 y 2.2 sendas vías para calcular el equilibrio del juego. Se demostró que ambas en realidad se tratan de una sola, pero enfocada desde dos perspectivas. Sin embargo, ahí sólo se estableció formalmente una situación en la que el juego estaba en equilibrio, más no se habló de si había más de una situación así. Esto es, no se indagó la posibilidad de que existieran múltiples equilibrios. Es tiempo de entrar en este terreno.<sup>11</sup> Si ya se ha resuelto el modelo por dos rutas, si todos los pasos han sido correctos y ello ha conducido a un equilibrio, ¿de dónde podrían salir los otros equilibrios, si es que los hay? La respuesta tiene que ver con un asunto muy básico, que se genera por trabajar en un ambiente discreto y no continuo, tal como se verá enseguida. Por lo tanto, no es en ningún momento la intención de quien escribe hacer ver a la multiplicidad como un resultado épico ni mucho menos, aunque sí es necesario al menos mencionarlo. Situándose de nueva cuenta en (23) se asume aquí que el rompimiento se da por la ruta endógena ( $\xi = k + \tau_{1-i}$ ). Haciendo algunos desarrollos algebraicos muy sencillos (como sustituir  $S$ ,  $\beta(\cdot)$ ,  $\xi$ ,  $\pi(\cdot)$  y  $\Pi(\cdot)$ ), se tendrá que el problema para el agente  $i$  habrá de ser:

---

<sup>11</sup> Este hecho ya había sido adelantado en algún pie de nota previo. No obstante, por ser una cuestión de tanta relevancia es que preferimos dedicarle una sección. Ahora sí lo tratamos con más detenimiento.

$$Max_{\tau_i} \sum_{y=0}^{\tau_i} S^y \left[ -\beta(k + \tau_{I-i}) \frac{pq^{n-1+\tau_i-k-\tau_{I-i}}}{1-q^n} + S^{\tau_i} \left[ 1 - \frac{1-q^{n+\tau_i-k-\tau_{I-i}}}{1-q^n} \right] \right] \quad (31)$$

Se puede multiplicar todo por  $\frac{1-q^n}{q^n}$  y el problema no sufre alteración alguna, por lo que quedará:

$$Max_{\tau_i} \sum_{y=0}^{\tau_i} S^{y-k-\tau_{I-i}} pq^{\tau_i-k-\tau_{I-i}-1} + S^{\tau_i} \left[ \tau_i-k-\tau_{I-i} - 1 \right].$$

Luego, obteniendo las condiciones de primer orden:

$$S^{\tau_i+1-k-\tau_{I-i}} pq^{\tau_i-k-\tau_{I-i}} + S^{\tau_i+1} \left[ \tau_i+1-k-\tau_{I-i} \right] - S^{\tau_i} \left[ \tau_i-k-\tau_{I-i} - 1 \right] \geq 0$$

Multiplicando ambos lados por  $S^{-\tau_i}$ :

$$S^{1-k-\tau_{I-i}} pq^{\tau_i-k-\tau_{I-i}} + S \left[ \tau_i+1-k-\tau_{I-i} \right] - \left[ \tau_i-k-\tau_{I-i} - 1 \right] \geq 0 \quad (32)$$

En la forma en la que se procedió en la Sección 2.2, se usó el hecho de que en equilibrio debería ser que  $\tau_i = \tau_{I-i}$ . Esto es así por la simetría del juego, pues al interior de  $I$ , nada tiene un agente que no tenga otro. No obstante, en virtud de que aquí se está modelando en un entorno discreto, la simetría del juego podrá incorporarse en la ecuación 32 aún y cuando las esperas de un agente y del resto no sean *exactamente* iguales. Así, tomando en cuenta este ajuste promovido por el redondeo, bien podrá ser que, para  $x \in [0,1)$ :

$$\tau_i = \tau_{I-i} - x \quad (33)$$

Sustituyendo (33) en (32), queda  $S^{1-k-\tau_{I-i}-x} pq^{-k-x} + S \left[ 1-k-x \right] - \left[ -k-x - 1 \right] \geq 0$ . Si de la anterior, como ha venido siendo un procedimiento estándar en este trabajo, se despeja  $\tau_i$ :

$$\tau_i^* = \left[ 1 - k - x - \frac{\ln \left[ \frac{1 - qS + (S-1)q^{k+x}}{p} \right]}{\ln S} \right]. \quad (34)$$

Este es el origen de la multiplicidad de equilibrios. Al ir variando  $x$ , la espera de equilibrio puede ir cambiando. Si  $x=0$  el equilibrio coincidirá con el que ya se había calculado en la Sección 2.2. En cambio, si  $x \rightarrow 1$ , también habrá equilibrio, pero éste se dará en:

$$\left[ \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 - k - x - \frac{\ln \left[ \frac{1 - qS + (S-1)q^{k+x}}{p} \right]}{\ln S} \right) \right].$$

Por lo tanto, la espera de equilibrio de todo agente perteneciente a  $I$ , será  $\tau_i^*$ , con:

$$\tau_i^* \in \left\{ \left[ 1 - k - \frac{\ln \left[ \frac{1 - qS + (S-1)q^k}{p} \right]}{\ln S} \right], \dots, \left[ \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 - k - x - \frac{\ln \left[ \frac{1 - qS + (S-1)q^{k+x}}{p} \right]}{\ln S} \right) \right] \right\}, \quad (35)$$

para el caso de que el rompimiento sea endógeno y para el exógeno como ya se había establecido antes. Nótese que todos los equilibrios, en caso de que haya varios, siguen la misma lógica que aquél para el que  $x=0$ . La diferencia consiste únicamente en que en ellos se contemplan valores para  $x$  diferentes de cero (obviamente, menores a uno). Para otorgarle distinción a este equilibrio, se le denomina aquí *Equilibrio Base*.

**Definición 2.** *El Equilibrio Base del juego se da cuando la simetría entre los agentes es introducida de tal forma que  $\tau_i = \tau_{I-i} - x$ , con  $x=0$ .*

El Equilibrio Base merece distinción pues él marcará la pauta para el resto de los equilibrios, tal como lo hace ver (35). Como ya se apreciará mejor cuando se le otorguen valores a los parámetros, el número de equilibrios y cuáles serán éstos, simplemente dependerá del Equilibrio



Base y del equilibrio cuando  $x \rightarrow 1$ . Si, por mencionar un ejemplo, el primero es 6 y el segundo 9, los equilibrios del juego serán 6, 7, 8 y 9.

Aquí se tiene una diferencia muy importante respecto al trabajo de AB, ya que allá no había lugar para varios equilibrios y aquí sí. Desde luego, y esto debe subrayarse, no hay aquí una multiplicidad de equilibrios resultante de otra cosa que no sea el asunto del redondeo ya explicado.

#### **4. Análisis de resultados y ejemplo numérico**

Es interesante averiguar qué pasa con la espera de equilibrio al hacer variar cada uno de los parámetros del modelo, *ceteris paribus* el resto de ellos. Sin pérdida de generalidad, se compara aquí la espera que se da cuando  $x = 0$  para diferentes conjuntos de parámetros. Es decir, se lleva a cabo el análisis considerando sólo el Equilibrio Base, en el entendido de que lo que es válido para él también lo será para el resto de los equilibrios. ¿Cómo se puede tener certeza estar seguros de la última afirmación? Es decir, ¿cómo se puede garantizar que todos los equilibrios se mueven en el mismo sentido? Incluso algo más elemental, ¿qué pasa si ni siquiera es igual el número de equilibrios? ¿Podría suceder que al mover uno de los parámetros, por ejemplo  $p$ , el número de equilibrios cambie? De ser así, ¿qué sentido tiene hacer estática comparativa sólo usando al Equilibrio Base?

Una alternativa que podría evitar todas estas preguntas sería tratar la estática comparativa para el caso general, viendo qué pasa con cada uno de los equilibrios señalados en (35). Sin embargo, nótese que ahí está muy claro que la diferencia entre un equilibrio y otro puede apreciarse como si  $k$  cambiara linealmente. De hecho, una forma práctica de obtener los equilibrios del juego es obtener el Equilibrio Base para el parámetro  $k$  dado y luego obtener el equilibrio usando  $k + 1$ . Ambos números obtenidos, así como aquéllos que eventualmente estén entre los dos, serán todos los equilibrios del juego. Una manera de generalizar la estática comparativa que se lleva a cabo abajo sería considerar no a  $k$ , sino a  $k' = k + x$ . En algunos ejercicios es inmediato ver que el uso de  $k$  o de  $k'$  es completamente irrelevante. Es por ello que

sí es posible hacer las comparaciones usando al *Equilibrio Base*. Sin embargo, cuando esto no sea tan obvio, ahí mismo se habrá de señalar.

### CAMBIOS EN $S$

Es evidente que a través de los cambios en  $S$  se puede averiguar el efecto de los cambios tanto en  $g$  como en  $r$ . La siguiente proposición esclarece el impacto de  $S$  en la espera de equilibrio.

Proposición 3. *Si el equilibrio definido en la proposición 2 es  $\tau_i^*$ , se tendrá que la espera ahí involucrada será no decreciente respecto al margen de beneficio. es decir,  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial S} \geq 0$ .<sup>12</sup>*

La prueba se halla en el Apéndice A4.

#### Corolario 3.1.

*Si el Equilibrio definido en la Proposición 2 es  $\tau_i^*$ , se tendrá que la espera ahí involucrada será no decreciente respecto la tasa de crecimiento,  $g$ . Es decir,  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial g} \geq 0$ .*

#### Corolario 3.2.

*Bajo las condiciones ya señaladas, la espera será no creciente respecto la tasa libre de riesgo,  $r$ . Es decir,  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial r} \leq 0$ .*

La demostración de ambos corolarios es directa, ya que, como  $S = \frac{1+g}{1+r}$ , se sigue

---

<sup>12</sup> Aquí no debe haber confusión en por qué se usa la derivada si se está en un entorno discreto. Nótese que lo que se quiere indagar es el cambio en la espera de equilibrio ante cambios pequeños en  $S$ , la cual está definida en el conjunto de los números reales. Lo mismo vale para algunas de las siguientes proposiciones.

respectivamente que  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial g} = \frac{\partial S}{\partial g} \frac{\partial \tau_i^*}{\partial S} \geq 0$  y que  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial r} = \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial \tau_i^*}{\partial S} \leq 0$ .

La conclusión es que la espera de equilibrio se mueve en el mismo sentido que  $g$  y en el opuesto a  $r$ . Al aumentar  $g$ , lo hace también el incentivo a esperar más tiempo antes de vender el activo sobre el que se postra la burbuja. Este mayor premio compensa el riesgo de que la burbuja reviente en los períodos adicionales de espera. Algo similar ocurre cuando baja la tasa de interés libre de riesgo, pues el costo de oportunidad de mantener el activo se reduce.

#### CAMBIOS EN $P$

Para averiguar el efecto de  $p$ , es preferible indagar el efecto de  $q$ , puesto que la notación aquí empleada usa más intensivamente a éste último.

Proposición 4. *La espera de equilibrio del juego que se definió en la Proposición 2,  $\tau_i^*$ , es no decreciente respecto a  $q$ . Es decir,  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial q} \geq 0$ .*

Prueba en el Apéndice A5.

#### CAMBIOS EN $K$

Nótese que la espera exógena no depende de  $k$ . Quien sí lo hace es la endógena y por supuesto  $\beta^*$ . Como  $k$  es un parámetro que sólo puede tomar valores discretos, el análisis que emplea derivadas esta vez no sirve, por lo que aquí sí se usará la técnica de las diferencias. Esto, aunque a primera vista parece contradecir lo que se había dicho al respecto de  $k' = k + x$ , con lo cual esta demostración estaría en graves aprietos, en realidad no hay de qué preocuparse. Si  $k$  aumenta en una unidad,  $k'$  también aumentará en una unidad, por ejemplo. Es por eso que incluso aquí sigue siendo irrelevante si se usa  $k$  y se ve sólo al Equilibrio Base, o bien si se usa  $k'$  y se ve el caso general.

Primero, el cambio en  $\beta^*$  será:

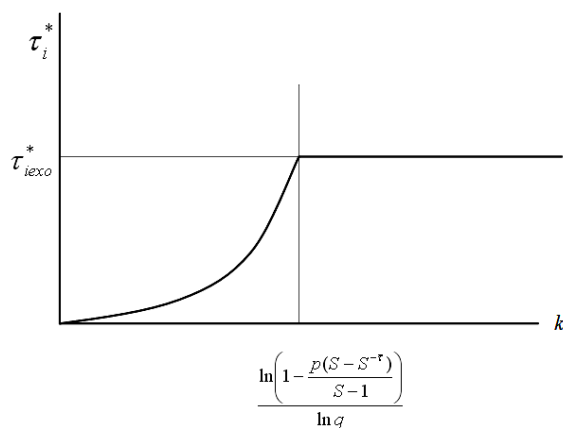
$$\frac{\Delta\beta^*}{\Delta k} = \frac{(1-q^{k+1})(S-1)}{pS} - \frac{(1-q^k)(S-1)}{pS} = \frac{S-1}{pS} q^k (1-q) = \frac{S-1}{S} q^k > 0.$$

Después, el efecto en el cambio endógeno lo maneja la siguiente proposición.

Proposición 5. Si la espera endógena de equilibrio del juego que se definió en la Proposición 2 es  $\tau_{i\text{endo}}^*$ , se tendrá que ésta es no decreciente respecto a  $k$ . Es decir,  $\frac{\Delta\tau_{i\text{endo}}^*}{\Delta k} \geq 0$ .

Prueba en el Apéndice A6.

Por lo tanto, cuando aumenta  $k$  aumenta la espera endógena en el Equilibrio Base, pero como también lo hace  $\beta^*$ , se va acercando más al punto en que la espera sea exógena y por lo tanto pierda impacto alguno  $k$ . Gráficamente, se tendrá algo así:



Gráfica 4. Espera óptima en función de  $k$ , bajo las condiciones señaladas.

#### CAMBIOS EN $\bar{\tau}$

En sentido recíproco al caso anterior, éste impacto sólo lo recibe la espera exógena y no la endógena.

Proposición 6 Si la espera exógena de equilibrio del juego que se definió en la Proposición 2

$\tau_{iexo}^*$ , ésta es no decreciente respecto a  $\bar{\tau}$ . Es decir,  $\frac{\Delta \tau_{iexo}^*}{\Delta \bar{\tau}} \geq 0$ .

Prueba en el Apéndice A7.

En razón de todas las proposiciones que arriba aparecen, se puede asegurar que el impacto en la espera de equilibrio de cambios en los parámetros del modelo, es absolutamente pro intuitivo. Si aumenta  $S$ , se vuelve más atractivo para los agentes el montar la burbuja un poco más, compensando el riesgo más alto de esta acción. Lo mismo pasa cuando disminuye  $p$  (cuando aumenta  $q$ ) pues al hacerlo se vuelve más sólida la creencia de cada agente de estar en un buen lugar en el ranking. Nótese que  $p$  disminuye para todos en general, incluso para los que en realidad se encuentran en los últimos lugares del ordenamiento.

Por otro lado, cuando  $k$  crece se vuelve menos grave la amenaza del rompimiento endógeno y por ello los agentes suben su espera. Finalmente, al disminuir el tamaño máximo de la burbuja también lo hace la espera de equilibrio, puesto que el margen de maniobra de los agentes se acorta. Algo que vale la pena señalar es que las proposiciones que se han demostrado no son *a priori* tan obvias como parecieran. Es decir, es muy elemental la respuesta que los cambios en los parámetros tendrán en la acción *individual* de cada agente, pero para hablar de la espera de equilibrio de *todos* los agentes fue necesario formalizar un poco más.

## Ejemplos numéricos

Vale la pena plantear un conjunto de ejemplos numéricos de los posibles valores de los parámetros del modelo. Esto cumple un doble propósito. Por un lado ilustrar los resultados de las proposiciones demostradas y por otro atestiguar cómo opera el modelo en un terreno práctico, ventaja que se ha adquirido al modelar en términos discretos y no continuos.

En el Cuadro 1 se pueden apreciar algunos resultados de ciertos ejemplos. En todos ellos se ha considerado a  $n = 10$ . A partir del Ejemplo 1, que será el punto de comparación, se mueven cada uno de los parámetros relevantes. Al final de cada columna de cada ejemplo aparece la(s) espera(s) de equilibrio de los agentes, así como el tipo de equilibrio del que se trata. Se debe tener presente, por lo que ya se señaló arriba, que la estática comparativa se hace para el Equilibrio Base. Sin embargo, como también ya se dijo, si éste se mueve en una dirección, el resto de los equilibrios lo hará en la misma.

En los ejemplos del 2 al 6 se cambió únicamente el parámetro  $p$ , el cual, se sabe, actúa en sentido opuesto sobre la confianza de los agentes en tener un buen lugar en el ranking. Nótese que al pasar de  $p = 0.1$  a  $p = 0.8$ , la espera pasa de ser de 3 a 5 instantes. Al ir sucesivamente disminuyendo  $p$  la espera va creciendo, hasta que en los ejemplos 5 y 6 se ve que el efecto desaparece. En el ejemplo 6, aunque  $p$  es casi cero, la espera aun así no llega a acercarse a la duración máxima de la burbuja, que es 15.

Luego, en los ejemplos 7-9 se redujo  $k$ , lo cual, como era de esperarse, mermó la espera de equilibrio. Esto es explicado por el hecho de que al ser menos los vendedores que se requieren para que la burbuja truene, el peligro de que esto suceda aumenta y los agentes deciden ser más cautelosos en su estrategia. En el ejemplo 10 se aumentó ligeramente el parámetro  $g$  respecto a la situación original, lo cual ocasionó un respectivo crecimiento en la espera. Lo mismo sucede en los ejemplos 11 y 12. En los ejemplos 13 y 14 se hace algo similar a lo que pasa en aquél par, es decir, aumentar  $g$  de 0.33 a 0.35. Nótese que aquí el aumento en la espera fue nulo. Eso se debe a que aquí  $k$  es 4 y no 7. Este es un ejemplo del diferente efecto de movimientos en los parámetros cuando se combinan fuerzas. En los ejemplos 15 y 16 se observa que los cambios en la duración máxima producen el efecto señalado en la respectiva proposición. Finalmente, como mera curiosidad, en el ejemplo 17 se les somete a los agentes un paraíso de escenario, donde  $S$  es casi 2,  $p$  es casi cero y  $k$  coincide con  $n$ . Pues éstos no desaprovechan y esperan lo máximo posible, 15. Sin embargo, lo interesante es que cuando a partir de este ejemplo se vuelve a  $p$  altamente desfavorable, la espera, si bien se reduce, no lo hace del todo. A pesar de que cada agente cree que es muy probable que sea de los últimos en enterarse, aun así no renuncia al manjar propuesto.

## 5. Conclusiones

En este capítulo se ha desarrollado un modelo que intenta explicar la aparición de burbujas especulativas en un ambiente discreto, pero sobre todo los factores que determinan la duración de éstas. El hecho de que los agentes se vayan enterando de la existencia de la burbuja de una manera secuencial (y el que esto lo sepan los mismos), hace que cuando llega el momento de su despertar éstos puedan llegar a esperar antes de vender. Es decir, que monten la burbuja por algún tiempo. Se ha demostrado que en equilibrio la espera de los agentes actúa en línea con la intuición y con el incentivo individual. Por ejemplo, al aumentar el beneficio de subirse a la burbuja no sólo lo hace la espera de cada agente (esto es tan obvio que incluso se podría asumir como supuesto), sino que la espera de equilibrio de todos los agentes también crece y por ello la burbuja extiende su duración.

Se estableció aquí un enfoque para el problema un tanto distinto al empleado por AB. En este, la forma de resolver el modelo pone un énfasis mayor en la confrontación de estrategias por parte de los agentes involucrados. También se vio que en esta forma de modelación discreta aparece la multiplicidad de equilibrios, aunque ésta no es un hecho resultante de otra razón que no sea la de una especie de redondeo. Esto, a pesar de todo, difiere de los resultados arrojados por AB, quienes en su modelo continuo visualizan la unicidad del equilibrio. Así, la conclusión general de este capítulo es que, debido a la ausencia de conocimiento común de la aparición de la burbuja, el no saber si los demás saben o no, es lo que posibilita que agentes racionales no puedan coordinarse y la burbuja se mantenga. Esto es, el precio puede alejarse de los fundamentales, aun bajo la presencia de agentes racionales. Esto no había sido demostrado para el caso de un entorno discreto y aquí se logró. La anterior es una conclusión similar a la que se desprende del trabajo de AB, por lo que ahora se puede asegurar que ella es válida tanto en un entorno continuo como en uno discreto, no bien, en éste último se puede presentar la multiplicidad de equilibrios, aunque por razones estrictamente elementales.

Ejemplo	1	2	3	4	5	6
$P$	0.1	0.08	0.06	0.05	0.01	0.00000001
$K$	7	7	7	7	7	7
$G$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$R$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\bar{\tau}$	15	15	15	15	15	15
$q$	0.9	0.92	0.94	0.95	0.99	0.99999999
$S$	1.18181818	1.18181818	1.18181818	1.18181818	1.18181818	1.18181818
$\beta(k)$	0.68944013	0.68944013	0.68944013	0.68944013	0.68944013	0.68944013
$\beta^*$	0.80262015	0.850295	0.9013395	0.92819294	1.04514849	1.07692305
$\bar{\beta}$	0.91839064	0.91839064	0.91839064	0.91839064	0.91839064	0.91839064
Espera(s) de eq	3, 4, 5.	5, 6, 7, 8, 9.	7, 8, 9.	9	10	10
Tipo de espera	Endo	Endo	Endo	Exo	Exo	Exo

Ejemplo	7	8	9	10	11	12
$P$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$R$	6	5	1	7	7	7
$G$	0.3	0.3	0.3	0.31	0.33	0.35
$R$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\bar{\tau}$	15	15	15	15	15	15
$Q$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$S$	1.18181818	1.18181818	1.18181818	1.19090909	1.20909091	1.22727273
$\beta(k)$	0.6329747	0.56624283	0.15384614	0.7056597	0.73527966	0.76154171
$\beta^*$	0.80262015	0.63001538	0.15384615	0.83631795	0.90219333	0.96611685
$\bar{\beta}$	0.91839064	0.91839064	0.91839064	0.92725204	0.9420417	0.95366771
Espera(s) de eq	2, 3.	1, 2.	0, 1.	4, 5, 6.	6, 7, 8, 9.	10
Tipo de espera	Endo	Endo	Endo	Endo	Endo	Exo

Ejemplo	13	14	15	16	17	18
$p$	0.1	0.1	0.1	0.1	1E-11	0.4
$k$	4	4	7	7	10	10
$g$	0.33	0.35	0.35	0.35	0.99999999	0.99999999
$r$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.00000001	0.00000001
$\bar{\tau}$	15	15	8	5	15	15
$q$	0.9	0.9	0.9	0.9	1	0.6
$S$	1.20909091	1.22727273	1.22727273	1.22727273	1.99999988	1.99999988
$\beta(k)$	0.532088007	0.559206008	0.761541715	0.761541715	0.999023437	0.999023437
$\beta^*$	0.59471429	0.63685185	0.96611685	0.96611685	5.00000011	1.24244165
$\bar{\beta}$	0.9420417	0.95366771	0.80570066	0.64083452	0.99996948	0.99996948
Espera(s) de eq	1, 2.	1, 2.	3	1	15	13
tipo de espera	Endo	Endo	Exo	Exo	Exo	Exo

Cuadro 1. Ejemplos de algunos valores parametrales y los equilibrios correspondientes.

Nota: para verificar que en todos los ejemplos se cumple la restricción que se fijó sobre los parámetros, para que los agentes no vendan antes de enterarse de la burbuja, en el cuadro aparecen los valores que toma  $\beta(k)$ . Debe ser que  $\beta(k) < \beta^*$ , tal como lo señala el último párrafo de la Sección 2.



Segundo artículo

**Burbujas y rompimientos en un entorno discreto:  
el modelo con un agente líder**

# Burbujas y rompimientos en un entorno discreto: el modelo con un agente líder

## 1. Introducción y relación con la literatura

En el primer artículo de esta serie de tres se modeló en un entorno discreto la posibilidad de aparición de burbujas especulativas. Ahí se supuso que si bien todos los agentes activos participantes (cuyo conjunto se le denominó  $I$ ) tenían diferente información, *a priori* se les podía considerar como similares, pues ninguno de ellos conocía cómo era su información respecto a la del resto, además de que todos usaban la misma función de distribución para estimar el nacimiento de la burbuja.

En el presente artículo, segundo de la serie, se lleva a cabo la introducción a dicho modelo de un agente diferente al resto de los agentes  $I$ . No sólo lo es en lo que hace al momento en que despierta, sino que además éste poseerá una distinta función de probabilidad para enterarse de la divergencia de precios que da nacimiento a la burbuja. Habitualmente, el parámetro principal de su función será tal que la naturaleza le otorgue una mayor probabilidad de despertar con más antelación. Esto se debe a su gran dotación de información, que si bien es enorme, no necesariamente es la mayor. Pero hay una diferencia más: se supondrá que por alguna razón este agente, que por estas razones será aquí nombrado como *el líder*, tiene un poder extraordinario que hace que su venta individual sí sea observable y que además ella detone un proceso que conduzca al rompimiento de la burbuja. Sobre este supuesto no hay mucho que decir en términos de su dosis de realismo, pues en los mercados financieros es muy usual que esto suceda.

El propósito de introducir a dicho personaje en el modelo obedece a la inquietud de averiguar qué pasa con los nuevos equilibrios del modelo, en comparación con los que se obtienen sin su presencia. En particular, es de especial interés saber cómo se comportan los agentes ante la amenaza de que este líder se percate de la burbuja, venda y la burbuja se reviente.

Se debe pensar por ejemplo en un mercado cuyo precio no muestra señal alguna de un eventual desplome, pero que cuando algún agente reconocido por su enorme dotación de información se sale de él, todos los agentes propietarios del activo en cuestión, pero con información nula, intentan hacer uso de la información del líder y advierten que si él vende debe ser por algo. Así, ellos también venden; lo imitan.

La literatura en la que se puede encuadrar al presente artículo es la misma que la que ya fue señalada para el primero de la serie. En términos generales, se puede decir que sigue la línea trazada por Abreu y Brunnermeier (2003), que supone agentes racionales, bien informados colectivamente, pero que la revelación de la existencia de la burbuja para ellos va siendo secuencial. No obstante, aquí en este trabajo resulta esencial la existencia de cierta masa de agentes que escapan del marco de la racionalidad, pues como ya se señaló, imitan la conducta del agente líder.

En el tema de la heterogeneidad de los agentes, al trabajo de Hommes (2006) debe ser de lectura obligada para el interesado. Se trata un *survey* de trabajos vinculados a dicha heterogeneidad y aunque el común denominador de ellos es trabajar la dinámica del comportamiento de los agentes, sí puede ayudar al lector a familiarizarse más con este tipo de literatura.

Este artículo se ubica muy cerca de dos artículos que tratan una cuestión muy similar.

Corsetti *et al.* (2004) estudian cómo la presencia de un inversionista enorme afecta las estrategias de los pequeños inversionistas. En un modelo que versa sobre paridades cambiarias, los autores establecen un marco donde un inversionista grande cohabita con un continuo de pequeños inversionistas. La simple presencia del primero condiciona la estrategia de venta de los pequeños agentes. Ahí se explora también la posibilidad de que la estrategia de este agente sea visible. Se analizan dos casos, uno cuando el agente grande está mejor informado que los pequeños, y otro es la situación opuesta. Los autores concluyen con algo parecido a lo que ocurre en este modelo: como regla general, la presencia del agente grande aumenta la incidencia de los ataques contra un tipo de cambio fijo (que aquí podría ser visto como ventas). Ahí también se

toca un tema crucial en el presente modelo: la actuación de este gran inversionista puede ser tomada por los agentes pequeños como un elemento de coordinación. Los autores formulan dos preguntas claves respecto a la interrelación de ambos tipos de agentes: a) ¿los agentes pequeños se vuelven más agresivos con la presencia del grande? b) ¿la rentabilidad del colapso de la paridad aumenta cuando el grande está en el mercado? Una de las grandes conclusiones del trabajo es que si el agente grande está poco informado respecto a los pequeños, ese efecto de que los pequeños se vuelven más agresivos es casi nulo. Incluso, se señalan ahí situaciones en que la presencia del grande puede llegar a tener el resultado opuesto al habitual: hacer los ataques menos probables.

El segundo artículo que está íntimamente ligado al tema principal del presente modelo es justamente de Brunnermeier y Morgan, (2006). Ellos utilizan el mismo trabajo del que parte el primer artículo del que se compone esta tesis (AB, 2003) para demostrar que suponiendo un número finito de inversionistas y permitiendo agrupamiento de la información, la espera óptima aumenta respecto a aquellos juegos en los que sólo hay un continuo de agentes y no hay agrupamiento de la información. Su trabajo tiene, como principales diferencias respecto al de AB, i) el número de jugadores, ii) la transparencia de los movimientos de tales jugadores y iii) la variación en el “tamaño” de la información de los jugadores, lo cual hace un caso especial al modelo original de AB. Uno de los resultados de este trabajo consiste en que cuando los movimientos son observables, se presenta una conducta de rebaño entre el resto de los jugadores. Vale decir que en ese modelo también se supone una duración máxima del juego, que está dada por  $t_0 + \bar{\tau}$ , donde  $\bar{\tau}$  es conocida por todos los agentes participantes. Este punto controversial fue discutido en el primer artículo de esta serie. También ahí se presupone que existe simetría entre los agentes, igual que en este trabajo. Otro rasgo en común es que las acciones de los agentes son no observables, aunque también se acepta la posibilidad de acciones observables.

## 2. El modelo

### 2.1 Síntesis del modelo sin líder

En las siguientes líneas se realiza una síntesis del modelo discreto que sirve de marco para la caracterización de burbujas especulativas, mismo que fue desarrollado en el primero de los tres artículos de esta serie. Si se quiere tener una visión más detallada debe acudir a él.

Antes de cierta fecha  $t = 0$ , el precio de algún activo coincide con su valor fundamental. Éste crece normalmente a una tasa similar a la tasa de interés para instrumentos libres de riesgo,  $r$ . Justo en  $t = 0$ , y como consecuencia de algún impacto positivo en los fundamentales de la o las empresas detrás de dicho, su precio comienza a crecer a la tasa mayor  $g$ . Como el transcurrir del tiempo se mide en intervalos discretos, el proceso de precios estará dado por:

$$P_t = (1 + r)^t \text{ hasta antes de } t = 0 \text{ (normalizado),}$$

$$P_t = (1 + g)^t \text{ para } t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

con  $0 < r < g < 1$ , y  $P_t$  el precio en el período  $t$ .

En algunos períodos siguientes a  $t = 0$ , el precio coincide con su valor fundamental. No obstante, ambos empiezan a divergir a partir de un instante posterior  $t_0$ . Después de ahí, el precio es mantenido ficticiamente en  $P_t = (1 + g)^t$  por los agentes conductuales (*behavioral traders*), quienes no se percatan inmediatamente de que el precio mayor tiene ya un contenido meramente especulativo.

Así, para  $t \geq t_0$ , el valor fundamental será  $P_t \left( - \beta(t - t_0) \right)$ , con:  $\beta \left( - t_0 \right) = 1 - \left( \frac{1 + r}{1 + g} \right)^{t - t_0}$

Para que el precio retorne a sus fundamentales, es preciso que cierto número de agentes poseedores de acciones venda. Las ventas individuales no sólo son inofensivas, sino también son imperceptibles (salvo la que lleve a cabo el líder que, como se dirá más adelante, no es inofensiva y sí es perceptible). Específicamente, se supone aquí que se requiere vendan al menos

$k$  de los agentes participantes directamente,  $N$ . Esto se debe a que es precisamente  $k$  la capacidad de absorción de los agentes conductuales. Se supone también que por razones exógenas ésta tronará invariablemente justo después del período  $t_0 + \bar{\tau}$ , ya que por alguna circunstancia no puede tener un tamaño superior a  $\bar{\beta} = \beta(\bar{\tau})$ .

Otro supuesto consiste en que un conjunto de  $m$  diferentes tipos de agentes,  $M$ , son propietarios de acciones. Sin embargo, de ellos sólo participa activamente un conjunto  $N \subseteq M$  de  $n \leq m$  tipos. Ellos son los que tienen a su alcance alguna forma de conocer el momento de la divergencia. Después de que  $n$  agentes se percatan de la desviación, todo el conjunto  $N$  tendrá conocimiento del hecho, por lo que el lapso  $[t_0, t_0 + n - 1]$  representará la “ventana de conciencia” (“*awareness window*”), ya que se supone que desde  $t_0$  un tipo de agentes se va percatando en cada momento. Cuando se llega a  $t_0 + n - 1$ , todos los agentes con información saben de la divergencia, pero nadie sabrá que todos a su vez ya lo saben.

Por otro lado,  $t_0$  es desconocido para los agentes. Lo único que saben es que se trata de una variable aleatoria discreta distribuida geoméricamente, por lo que su función de probabilidad es:

$$prob_{t_0}(t_0) = pq^{t_0-1}, \quad \text{para } t_0 = 1, 2, 3, \dots \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p.$$

Un elemento esencial del modelo consiste en la heterogeneidad de los agentes en cuanto a su nivel de información: quien se entere de inmediato será quien tenga la mejor información. Aquí se ha de suponer que la naturaleza concede a todos los agentes (salvo al líder, del cual se hablará posteriormente) la misma probabilidad de ser los mejor informados, de tal suerte que para  $t_0$  dado se tendrá:

$$prob(Y = t_i | X = t_0) = \frac{1}{n}, \quad \text{para } Y \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + n - 1\},$$

donde  $Y$  representa la variable aleatoria que da cuenta del “despertar” del agente  $i$ , en tanto que  $X$  representa la v. a. del momento de la divergencia.

## 2.2 Probabilidades<sup>13</sup>

Sea  $Z$  la variable aleatoria que indica el momento en el que el líder despierta y sea  $t_A$  tal instante.

Se habrá de suponer aquí que:

$$\text{prob} \{ Z = t_A \mid X = t_0 \} = \frac{\alpha(1-\alpha)^{t_A-t_0}}{1-(1-\alpha)^n}, \quad (1)$$

con  $t_A \in \{t_0+1, \dots, t_0+n-1\}$ , y  $X$  es la variable aleatoria que da cuenta del instante de la divergencia, que para este caso se da en  $t_0$ .

Esta forma funcional ha sido elegida pues intenta modelar para el agente líder qué tan fuerte es tal posición de liderazgo en la información, pero que pueda caracterizar todo un rango cuyos extremos son, por un lado, que el líder tenga esté en las mismas condiciones que cualquiera de los otros agentes, y por otro, que el líder esté en condiciones inmejorables de recibir información.

El parámetro  $\alpha$  refleja en relación directa el nivel de calidad y/o cantidad de información del líder, a quien por comodidad se denotará aquí como  $A$ . Esta forma de modelar a dicho líder, aunque complica el álgebra necesaria para resolver el modelo, tiene como su principal bondad la flexibilidad. Si por ejemplo se tuviera que  $\alpha$  es extremadamente chica, entonces la función de probabilidad del instante de la divergencia, tomando como dado el momento en que  $A$  despierta, habrá de converger a una uniforme como la de los agentes  $I$ <sup>14</sup>.

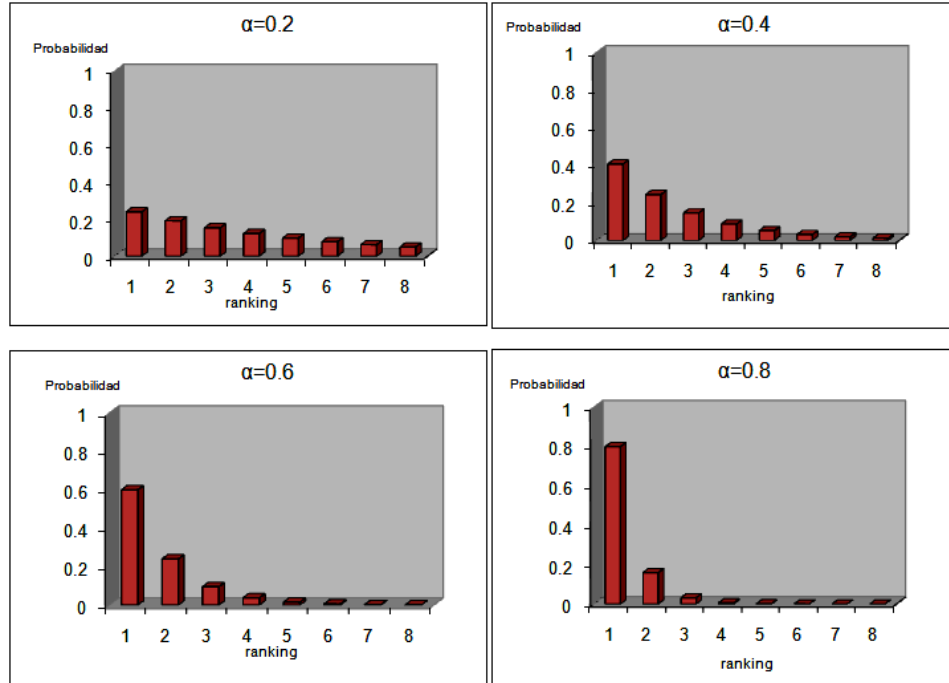
---

<sup>13</sup> Ver el Apéndice al final (A.1).

<sup>14</sup> Para que esto sea cierto, se debe tener que si  $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\alpha(1-\alpha)^{t_A-t_0}}{1-(1-\alpha)^n} \rightarrow \frac{1}{n}$ . Puesto que tanto el numerador como

el denominador de la anterior expresión se hacen cero al evaluar directamente el límite, debe usarse la Regla de

En el caso de que  $\alpha \rightarrow 1$ , puede verse en la ecuación (1) que  $prob\{t_A | X = t_0\} \rightarrow 1$ . Como referencia, recuérdese que en el caso de los agentes  $I$ , tal probabilidad es  $prob\{t_1 | X = t_0\} = \frac{1}{n}$ , lo cual se explica como que dentro de los  $n$  agentes, cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ser enterado en cada uno de los rankings.



Gráfica 1. Función de probabilidad para el líder.

No obstante, para efectos de simplificación, aquí se supondrá que  $\alpha \in (0, 1]$ .<sup>15</sup> El parámetro  $p$  (con  $p \in (0, 1]$ ) fue introducido en el primer artículo y es el que alimenta a la función de probabilidad que se encarga de indagar el período en el cual la burbuja nació. En la Gráfica 1 se muestra esta función de probabilidad para cuatro niveles de  $\alpha$ . Cuando este parámetro es

L'Hôpital. Derivando ambos respecto a  $\alpha$  y procesando el resultado, quedará:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha(1-\alpha)^{t_A-t_0}}{1-(1-\alpha)^n} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \alpha(1-\alpha)^{t_A-t_0}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial (1-(1-\alpha)^n)}{\partial \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha)^{t_A-t_0-1} (-\alpha - \alpha(t_A-t_0))}{n(1-\alpha)^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

<sup>15</sup> Este supuesto simplifica notablemente el análisis, pues ayuda a que las funciones de pago esperado sean más tratables, sin perder generalidad.



pequeño, como en la parte superior izquierda, la probabilidad de que el líder despierte cerca de la creación de la burbuja es relativamente baja, en tanto que cuando  $\alpha$  es alta, la distribución se va degenerando hacia el caso en que el líder despierta de inicio.

Ahora procede obtener la función de probabilidad para el momento de divergencia, dado que el líder despierta en  $t_A$ , que se denotará  $\phi_A(t_0 | t_A)$ . Utilizando la Regla de Bayes:

$$\phi_A(t_0 | t_A) = \Pr(Z = t_0 | X = t_A) = \frac{\Pr(Z = t_0 | X = t_0) \Pr(X = t_0)}{\Pr(Z = t_A)} \quad (2)$$

Usando (1) y el supuesto de que  $X \sim Geom(p)$ , el numerador de (2) quedará:

$$\Pr(Z = t_0 | X = t_0) \Pr(X = t_0) = \frac{\alpha(1-\alpha)^{t_A-t_0}}{1-(1-\alpha)^n} pq^{t_0-1} \quad (3)$$

Para el denominador se usa la Ley de la Probabilidad Total:

$$\Pr(Z = t_A) = \Pr(Z = t_A | X = t_A - n + 1) \Pr(X = t_A - n + 1) + \\ + \Pr(Z = t_A | X = t_A - n + 2) \Pr(X = t_A - n + 2) + \dots + \Pr(Z = t_A | X = t_A) \Pr(X = t_A)$$

Esto es así debido a que si el líder despierta en  $t_A$ , desde su perspectiva deberá ser que:

$$t_0 \in \{t_A + n - 1, t_A + n - 2, \dots, t_A\}$$

Haciendo la sustitución:

$$\Pr(Z = t_A) = \frac{\alpha(1-\alpha)^{t_A-(t_A-n+1)}}{1-(1-\alpha)^n} pq^{t_A-n} + \frac{\alpha(1-\alpha)^{t_A-(t_A-n+2)}}{1-(1-\alpha)^n} pq^{t_A-n+1} + \dots + \frac{\alpha(1-\alpha)^{t_A-t_A}}{1-(1-\alpha)^n} pq^{t_A-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha \left(1 - \alpha\right)^{t_A - 1} p q^{t_A}}{1 - \left(1 - \alpha\right)^n} \sum_{w=1}^n \left(\frac{1 - \alpha}{q}\right)^w = \frac{\alpha \left(1 - \alpha\right)^{t_A - 1} p q^{t_A}}{1 - \left(1 - \alpha\right)^n} \left( \frac{\left(\frac{1 - \alpha}{q}\right) - \left(\frac{1 - \alpha}{q}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1 - \alpha}{q}\right)} \right). \\
\therefore \Pr \left\{ \mathcal{R} = t_A \right\} &= \frac{\alpha p q^{t_A}}{1 - \left(1 - \alpha\right)^n} \left( \frac{1 - \left(\frac{1 - \alpha}{q}\right)^n}{\alpha - p} \right). \tag{4}
\end{aligned}$$

De (3) y (4) en (2):

$$\phi_A \left( \mathcal{R}_0 \mid t_A \right) = \frac{\left(1 - \alpha\right)^{t_A - t_0} q^{n - 1 - \left(t_A - t_0\right)} \left(\alpha - p\right)}{q^n - \left(1 - \alpha\right)^n}.$$

Con algo de álgebra:

$$\phi_A \left( \mathcal{R}_0 \mid t_A \right) = \frac{\left(\frac{1 - \alpha}{q}\right)^{t_A - t_0} \left(\alpha - p\right)}{q \left[ 1 - \left(\frac{1 - \alpha}{q}\right)^n \right]}. \tag{5}$$

Para mayor comodidad, a partir de aquí (y como se hizo en la Gráfica 1), las funciones de probabilidad serán manejadas en términos de ranking, usando para ello que  $a = t_A - t_0 + 1$  será el ranking o posición del líder. Sea  $R_A(a)$  la probabilidad de que  $A$  sea el  $a$ -ésimo agente en despertar. Así<sup>16</sup>:

---

<sup>16</sup> Aquí se pone de manifiesto nuevamente la importancia del supuesto de que  $\alpha > p$ . Si por ejemplo  $\alpha = p$ , (6) estaría indefinida. Si para evitar esto se hace  $\alpha = p + \varepsilon$ , con  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dicha función quedaría prácticamente como una uniforme. Aún más, si  $\alpha < p$ , (6) diría que el líder tiene una mayor probabilidad de ocupar los últimos rankings. Esto, aunque es posible matemáticamente (no bien complica las funciones a maximizar), no es congruente con el perfil de alguien que tiene una reputación de gran acceso a la información.

$$R_A(a) = \frac{\alpha - p}{q} \frac{\left(\frac{1-\alpha}{q}\right)^{a-1}}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{q}\right)^n} \quad \text{para } a \in \{2, \dots, n\}. \quad (6)$$

Incluso, si para ahorrar notación se define a  $v \equiv \frac{1-\alpha}{q}$ , entonces se tendrá finalmente que:

$$R_A(a) = \frac{1-v}{1-v^n} v^{a-1} \quad \text{para } a \in \{2, \dots, n\}. \quad (7)$$

Es tiempo de combinar las dimensiones en que operan los agentes  $I$  y el agente líder  $A$ . Para el modelo en el que cohabitan ambos tipos de agentes, ahora será necesario encontrar la función de probabilidad del evento en el que  $A$  ocupa el ranking  $a$ , y al mismo tiempo el agente representativo de  $I$  ocupa el lugar  $b$ , con  $b = t_i - t_0 + 1$ . Es preciso hacer esto en virtud de que cuando cada uno de los agentes  $I$  despierta, las primeras dos preguntas que se formula son: ¿qué ranking tengo? y ¿qué ranking tiene  $A$ ?

Aquí se supondrá que en algún instante pueden (de hecho *deben*) despertar dos agentes: el líder y algún agente  $I$ . Desde luego, no podrán despertar al unísono dos agentes  $I$ . En realidad ahora se tendrán  $n + 1$  agentes,  $n$  pertenecientes a  $I$  y el líder  $A$ . Para los agentes  $I$ , la función de probabilidad del nacimiento de la burbuja respecto de su propio despertar seguirá siendo (en términos de ranking):

$$R_i(b) = \frac{pq^{n-b}}{1 - q^n}. \quad (8)$$

Ahora sí se deben conjugar las creencias que  $i$  tiene sobre sí con las que tiene respecto a  $A$ . Sea  $R_i(a, b)$  la función de probabilidad que  $i$  asigna, de acuerdo con  $t_i$ , al hecho conjunto de que  $A$  ocupe el  $a$ -ésimo lugar y él mismo el  $b$ -ésimo. Entonces:

$$\begin{aligned}
R_i(a, b) &= \Pr\{X = t_i - b + 1, Z = t_i - (b - a) | Y = t_i\} \\
&= \frac{\Pr\{X = t_i - b + 1, Z = t_i - (b - a), Y = t_i\}}{\Pr\{Y = t_i\}} \\
&= \frac{\Pr\{Y = t_i\} \Pr\{X = t_i - b + 1 | Y = t_i\} \Pr\{Z = t_i - (b - a) | X = t_i - b + 1\}}{\Pr\{Y = t_i\}}.
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
R_i(a, b) &= \Pr\{X = t_i - b + 1 | Y = t_i\} \Pr\{Z = t_i - (b - a) | X = t_i - b + 1\} \\
&\Rightarrow R_i(a, b) = R_i(b) \Pr\{Z = t_i - (b - a) | X = t_i - b + 1\}
\end{aligned} \tag{9}$$

Luego, usando (1):

$$\begin{aligned}
\Pr\{Z = t_i - (b - a) | X = t_i - b + 1\} &= \frac{\alpha(1 - \alpha)^{t_i - (b - a) - (t_i - b + 1)}}{1 - (1 - \alpha)^n} \\
&\Rightarrow \Pr\{Z = t_i - (b - a) | X = t_i - b + 1\} = \frac{\alpha(1 - \alpha)^{a-1}}{1 - (1 - \alpha)^n}
\end{aligned} \tag{10}$$

Así que sustituyendo (8) y (10) en (9), se tendrá que:

$$R_i(a, b) = \frac{pq^{n-b}}{1 - q^n} \frac{\alpha(1 - \alpha)^{a-1}}{1 - (1 - \alpha)^n}, \tag{11}$$

para  $a, b \in \{2, \dots, n\}$  y cero en otro caso.

Obviamente, debe ser que  $\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n R_i(a, b) = 1$ . Esto se comprueba muy fácilmente.

Es preciso recalcar que la anterior función de probabilidad será usada sólo por los agentes  $I$ .  $A$  no la usará por una simple razón: al líder sólo le habrá de interesar saber quién es él mismo, qué ranking tiene, pues los demás puestos serán necesariamente ocupados por algún miembro cualquiera de  $I$ .

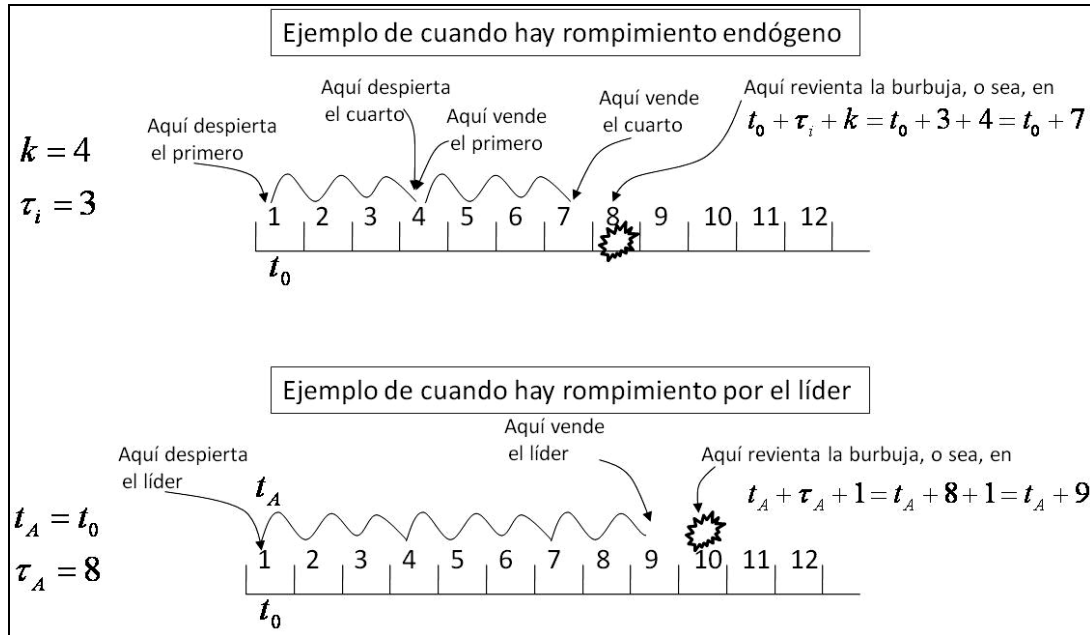
### 2.3 Pagos y estrategias

Luego de explorar el terreno de las probabilidades, sigue ahora entrar en el de los pagos que habrá de recibir cada agente al jugar determinada estrategia, si el resto de ellos presenta un tiempo de espera dado. Sea  $\tau = \langle \tau_i, \tau_A, \tau_{I-i} \rangle$ , el conjunto de estrategias de los agentes del juego. Éste conjunto está compuesto por  $\tau_i$ , que es la estrategia de espera de  $i$  (el representativo de  $I$ ), por  $\tau_A$ , la del líder y por  $\tau_{I-i}$ , la del resto de los agentes.

Por lo que concierne al rompimiento de la burbuja, en este contexto éste se puede dar por alguna (o algunas) de las siguientes tres razones:

- i) *Rompimiento endógeno*: la burbuja estalla al instante siguiente en que  $k$  agentes pertenecientes a  $I$  venden, o sea, en  $t_0 + k + \tau_i$ .
- ii) *Rompimiento precipitado por el líder*: el precio se desploma en el momento posterior a la venta por parte de  $A$ , que será en  $t_A + \tau_A + 1$ .
- iii) *Rompimiento exógeno*: Si no se rompe la burbuja por ninguna de las anteriores, lo hará invariablemente al llegar el instante  $t_0 + \bar{\tau} + 1$ , donde  $\bar{\tau}$  está dado por  $\bar{\beta} = \beta \langle \bar{\tau} \rangle$  y  $\bar{\beta}$  es el tamaño máximo posible de la burbuja.

Obsérvese el siguiente ejemplo:



Gráfica 2. Ejemplos de rompimiento endógeno y de rompimiento por el líder.

¿Por qué si en ambos casos el rompimiento se da después de la última venta (ya sea del agente  $k$ -ésimo en el ranking o bien del líder), a la condición de rompimiento endógeno no se le suma uno al final y a la del líder sí? La respuesta es tan simple como que  $k$  debe ser al menos igual a uno.

### Líder $A$

Primero se trabaja aquí sobre los pagos que  $A$  obtendría si espera  $\tau_A$  instantes y los agentes  $I$  aguardan  $\tau_i$  períodos. Se usa  $\tau_i$  y no  $\tau_{I-i}$ , como antes, porque para  $A$  todos los  $I$  son iguales, además de que es ésta la estrategia que finalmente jugarán. Para  $A$  la burbuja podrá romperse por la vía endógena (dado que no se ha roto por la exógena) si  $a > \tau_i - \tau_A + k$ . Aunque si no se rompe endógenamente, lo hará exógenamente cuando  $a > \tau + 1 - \tau_A$ .

Sea:

$$\theta_A = \min \left\{ \bar{k} + \tau_i, \bar{\tau} + 1 \right\}. \quad (12)$$

Recuérdese del primer artículo de la serie que  $S \equiv \frac{1+g}{1+r}$ , y que si el líder vende antes de que truene la burbuja obtendrá un pago de  $S^{\tau_A}$ . De hacerlo después, en cambio, su pago dependerá del tamaño que ésta llegó a tener, el cual puede ser visto indirectamente a través de su ranking: será  $S^{1-a}$ . Sea  $G_A$  su pago esperado. Se tendrá, pues, que:

$$G_A \equiv \sum_{a=1}^{\theta_A - \tau_A} R_A S^{\tau_A} + \sum_{a=\theta_A - \tau_A + 1}^n R_A S^{1-a} \quad (13)$$

La anterior expresión es simplemente la suma de los pagos cuando no se rompe la burbuja más los pagos de cuando sí lo hace, ponderado todo por las respectivas probabilidades. Introduciendo a (6) en la anterior:

$$\begin{aligned} G_A &\equiv \sum_{a=1}^{\theta_A - \tau_A} \frac{1-v}{1-v^n} v^{a-1} S^{\tau_A} + \sum_{a=\theta_A - \tau_A + 1}^n \frac{1-v}{1-v^n} v^{a-1} S^{1-a} \\ \Rightarrow G_A &\equiv \frac{1-v}{1-v^n} \left[ S^{\tau_A} \sum_{a=1}^{\theta_A - \tau_A} v^{a-1} + \sum_{a=\theta_A - \tau_A + 1}^n \left( \frac{v}{S} \right)^{a-1} \right] = \frac{1-v}{1-v^n} \left[ S^{\tau_A} \frac{1-v^{\theta_A - \tau_A}}{1-v} + \frac{\left( \frac{v}{S} \right)^{\theta_A - \tau_A} - \left( \frac{v}{S} \right)^n}{1 - \left( \frac{v}{S} \right)} \right] \end{aligned}$$

Quitando los términos que no intervienen en el proceso de optimización y reacomodando, con esta función de pago esperado, el problema del líder será:

$$\max_{\tau_A} \left[ \frac{S^{\tau_A}}{1-v} - \left( \frac{S}{v} \right)^{\tau_A} \left( \frac{v^{\theta_A}}{1-v} - \frac{\left( \frac{v}{S} \right)^{\theta_A}}{1 - \left( \frac{v}{S} \right)} \right) \right]$$

Las condiciones de primer orden serán, para el menor  $\tau_A$  posible, que se cumpla:

$$\frac{S^{\tau_A+1} - S^{\tau_A}}{1-v} - \left[ \left( \frac{S}{v} \right)^{\tau_A+1} - \left( \frac{S}{v} \right)^{\tau_A} \right] \left[ \frac{v^{\theta_A}}{1-v} - \frac{\left( \frac{v}{S} \right)^{\theta_A}}{1 - \left( \frac{v}{S} \right)} \right] \leq 0 \quad (14)$$

Simplificando, multiplicando todo por  $S^{-\tau_A}$  y factorizando el término que contiene a  $\tau_A$ :

$$\frac{S-1}{1-v} - \left( \frac{1}{v} \right)^{\tau_A} \left( \frac{S}{v} - 1 \right) \left[ \frac{v^{\theta_A}}{1-v} - \frac{\left( \frac{v}{S} \right)^{\theta_A}}{1 - \left( \frac{v}{S} \right)} \right] \leq 0$$

Con algo de álgebra, se despeja la parte que contiene a  $\tau_A$ :

$$v^{\tau_A} \geq \frac{1-v}{S-1} - \left( \frac{S}{v} - 1 \right) \left[ \frac{v^{\theta_A}}{1-v} - \frac{\left( \frac{v}{S} \right)^{\theta_A}}{1 - \left( \frac{v}{S} \right)} \right]$$

Obteniendo logaritmos y procesando con más álgebra se llega a:

$$\tau_A^*(\tau_i) = \left\lceil \theta_A(\tau_i) - 1 - \frac{\ln \left[ \frac{S-1}{S-v - (-v) S^{1-\theta_A(\tau_i)}} \right]}{\ln v} \right\rceil, \quad (15)$$

y ésta será la función de reacción del líder con respecto a la estrategia que supone emplean los agentes  $I$ .



## Agentes I

La tarea de modelar la conducta de los agentes  $I$  es mucho más complicada que la de hacerlo para el líder. Esto es así no sólo porque ahora hay tres posibles motivos de ruptura y no sólo dos, sino también porque en equilibrio la espera final de cada agente tiene que contemplar la simetría del juego, manifestada en una espera final de cada agente igual a la del resto de ellos.

En el modelo que no incluye al líder, para prever en qué circunstancias se tendría un pago alto o uno bajo, se comparaba algo que dependía de la decisión de la naturaleza (expresada en  $b$ ) con algo que estaba dado, pues dependía de los parámetros del modelo y de una supuesta estrategia del resto de los agentes. Ahora, en cambio, se debe comparar la decisión de la naturaleza expresada en  $b$  con algo que depende de los parámetros, de la supuesta combinación de estrategias dada, pero también de la naturaleza expresada en  $a$ . Desde luego, otra forma de ver esto mismo es que se sigue comparando a la decisión de la naturaleza con algo no aleatorio, sólo que esta vez la naturaleza se expresa en una forma más elaborada, a través de la combinación  $(a, b)$ .

Para que el agente representativo obtenga un pago alto ahora deberá cumplirse al mismo tiempo que:

$$b + \tau_i \leq k + \tau_{I-i}$$

$$b + \tau_i \leq \bar{\tau} + 1$$

$$b + \tau_i \leq \tau_A + a$$

O sea, que:

$$b \leq k + \tau_{I-i} - \tau_i \tag{16}$$

$$b \leq \bar{\tau} + 1 - \tau_i \tag{17}$$

$$b - a \leq \tau_A - \tau_i. \tag{18}$$

Sea  $\theta_i = \min \left[ \frac{1}{k} + \tau_{I-i}, \bar{\tau} + 1 \right]$ .

Se pueden fusionar (16) y (17), para tener sólo dos condiciones, que quedarían:

$$\begin{cases} b \leq \theta_i \\ b - a \leq \tau_A - \tau_i \end{cases} \quad (19)$$

Ante estas restricciones, se puede establecer una función de pago esperado, con miras a que sobre ella se aplique el proceso de optimización.

Considerando a las posibles combinaciones de  $(a, b)$  que la naturaleza arroje, la burbuja se puede romper, para un conjunto de estrategias  $\tau = \left( \tau_i, \tau_A, \tau_{I-i} \right)$  dado, en tres circunstancias:

- i) Cuando sólo la rompe el resto de los agentes o la duración máxima.
- ii) Cuando sólo la rompe el líder
- iii) Cuando la rompen ambas fuerzas.

En el resto de las posibilidades la burbuja permanecerá intacta.

Así, el pago esperado para el agente  $i$  si se juega la estrategia combinada  $\tau$  estaría dado por:

$$G_i(\tau) = \underbrace{\sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n \left[ \sum_{b=\theta_i-\tau_i+1}^n R_i(a,b)S^{1-b} + \sum_{b=1}^{\theta_i-\tau_i} R_i(a,b)S^{\tau_i} \right]}_{\text{Pero la rompen otros}} + \underbrace{\sum_{a=1}^{b-\tau_A+\tau_i-1} \left[ \sum_{b=\theta_i-\tau_i+1}^n R_i(a,b)S^{1-b} + \sum_{b=1}^{\theta_i-\tau_i} R_i(a,b)S^{\tau_i} \right]}_{\text{Nadie la rompe}} \quad (20)$$

El líder no la rompe
El líder la rompe

Procesando un poco la anterior ecuación se llega a:

$$G_i(\tau) = \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n \sum_{b=\theta_i-\tau_i+1}^n R_i(a,b)S^{1-b} + \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n \sum_{b=1}^{\theta_i-\tau_i} R_i(a,b)S^{\tau_i} + \sum_{a=1}^{b-\tau_A+\tau_i-1} \sum_{b=\theta_i-\tau_i+1}^n R_i(a,b)S^{1-b} \quad (21)$$

Para proseguir con el álgebra de la anterior expresión, tal como está ella no serviría del todo. La razón es la siguiente: las probabilidades  $R(a,b)$  sólo tienen un valor positivo para  $a, b \in \{2, \dots, n\}$ , mientras que para el resto de las combinaciones la probabilidad será cero. Si el método para optimizar es numérico se puede fácilmente considerar este hecho. Empero, si se procesan algebraicamente las sumas expresadas en (21), se estarían incluyendo erróneamente casos para los que las sumas, por ejemplo, se manifiesten con un límite superior que sea menor al límite inferior, o bien para límites negativos, o incluso que éstos rebasen a  $n$ . Eso habría de impedir que la optimización que se lleve a cabo sea correcta. Es por eso que se debe replantear la anterior ecuación de la siguiente forma (nótese que se han reordenado los dos primeros términos):

$$G_i(\tau) = \sum_{a=\min\{\max\{b-\tau_A+\tau_i, 1\}, n\}}^n \sum_{b=1}^{\max\{\min\{\theta_i-\tau_i, n\}\}} R_i(a,b)S^{\tau_i} + \sum_{a=\min\{\max\{b-\tau_A+\tau_i, 1\}, n\}}^n \sum_{b=\max\{\min\{\theta_i-\tau_i+1, 1\}\}}^n R_i(a,b)S^{1-b} + \sum_{a=1}^{\min\{\max\{b-\tau_A+\tau_i-1, n\}\}} \sum_{b=1}^n R_i(a,b)S^{1-b} \quad (22)$$

Al contener la expresión anterior operadores máximos y mínimos, ello obliga a separar el análisis en casos. Pero como a simple vista se puede apreciar, el número de éstos será lo suficientemente grande para hacer del método una labor tremendamente engorrosa. Es por eso que se tiene que recurrir a un conveniente atajo, mismo que se explica en los siguientes párrafos.

Si se rompe la burbuja y el agente obtiene un pago bajo, será irrelevante quién la rompió, pues el pago será el mismo:  $S^{1-b}$ . Por supuesto, no siempre será éste un pago constante, pues dependerá en relación inversa del ranking que haya tenido el agente (expresado por  $b$ ). Así, sirve concentrarse exclusivamente en los límites del primer término de (22), de las combinaciones de ranking que dan pago alto, en tanto que las que dan pago bajo se pueden obtener por diferencia respecto al total de casos. Es decir:

$$G_i(\tau) = \sum_{a=\min\{1, \max\{\tau_A+\tau_i, 1\}\}}^n \sum_{b=1}^{\max\{\min\{\theta_i-\tau_i, n\}\}} R_i(a,b) S^{\tau_i} + \left[ \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n R_i(a,b) S^{1-b} - \sum_{a=\min\{1, \max\{\tau_A+\tau_i, 1\}\}}^n \sum_{b=1}^{\max\{\min\{\theta_i-\tau_i, n\}\}} R_i(a,b) S^{1-b} \right] \quad (23)$$

Se cuentan todas las combinaciones de pago alto y el resultado se suma con el total de combinaciones, suponiendo que dan pago bajo. A eso se le restan las combinaciones de pago alto pero puestas con pago bajo, es por eso que el término entre corchetes se refiere al pago esperado cuando la burbuja revienta. Ahora ya hay menos combinaciones de casos dadas por los límites de las sumas, por lo que el análisis se vuelve más simple. Al fin y al cabo, el primer término al interior de los corchetes en nada influirá en el proceso de maximización, pues es una constante que no depende de  $\tau_i$ .

$$\text{Sea justamente } L \equiv \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n R_i(a,b) S^{1-b} = \frac{(qS)^{-n} - 1}{q^{-n} - 1} \frac{S - qS}{1 - qS}.$$

Entonces, simplemente quedará:

$$G_i(\tau) = L + \sum_{a=\min\{1, \max\{\tau_A+\tau_i, 1\}\}}^n \sum_{b=1}^{\max\{\min\{\theta_i-\tau_i, n\}\}} R_i(a,b) (S^{\tau_i} - S^{1-b}) \quad (24)$$

Luego de analizar detenidamente la gama de posibles casos, se ha notado que la clave se encuentra en comparar, por un lado,  $\theta_i$  con  $\tau_A + 1$  y con  $\tau_A + n$ , y por otro,  $\tau_i$  con  $\tau_A$ , todo de la siguiente forma, en donde se han anotado para cada caso las combinaciones que dan pago alto:

	1) $\tau_i < \tau_A$	2) $\tau_i \geq \tau_A$
1) $\theta_i < \tau_A + 1$	$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\theta_i - \tau_i} R_i(a, b) S^{\tau_i}$	No hay combinación que dé pago alto.
2) $\tau_A + 1 \leq \theta_i \leq \tau_A + n$	$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\tau_A - \tau_i} R_i(a, b) S^{\tau_i} + \sum_{a=b - \tau_A + \tau_i}^n \sum_{b=\tau_A - \tau_i + 1}^{\theta_i - \tau_i} R_i(a, b) S^{\tau_i}$	$\sum_{a=b - \tau_A + \tau_i}^n \sum_{b=1}^{\theta_i - \tau_i} R_i(a, b) S^{\tau_i}$
3) $\tau_A + n < \theta_i$	$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\tau_A - \tau_i} R_i(a, b) S^{\tau_i} + \sum_{a=b - \tau_A + \tau_i}^n \sum_{b=\tau_A - \tau_i + 1}^n R_i(a, b) S^{\tau_i}$	$\sum_{a=b - \tau_A + \tau_i}^n \sum_{b=1}^{n + \tau_A - \tau_i} R_i(a, b) S^{\tau_i}$

Cuadro 1. División de casos según las conductas de los agentes y del líder.

Siendo las anteriores las posibles situaciones que se pueden dar, es necesario realizar un análisis para cada una. En la siguiente proposición se presentan los resultados de optimizar la estrategia del agente representativo en cada circunstancia. Por comodidad, serán nombrados los casos de acuerdo al renglón y columna que ocupan en el Cuadro 1, de tal forma que por ejemplo el caso donde  $\tau_A + n < \theta$  y  $\tau_i < \tau_A$ , se reconocerá como el (3,1) y así para cada uno de ellos.

Nótese que la división de casos sigue un patrón muy intuitivo: en el primer renglón se encuentra plasmado el hecho de que la presión más importante para el agente  $i$  proviene ya sea del rompimiento exógeno o de sus similares de  $I$ , pero no del líder. Al contrario, en el tercer renglón es el líder el que le preocupa al agente representativo, y no los otros factores. Una situación intermedia se encuentra en el segundo renglón, donde ambos temores se conjugan. En cuanto a las columnas, la división se da simplemente para los casos en que el agente espera menos que el líder o en aquellos en que aguarda igual o más. Desafortunadamente no en todos los casos se puede llegar a una solución despejada.

#### Definición:

Si un agente  $i$  supone que el líder esperará  $\tau_A$  períodos para vender y él decide aguardar  $\tau_i$ , se dirá aquí que se mostrará *moderado respecto a A*, si  $\tau_i < \tau_A$ . Por el contrario, si  $\tau_i \geq \tau_A$ , se dirá que se mostrará *ambicioso respecto a A*.

Proposición 1: Si algún agente cualquiera perteneciente a  $I$ , conjetura que el resto de los agentes pertenecientes a  $I$  esperará  $\tau_{1-i}$  instantes para vender cuando se percata de la existencia de la burbuja, mientras que de igual forma conjetura que el agente líder esperará  $\tau_A$  instantes, para cada uno de los siguientes casos, el agente referido  $i$  optimizará su pago si:

i) Si  $\theta_i < \tau_A + 1$ , el agente siempre decidirá ser moderado respecto a  $A$ , y usará la estrategia de espera:

$$\tau_{i(1.1)} = \max \left\{ \tau_A - 1, \left\lfloor \frac{\ln \left( \frac{(S-1)(qS)^\theta}{pS + (qS-1)S^\theta} \right)}{\ln q} \right\rfloor \right\}.$$

ii) Si  $\tau_A + 1 \leq \theta \leq \tau_A + n$ , y el agente es moderado respecto a  $A$ , usará la estrategia:

$$\tau_{i(2.1)} = \max \left\{ \tau_A - 1, \left\lfloor \frac{\ln \left( \frac{(S-1) \left( \frac{1-(1-\alpha)^n}{pS} \right)}{H(qS-1)} \right)}{\ln q} \right\rfloor \right\},$$

Con:

$$H \equiv \frac{\alpha}{q^{\tau_A}} \left( \frac{1}{S^{\tau_A} (qS-1)[qS-(1-\alpha)]} + \frac{1}{pS(\alpha-p)} \right) - (1-\alpha)^{\theta-\tau_A} \left( \frac{1}{Sq^\theta[q-(1-\alpha)]} - \frac{1}{(qS)^\theta[qS-(1-\alpha)]} \right) + (1-\alpha)^n \left( \frac{1}{Sq^\theta[q-1]} - \frac{1}{(qS)^\theta[qS-1]} \right)$$

iii) Si  $\tau_A + 1 \leq \theta \leq \tau_A + n$ , y el agente es ambicioso respecto a  $A$ , usará la estrategia  $\tau_{i(2,2)}$ , con  $\tau_{i(2,2)}$  el menor número natural para el que se cumpla :

$$(1-\alpha)^{\tau_{i(2,2)}} \left( \frac{S(1-\alpha)-1}{S[q-(1-\alpha)]} \right) + q^{\tau_{i(2,2)}} \left( \frac{qS-1}{Sq^\theta} \left( \frac{(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{q-1} - \frac{(1-\alpha)^\theta}{q-(1-\alpha)} \right) - \frac{qS-1}{(qS)^\theta} \left( \frac{(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{qS-1} - \frac{(1-\alpha)^\theta}{qS-(1-\alpha)} \right) \right) \\ + \left( \frac{1-\alpha}{S} \right)^{\tau_{i(2,2)}} \left( \frac{\alpha}{qS-(1-\alpha)} \right) + \frac{(S-1)(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{pS} \leq 0$$

iv) Si  $\tau_A + n < \theta$  y el agente es moderado, usará  $\tau_{i(3,1)}$ , con este valor siendo el menor número natural para el que se cumpla:

$$q^{\tau_{i(3,1)}} \left( \frac{\alpha}{q^{\tau_A}} \left( \frac{qS-1}{pS(\alpha-p)} + \frac{1}{S^{\tau_A}[S-(1-\alpha)]} \right) \right) - (1-\alpha)^{\tau_{i(3,1)}} \left( \frac{[S(1-\alpha)-1](1-\alpha)^{n-\tau_A}}{Sq^n[q-(1-\alpha)]} \right) \\ - \left( \frac{1-\alpha}{S} \right)^{\tau_{i(3,1)}} \left( \frac{\alpha(1-\alpha)^{n-\tau_A}}{[qS-(1-\alpha)](qS)^n} \right) + \frac{(S-1)(1-\alpha)^n(1-q^{-n})}{pS} \leq 0$$

v) Finalmente, si  $\tau_A + n < \theta$  y el agente es ambicioso, usará  $\tau_{i(3,2)}$ , con este valor siendo el menor número natural para el que se cumpla:

$$(1-\alpha)^{\tau_{i(3,2)}} \left( \frac{S(1-\alpha)-1}{S[q-(1-\alpha)]} \right) - q^{\tau_{i(3,2)}} (qS-1) \alpha \left[ \left( \frac{1-\alpha}{q} \right)^{n+\tau_A} \frac{1}{pS(\alpha-p)} + \left( \frac{1-\alpha}{qS} \right)^{n+\tau_A} \frac{1}{(qS-1)[qS-(1-\alpha)]} \right] \\ + \left( \frac{1-\alpha}{S} \right)^{\tau_{i(3,2)}} \left( \frac{\alpha}{qS-(1-\alpha)} \right) + \frac{(S-1)(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{pS} \leq 0$$

La prueba se encuentra en el Apéndice A.2.

Usando la Proposición anterior ya es posible caracterizar la función de reacción de los agentes  $I$  respecto a lo que presumen harán el resto de los agentes  $I$  y el líder. Dados los parámetros del modelo y dada una supuesta estrategia combinada, él podrá saber en cuál de los tres renglones

principales del Cuadro 1 se encuentra. Sólo le restará definir si asume una postura de moderación o de ambición respecto al líder. La manera en que resuelve esta cuestión es muy simple: elegirá de las dos posibilidades la que le ofrezca un mayor pago esperado.

A manera de corolario de la anterior proposición, se puede establecer la función de reacción, que quedará así:

### Corolario

Sea  $\tau_i^*(\tau_A, \tau_{I-i})$  la espera óptima de  $i$  respecto a las estrategias del resto de los agentes  $I$  y de  $A$  dadas. Sea  $G_{i(h)} = G_i(\tau_A, \theta_i)_h$  el pago que obtiene  $i$  si espera  $\tau_i$  instantes y la combinación de  $\tau_A$  y  $\theta_i$  es tal que el agente se sabe está en el caso  $h$ , para  $h = (1.1), (2.2), (3.1), (3.2)$ , según lo establecido en el Cuadro 1.

I) Si  $\theta < \tau_A + 1$ , entonces  $\tau_i^*(\tau_A, \tau_{I-i}) = \tau_{i(1.1)}$ .

II) Si  $\tau_A + 1 \leq \theta \leq \tau_A + n$ , entonces  $\tau_i^*(\tau_A, \tau_{I-i}) = \tau_{i(2.1)} \Leftrightarrow G_{i(2.1)} > G_{i(2.2)}$ . En caso contrario usará  $\tau_i^*(\tau_A, \tau_{I-i}) = \tau_{i(2.2)}$ .

III) Si  $\tau_A + 1 \leq \theta \leq \tau_A + n$ , entonces  $\tau_i^*(\tau_A, \tau_{I-i}) = \tau_{i(3.1)} \Leftrightarrow G_{i(3.1)} > G_{i(3.2)}$ . En otro caso esperará  $\tau_i^*(\tau_A, \tau_{I-i}) = \tau_{i(3.2)}$ .



## 2.4 Equilibrio

Una vez que se ha definido la función de reacción del líder respecto a los agentes  $I$  y viceversa, procede concretar el equilibrio del juego.

Sea  $\tau_A^* \in \tau_A \Rightarrow \arg \max_{\tau_A} G_A(\tau_A, \tau_A)$  la estrategia que habrá de usar el líder, en función de lo que esperen los  $I$ .

Sea también  $\tau_I^*$  la estrategia de los agentes  $I$ , que resuelva:

$$\tau_I^* \in \tau_I \Rightarrow \arg \max_{\tau_I} G_I(\tau_I, \tau_A, \tau_{I-i}), \text{ tal que: } \tau_I^* = \tau_{I-i}.$$

Por lo tanto, la estrategia que arroja un Equilibrio Bayesiano Perfecto de Nash (EBPN) para el juego estará dada por:

$$\tau^* = (\tau_A^*(\tau_A^*), \tau_A^*(\tau_I^*)), \text{ tal y como han sido definidos.}$$

## 3. Ejemplo numérico y discusión de resultados

Ahora se lleva a cabo la tarea de ilustrar numéricamente los resultados obtenidos algebraicamente en las secciones anteriores. A partir de presuponer algunos conjuntos de valores para los parámetros se pueden extraer conclusiones interesantes.

Primero se presenta un ejemplo de la forma en como se da el equilibrio entre los agentes  $I$  y el agente líder  $A$ . Los valores para los parámetros que ahí se consideran son:  $n=10$ ,  $k=7$ ,  $p=0.1$ ,  $\alpha=0.12$ ,  $\bar{\tau}=15$ ,  $g=0.3$  y  $r=0.1$ . La elección de éstos obedece a que en el artículo anterior se mostró un ejemplo con parámetros similares.

En las dos primeras columnas de cada sección del Cuadro 2 aparece una serie de combinaciones de esperas, tanto del resto de los agentes  $I$  como del agente líder,

respectivamente. Ambas son tomadas como dadas por el agente representativo  $i$  y sobre esa base él elige la estrategia que le maximice su pago esperado. En la tercera columna está indicado el caso del que se trata, tal y como cuando se desarrolló la estrategia de los  $I$  fueron definidos. En la cuarta se exhibe la espera óptima de  $i$  ante cada combinación de esperas del resto de los agentes del modelo, según sea el caso.

Como se ve, para cada combinación el agente representativo  $i$  tiene una respuesta óptima. No obstante, quien está modelando el juego sabe que por motivos de simetría la espera del resto de los agentes  $I$  debe ser igual a la de  $i$ . Así, en la quinta columna aparecen señaladas las combinaciones de esperas que respetan este hecho. Precisamente de ahí habrá de salir la función de reacción de los agentes  $I$  ante cada espera del líder y seleccionando las combinaciones que presentan un “Sí” en la quinta columna es como se obtiene. Ésta se despliega en el Cuadro 3 para este conjunto de parámetros. De igual forma, ahí mismo se ha incluido la función de reacción de  $A$  respecto a la espera de  $I$ , la cual está dada por (15). Ambas son ingredientes suficientes para que al conjugarlos se pueda encontrar el equilibrio del juego.

$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I
0	0	(2,2)	1	No	0	4	(2,1)	2	No	0	8	(1,1)	2	No
1	0	(2,2)	1	Sí	1	4	(2,1)	2	No	1	8	(1,1)	2	No
2	0	(2,2)	1	No	2	4	(2,1)	2	Sí	2	8	(2,1)	3	No
3	0	(2,2)	1	No	3	4	(2,1)	2	No	3	8	(2,1)	3	Sí
4	0	(3,2)	1	No	4	4	(2,1)	3	No	4	8	(2,1)	4	Sí
5	0	(3,2)	1	No	5	4	(2,1)	3	No	5	8	(2,1)	4	No
6	0	(3,2)	1	No	6	4	(2,1)	3	No	6	8	(2,1)	4	No
7	0	(3,2)	1	No	7	4	(2,1)	3	No	7	8	(2,1)	5	No
8	0	(3,2)	1	No	8	4	(3,2)	4	No	8	8	(2,1)	5	No
9	0	(3,2)	1	No	9	4	(3,2)	4	No	9	8	(2,1)	5	No
10	0	(3,2)	1	No	10	4	(3,2)	4	No	10	8	(2,1)	5	No
$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I
0	1	(2,2)	1	No	0	5	(2,1)	2	No	0	9	(1,1)	2	No
1	1	(2,2)	1	Sí	1	5	(2,1)	2	No	1	9	(1,1)	2	No
2	1	(2,2)	1	No	2	5	(2,1)	2	Sí	2	9	(1,1)	3	No
3	1	(2,2)	2	No	3	5	(2,1)	3	Sí	3	9	(2,1)	3	Sí
4	1	(2,2)	2	No	4	5	(2,1)	3	No	4	9	(2,1)	4	Sí
5	1	(3,2)	2	No	5	5	(2,1)	3	No	5	9	(2,1)	4	No
6	1	(3,2)	2	No	6	5	(2,1)	3	No	6	9	(2,1)	5	No
7	1	(3,2)	2	No	7	5	(2,1)	3	No	7	9	(2,1)	5	No
8	1	(3,2)	2	No	8	5	(2,1)	3	No	8	9	(2,1)	5	No
9	1	(3,2)	2	No	9	5	(3,1)	4	No	9	9	(2,1)	6	No
10	1	(3,2)	2	No	10	5	(3,1)	4	No	10	9	(2,1)	6	No
$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I
0	2	(2,1)	1	No	0	6	(2,1)	2	No	0	10	(1,1)	2	No
1	2	(2,2)	2	No	1	6	(2,1)	2	No	1	10	(1,1)	2	No
2	2	(2,2)	2	Sí	2	6	(2,1)	3	No	2	10	(1,1)	3	No
3	2	(2,2)	2	No	3	6	(2,1)	3	Sí	3	10	(1,1)	3	Sí
4	2	(2,2)	2	No	4	6	(2,1)	3	No	4	10	(2,1)	4	Sí
5	2	(2,2)	2	No	5	6	(2,1)	3	No	5	10	(2,1)	5	Sí
6	2	(3,2)	2	No	6	6	(2,1)	4	No	6	10	(2,1)	5	No
7	2	(3,2)	2	No	7	6	(2,1)	4	No	7	10	(2,1)	5	No
8	2	(3,2)	2	No	8	6	(2,1)	4	No	8	10	(2,1)	6	No
9	2	(3,2)	2	No	9	6	(2,1)	4	No	9	10	(2,1)	6	No
10	2	(3,2)	2	No	10	6	(2,1)	4	No	10	10	(2,1)	6	No
$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I	$\tau_{I-i}$	$\tau_A$	Caso	$\tau_i^*(\tau_{I-i}, \tau_A)$	Equilibrio con I
0	3	(2,1)	2	No	0	7	(1,1)	2	No	0	11	(1,1)	2	No
1	3	(2,1)	2	No	1	7	(2,1)	2	No	1	11	(1,1)	2	No
2	3	(2,1)	2	Sí	2	7	(2,1)	3	No	2	11	(1,1)	3	No
3	3	(2,1)	2	No	3	7	(2,1)	3	Sí	3	11	(1,1)	3	Sí
4	3	(2,1)	2	No	4	7	(2,1)	3	No	4	11	(1,1)	4	Sí
5	3	(2,1)	2	No	5	7	(2,1)	4	No	5	11	(2,1)	5	Sí
6	3	(2,1)	2	No	6	7	(2,1)	4	No	6	11	(2,1)	5	No
7	3	(3,2)	3	No	7	7	(2,1)	4	No	7	11	(2,1)	6	No
8	3	(3,2)	3	No	8	7	(2,1)	4	No	8	11	(2,1)	6	No
9	3	(3,2)	3	No	9	7	(2,1)	5	No	9	11	(2,1)	7	No
10	3	(3,2)	3	No	10	7	(2,1)	5	No	10	11	(2,1)	7	No

Cuadro 2. Combinaciones de estrategias de todos los agentes participantes y reacción óptima de  $i$ .

Valores de los parámetros:  $n = 10$ ,  $k = 7$ ,  $p = 0.1$ ,  $\alpha = 0.12$ ,  $\bar{\tau} = 15$ ,  $g = 0.3$ ,  $r = 0.1$ .

$\tau_A$	$\tau_I^*(\tau_A)$	$\tau_I$	$\tau_A^*(\tau_I)$
0	1	0	3
1	1	1	4
2	2	2	5
3	2	3	5
4	2	4	6
5	2 y 3	5	7
6	3	6	8
7	3	7	9
8	3 y 4	8	10
9	3 y 4	9	11
10	3,4 y 5	10	11

Cuadro 3. Funciones de reacción de  $I$  (izquierda) y de  $A$  (derecha). Equilibrio del juego en las celdas grises. (mismos parámetros del cuadro anterior)

En el Cuadro 3 las primeras dos columnas son la expresión de la función de reacción de  $I$ , en tanto que las otras dos lo son de la de  $A$ . Por ejemplo, los valores del primer renglón de números de la función para  $I$  no pueden ser un equilibrio del juego. Aquí, si  $A$  espera cero instantes, lo óptimo para  $I$  será aguardar un lapso. Pero a su vez, si  $I$  aguarda un instante,  $A$  encontrará óptimo hacerlo durante cuatro períodos y no cero, como debiera ser para que esto representara un equilibrio. Algo así se puede decir para todas las combinaciones del cuadro, con excepción de las que aparecen resaltadas en gris. Ahí, si  $A$  usa una estrategia de 5,  $I$  espera 2 o 3. Pero si  $I$  espera 2 o 3,  $A$  optimizará aguardando 5, por lo que esta combinación sí resulta ser un equilibrio.

Ahora se lleva a cabo una comparación entre los resultados de este modelo, el que incluye líder, con la versión del modelo que no lo hace, el cual se desarrolla en el primer artículo de esta serie de tres. En el Cuadro 4 se confrontan los resultados de ambos modelos. A continuación se explican sucintamente algunos aspectos interesantes. El ejemplo 1 es el mismo que en el modelo sin líder se usó como punto de referencia y también es el mismo que se ilustró en los cuadros 2 y 3. Ahí, para los mismos parámetros, se obtenía una espera de equilibrio de 3, 4, o 5 instantes. Aquí, cuando se maneja un valor de  $\alpha$  de 0.12, como en la primera columna de números del dicho cuadro, se generan dos equilibrios, el primero con los  $I$  esperando 2 y el líder 5, y el segundo con 3 y 5, respectivamente. En esta situación la espera de los  $I$  se ha reducido en uno de los equilibrios a consecuencia de la introducción del líder al modelo. Ello se debe a que ahora hay un factor adicional de peligro para los  $I$ , y con ese  $\alpha$  relativamente bajo podría hacer que el

líder efectivamente venda, por lo cual ellos se toman sus reservas. Este es el resultado *normal*, por llamarle de alguna forma, de haber introducido al líder al modelo. Además de las dos amenazas que en el modelo sin líder tenía el agente representativo, ahora tiene la que le representa dicho líder. Evidentemente, el temor de que venda el líder y ello lleve a la burbuja a romperse hace que modere su espera, o al menos no la aumente.

Sin embargo, el factor más atrayente de este modelo con líder surge conforme va aumentando el parámetro  $\alpha$ , como sucede inicialmente en los ejemplos 2, 3 y 4. En el ejemplo 2 hay un equilibrio en el que ya la espera de los  $I$  es de 4. Aumentó respecto a cuando  $\alpha = 0.12$ , pero nótese que aún sigue estando la estrategia de los  $I$  “atemorizada” por el líder, pues en este ejemplo en ningún momento se alcanza la espera de 5, que es la máxima para uno de los equilibrios en el modelo sin líder. Luego, cuando  $\alpha = 0.6$ , como en el ejemplo 3, ya deja de ser válido el equilibrio en el cual la espera de los  $I$  era menor a la de cualquier equilibrio del caso sin líder, pues la más baja es de tres lapsos, comparada con dos para cuando no hay líder. Si se sigue aumentando  $\alpha$ , se llega hasta el ejemplo 4. Aquí no sólo *no* se pueden dar equilibrios en los que se tenga una espera de los  $I$  de 2, sino que incluso se llega a alcanzar la máxima espera para un equilibrio con estos parámetros, 5.

Aquí se ha ilustrado una de las conclusiones más importantes de este modelo que incluye al líder: cuando el nivel del liderazgo es bajo ( $\alpha \rightarrow 0$ ), la presencia del líder intimida a los agentes  $I$ , por lo que los conduce a reducir su espera. Sin embargo, cuando el liderazgo es alto ( $\alpha \rightarrow 1$ ), no sólo se reduce el temor que los  $I$  le tienen al líder, sino que incluso puede llegar a desaparecer, con lo que los equilibrios que se generen terminarían siendo los mismos que cuando el líder estaba ausente. Ahora el líder, en lugar de ser una amenaza, funge como un elemento coordinador de los agentes  $I$ . Algo similar ocurre en los ejemplos del 5 al 7, así como en los del 8 al 10. Aunque aparentemente esto podría ser considerado como paradójico, tiene una explicación inmediata. Al aumentar  $\alpha$  lo hace también la probabilidad de que el líder se entere primero que nadie de la burbuja, pero como también es del interés del líder montar la burbuja el mayor tiempo posible, un  $\alpha$  grande no se traduce necesariamente en una venta temprana, sino que incluso es un buen motivo para postergarla.

Por otro lado, al pasar del ejemplo 11 al 12, sólo disminuyendo un poco el parámetro  $p$ , se puede

notar que esto le beneficia no sólo a los agentes  $I$ , por poder aumentar su espera, sino que también favorece al líder<sup>17</sup>. Esto es así no sólo porque dicho movimiento en  $p$  mejora su propia condición probabilística, sino también porque él se favorece de que se mejore la de los agentes  $I$  y por ende esperen un poco más.

Finalmente, no se podía aquí dejar de someter a todos los agentes a una situación de ensueño, tal y como se hizo en el modelo sin líder. Esto se presenta en el ejemplo 13. En él, ante lo inmejorable de la situación, todos los agentes esperan 15 momentos, que es el número dado por la máxima duración de la burbuja. Pero lo más interesante viene cuando, en el ejemplo 14, alfa se reduce a niveles pequeños (pero aún mayores que  $p$ ). Esto supondría que al agente líder le podría vencer el pánico y vender. Sin embargo, esto no es del cuidado de los agentes  $I$ , puesto que no reducen en lo más mínimo su espera y gracias a ello es justamente que el líder podría no hacer efectivo su temor. Dentro de las tantas cosas que pueden estar pasando detrás de este equilibrio, una podría ser que los agentes  $I$  sepan que el líder sabe a su vez que ellos no renunciarán al manjar y por eso es que creen que no venderá.

Piénsese por ejemplo en que se tuviera un  $\alpha$  muy pequeño, de tal forma que la probabilidad de que el líder sea de los primeros en enterarse de la burbuja no sea tan grande y que a pesar de eso la realización de la naturaleza sea tal que él sea el uno en el ranking. Ante esto, sería de esperar que el líder venda anticipado, no sólo por despertar temprano, sino por que él no sabe dónde está situado en el ranking, y dicho valor de  $\alpha$  es tal que a su entender no debe confiarse mucho. Empero, ¿qué pasa si él *sabe* (en probabilidad) que es de los primeros? En este caso su confianza crecerá y tardará un poco más en vender, ello a pesar de que pueda darse una remota realización que lo ubique incluso en el último lugar. Aquí no estarán ligados los eventos de despertar temprano y de vender temprano. Por supuesto, no es lo mismo que el líder sea el primero en el ranking y tenga un alfa chico a que lo siga siendo pero con un alfa grande. Esto es así porque, como es obvio, él no conoce la realización de la naturaleza, sino que usa a  $\alpha$  para estimarla.

---

<sup>17</sup> Por ahora déjese en que esto les beneficia, aunque puede argumentarse que no necesariamente, pues a algunos de ellos la burbuja les tronará y los terminará dañando en mayor medida

Parámetro/ejemplo	1	2	3	4	5	6	7
$\rho$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.08	0.08	0.08
$k$	7	7	7	7	7	7	7
$g$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$r$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\bar{r}$	15	15	15	15	15	15	15
$\tau_i^*$ (sin líder)	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5	5, 6, 7, 8, 9	5, 6, 7, 8, 9	5, 6, 7, 8, 9
tipo de espera	Endo	Endo	Endo	endo	endo	Endo	Endo
$\alpha$	0.12	0.3	0.6	0.9	0.1	0.3	0.9
$\tau^* = (\tau_I^*, \tau_A^*)$	(2,5) (3,5)	(2,6) (3,7) (4,8)	(3,8) (4,9)	(3,9) (4,10) (5,11)	(3,5) (4,6)	(3,7) (4,8) (5,9)	(5,11) (6,12) (7,13) (8,14) (9,15)
Parámetro/ejemplo	8	9	10	11	12	13	14
$\rho$	0.01	0.01	0.01	0.1	0.05	1E-11	1E-11
$k$	7	7	7	5	5	10	10
$g$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.9999999	0.9999999
$r$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.00000001	0.00000001
$\bar{r}$	15	15	15	15	15	15	15
$\tau_i^*$ (sin líder)	10	10	10	1, 2	3, 4, 5	15	15
tipo de espera	Exo	Exo	Exo	endo	endo	Exo	Exo
$\alpha$	0.2	0.3	0.9	0.2	0.2	0.3	0.0001
$\tau^* = (\tau_I^*, \tau_A^*)$	(7,10) (8,11) (9,12)	(10,13)	(10,15)	(1,3) (2,4)	(2,4) (3,5)	(15,15)	(15,15)

Cuadro 4. Comparación de resultados con el modelo sin líder.

Si ya está claro que el “madrugar” del líder no se traduce necesariamente en su venta temprana, ahora se debe contestar cómo es que los agentes  $I$  hacen uso de este hecho para aumentar su espera cuando aumenta  $\alpha$ . Un nuevo ejemplo puede ser de gran utilidad. Considérese el siguiente conjunto de parámetros, seleccionados convenientemente para hacer más elocuente la explicación:  $n = 10$ ,  $k = 7$ ,  $p = 0.19$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\bar{r} = 15$ ,  $g = 0.5$  y  $r = 0.1$ .

Si se calcula el equilibrio del juego mediante las fórmulas obtenidas anteriormente, éste será  $\tau^* = (\tau_I^*, \tau_A^*) = (10, 13)$ . Esto se puede verificar, como ya se decía, primeramente suponiendo que el agente líder espera 13 instantes y metiendo esa información en la función de

reacción del agente  $i$ . Ella tendrá que decirnos no sólo que 10 es la reacción óptima, sino que debe ser también que 10 sea el supuesto que  $i$  tomó para la conducta de los agentes  $I - i$ . Después se toma como dada la espera de 10 instantes para los agentes  $I$  y se usa como insumo en la función de reacción del líder, la cual debe arrojar una espera óptima de 13.

Pues bien, el equilibrio del juego en (10, 13) es tal que ambos deciden montar la burbuja por un número estrictamente positivo de lapsos (con lo que se confirma su existencia), aunque tal número es menor que la duración máxima, que para este ejemplo está dada por  $\bar{\tau} = 15$ .

Si ahora aumenta drásticamente el valor de  $\alpha$ , desde 0.2 hasta 0.8, vale la pena desglosar el impacto que tiene este cambio en el equilibrio del juego. Como siempre sucede en este tipo de ejercicios, hay muchas historias que se pueden construir para analizar el trance de un equilibrio a otro y una de ellas es la siguiente. Si se sigue suponiendo que el líder espera 13 instantes, pero ahora  $\alpha = 0.8$ , la función de reacción de los agentes  $I$  dará ahora una espera de  $\tau_I^*(\tau_A = 13, \alpha = 0.8) = 9$  (ya equilibrada al interior de los  $I$ ). Es decir, aquí la intuición no tiene ningún acotamiento, pues como era de esperarse, *ceteris paribus*, si aumenta la probabilidad de que el líder despierte temprano, y está sirve para fijar la espera de aquél, sería prudente esperar que su venta se diera más temprano que antes, por lo que es óptimo para los agentes  $I$  acortar su espera.

Pero viene ahora el otro lado del juego, la estrategia del líder. A pesar de que los agentes  $I$  esperan sólo 9 y no 10, como antes, el mayor valor de alfa hace que la estrategia de  $A$  se extienda. Es decir, ahora  $\tau_A^*(\tau_I = 9, \alpha = 0.8) = 15$ . Sin importar que los agentes seguidores moderaron su espera y esto represente de alguna forma una amenaza para el líder, la mayor confianza que le representa el alfa mayor se impone y su espera termina creciendo. Pero aquí no concluye la historia, ya que se debe introducir esta nueva espera del líder en la función de reacción de los  $I$  para determinar su nueva estrategia. Ahora será que  $\tau_I^*(\tau_A = 15, \alpha = 0.8) = 11$ . Sucesivamente, se tendrá que meter este nuevo nivel de estrategia de los  $I$  en la función del líder, lo que dará:  $\tau_A^*(\tau_I = 11, \alpha = 0.8) = 15$ . Aquí sí culmina la historia, pues ya se ha llegado al EBPN.



Al final, aunque parezca paradójico, la espera de equilibrio de los agentes  $I$  aumentó gracias a tener un alfa mayor, respecto a cuando se tiene un alfa menor. La conclusión que del ejercicio numérico se puede extraer (con lo limitado que ello pueda llegar a ser) es que, ciertamente, a los agentes  $I$  podría no convenirles tener a un líder que despierte temprano, pues ello podría precipitar adelantadamente la burbuja. No obstante, el que el líder tenga una gran certeza de ser de los primeros hace que su espera se prolongue y esto puede favorecer a los agentes  $I$ . Si termina siendo tarde o temprano ello dependerá de la realización del ranking del líder.

Lo que es cierto es que un valor alto de alfa, igual a una confianza grande para el líder, es un elemento de coordinación endógeno para todos los agentes del modelo, el cual puede provocar que la vida de la burbuja se extienda respecto a cuando alfa es chico. Por si fuera poco, a un agente  $i$  no sólo le modifica su estrategia el saber que el líder está confiado, sino que el fenómeno también pasa por otro canal: dicho agente sabe que el resto de los agentes también toma en cuenta este hecho y la espera de equilibrio al interior de los  $I$  termina aumentando.

#### **4. Conclusiones**

En este trabajo ha sido desarrollado un modelo discreto de burbujas especulativas, en el cual existe un agente líder con atribuciones especiales: es un agente que se diferencia de los otros (miembros de un conjunto  $I$ ) tanto en la función de probabilidad de tener determinado ranking como en el efecto que desencadena su venta.

Se caracterizó por un lado la estrategia que habrá de emplear el líder ante cada hipotética espera de los miembros del conjunto  $I$ . Evidentemente, al líder no le interesa cuál sea el agente representativo, es decir, si bien él sabe que cada uno ocupa un ranking diferente, sabe igualmente que el desconocimiento de éstos del piso donde están parados hará que todos se comporten exactamente igual y que por lo tanto esperen lo mismo. Por otro lado, se desarrolló la estrategia del agente representativo de  $I$ , la cual supone una dificultad mayor a la del líder, pues ésta tiene que empatarse a final de cuentas con la que aquél supuso para el resto de los agentes.

A través de un conjunto de ejemplos, cada uno con diferentes valores de los parámetros, salieron a relucir algunos aspectos muy interesantes. Se vio que, considerando que el modelo de este artículo puede arrojar varios equilibrios, hay algunos que pueden ser de menor y otros de

igual espera respecto a los resultantes del modelo sin líder, elaborado en un artículo previo a éste. Una pieza clave en este tema resultó ser el parámetro  $\alpha$ , el cual da una idea de qué tan buena es la información del líder. Cuando por ejemplo  $\alpha \rightarrow 1$ , se decía en la presentación del modelo, significará que la información del líder es tan buena que cuando se origina la divergencia de precios que infla a la burbuja es casi un hecho que él será el primero en enterarse. En los ejemplos se constató que cuando alfa es relativamente baja, la espera de los agentes  $I$  es menor o igual que la que se tenía sin líder. Esto es así porque los agentes sabrán que el líder no confiará del todo en su información y tenderá a vender temprano, por lo que ellos también moderarán su espera. Sin embargo, conforme  $\alpha$  va creciendo, la espera de los agentes se va pareciendo más a como era en el modelo sin líder. ¿Por qué habría de permanecer igual la espera de  $I$ , si al aumentar la confianza en la información del líder, estos podría ser más factible que él se entera y que venda, con lo que se rompería la burbuja? La respuesta es que el líder también puede servir como un elemento de coordinación entre los agentes  $I$ . Esto que a primera vista parece ser contra intuitivo tiene una explicación lógica y su clave radica en un hecho elemental: el que el líder despierte temprano *no necesariamente* implica que éste venderá temprano.

En ausencia del líder, como ya se demostró en el primer artículo, los inversionistas montan la burbuja de manera óptima por algún lapso antes de vender. Sin embargo, al introducir al líder se adhiere al modelo un nuevo elemento, que, bajo ciertas condiciones, puede retrasar aún más la estrategia de los inversionistas para abandonar este mercado. Tal elemento (materializado en  $\alpha$ , que puede verse como el nivel de fuerza del líder) es del conocimiento de todos los agentes y puede llegar a orquestar involuntariamente una suerte de consenso en aguardar un poco más para vender. En el modelo original de AB, aparece la mención de algunos mecanismos de coordinación exógenos, como por ejemplo alguna noticia que, más allá de su contenido informativo real (que incluso podía ser muy bajo), tenía un efecto considerable en la estrategia de los agentes, sólo a través de fungir como un elemento coordinador. Empero, terminaba siendo ambigua la cuestión de cuáles noticias sí podían causar un impacto y cuáles no, pues no existía una métrica para cuantificarlas. En este modelo, por otro lado, el elemento coordinador no proviene del exterior, sino que se halla dentro del conjunto de agentes que se encuentran montando la burbuja. Es el líder.

Tercer artículo

## **Burbujas especulativas e intervención reguladora**

# Burbujas especulativas e intervención reguladora

## 1. Introducción

En aquellos escenarios en los que el precio de algún activo se aleja temporalmente de su valor, el cual está respaldado por factores estructurales, la intervención reguladora del gobierno puede ser deseable. Las distorsiones que se generan durante el proceso en que una burbuja se está inflando, pero sobre todo cuando ésta revienta, suelen ser de magnitud tal que dicha intervención puede verse como justificada.

En el primero de esta serie de tres artículos se constató que cuando el enterarse de la existencia de la burbuja es un proceso secuencial, ésta ciertamente puede tener una duración positiva, aunque ello no sucede cuando todos los agentes se enteran al mismo tiempo. En el segundo artículo fue establecido un modelo el en que cohabitaban los agentes del primer artículo con un agente líder, que se distinguía de ellos en dos aspectos básicos. Por un lado, en la forma en que la naturaleza les ponía al corriente del nacimiento de la burbuja, expresado esto en una diferente función de probabilidad; por otro, en el efecto que tenía la venta del líder, ya que ahí se supuso que por una razón vinculada a un proceso de imitación de algunos agentes desprovistos de información la burbuja se rompía al instante siguiente de la venta del líder.

En este tercer artículo se profundiza sobre una personificación interesante que puede dársele al ese líder: el gobierno (o algún aparato regulador). No obstante, se modificarán los modelos anteriores también en el sentido de que ya no existirá más ese mecanismo de imitación, el cual llevaba al colapso de la burbuja. Aquí, por el contrario, se supondrá que la facultad del líder para alterar la duración de ésta radica sólo en su posibilidad de compartir información con el resto de los agentes. Es decir, para este efecto la única herramienta a disposición del gobierno será la divulgación de la existencia de la burbuja, esperando por ello alguna reacción por parte de los agentes poseedores del activo en cuestión. Se debe pensar entonces en un agente regulador que goza de una credibilidad indiscutible, aunque no por ello su información es necesariamente perfecta.

Una distinción crucial entre la forma de modelar las consecuencias de la introducción del líder en el modelo, de este artículo respecto al anterior, gravita en que mientras que allá el incentivo del líder estaba alineado con el de los agentes, en el sentido de montar la burbuja el mayor tiempo posible y así hacerse de más beneficios, aquí el propósito del gobierno será precisamente el opuesto: impedir que aquélla se siga inflando. Mediante su acción, el gobierno hará que aquí se dé una mezcla de despertares individualmente secuenciales con algunos en bloque, a diferencia del segundo artículo donde todos eran secuenciales. Gracias a esta entidad reguladora es que los agentes adquieren una mejor idea de cuál es su posición en el *ranking*, o por lo menos su posición relativa respecto al líder.

Para el gobierno, el objetivo de compartir información con aquellos agentes peor informados sería el de truncar la vida de la burbuja. La señal mandada habría de actuar de la manera siguiente: los agentes que despertaran después de él, mismos que aquí serán llamados *rezagados*, al saberse desfavorecidos por la naturaleza habrían de reaccionar de forma inmediata al anuncio del gobierno y venderían. Esto lo sabrían los agentes que despierten antes o igual que el gobierno, a los que aquí se denominará *anticipados*, y por ello habrían de abreviar su espera. No obstante, el hecho de que los agentes sepan que el regulador *sistemáticamente* avisa de la presencia de la burbuja, tiene una consecuencia por demás interesante, ya que hace que los *anticipados* alteren sus probabilidades, pudiendo volverlas más optimistas. Si un agente despierta y nota que el gobierno no lo ha hecho, invariablemente pensará que él, en cierta medida, es de los mejor informados. Esta es una fuerza que empuja hacia el alargamiento de la espera para vender. En equilibrio, este incentivo puede ser tomado en cuenta por los agentes *rezagados* y el desenlace de la historia puede consistir en que la acción del gobierno llegue a ser insuficiente, inoperante, o incluso contraproducente.

## 2. El modelo

### 2.1 Introducción

En este modelo, al igual que en el del segundo artículo de la serie, se sigue suponiendo que  $Z$  es la variable aleatoria que indica el momento en que el líder despierta y  $X$  la que denota el instante de la divergencia. Esta vez se supondrá que:

$$\Pr \{Z = t_A | X = t_0\} = \frac{1}{\tilde{n}}, \text{ para } t_A \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + \tilde{n} - 1\}, \text{ con } 1 \leq \tilde{n} \leq n.$$

Es decir, la probabilidad de que el líder despierte en los primeros  $\tilde{n}$  instantes se distribuye uniformemente en tal lapso. Si  $\tilde{n} = n$ , la cantidad de información del gobierno será justamente igual a la de cualquier otro agente participante, pero si  $\tilde{n} = 1$  él poseerá la mejor información. En este último caso, la probabilidad de que se entere de la divergencia justo en el instante en que ésta se presenta será igual a uno, como es obvio.

Esta es una forma alternativa de manejar la condición de superioridad que el líder puede tener sobre todos los agentes. De la forma en que se hizo en el segundo artículo, el líder podía ocupar cualquiera de los  $n$  posibles *rankings*, aunque en términos de probabilidad sí había una diferencia entre ellos. La probabilidad para el líder era mayor cuando se trataba de ocupar los primeros puestos y era menor para los últimos. En cambio, por lo que se refiere a la función de probabilidad esta forma de modelar el liderazgo es distinta en el hecho de que aquí habrá algunos *rankings* (particularmente algunos de los últimos) que tengan probabilidad cero. No obstante, entre aquellos que tengan una probabilidad estrictamente positiva no habrá distinción probabilística alguna.

El propósito de este cambio radica en que la nueva función se acomoda más a los cálculos y operaciones que requiere este modelo, simplificando por ello (al menos un poco) su solución. Finalmente, las comparaciones que se hagan usando los resultados de este modelo se llevarán a cabo con respecto a lo que sucedía en el modelo del primer artículo, no con lo que en el del

segundo, así que el cambio aquí efectuado no representa problema alguno. Sin embargo, pese a ser más sencilla, la función sí conserva características apropiadas para modelar la esencia de un líder.

Ese líder funge aquí como un parteaguas, pues que *revela* quiénes son los de mejor y los de peor información. Mas el hecho de que la información de que dispone el líder no necesariamente sea la mejor y el que esto sea sabido por todos los agentes, hace que esta frontera se vuelva muy relativa, muy vaga. Alguien que ahora se sabe anterior al líder en el ordenamiento, no conoce a plenitud cuál es su posición en el *ranking* general, pues desconoce a su vez qué posición es la de aquél. Pero como conoce cuál es la función de distribución del gobierno, tiene ahora más elementos para inferir su propio *ranking*.

Como ya se decía arriba, se generan dos subconjuntos de agentes (*anticipados* y *rezagados*), demarcados por el despertar del líder y su correspondiente anuncio. Sencillamente, sean:

$$\Lambda: \{i \mid t_i \leq t_A\}$$

$$\Omega: \{j \mid t_j > t_A\}$$

Por cuestiones de sincronización, aquí se supondrá que si el líder despierta en  $t$ , éste da a conocer su hallazgo justo al pasar de  $t$  a  $t + 1$ , de tal forma que al inicio del período  $t + 1$  todos saben ya del anuncio. Por eso es que los miembros de  $\Lambda$  pueden despertar incluso en el mismo instante que el líder (de ahí la desigualdad débil), en virtud de que la noticia se da a conocer en ese ínterin imaginario entre  $t_A$  y el instante siguiente.

Se establecen ahora las directrices de un juego en el que participan ambos subgrupos de agentes a través de diferentes posibles escenarios. Se retoma aquí por comodidad la notación en términos de *ranking*, como se hizo en los dos artículos anteriores, en la cual  $a$  hacía referencia al lugar que ocupa el líder, por lo que aquí  $1 \leq a \leq \tilde{n}$ .

Se necesitan  $k$  agentes vendiendo para que la burbuja reviente. Supóngase aquí que si en un mismo instante se da más de una venta y con alguna de éstas se completan las  $k$ , todos aquellos que ahí hayan vendido recibirán precio posterior al rompimiento, es decir, precio bajo. Esto permite sortear la necesidad de tener que establecer algún criterio de asignación para distribuir entre más de  $k$  agentes algunos precios altos y otros bajos. De no hacer esto, se complicaría inútilmente el análisis, ya que se debería considerar también cuál sería la probabilidad de que, bajo el mecanismo de asignación seleccionado, a un agente le toque precio alto.

Por otro lado, si un agente sabe que en su situación informativa están justamente  $k$  agentes (él incluido), sin su cooperación esos  $k - 1$  agentes restantes no podrán tronar la burbuja. Para que a un agente le invada el temor de que los otros lo pueden dejar fuera de los beneficios de la burbuja, debe ser  $k$  el número de agentes enterados además de él. Es decir, en total debe haber  $k + 1$  agentes, con él incluido. Quizá ésta parezca ser una complicación inútil, pero cuando los niveles de  $k$  sean relativamente bajos, la importancia de hacer este distingo se pondrá de manifiesto.

En las dos secciones siguientes se desdoblarán y analizarán las conductas de ambos conjuntos. Se inicia con la de los  $\Omega$  (*rezagados*), por ser ésta la más sencilla. Lo es en virtud de que al darse el aviso del líder estos agentes despiertan en conjunto, así que, como ya se puntualizará, su *ranking* se volverá irrelevante.

Si un agente despierta antes que el líder, sabrá entonces que él tiene una posición privilegiada entre los agentes. Sin embargo, esto no es un hecho seguro, pues el modelo admite la posibilidad de que un despertar pronto de un agente relativo al del regulador, no signifique necesariamente un agente bien posicionado en el ranking, sino que puede tratarse de un regulador bastante mal posicionado. Finalmente, al darse el anuncio del regulador el agente sólo sabrá cuántos lugares hay entre ambos, pero no conocerá ni la ubicación del regulador ni la de él respecto a los otros agentes, es decir, en el ranking general. Podrá saber que entre él y el regulador hay 3 posiciones, por poner un ejemplo, pero no sabrá si ambos son el 1 y el 4 o el 9 y el 12, respectivamente. A lo largo del desarrollo del modelo todas estas posibilidades son tratadas mediante casos, y para cada uno se elige una estrategia óptima de espera para abandonar el mercado.



## 2.2 Conducta de los Rezagados

A pesar de que los miembros de  $\Lambda$  despiertan primero que los de  $\Omega$ , y eventualmente podrían vender antes, estos últimos no pueden ver la estrategia de aquéllos, porque se sigue usando el supuesto de que las ventas individuales permanecen fuera de la vista de todos, como en los dos artículos anteriores de la serie. De no ser así, la forma de resolver el juego sería igual a la de los juegos secuenciales. Esto es, los de  $\Omega$  elegirían su mejor movimiento tomando como dada la espera de los  $\Lambda$ . Éstos a su vez tomarían como dado tal movimiento optimizador de los  $\Omega$  y así maximizarían su pago esperado. Es decir, la estrategia de los  $\Lambda$  sería  $\tau_{\Lambda}^* \left( \tau_{\Omega}^*(\tau_{\Lambda}) \right)$ . Pero esto aquí no puede ser así, porque aunque los  $\Lambda$  movieran primero, es necesario insistir, su movimiento no podría ser visto por los  $\Omega$ , por lo que el juego se resuelve como si ambos grupos movieran simultáneamente.

Para los miembros de  $\Omega$  se habrá vuelto irrelevante su *ranking*, ya que ahora todos despiertan al unísono, gracias al anuncio del líder. Por supuesto, los más favorecidos con este anuncio son aquellos agentes cuyo *ranking* estaba cerca del último lugar, aunque, obviamente, nadie sabrá a final de cuentas quién era quien. Ahora lo relevante para los  $\Omega$  será saber qué *ranking* tiene el líder, pues de ello dependerá el número de agentes que estén en  $\Lambda$  y en  $\Omega$ . Esto no sucede en los artículos anteriores, pues allá, ya sea sin líder o con él, los despertares siempre eran individualmente secuenciales y no en bloque, como aquí.

### Desmadejamiento (*unraveling*)

Antes de continuar, conviene ver lo que hipotéticamente sucedería si los  $\Omega$  tuvieran control pleno sobre la burbuja. Esto sucede cuando  $n-a > k$ , o sea, cuando  $n-a \geq k+1$ . Cada uno de los agentes rezagados sabrá que el resto de sus compañeros de subgrupo, en forma conjunta, puede tronar la burbuja, excluyéndolo a él de los beneficios. Aquí el elemento crucial que permite esclarecer esta cuestión es  $\bar{\tau}$ , la duración máxima de la burbuja.

Se puede conjeturar que bajo estas condiciones, por alguna razón todos acuerdan o creen acordar agotar la duración natural de la burbuja y vender en el último instante de precio alto, en  $t_0 + \bar{\tau}$ . Pero como se ha supuesto que cuando en un instante se completan  $k$  o más ventas, todos

ellos reciben el precio post rompimiento, a cada agente le será redituable adelantar su venta un período. Aunque no conocen  $t_0$ , pueden usar alguna técnica para calcularlo, pero aquí lo trascendente es que ahora todos tienen la misma información, por lo que estimarán el mismo  $t_0$ . Pero si esto lo hace un agente, y todos ahora son iguales, de igual forma actuará el resto. A su vez, si aquél sabe que este resto también se adelantará un período, él optará por adelantarse dos y así sucesivamente hasta que esta dinámica los lleve a vender justo al instante posterior a cuando tiene verificativo el anuncio, independientemente del valor real de  $t_0$  y de cuán grande sea  $\bar{\tau}$ .

Esta vez sí tiene validez ese proceso básico de “desmadejamiento” (*unraveling*) que tradicionalmente se esgrime en algunas corrientes detractoras de la literatura de las burbujas. Esto obedece fundamentalmente a que ya no hay despertares secuenciales en los que cada agente desconocía cuántos más lo habían hecho además de él. Ahora sabe que colectivamente ha despertado cierta cantidad de agentes y si toma como dado cierto nivel de  $a$  (el cual es aleatorio, así que esto sería sólo una conjetura), sí sabrá cuántos lo hicieron.

Así, se puede concluir que si se tiene la certeza de que  $n - a \geq k + 1$  (por supuesto, no conoce el valor de  $a$ , pero tiene una función de probabilidad al respecto), o sea, que el despertar del líder se da relativamente temprano, los agentes temerán que la burbuja reviente justo después de dado el anuncio, por lo que en un conjunto de ventas de pánico la burbuja tronará en tal período. Nótese que aquí no se rompe por decreto del líder o algo así, sino que lo hace por que el anuncio de éste sirve como mecanismo coordinador de las ventas de los agentes.

Cuando se da la noticia, los rezagados formulan su estrategia. Si un  $\Omega$  espera  $\tau_\Omega$  instantes para vender después del anuncio (si espera un solo instante entonces lo hace al día siguiente, y así sucesivamente), tiene ante sí tres diferentes fuentes de riesgo, con las que obtendría un precio recortado porque la burbuja ya habría tronado. Ellas se presentan a continuación:

### *Rompimiento exógeno*

La burbuja se romperá invariablemente en el instante  $t_0 + \bar{\tau} + 1$  si no lo ha hecho antes. Ciertamente, los agentes desconocen  $t_0$ , pero si toman como dado algún valor de  $a$ , pueden prever el momento del estallido, que se dará dentro de  $\bar{\tau} - a + 2$  períodos (se supondrá que  $\bar{\tau} > \tilde{n}$ ). Evidentemente, si  $a = 1$  la burbuja durará más, por lo que hace a esta causa, que si  $a = \tilde{n}$ . Por lo tanto, encontrará un precio post rompimiento (precio bajo) si  $\tau_\Omega \geq \bar{\tau} - a + 2$ . Así, para que no se vea afectado por el estallido de la burbuja si espera  $\tau_\Omega$  períodos, deberá ser que:

$$a \leq \bar{\tau} + 1 - \tau_\Omega \quad (1)$$

### *Rompimiento por los $\Omega$*

Si  $a < n - k$ , es decir, si hay un anuncio a fecha temprana, el número de los miembros de  $\Omega$  será suficiente para que se desencadene el desmadejamiento, como ya se explicó arriba. Esto es así porque en este caso  $n - a \geq k + 1$ , por lo que para todo miembro de  $\Omega$ , la burbuja habrá de tronar el día después del anuncio. Por lo tanto, si igualmente espera  $\tau_\Omega$  instantes, para que obtenga un precio alto deberá ser que:

$$a \geq n - k \quad (2)$$

### *Rompimiento por los $\Lambda$*

La culpa de que un  $\Omega$  no obtenga precio alto si espera  $\tau_\Omega$  será de los miembros de  $\Lambda$  si  $a + \tau_\Omega \geq k + \tau_\Lambda$ . Es decir, si vende igual o después que cuando lo haga el  $k$ -ésimo integrante de  $\Lambda$ . Por lo tanto, para que sobreviva al estallido deberá ser que:

$$a \leq k + \tau_\Lambda - \tau_\Omega - 1 \quad (3)$$

Nótese que en este modelo las razones de rompimiento no son exactamente las mismas que en el primer artículo, donde sólo eran la exógena y la endógena, o que en el segundo, donde

además de éstas también estaba la venta del líder. Aquí, si bien permanece vigente la exógena, estará además una parecida a aquella endógena (parecida, porque es sólo de una fracción del total de los agentes) y una nueva, que es la vinculada al desmadejamiento.

Conjugando las tres razones de rompimiento, expresadas por (1), (2) y (3), se tendrá que si un integrante de  $\Omega$  aguarda  $\tau_\Omega$  instantes, y conjetura que los de  $\Lambda$  esperarán  $\tau_\Lambda$ , para que éste obtenga con su venta un precio alto, el *ranking* del gobierno,  $a$ , deberá ser tal que:

$$a \in \left[ n-k, n-k+1, \dots, \min\{\bar{\tau}+1-\tau_\Omega, k+\tau_\Lambda-\tau_\Omega-1\} \right].$$

Es decir,  $a \in \left[ n-k, n-k+1, \dots, \min\{\bar{\tau}+1, k+\tau_\Lambda-1\}-\tau_\Omega \right].$

Sea:

$$\Xi = \min\{\bar{\tau}+1, k+\tau_\Lambda-1\},$$

entonces:

$$a \in \left[ n-k, n-k+1, \dots, \Xi-\tau_\Omega \right].$$

Para que un agente rezagado, al usar como estrategia de espera  $\tau_\Omega$  se salve de obtener un pago reducido, pues, el *ranking* del líder no deberá ser ni muy chico ni muy grande. Si es pequeño, por un lado, aumentará la viabilidad de que sean muchos agentes los que estén en su misma situación y que esto despierte un temor que lleve a desmadejar el proceso. Si es grande, por otro lado, estará peligrosamente próximo el estallido, ya sea por razones exógenas o bien por la acción de los agentes mejor informados.

Lógicamente, si  $n-k > \Xi-\tau_\Omega$ , o sea, si  $\tau_\Omega > \Xi-n+k$ , no existirá posibilidad alguna de que al vender se obtenga un precio alto. Por lo tanto, la optimización de la estrategia del agente representativo de  $\Omega$  deberá estar restringida al hecho de que  $\tau_\Omega^* \leq \Xi-n+k$ . Supóngase que,

efectivamente, esta desigualdad se cumple. El pago esperado de un agente  $\Omega$ , si aguarda  $\tau_\Omega$  instantes, y supone que los agentes  $\Lambda$  esperan  $\tau_\Lambda$ , que se denominará aquí como  $G_\Omega(\tau_\Omega, \tau_\Lambda)$ , será:

$$\begin{aligned}
 G_\Omega(\tau_\Omega, \tau_\Lambda) &= \sum_{a=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} S^{-a} - \sum_{a=n-k}^{\min\{\tau_\Omega, \tilde{n}\}} \frac{1}{\tilde{n}} S^{-a} + \sum_{a=n-k}^{\min\{\tau_\Omega, \tilde{n}\}} \frac{1}{\tilde{n}} S^{\tau_\Omega} \\
 &= \frac{1}{\tilde{n}} \left[ \sum_{a=1}^{\tilde{n}} S^{-a} - \sum_{a=n-k}^{\min\{\tau_\Omega, \tilde{n}\}} S^{-a} + \sum_{a=n-k}^{\min\{\tau_\Omega, \tilde{n}\}} S^{\tau_\Omega} \right] \tag{4}
 \end{aligned}$$

Esto es así porque si al esperar  $\tau_\Omega$  recibe un pago bajo, éste será:

$$\frac{(1+g)^{\tau_\Omega}}{(1+r)^{\tau_\Omega}} \beta(a+\tau_\Omega) S^{\tau_\Omega} \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{1+r}{1+g} \right)^{a+\tau_\Omega} \right) \right] = S^{\tau_\Omega} \left( \frac{1+r}{1+g} \right)^{a+\tau_\Omega} = S^{\tau_\Omega} S^{-a-\tau_\Omega} = S^{-a}.$$

A partir de la ecuación (4), se pueden tener dos casos y a continuación se analiza cada uno de ellos:

$$\triangleright \text{(i): } \min\{\tau_\Omega, \tilde{n}\} \geq \tilde{n}$$

$\Rightarrow$

$$G_{\Omega(i)}(\tau_\Omega, \tau_\Lambda) = \frac{1}{\tilde{n}} \left[ \sum_{a=1}^{\tilde{n}} S^{-a} - \sum_{a=n-k}^{\tilde{n}} S^{-a} + \sum_{a=n-k}^{\tilde{n}} S^{\tau_\Omega} \right].$$

Es fácil apreciar que en esta circunstancia el pago es estrictamente creciente en  $\tau_\Omega$ . Sin embargo, para seguir estando en este caso, deberá ser que  $\tilde{n} \leq \Xi - \tau_\Omega$ , por lo que la estrategia que maximiza el pago será:

$$\tau_{\Omega(i)}^* = \Xi - \tilde{n} \tag{5}$$

y tal pago quedará:

$$G_{\Omega(i)}^* \left( \tau_{\Omega}^*, \tau_{\Lambda} \right) = \frac{1}{\tilde{n}} \left[ \sum_{a=1}^{\tilde{n}} S^{-a} - \sum_{a=n-k}^{\tilde{n}} S^{-a} + \sum_{a=n-k}^{\tilde{n}} S^{\Xi-\tilde{n}} \right]. \quad (6)$$

$$\triangleright \text{(ii): } \min_{\tau_{\Omega}} \left[ \Xi - \tau_{\Omega} \right]$$

$\Rightarrow$

$$G_{\Omega(ii)} \left( \tau_{\Omega}, \tau_{\Lambda} \right) = \frac{1}{\tilde{n}} \left[ \sum_{a=1}^{\tilde{n}} S^{-a} - \sum_{a=n-k}^{\Xi-\tau_{\Omega}} S^{-a} + \sum_{a=n-k}^{\Xi-\tau_{\Omega}} S^{\tau_{\Omega}} \right]. \quad (7)$$

El problema será:

$$\max_{\tau_{\Omega}} G_{\Omega(ii)} \left( \tau_{\Omega}, \tau_{\Lambda} \right).$$

De (7), la parte a maximizar es:

$$\sum_{a=n-k}^{\Xi-\tau_{\Omega}} S^{\tau_{\Omega}} - \sum_{a=n-k}^{\Xi-\tau_{\Omega}} S^{-a} = (\Xi - \tau_{\Omega} - n + k + 1) S^{\tau_{\Omega}} - \frac{S^{k-n+1} - S^{\tau_{\Omega}-\Xi}}{S-1}.$$

A su vez, de la anterior expresión la parte neurálgica es:

$$S^{\tau_{\Omega}} \left( \Xi - \tau_{\Omega} - n + k + 1 + \frac{S^{-\Xi}}{S-1} \right).$$

Si aquí se aplican condiciones de primer orden (para tiempo discreto),  $\tau_{\Omega(i)}^*$  será el  $\tau_{\Omega}$  más chico para el que se dé:

$$S^{\tau_{\Omega}+1} \left( \Xi - \tau_{\Omega} - 1 - n + k + 1 + \frac{S^{-\Xi}}{S-1} \right) - S^{\tau_{\Omega}} \left( \Xi - \tau_{\Omega} - n + k + 1 + \frac{S^{-\Xi}}{S-1} \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow S\left(\Xi - \tau_{\Omega} - n + k + \frac{S^{-\Xi}}{S-1}\right) - S^{\tau_{\Omega}}\left(\Xi - \tau_{\Omega} - n + k + 1 + \frac{S^{-\Xi}}{S-1}\right) \leq 0.$$

$$\text{Despejando, } \tau_{\Omega} \geq \Xi - n + k + \frac{S^{-\Xi} - 1}{S-1}.$$

Denotando como  $\lceil x \rceil$  al entero próximo mayor que  $x$ , se tendrá que:

$$\tau_{\Omega(ii)}^* = \Xi - n + k + \left\lceil \frac{S^{-\Xi} - 1}{S-1} \right\rceil$$

En tanto que el pago correspondiente será:

$$G_{\Omega(ii)}^* = \frac{1}{\tilde{n}} \left[ \sum_{a=1}^{\tilde{n}} S^{-a} - \sum_{a=n-k}^{\Xi - \tau_{\Omega(ii)}^*} S^{-a} + \sum_{a=n-k}^{\Xi - \tau_{\Omega(ii)}^*} S^{\tau_{\Omega(ii)}^*} \right],$$

o sea,

$$G_{\Omega(ii)}^* = \frac{1}{\tilde{n}} \left[ \sum_{a=1}^{\tilde{n}} S^{-a} - \sum_{a=n-k}^{n-k - \left\lceil \frac{S^{-\Xi} - 1}{S-1} \right\rceil} S^{-a} + \sum_{a=n-k}^{n-k - \left\lceil \frac{S^{-\Xi} - 1}{S-1} \right\rceil} S^{\Xi - n + k + \left\lceil \frac{S^{-\Xi} - 1}{S-1} \right\rceil} \right]. \quad (8)$$

Ahora, la estrategia del agente representativo de  $\Omega$ , que se denominará simplemente  $\tau_{\Omega}^*$ , quedará:

$$\tau_{\Omega(i)}^* \Leftrightarrow G_{\Omega(i)}^* \geq G_{\Omega(ii)}^*,$$

y en caso contrario usará  $\tau_{\Omega(i)}^*$ .

Con esto queda establecida la función de reacción del representativo de los rezagados respecto a la supuesta espera de los anticipados, la cual será:

$$\tau_{\Omega}^* = \arg \max G_{\Omega}(\tau_{\Lambda}, \tau_{\Omega}).$$

De (6) y (8), para que sea usada  $\tau_{\Omega(ii)}^*$ , deberá ser que:

$$\sum_{a=n-k}^{\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil} S^{\Xi-n+k+\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil - a} - \sum_{a=n-k}^{\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil} S^{-a} > \sum_{a=n-k}^{\tilde{n}} S^{\Xi-\tilde{n}-a} - \sum_{a=n-k}^{\tilde{n}} S^{-a}$$

⇔

$$\left(1 - \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1}\right) S^{\Xi-n+k+\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil} - \frac{S^{k-n+\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil} - S^{-n+k}}{S-1} > (\tilde{n}-n+k+1)S^{\Xi-\tilde{n}} - \frac{S^{k-n+1} - S^{-\tilde{n}}}{S-1}$$

⇔

$$\frac{S - S^{-\Xi}}{S-1} S^{\Xi-n+k+\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil} + \frac{S^{k-n+\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil} - S^{-n+k}}{S-1} > (\tilde{n}-n+k+1)S^{\Xi-\tilde{n}} + \frac{S^{-\tilde{n}}}{S-1}$$

⇔

$$S^{\Xi-n+k+\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil+1} > S^{-\tilde{n}} \left[ 1 + (S-1)(\tilde{n}-n+k+1)S^{\Xi-\tilde{n}} \right].$$

Si además se usa  $n = 2k$ , un supuesto simplificador del cual más adelante se hablará, entonces:

$$S^{\Xi-k+\left\lceil \frac{S^{-\Xi}-1}{S-1} \right\rceil+1} > S^{-\tilde{n}} \left[ 1 + (S-1)(\tilde{n}-k+1)S^{\Xi-\tilde{n}} \right].$$



Pero por construcción  $\frac{S^{-\Xi} - 1}{S - 1} = \tau_{\Omega(ii)}^* - \Xi + k$ , por lo que se debe tener:

$$S^{\tau_{\Omega(ii)}^* + 1} > S^{-\tilde{n}} \left[ 1 + (S - 1)(\tilde{n} - k + 1)S^{\Xi} \right].$$

Despejando  $\tau_{\Omega(ii)}^*$ , se llega a que usará ésta estrategia si y sólo si:

$$\tau_{\Omega(ii)}^* > \frac{\ln \left[ S^{-\tilde{n}} \left( 1 + (S - 1)(\tilde{n} - k + 1)S^{\Xi} \right) \right]}{\ln S}. \quad (9)$$

En caso contrario, optará por esperar  $\tau_{\Omega(i)}^*$ .

Nótese que la diferencia práctica entre usar una y otra espera tiene que ver con la cautela. Si usa  $\tau_{\Omega(i)}^*$ , estará yendo a la segura respecto a lo que hagan los agentes anticipados, pues no habrá modo de que éstos le rompan la burbuja. Esperar un poco más y con ello usar  $\tau_{\Omega(ii)}^*$ , hablará de una actitud más atrevida, pues aquí sí existirá la posibilidad de que los anticipados rompan la burbuja, aunque si sobrevive el pago será mayor. Como a simple vista da una idea la ecuación (9), valdrá la pena ser más ambicioso cuando  $S$  sea alta.

### 2.3 Conducta de los Anticipados

Tal como ya se había adelantado antes, el anuncio del gobierno inevitablemente sirve de sustento para que los agentes de este tipo lleven a cabo una actualización de sus creencias respecto a cuánto hace que nació la burbuja, o en otros términos, de su *ranking*. Este es un factor novedoso con respecto a las modelaciones de los dos artículos previos, pues allá no había elemento alguno que llevara a los agentes a reconsiderar la estimación de su posible *ranking*. Es necesario, pues, ver cómo cambia su función de probabilidad.

Cuando un agente despierta, si se supone aquí que el agente regulador *siempre* avisa de la existencia de la burbuja, y por supuesto que tal agente sabe que esto sucede, notará que el gobierno no ha despertado, o que a lo más lo habrá hecho ese mismo día y que en la noche vendrá el anuncio, por así decirlo. Esto es, tendrá claro que  $t_i \leq t_A$ , o si se usan términos de *ranking* para ahorrar notación, sabrá que  $b \leq a$ , donde, como antes,  $a = t_A - t_0 + 1$  es el *ranking* del gobierno y  $b = t_i - t_0 + 1$  es el de un agente cualquiera.

Sea  $\tilde{R}(b)$  la función de probabilidad para algún agente  $i$  (en este caso un agente  $\Lambda$ ) de ser el  $b$ -ésimo en el orden, dado que sabe que no despertó después que el líder. Es decir:

$$\tilde{R}(b) = \Pr \{ D_i = b \mid b \leq a \},$$

donde, como antes,  $D_i$  es la variable aleatoria que hace referencia al *ranking* de  $i$ .

Si bien el despertar del líder es un hecho independiente del despertar de cualquier otro agente (entre otras razones, aquí se supone que ambos lo pueden hacer en el mismo instante), el acto de haber despertado igual o antes que el líder, con un  $a$  dado, sí es útil para actualizar creencias. Esto obedece a que lo que aquí interesa es el despertar del líder no en términos absolutos, sino en términos relativos respecto al despertar de  $i$ .

Sea:

$$d \equiv \frac{p^2}{q^{-\tilde{n}} - p\tilde{n} - 1}.$$

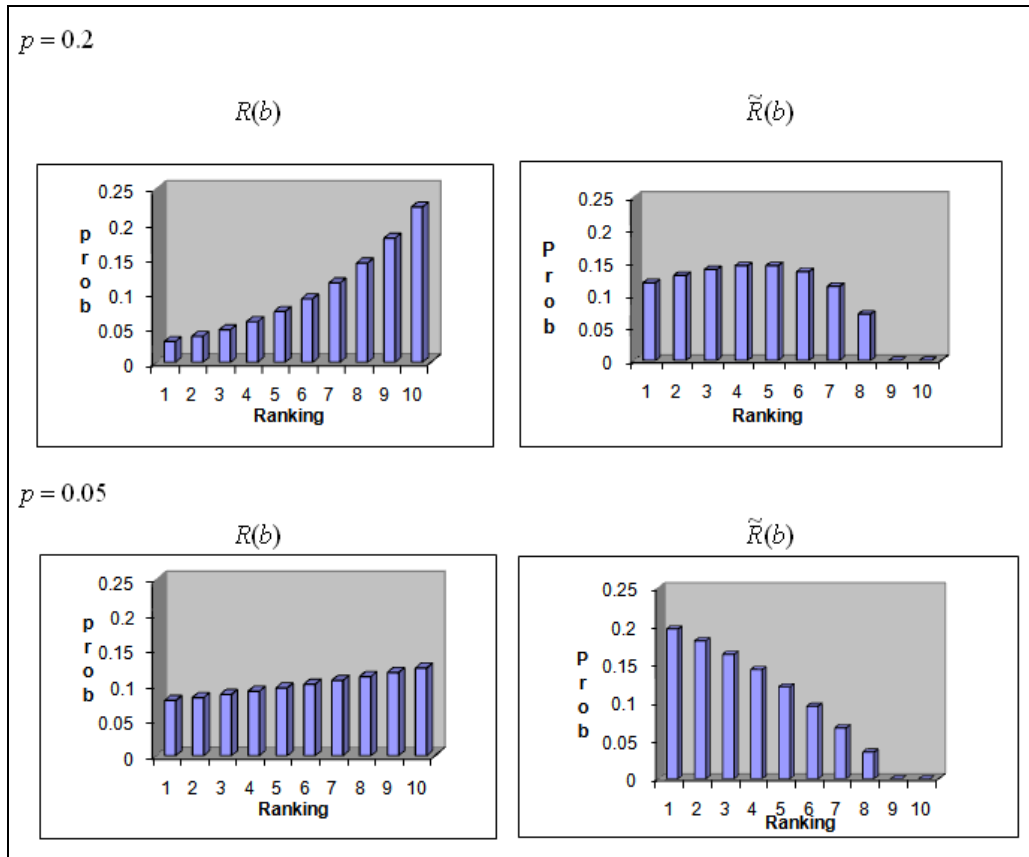
Así, la función de probabilidad condicionada por el hecho de que aún no despierta el líder quedará (Apéndice A1):

$$\tilde{R}(b) = dq^{-b}(\tilde{n} - b + 1) \tag{10}$$

para  $b \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  y cero en otro caso.

Conviene comparar la función de probabilidad original con la que recién se ha obtenido. En la Gráfica 1 aparecen dos comparaciones, una para  $p = 0.2$  y la otra para  $p = 0.05$ , ambas considerando a  $n = 10$  y a  $\tilde{n} = 8$ . Cuando el parámetro  $p$  es relativamente alto, como en la parte superior de la gráfica, la función pasa de ser pesimista a medianamente optimista; en tanto que cuando es bajo, como en la parte inferior, pasa de ser medianamente pesimista a considerablemente optimista. Por supuesto, decir “optimista” y “pesimista” es muy ambiguo, pues no se ha definido aquí nada al respecto, pero los conceptos son usados sólo para intentar aproximar qué tanta probabilidad se asigna a ser de los primeros o de los últimos.

Una vez que se ha puesto sobre la mesa la nueva función de probabilidad que habrán de usar aquellos agentes que le “madruguen” al líder, procede asentar su estrategia. Para ello, se catalogan cuatro posibles escenarios hipotéticos que se pueden dar a partir de la relación entre  $a$ ,  $n$ ,  $\tilde{n}$  y  $k$ . La peligrosidad para  $\Lambda$  respecto a los  $\Omega$  se dará cuando  $n - a \geq k$ . Debe tenerse en cuenta, como ya se señaló antes, que si bien se requieren  $k$  agentes vendiendo para que la burbuja reviente, al interior del subgrupo que ahora se analiza serán necesarios  $k + 1$ , pues sin la participación de un agente de los  $k$  no pasaría nada. Por otro lado, si usaran los *rezagados* una estrategia para cada nivel de  $a$ , los *anticipados* debieran considerar la posibilidad de desmadejamiento, pero esto no es así, ya que los primeros usarán sólo una estrategia al final del día.



Gráfica 1. Comparación de funciones de probabilidad.

He aquí los cuatro escenarios posibles:

I.  $a > k, n - a < k$ :  $\Lambda$  ofensivo,  $\Omega$  inofensivo.

Cuando el gobierno despierta, supóngase que lo hace en  $k + 1$ , y hace el anuncio al final de ese período, habrá justamente  $k + 1$  agentes en el conjunto  $\Lambda$ . Esto implica que serán  $k$  adicionales a cada miembro de  $\Lambda$ , por lo que sí podrán romper la burbuja. Es por ello que se puede decir que  $\Lambda$  es ofensivo. Por razones parecidas es que se dirá aquí que  $\Omega$  es inofensivo, pues cada miembro del primer grupo sabrá que no debe temer a su acción. A lo que sí debe temer es a la acción de sus compañeros de  $\Lambda$ , quienes tienen en sus manos el control de la burbuja.

II.  $a > k, n - a \geq k$ :  $\Lambda$  ofensivo,  $\Omega$  ofensivo.

Si  $n$  es lo suficientemente grande como para dar cabida a que al mismo tiempo  $a > k$  y que  $n - a \geq k$ , para cierta  $a$ , se presentará un escenario interesante. Ambos tendrán el control sobre la burbuja. No obstante, como la ventaja natural la tienen los de  $\Lambda$ , serán ellos quienes realmente tengan el poder, aunque ahora limitadamente, puesto que tienen encima la presión de lo que puedan hacer los rezagados.

III.  $a \leq k, n - a \geq k$ :  $\Lambda$  inofensivo,  $\Omega$  ofensivo.

Los del primer grupo saben que no tienen el control (más precisamente, sí lo tienen colectivamente, por poder ser  $k$ , pero ninguno de ellos vería alrededor de sí a  $k$  compañeros, pues él es uno de esos  $k$ ). Simplemente intentarían vender en una fecha antes de que lo hagan los de omega.

IV.  $a \leq k, n - a < k$ :  $\Lambda$  inofensivo,  $\Omega$  inofensivo.

Este escenario pareciera ser favorable para la prolongación de la burbuja, pues ningún  $\Lambda$  habría de temer ni a la acción de sus compañeros ni a la de los rezagados, sólo a la duración natural de la burbuja y a la acción combinada de ambos grupos. Sin embargo, esto sería muy difícil de precisar.

Ahora sí, procede entrar de lleno en la conducta que asumirá el agente representativo del grupo anticipado. Para simplificar, supóngase que sólo hay dos de los cuatro escenarios arriba enunciados. Se descartan tanto aquél en el que ambos tienen el control, II, (ofensivo, ofensivo), como el que ninguno lo tiene, IV, (inofensivo, inofensivo). Esto permite simplificar en los siguientes términos: si  $a$  es chica, el control no será de ellos, sino de los  $\Omega$ . Si, por el contrario, es grande, sí tendrán el control sobre la duración de la burbuja.

Para lograr lo anterior debe hacerse lo siguiente: II precisa que  $a > k$  y al mismo tiempo que  $n - a \geq k$ , o sea, que  $k < a \leq n - k$ . IV requiere que  $a \leq k$  y que  $n - a < k$ , es decir, que

$n - k < a \leq k$ . Si simplemente se hace  $n = 2k$ , de tajo se evaden ambas posibilidades. Tómesese esto como supuesto simplificador.

A continuación se ven dos casos por separado, uno cuando  $a \leq k$  y otro cuando  $k < a \leq \tilde{n}$ . Es  $\tau_\Lambda$  la estrategia de espera de este grupo de anticipados.

$$\underline{a \leq k}$$

Si el control lo tienen los anticipados, la historia del juego será la de uno muy parecido al de la versión original. Sin embargo, en este caso eso no sucede. Como se dijo ya, si  $a$  es pequeña se habrá enterado un número suficientemente alto de agentes retrasados para que la burbuja reviente en  $a + \tau_\Omega$ . Si el agente representativo de  $\Lambda$  vende justo ahí, obtendrá un precio bajo. Este día dependerá de la fecha del anuncio futuro, relativa a su propio despertar, que se dará dentro de  $\tau_\Omega + a - b$  (recuérdese que  $b \leq a$ ) instantes. Es decir, obtiene precio alto si:

$$\begin{aligned} \tau_\Lambda < \tau_\Omega + a - b &\Leftrightarrow \\ b < \tau_\Omega - \tau_\Lambda + a. & \end{aligned} \tag{11}$$

Pero si además se toma en cuenta la acotación promovida por el rompimiento exógeno, rompiéndose en  $t_0 + \bar{\tau} + 1$ , le dará al agente  $\Lambda$  un precio bajo si:

$$t_i + \tau_\Lambda \geq t_0 + \bar{\tau} + 1 \Rightarrow t_i - t_0 \geq \bar{\tau} + 1 - \tau_\Lambda,$$

o en términos de *ranking*, si:

$$b \geq \bar{\tau} + 2 - \tau_\Lambda,$$

por lo que, para que sobreviva un precio alto, deberá ser que:

$$b < \bar{\tau} + 2 - \tau_\Lambda. \tag{12}$$

Así, uniendo (11) y (12), se tiene que, si  $a \leq k$ , el agente conjetura que los rezagados aguardan esperan  $\tau_{\Omega}$ , y él mismo espera  $\tau_{\Lambda}$ , para que la burbuja subsista a esta amenaza y obtenga un precio alto, deberá ser que:

$$b < \min \left\{ \tau_{\Omega}^{\downarrow} - \tau_{\Lambda} + a, \bar{\tau} + 2 - \tau_{\Lambda} \right\}.$$

Es decir,  $b < \min \left\{ \tau_{\Omega}^{\downarrow} + a, \bar{\tau} + 2 \right\} \tau_{\Lambda}$ .

Y con esto queda esclarecido el caso en que  $a \leq k$ . En seguida se analiza la otra posibilidad.

$$\underline{k < a \leq \tilde{n}}$$

Si, por el contrario,  $k < a \leq \tilde{n}$ , el juego cobra un interés sobresaliente, pero también una dificultad superior. Cada miembro de  $\Lambda$  sabrá que el control sobre la burbuja es de ellos, que los  $\Omega$  no tienen la fuerza suficiente para determinar el rompimiento de la burbuja. Ahora, para cada agente anticipado, el temor se encuentra centrado en lo que hagan sus compañeros de  $\Lambda$ . La duración de la burbuja, pues, dependerá de lo que esperen éstos.

Si bien, como ya se dijo, los  $\Omega$  aquí no tienen enteramente el control sobre la duración de la burbuja, su venta no deja de tener repercusiones, aunque sólo al adherirse a la venta de los anticipados. Como es normal, la burbuja se romperá cuando se acumulen  $k$  ventas, pudiendo estar constituidas por ventas de ambos grupos.

Para obtener  $\tau_{\Lambda}^*$ , tal y como se hizo en el modelo original, es necesario suponer una duración determinada de la burbuja. Pero aquí se presenta un problema, pues ésta dependerá de la estrategia del resto de los anticipados y de su relación con la de los rezagados. La venta masiva de los rezagados, insuficiente para tronar la burbuja –se insiste-, puede darse antes de que venda el primero de los anticipados, después de que el último de ellos lo haya hecho, o incluso mientras éstos estén vendiendo. Pues, hay tres casos que van a determinar tres diferentes posibles duraciones de la burbuja. Por supuesto, los agentes anticipados no conocen la estrategia de los rezagados, pero toman como dado cada uno de los valores que ésta puede asumir.

Cuando se desarrolló el modelo original en el primer artículo, se usó a la variable  $\xi$  como la duración de la burbuja. Para precisar más,  $\xi$  se refiere en realidad al lapso después del cual la burbuja truena, por lo que en todo caso la duración es  $\xi - 1$ . Pues aquí se tienen tres diferentes  $\xi$ , asociadas a sendas posibilidades:

i) Si  $a + \tau_{\Omega} < 1 + \tau_{\Lambda}$ , será:

$$\xi_{(i)} = \min \left[ k - (n - a) + \tau_{\Lambda} - 1, \bar{\tau} + 1 \right] \cup \min \left[ a - k + \tau_{\Lambda} - 1, \bar{\tau} + 1 \right]$$

Esta posibilidad habla de cuando la venta masiva de los rezagados se da antes de que venda el primero de los anticipados. El efecto que tal venta provoca es muy fácil de ver, pues nótese que la duración de la burbuja es parecida al modelo del primer artículo, sólo que el rompimiento endógeno no se dará cuando vendan  $k$  agentes, sino lo hará cuando vendan  $k - (n - a)$ , pues  $(n - a)$  agentes rezagados ya se han salido del mercado.

ii) Si  $a + \tau_{\Omega} > k + \tau_{\Lambda}$ :

$$\xi_{(ii)} = \min \left[ k + \tau_{\Lambda} - 1, \bar{\tau} + 1 \right]$$

Aquí la venta masiva de los rezagados se da después de que ha vendido el último de los anticipados. Este caso es incluso más sencillo que el anterior, pues todo se reduce a una forma similar a lo ocurrido con los agentes del primer artículo, debido a que lo que hagan los rezagados termina siendo irrelevante (recuérdese que aquí hemos supuesto que los anticipados tienen el tamaño necesario para romper la burbuja ellos solos).

iii) Si  $1 + \tau_{\Lambda} \leq a + \tau_{\Omega} \leq k + \tau_{\Lambda}$ :

$$\xi_{(iii)} = \min \left[ a + \tau_{\Omega} - 1, \bar{\tau} + 1 \right]$$

De los tres, éste es el caso más complicado, pues supone que la venta masiva de los rezagados se da mientras los anticipados están vendiendo. La preocupación de uno de los anticipados radica



no sólo en ser de los primeros dentro de ese grupo para que el resto de los agentes anticipados no truene la burbuja, sino que ahora existe la posibilidad de que sean también los rezagados quienes la revienten con su venta masiva.

A continuación se analizan al detalle cada una de ellas.

➤ (i)

Para descifrar este caso, debe usarse la función de probabilidad ajustada que ya antes se había desarrollado. De la ecuación (10) se obtuvo que:

$$\tilde{R}(b) = dq^{-b}(\tilde{n} - b + 1).$$

Ahora, ajustadas por el hecho de que los agentes se saben anticipados, sean  $\tilde{\pi}(\tau_\Lambda)$  y  $\tilde{\Pi}(\tau_\Lambda)$  la función de probabilidad y la acumulativa de probabilidad, respectivamente, de que, si el agente espera  $\tau_\Lambda$  instantes, la burbuja se rompa justo ahí. Para que truene la burbuja justo al aguardar ese lapso deberá ser que:

$$t_i + \tau_\Lambda = t_0 + \xi_{(i)} \Rightarrow t_i - t_0 = \xi_{(i)} - \tau_\Lambda \Rightarrow b = \xi_{(i)} - \tau_\Lambda + 1,$$

por lo que  $\tilde{\pi}(\tau_\Lambda)$  quedará:

$$\tilde{\pi}(\tau_\Lambda) = dq^{\tau_\Lambda - \xi_{(i)} - 1}(\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_\Lambda), \quad (13)$$

para  $\tau_\Lambda \in \xi_{(i)} - \tilde{n} + 1, \xi_{(i)} - \tilde{n} + 2, \dots, \xi_{(i)}$ .

Ahora se construye la función acumulativa:

$$\tilde{\Pi}(\tau_\Lambda) = \sum_{x=\xi_{(i)}-\tilde{n}+1}^{\tau_\Lambda} \tilde{\pi}(x) = \sum_{x=\xi_{(i)}-\tilde{n}+1}^{\tau_\Lambda} d(\tilde{n} - \xi_{(i)} + x)q^{x - \xi_{(i)} - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= d \left[ q^{-\tilde{n}} + 2q^{-\tilde{n}+1} + 3q^{-\tilde{n}+2} + \dots + (\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda}) q^{\tau_{\Lambda} - \xi_{(i)} - 1} \right] \\
&= dq^{-\tilde{n}-1} \left[ \frac{q - q^{\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda} + 1}}{1 - q} + \frac{q^2 - q^{\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda} + 1}}{1 - q} + \dots + \frac{q^{\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda}} - q^{\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda} + 1}}{1 - q} \right] \\
&= dq^{-\tilde{n}-1} \left[ \frac{q - q^{\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda} + 1}}{1 - q} - (\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda}) q^{\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda} + 1} \right],
\end{aligned}$$

por lo que, con algo más de álgebra, se llega a:

$$\tilde{\Pi}(\epsilon_{\Lambda}) = \frac{q^{-\tilde{n}} - q^{\tau_{\Lambda} - \xi_{(i)}} + p(\tilde{n} - \xi_{(i)} + \tau_{\Lambda})}{q^{-\tilde{n}} - p\tilde{n} - 1}. \quad (14)$$

Es a partir de la anterior expresión muy sencillo demostrar que, efectivamente,  $\tilde{\Pi}(\epsilon_{(i)}) \geq 1$  y que  $\tilde{\Pi}(\epsilon_{\Lambda} + 1) \geq \tilde{\Pi}(\epsilon_{\Lambda}) \geq \tilde{\pi}(\epsilon_{\Lambda} + 1)$ . El problema al que en este ambiente se enfrentaría el agente anticipado al maximizar su pago esperado, sería:

$$\max_{\tau_{\Lambda}} \sum_{y=1}^{\tau_{\Lambda}} S^y \left[ -\beta(\xi_{(i)}) \tilde{\pi}(y) + S^{\tau_{\Lambda}} \left[ -\tilde{\Pi}(\epsilon_{\Lambda}) \right] \right].$$

En general, todo este procedimiento es muy parecido al usado en el modelo del primer artículo, sólo que para una diferente función de probabilidad respecto al momento del posible rompimiento. Obteniendo las condiciones de primer orden para valores discretos,  $\tau_{\Lambda(i)}^*$  será el menor entero para el que:

$$S^{\tau_{\Lambda(i)}^* + 1} \left[ -\beta(\xi_{(i)}) \tilde{\pi}(\tau_{\Lambda(i)}^* + 1) + S^{\tau_{\Lambda(i)}^* + 1} \left[ -\tilde{\Pi}(\tau_{\Lambda(i)}^* + 1) \right] - S^{\tau_{\Lambda(i)}^*} \left[ -\tilde{\Pi}(\tau_{\Lambda(i)}^*) \right] \right] \leq 0.$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por  $S^{-\tau_{\Lambda(i)}^*}$ :

$$S \left[ -\beta(\xi_{(i)}) \tilde{\pi}(\tau_{\Lambda(i)}^* + 1) + S \left[ -\tilde{\Pi} \mathbf{C}_{\Lambda(i)}^* + 1 \right] - \tilde{\Pi} \mathbf{C}_{\Lambda(i)}^* \right] \leq 0$$

De la anterior ecuación se despeja  $\beta(\xi_{(i)})$ :

$$\beta(\xi_{(i)}) \geq 1 - \frac{1 - \tilde{\Pi} \mathbf{C}_{\Lambda(i)}^* - S - S \left[ -\tilde{\Pi} \mathbf{C}_{\Lambda(i)}^* + 1 \right]}{S \tilde{\pi}(\tau_{\Lambda(i)}^* + 1)}. \quad (15)$$

Pero, como ya se vio:

$$\Pi(\tau_{\Lambda(i)}^*) = \frac{d}{p^2} \left[ -\tilde{n} - q^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)}} \mathbf{C} + (\tilde{n} + \tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)}) p \right]$$

$$\Pi(\tau_{\Lambda(i)}^* + 1) = \frac{d}{p^2} \left[ -\tilde{n} - q^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)} + 1} \mathbf{C} + (\tilde{n} + \tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)} + 1) p \right]$$

y

$$\tilde{\pi}(\tau_{\Lambda(i)}^* + 1) = dq^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)}} (1 + \tilde{n} + \tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)}).$$

Sustituyendo las anteriores igualdades en (15) y después de varios pasos algebraicos, se llega a:

$$\beta(\xi_{(i)}) \geq \frac{dq^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)}} \left[ (\tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)}) \left( \frac{S-1}{p} \right) + S(1 + \tilde{n}) - \frac{1}{p^2} \mathbf{C}(1 + \tilde{n}p)(1 - qs) - spq \right] - (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right)}{Sdq^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)}} (1 + \tilde{n} + \tau_{\Lambda(i)}^* - \xi_{(i)})} \quad (16)$$

Como ya se había dicho,  $\xi_{(i)} = \min \tau_{\Lambda(i)}^* + a - k - 1, \bar{\tau} + 1$ . Primero supóngase que  $\xi_{(i)} = \tau_{\Lambda(i)}^* + a - k - 1$ . De ser así, se tendrá que:

$$\beta(\tau_{\Lambda(i)}^* + a - k - 1) \geq \frac{dq^{k-a+1} \left[ (k-a+1) \left( \frac{S-1}{p} \right) + S(1 + \tilde{n}) - \frac{1}{p^2} \mathbf{C}(1 + \tilde{n}p)(1 - qs) - spq \right] - (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right)}{Sdq^{k-a+1} (\tilde{n} + 2 + k - a)}$$

Sea justamente:

$$\beta_{(i)}^* \equiv \frac{dq^{k-a+1} \left[ (k-a+1) \left( \frac{S-1}{p} \right) + S(1+\tilde{n}) - \frac{1}{p^2} (1+\tilde{n}p)(1-qs) - spq \right] - (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right)}{Sdq^{k-a+1} (\tilde{n}+2+k-a)}.$$

Entonces:

$$1 - S^{-(\tau_{\Lambda(i)}^* + a - k - 1)} \geq \beta_{(i)}^*.$$

Finalmente, despejando:

$$\tau_{\Lambda(i)}^* \geq k+1-a - \frac{\ln(1-\beta_{(i)}^*)}{\ln S}.$$

Si se usa la notación que en los artículos anteriores se ha empleado:

$$\tau_{\Lambda(i)}^* = k+1-a + \left[ \frac{\ln(1-\beta_{(i)}^*)}{\ln S^{-1}} \right]. \quad (17)$$

He aquí el equilibrio de esta parte del juego, que en este caso es endógeno, pues la supuesta duración de la burbuja depende recíprocamente de las estrategias seguidas. Sin embargo, si  $\beta_{(i)}^* > \bar{\beta}$  el equilibrio se dará considerando una duración exógena. En ese caso se tendría que  $\xi_{(i)} = \bar{\tau} + 1$  y si se sustituye en (16):

$$\bar{\beta} \geq \frac{dq^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \bar{\tau} - 1} \left[ (\tau_{\Lambda(i)}^* - \bar{\tau} - 1) \left( \frac{S-1}{p} \right) + S(1+\tilde{n}) - \frac{1}{p^2} (1+\tilde{n}p)(1-qs) - spq \right] - (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right)}{Sdq^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \bar{\tau} - 1} (1+\tilde{n} + \tau_{\Lambda(i)}^* - \bar{\tau} - 1)} \quad (18)$$

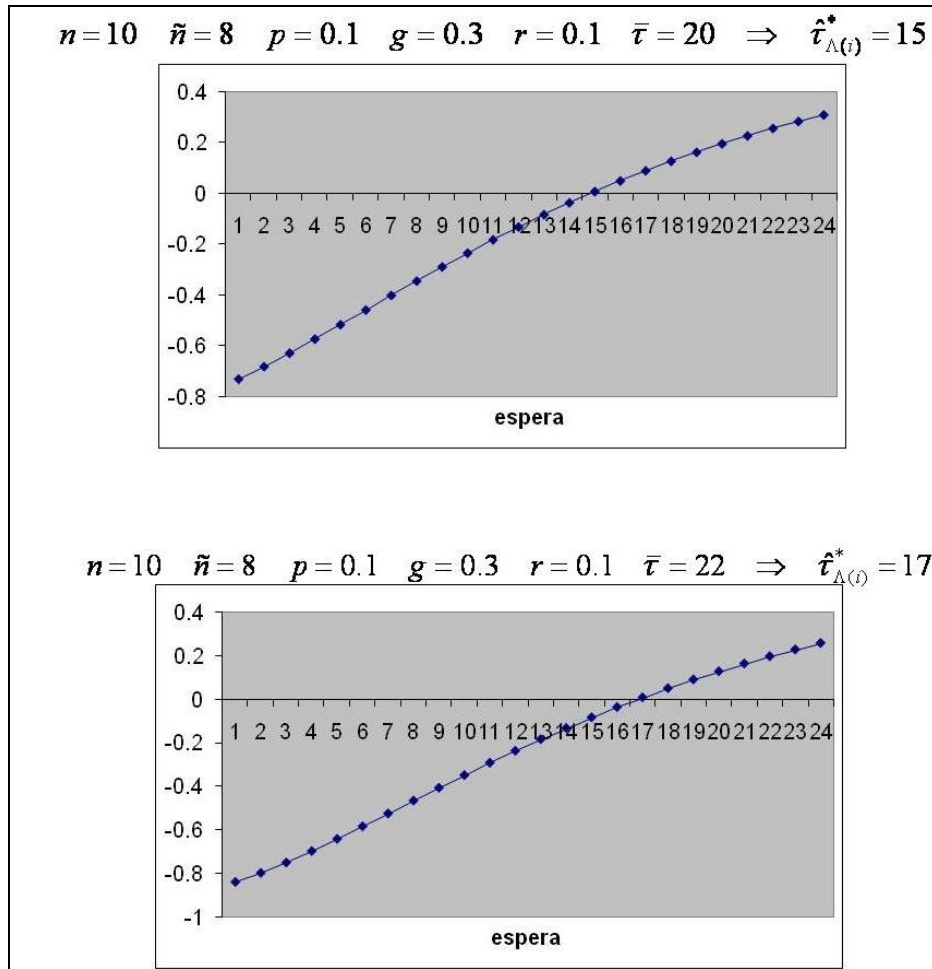
Como se puede ver, aquí desafortunadamente no es posible despejar a  $\tau_{\Lambda(i)}^*$ , por lo que se debe

recurrir a una solución numérica. La ecuación (18) puede reacomodarse para tal efecto. Ésta quedará:

$$dq^{\tau_{\Lambda(i)}^* - \bar{\tau} - 1} \left[ (\tau_{\Lambda(i)}^* - \bar{\tau} - 1) \left( \bar{\beta}S - \left( \frac{S-1}{p} \right) \right) - (1 + \tilde{n})S(1 - \bar{\beta}) + \frac{1}{p^2} \left[ (1 + \tilde{n}p)(1 - qS) - Spq \right] \right] + (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} \right) \approx 0 \quad (19)$$

De la ecuación (19) se puede obtener numéricamente la raíz de la ecuación, para así dar con el valor de  $\tau_{\Lambda(i)}^*$ . No obstante, no necesariamente tendrá una raíz única, sino que puede tener más de una. En la Gráfica 2 se aprecian dos ejemplos con diferentes valores de los parámetros. En la parte superior la espera exógena de equilibrio será de 15 instantes. En la parte inferior, donde el tamaño máximo de la burbuja ha pasado de 20 a 22, la espera pasa de 15 a 17 instantes.

Con esto concluye el análisis de la estrategia que será usada en el caso (i). Procede abordar el siguiente.



Gráfica 2. Raíz de la ecuación para diferentes valores de los parámetros para el caso (i).

➤ (ii)

En esta circunstancia, ya se había señalado arriba,  $a > k + \tau_{\Lambda(i)} - \tau_{\Omega}$  y se aplicará

$$\xi_{(ii)} = \min \left\{ k + \tau_{\Lambda(i)} - 1, \bar{\tau} \right\}.$$

Primero supóngase que  $\xi_{(ii)} = k + \tau_{\Lambda(i)} - 1$ . Sustituyendo en la ecuación (16):

$$\beta(\tau_{\Lambda(i)} + k - 1) \geq \frac{dq^{1-k} \left[ (1-k) \left( \frac{S-1}{p} \right) + S(1+\tilde{n}) - \frac{1}{p^2} \left[ (1+\tilde{n}p)(1-qs) - spq \right] \right] - (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right)}{Sdq^{1-k} (2 + \tilde{n} - k)}.$$

Igual que antes, sea justamente:

$$\beta_{(ii)} \equiv \frac{dq^{1-k} \left[ (1-k) \left( \frac{S-1}{p} \right) + S(1+\tilde{n}) - \frac{1}{p^2} (\mathbf{1} + \tilde{n}p)(1-qs) - spq \right] - (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right)}{Sdq^{1-k} (2 + \tilde{n} - k)},$$

entonces:

$$\beta(\tau_{\Lambda(ii)} + k - 1) = \beta_{(ii)} \Rightarrow 1 - S^{-(\tau_{\Lambda(ii)} + k - 1)} = \beta_{(ii)}.$$

Despejando:

$$\tau_{\Lambda(ii)}^* = \left\lceil \frac{\ln(1 - \beta_{(ii)})}{\ln S^{-1}} \right\rceil - k + 1, \quad (20)$$

en tanto que para el caso de estrategia pensada en rompimiento exógeno, el resultado es el mismo que antes.

➤ (iii)

En esta circunstancia,  $\xi_{(ii)} = \min \left[ \alpha + \tau_{\Omega} - 1, \bar{\tau} - 1 \right]$ . Al igual que en una parte del caso (i), aquí no habrá una solución explícita. Se debe nuevamente recurrir a procedimientos numéricos para encontrar la estrategia optimizadora. Ahora se tendrá:

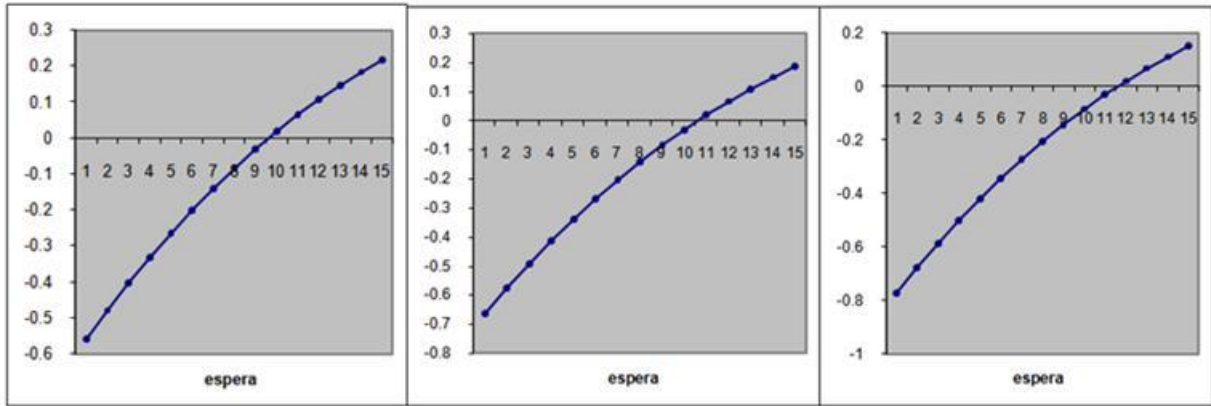
$$\beta_{(iii)} \geq \frac{dq^{\tau_{\Lambda(iii)}^* - a - \tau_{\Omega} + 1} \left[ (\tau_{\Lambda(iii)}^* - a - \tau_{\Omega} + 1) \left( \frac{S-1}{p} \right) + S(1+\tilde{n}) - \frac{1}{p^2} (\mathbf{1} + \tilde{n}p)(1-qs) - Spq \right] + (S-1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right)}{Sdq^{\tau_{\Lambda(iii)}^* - a - \tau_{\Omega} + 1} (2 + \tilde{n} + \tau_{\Lambda(iii)}^* - a - \tau_{\Omega})}$$

Luego de algunos pasos algebraicos, se llega a:

$$dq^{\tau_{\Lambda(iii)}^* - a - \tau_{\Omega} + 1} \left[ (\tau_{\Lambda(iii)}^* - a - \tau_{\Omega} + 1) \left( \frac{1 - qS}{p} - S(1 - \beta_{iii}) \right) - S(1 + \tilde{n}) + \frac{1}{p^2} (1 + \tilde{n}p)(1 - qS) - Spq + \beta_{iii} S \right] + (S - 1) \left( \frac{dq^{-\tilde{n}}}{p^2} - 1 \right) \approx 0 \quad (21)$$

Esta vez la resolución se hace muy particularizada, puesto que habrá una ecuación (21) para cada nivel de  $\tau_{\Omega}$  y de  $a$ . La Gráfica 3 ilustra tres contextos para respectivos valores de  $a$ .

$$a = 6 \Rightarrow \tau_{\Lambda(iii)}^* = 10 \quad a = 7 \Rightarrow \tau_{\Lambda(iii)}^* = 11 \quad a = 8 \Rightarrow \tau_{\Lambda(iii)}^* = 12$$



Parámetros:  $n = 10$   $\tilde{n} = 8$   $k = 5$   $p = 0.1$   $g = 0.3$   $r = 0.1$   $\bar{\tau} = 20$   $\tau_{\Omega} = 5$

Gráfica 3. Raíz de la ecuación para diferentes valores de los parámetros para el caso (ii).

Ya se tiene cada una de las esperas de los tres casos que arriba se señalaron, así como la espera que contempla una duración exógena. Como ésta es la misma para los tres escenarios, sea  $\tau_{\Lambda(X)}^*$  la solución de la ecuación (19), que será válida para todos ellos. Así pues, hay cuatro posibles esperas, que cuando  $k < a \leq \tilde{n}$ , los agentes  $\Lambda$  introducen como insumo al momento de conjeturar la duración de la burbuja. Ellas son  $\tau_{\Lambda(i)}^*$ ,  $\tau_{\Lambda(ii)}^*$ ,  $\tau_{\Lambda(iii)}^*$  y  $\tau_{\Lambda(X)}^*$ . Por supuesto, ahora viene la pregunta obligada, ¿cuál finalmente habrán de usar? Para responder a ella primero debe agotarse la lógica detrás de cada espera y al final se recurre al uso de supuestos.

Cuando se obtuvo  $\tau_{\Lambda(i)}^*$ , se supuso que  $a + \tau_{\Omega} < 1 + \tau_{\Lambda}$ , es decir, que  $\tau_{\Lambda} > a + \tau_{\Omega} - 1$ . Si se



obtiene ahora que  $\tau_{\Lambda(i)}^* \leq a + \tau_{\Omega} - 1$ , entonces este valor habrá de contradecir el supuesto, por lo que será necesario desechar esa estrategia. Lo mismo sucederá si  $\tau_{\Lambda(ii)}^* \geq a + \tau_{\Omega} - k$  y si  $\tau_{\Lambda(iii)}^* \notin [a + \tau_{\Omega} - k, a + \tau_{\Omega} - k + 1, \dots, a + \tau_{\Omega} - 1]$ . Con estas restricciones es posible deshacerse de alguno o algunos de los cuatro valores de espera encontrados. Pero, ¿qué pasa si después de este filtro no sobrevive ni siquiera uno, o bien lo hace más de uno? En el primer caso, se supondrá que habrá de ser usado aquél que no fue sometido a prueba, esto es,  $\tau_{\Lambda(X)}^*$ . En tanto que en el segundo caso, en un afán por evitar dirigir los resultados del modelo, se supondrá aquí que se usa el menor de los valores de espera obtenidos. Esto debe escribirse más formalmente.

Definición 1:

Sea  $\tau_{\Lambda(C)}^*$  la conjetura que un agente de  $\Lambda$  hace con respecto a la estrategia del resto de los agentes de ese grupo, cuando  $k < a \leq \tilde{n}$ . Sea también  $\Theta$  un conjunto de elementos constituido así:

- $\tau_{\Lambda(i)}^* \in \Theta \Leftrightarrow \tau_{\Lambda(i)}^* > a + \tau_{\Omega} - 1$
- $\tau_{\Lambda(ii)}^* \in \Theta \Leftrightarrow \tau_{\Lambda(ii)}^* < a + \tau_{\Omega} - k$
- $\tau_{\Lambda(iii)}^* \in \Theta \Leftrightarrow a + \tau_{\Omega} - 1 \leq \tau_{\Lambda(iii)}^* \leq a + \tau_{\Omega} - 1$

para  $a$  y  $\tau_{\Omega}$  dados. Se tendrá entonces que:

Si  $\Theta \neq \emptyset \Rightarrow \tau_{\Lambda(C)}^* = \inf \Theta$ , donde  $\inf \Theta$  indica el menor elemento de  $\Theta$ .

Si  $\Theta = \emptyset \Rightarrow \tau_{\Lambda(C)}^* = \tau_{\Lambda(X)}^*$ .

Con esto queda determinado el largo tema de  $\tau_{\Lambda(C)}^*$ , la espera que cada agente anticipado le atribuye al resto de sus compañeros del colectivo. Ahora se procede a tratar el tema de las probabilidades conjuntas.

## 2.4 Probabilidades conjuntas

Hasta ahora no se ha dicho nada de las probabilidades conjuntas, que versen tanto de  $b$  como de  $a$ . Se debe encontrar la función de probabilidad para ambos *rankings*. Sea  $\tilde{R}_\Lambda(a,b)$  la función de probabilidad de todo agente perteneciente a  $\Lambda$  de que conjuntamente él sea el  $b$ -ésimo en el orden y el líder sea el  $a$ -ésimo, dado que está cierto de que este último no ha despertado antes que él. Entonces se tendrá:

$$\tilde{R}_\Lambda(a,b) = \Pr \left( \mathcal{Q}_i = b \mid b \leq a \right) \Pr \left( \mathcal{Q}_A = a \mid D_i = b, b \leq a \right), \quad (22)$$

donde,  $D_i$  es la variable aleatoria que hace referencia al *ranking* de  $i$ , o sea, del agente de  $\Lambda$ , en tanto que  $D_A$  es la propia para el líder.

Pero ya se había obtenido antes que:

$$\tilde{R}(b) = \Pr \left( \mathcal{Q}_i = b \mid b \leq a \right) = dq^{-b} (\tilde{n} - b + 1). \quad (23)$$

Como la distribución para el líder es una uniforme discreta con parámetro  $\tilde{n}$ , si esta vez se tiene certeza de que el líder no está antes que él, deberá ser que el resto de los lugares que puede ocupar éste sea también repartido uniformemente. Es por eso que:

$$\Pr \left( \mathcal{Q}_A = a \mid D_i = b, b \leq a \right) = \frac{1}{\tilde{n} - b + 1}. \quad (24)$$

Así que, sustituyendo (23) y (24) en (22), quedará:

$$\tilde{R}_\Lambda(a,b) = dq^{-b}. \quad (25)$$

A partir de la anterior función de probabilidad, sea  $\wp$  una matriz de  $(b \times a)$  cuyo elemento ubicado en el  $b$ -ésimo renglón y en la  $a$ -ésima columna es precisamente  $\tilde{R}_\Lambda(a,b)$ . Se le llamará a  $\wp$  *Matriz de Probabilidad Conjunta*.

Se construye ahora otra matriz, que se denominará aquí *Matriz de Situación*, cuya notación será  $\Psi(\tau_\Lambda, \tau_\Omega)$ , y que le dirá al agente anticipado si para cada combinación de *rankings* él habrá de recibir un pago alto o uno bajo, si es que juega la estrategia  $\tau_\Lambda$  y los rezagados la estrategia  $\tau_\Omega$ . Considérense los siguientes conjuntos de parejas de *rankings*.

Sean:

$$J: \{(a, b) | 1 \leq a \leq \bar{n}, 1 \leq b \leq \bar{n}\}$$

$$H_1(\tau_\Lambda, \tau_\Omega): \{(a, b) | (a, b) \in J, a \leq k, b < \min\{\bar{c}_\Omega - \tau_\Lambda + a, \bar{c} + 2 - \tau_\Lambda\}\}$$

$$H_2(\tau_\Lambda, \tau_\Omega): \{(a, b) | (a, b) \in J, a > k, b < \min\{\bar{c}_1 - k + \tau_{\Lambda(C)}^* - \tau_\Lambda, \bar{c} + 2 - \tau_\Lambda\}\}$$

Ahora sí, sea:

$$\psi(\tau_\Lambda, \tau_\Omega, a, b) = \begin{cases} S^{\tau_\Lambda} & \text{si } (a, b) \in H_1 \cup H_2 \\ S^{-b} & \text{si } (a, b) \notin H_1 \cup H_2 \end{cases}$$

el elemento del renglón  $b$  y de la columna  $a$  de la matriz  $\Psi(\tau_\Lambda, \tau_\Omega)$ .

Entonces se tendrá que el pago esperado para el agente representativo  $\Lambda$ , si supone que los  $\Omega$  esperarán  $\tau_\Omega$  y él aguarda  $\tau_\Lambda$ , que se denotará  $G_\Lambda(\tau_\Lambda, \tau_\Omega)$ , será:

$$G_\Lambda(\tau_\Lambda, \tau_\Omega) = tr(\Psi \cdot \phi), \tag{26}$$

donde  $tr(\cdot)$  indica la traza de la matriz ahí contenida.

Para cada supuesta espera del grupo de los rezagados, el agente elegirá aquella espera propia que maximice su pago. Esto no se puede hacer algebraicamente por que la complejidad de  $\tau_{\Lambda(C)}^*$  lo impide.

$$\text{Sea: } \tau_{\Lambda}^* = \arg \max G_{\Lambda}(\tau_{\Lambda}, \tau_{\Omega}) \quad (27)$$

Entonces  $\tau_{\Lambda}^*$  será la estrategia utilizada por el agente anticipado representativo. En tanto que toda (27) será la función de reacción del agente  $\Lambda$  ante la estrategia de los agentes  $\Omega$ .

## 2.5 Equilibrio

Ha sido obtenida ya la función de reacción de cada uno de los agentes representativos de ambos grupos, los anticipados y los rezagados. Es decir, ya se cuenta con:

$$\tau_{\Omega}^* = \arg \max G_{\Omega}(\tau_{\Lambda}, \tau_{\Omega})$$

y con:

$$\tau_{\Lambda}^* = \arg \max G_{\Lambda}(\tau_{\Lambda}, \tau_{\Omega}).$$

Ahora simplemente se fusionan ambas para dar con la espera de equilibrio de los dos grupos, y por consiguiente con la duración de la burbuja para cada realización de  $a$ . Lamentablemente, el álgebra no alcanza a dar una solución de equilibrio para esta tarea. Es por ello que se debe recurrir aquí a métodos numéricos. En el siguiente apartado se presentan algunos resultados interesantes.

## 3. Resultados

Antes de mostrar los resultados, se pone sobre la mesa la solución al modelo original que se ha presentado en el primer artículo de esta serie de tres. Ahí el entorno carece de un líder y los agentes por lo tanto no lo consideran a la hora de diseñar su estrategia. Esto se hace porque el más atractivo interés que tiene el modelo de este capítulo puede apreciarse a la hora de comparar ambos, ya que se puede rescatar del ejercicio una buena noción de lo que, bajo los supuestos de ambos modelos, puede significar la pertinencia de la intervención del gobierno en los procesos

aquí señalados. En ese primer artículo, para dicho modelo original la solución fue la siguiente. Con:

$$\beta^* = \frac{(1-q^k)(1-S^{-1})}{p},$$

si  $\beta^* \leq \bar{\beta}$ , la estrategia era pensando en un rompimiento endógeno y la espera quedaba:

$$\tau_{i\text{ endo}}^* = \left\lceil \frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln(S^{-1})} \right\rceil - k + 1.$$

Si por el contrario,  $\beta^* > \bar{\beta}$ , la estrategia contemplaba una duración exógena y la espera resultaba ser:

$$\tau_{i\text{ exo}}^* = 1 + \bar{\tau} - \frac{\ln\left(1 - p\bar{\beta}\left(\frac{S}{S-1}\right)\right)}{\ln q}.$$

Se presentan en el Cuadro 1 los resultados de algunos conjuntos de parámetros. Ahí se exhiben diez ejemplos. En todos se dejan constantes ciertos parámetros, como  $n$ ,  $\tilde{n}$ ,  $k$  y  $r$ , mientras que se hacen variar en diferentes formas al resto de ellos. En general se presentan altos valores para  $g$ , puesto que de lo contrario no era posible obtener equilibrio.

En las casillas oscuras se encuentra condensado el resultado más valioso del modelo. En los ejemplos del 5 al 10, la espera de los agentes anticipados es menor (o igual, en el caso del 8) a la que se daría en un ambiente sin líder y sin expectativas de que alguien salga a “regalar” información. En cambio, en los primeros cuatro ejemplos sucede algo muy interesante, pues la espera de los anticipados podría llegar a ser mayor a la de un entorno sin líder. Nótese que estos resultados se dan por lo regular cuando el parámetro  $p$  es relativamente alto.

Efectivamente, bien podría ser que originalmente el juego se situara en un equilibrio de baja espera para los agentes del modelo del primer artículo, pero a raíz del anuncio del líder la espera podría no sólo no decrecer, sino incluso aumentar.

Otro aspecto digno de resaltar en el Cuadro 1 se presenta en los ejemplos 9 y 10. A pesar de que aquí la espera de los anticipados sí se reduce gracias a la intervención del regulador, hay un hecho atractivo. Los valores de los parámetros son iguales en ambos casos, salvo por  $\tilde{n}$ . Cuando  $\tilde{n}$  tiene un valor de 8, la espera de ambos grupos en equilibrio es menor que cuando éste es diez. Para los agentes anticipados, el valor de  $\tilde{n}$  es un referente en dos sentidos. No sólo se está seguro de ser uno de los  $\tilde{n}$  primeros, sino que esto hará que aumenten las probabilidades de los puestos iniciales. Ello habría de alargar su espera. Sin embargo, si  $\tilde{n}$  es pequeña, será menos probable que los anticipados sean muchos y más probable será que lo sean los rezagados, que potencialmente pueden actuar en contra de la burbuja, con lo cual la desconfianza aumenta. Para este particular conjunto de parámetros, la primera fuerza se antepone a la segunda y la espera finalmente se extiende con  $\tilde{n}$ .

La validez de los resultados expresados en el Cuadro 1 no es generalizada pues no pretende serlo. La intención de los procedimientos que preceden a dicho cuadro no es la de encontrar un perfil general de cómo se comportará el juego cuando el gobierno actúa de la manera ya citada. Por el contrario, el propósito fundamental era el de encontrar casos en los que el anuncio del líder no cumple con su cometido.

Tomando en consideración el resultado principal de este modelo, ¿qué lectura debe hacer de él el aparato regulador en cuestión? En el ejemplo marcado con el número 3 del cuadro, si el gobierno no interviene en el proceso, la espera de los agentes podrá ser de 4, 5, ... 11 instantes. Supóngase que por alguna razón la espera se sitúa en 4. La burbuja se romperá cuando venda el último de los agentes. Esto será en  $t_0 + k + \tau_i^* - 1$ , o sea, en  $t_0 + 8$  para este ejemplo. Sin embargo, de intervenir, la burbuja se romperá en  $t_0 + 7$  si es que  $a=1$ , en  $t_0 + 8$  si  $a=2$  y en  $t_0 + 9$  si  $a=3$ . En tanto que lo hará posteriormente para el resto de los valores posibles de  $a$ . De esta forma, si se continúa suponiendo que  $\tilde{n}=10$ , el gobierno entenderá que sólo en dos de diez casos puede ser útil su intervención, o dicho en otras palabras, si interviene hará bien sólo con probabilidad un quinto, y aquí debe insistirse, siempre y cuando se dé uno de los tantos equilibrios posibles en el modelo sin líder.

<i>Ejemplo</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$k$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$\tilde{n}$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	8
$\rho$	0.2	0.25	0.3	0.32	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2
$g$	0.55	0.63	0.7	0.7	0.455	0.8	0.5	0.45	0.7	0.7
$r$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\bar{\tau}$	25	25	15	15	20	20	20	20	15	15
$\tau_{\lambda}^*$	18	19	9	7	13	17	14	13	11	10
$\tau_{\tau}^*$	15	16	7	5	9	14	11	9	9	8
$\tau_i^*$	6,7,...21	8,9,...21	4,5,...11	2,3,..6	17	19	17	13	13	13

Cuadro 1. Ejemplificación de resultados

#### 4. Conclusiones

Ha sido desarrollado un modelo que plasma el proceder de ciertos inversionistas ante la presencia de una burbuja en el precio de algún activo de su propiedad y ante la existencia de un agente regulador. Este agente, que aquí se identificó como el gobierno o como algún aparato regulador, tiene el objetivo de minimizar la duración de dicha burbuja, pero sólo usa como instrumento la transmisión de información a los agentes peor informados que él. Es decir, su acción es indirecta y no directa.

Pareciera que la noticia que el gobierno da habría de detonar algún mecanismo, alimentado por miedos, que llevara a los agentes rezagados a vender de inmediato y que, teniendo en consideración que tarde o temprano el anuncio habría de llegar, los anticipados moderaran decisivamente su espera. Sin embargo, el hecho de que el anuncio del regulador sea *sistemático* y que esto lo sepan todos los agentes, hace que se abra la posibilidad de que se dé un equilibrio entre anticipados y rezagados cuyo resultado puede distar del propósito de dicho regulador. Si se supusiera que es incierto que el gobierno va o no a denunciar a la burbuja, pero

que al menos es positiva la probabilidad de que lo haga, el modelo quizá auguraría una intervención del gobierno más exitosa. Así, un agente que aquí se llama anticipado no sabría al percatarse de que el precio está inflado cuál de estas dos sería la verdad: si el regulador no ha despertado, o bien que ya lo haya hecho pero haya dado el aviso. Esto evitaría que su función de probabilidad respecto al nacimiento de la burbuja se altere en la forma en que lo hace en el presente modelo. Ello queda como tema para posteriores investigaciones.

El resultado principal de este modelo, más allá de si los parámetros usados para ver el funcionamiento del mismo están o no fuera de la realidad, es que *pueden existir* casos en que, bajo todos los supuestos aquí erigidos, la actuación del regulador en el sentido aquí dado puede no ser efectiva. Incluso puede ser contraproducente si con su aviso (dicho con más propiedad, con su “no aviso”) logra involuntariamente que algunos agentes bien informados alarguen su espera. Esto, al ser vaticinado por aquellos agentes peor informados, puede conducir al establecimiento de un equilibrio en el que éstos usen tal acción del gobierno como un elemento coordinador y la vida de la burbuja termine alargándose.



## **Apéndice primer artículo**

## A1

En realidad esta condición por sí sola garantiza un máximo local, pero no un máximo global. Aquí se ilustra una forma intuitiva de asegurarse de que también es máximo global. El problema y la función objetivo se pueden re expresar así:

$$\max_{\tau_i} S^{\tau_i} (q^{-k-\tau_{i-1}+\tau_i} - 1) + \frac{pS}{1-qS} (qS)^{-n} - (qS)^{-k-\tau_{i-1}+\tau_i}, \quad \text{o sea,}$$

$$\max_{\tau_i} (qS)^{\tau_i} \left( q^{-k-\tau_{i-1}} - \frac{pS}{1-qS} (qS)^{-k-\tau_{i-1}} \right) - S^{\tau_i}. \quad \text{Sean } A \equiv q^{-k-\tau_{i-1}} - \frac{pS}{1-qS} (qS)^{-k-\tau_{i-1}}, \quad B \equiv qS \quad \text{y} \quad C \equiv S.$$

Entonces el problema tendría la forma genérica:  $\max_x AB^x - C^x$ . Al aproximar la función a una continua, las condiciones de primer orden serían  $AB^x \ln B - C^x \ln C = 0$ . Si a partir de ahí se despeja, quedaría:

$$x = \frac{\ln \left[ \frac{A \ln B}{\ln C} \right]}{\ln \left[ \frac{C}{B} \right]},$$

así que habrá una  $x$  óptima y sólo una, con lo cual se evita el problema de tener un máximo local que no sea máximo global. Así, en términos continuos la función objetivo tendría la siguiente forma:  $ab^x - c^x$ .

## A2

Para maximizar el pago esperado respecto a  $\tau_i$ , el problema es:

$$\text{Max}_{\tau_i} \sum_{y=0}^{\tau_i} \frac{1}{(1+r)^y} \left[ -\beta(\xi) \bar{P}(y) \pi(y/t_i) \right] + \frac{1}{(1+r)^{\tau_i}} P(\tau_i) \left[ -\Pi(\tau_i/t_i) \right].$$

Sabiendo que  $P(y) = (1+g)^y$  y que  $S \equiv \frac{1+g}{1+r}$ , el problema se podrá ver:

$$\text{Max}_{\tau_i} \sum_{y=0}^{\tau_i} S^y \left[ -\beta(\xi) \bar{P}(y/t_i) \right] + S^{\tau_i} \left[ -\Pi(\tau_i/t_i) \right].$$

Las condiciones de primer orden quedarán, para  $t = \tau_i$  el entero más chico tal que se cumpla:

$$S^{\tau_i+1} \left[ -\beta(\xi) \bar{P}(\tau_i+1 | t_i) \right] - S^{\tau_i+1} \left[ -\Pi(\tau_i+1 | t_i) \right] - S^{\tau_i} \left[ -\Pi(\tau_i | t_i) \right] \geq 0.$$

Multiplicando ambos lados por  $S^{-\tau_i}$  y reacomodando:

$$S \left[ -\beta(\xi) \bar{P}(\tau_i+1 | t_i) \right] + S \left[ -\Pi(\tau_i+1 | t_i) \right] \geq 1 - \Pi(\tau_i | t_i).$$

Pero se sabe que  $\pi(\tau_i+1 | t_i) \geq \pi(\tau_i | t_i)$ , y que  $\Pi(\tau_i+1 | t_i) \geq \pi(\tau_i+1 | t_i) \geq \Pi(\tau_i | t_i)$ , por lo que, además  $\Pi(\tau_i+1 | t_i) \geq \pi(\tau_i | t_i) + \Pi(\tau_i | t_i)$ . Sustituyendo lo anterior:

$S \left( -\beta(\xi) \right) \bar{q} + S \left( -\Pi(\tau_i | t_i) - \pi(\tau_i | t_i)q \right) \bar{q} \geq 1 - \Pi \left( \tau_i | t_i \right)$ , con álgebra se llega a que:

$$h(\tau_i | t_i) = \frac{\pi(\tau_i | t_i)}{1 - \Pi(\tau_i | t_i)} \geq \frac{S - 1}{qS\beta(\xi)}.$$

### A3

En el caso de rompimiento endógeno, se deben comparar (2.2.14) y (2.3.12). Supóngase que son iguales, entonces se tendrá que:

$$\frac{\ln \left( \frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k} \right)}{\ln S} = -\frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln S} - k \Rightarrow \ln \left( \frac{pS^{1-k}}{(1-qS) + (S-1)q^k} \right) = -\ln(1-\beta^*) - k \ln S,$$

$$\ln(pS^{1-k}) - \ln((1-qS) + (S-1)q^k) = -\ln(1-\beta^*) - k \ln S$$

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{pS}{(1-qS) + (S-1)q^k} \right) = \ln(1-\beta^*)^{-1}. \text{ Aplicando la función antilogaritmo de ambos lados:}$$

$$\Rightarrow \frac{pS}{(1-qS) + (S-1)q^k} = (1-\beta^*)^{-1}. \text{ Pero se sabe que } \beta^* = \frac{(1-q^k)(S-1)}{pS}$$

$$\Rightarrow \frac{pS}{(1-qS) + (S-1)q^k} = \left( 1 - \frac{(1-q^k)(S-1)}{pS} \right)^{-1} \Rightarrow 1 - qS = 1 - S(1-p).$$

Y como  $q = 1 - p$ , se verifica el supuesto inicial.

lcdd

Ahora debe comprobarse la igualdad de las esperas para cuando éstas son diseñadas para un rompimiento exógeno. Para ello, ahora supóngase que se igualan (17) y (30). Entonces, deberá ser que:

$$\frac{\ln \left( \frac{(S-1)q^{\bar{\tau}+1}}{qS-1+pS^{-\bar{\tau}}} \right)}{\ln q} = \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln \left( 1 - \frac{p(S-S^{-\bar{\tau}})}{S-1} \right)}{\ln q}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln \left( \frac{(S-1)q^{\bar{\tau}+1}}{qS-1+pS^{-\bar{\tau}}} \right)}{\ln q} = \frac{(\bar{\tau} + 1) \ln q - \ln \left( 1 - \frac{p(S-S^{-\bar{\tau}})}{S-1} \right)}{\ln q} \Rightarrow \frac{(S-1)}{qS-1+pS^{-\bar{\tau}}} = \frac{(S-1)}{S-1-p(S-S^{-\bar{\tau}})}$$

$$\Rightarrow qS + pS^{-\bar{\tau}} = qS + pS^{-\bar{\tau}},$$

por lo que se comprueba el supuesto.

lcdd

Finalmente, debe verificarse que el punto donde se debe dar el salto de una espera endógena a una exógena es el mismo en ambos casos. Deberá ser que si:

$$\frac{pS}{(1-qS) + (S-1)q^k} > S^\tau, \text{ ello implique que } \beta^* > \bar{\beta}. \text{ Supóngase que se da:}$$

$$\frac{pS}{(1-qS) + (S-1)q^k} > S^\tau, \text{ entonces, reacomodando, } S^{-\tau} > \frac{(1-qS) + (S-1)q^k}{pS}.$$

$$\text{De lo anterior, debe ser cierto que } 1 - \frac{(1-qS) + (S-1)q^k}{pS} > 1 - S^{-\tau}.$$

Pero se había definido que  $\bar{\beta} = 1 - S^{-\tau}$ , así que:

$$\frac{pS - (1-qS) - (S-1)q^k}{pS} > \bar{\beta} \Rightarrow \frac{(S-1)(1-q^k)}{pS} > \bar{\beta}. \text{ Por lo tanto, } \beta^* > \bar{\beta}.$$

LCDD

#### A4

Para que  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial S} \geq 0$  sea cierto, debe ser que  $\frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial S} \geq 0$ , que  $\frac{\partial \tau_{iexo}^*}{\partial S} \geq 0$ , pero también que al momento en que se da el brinco de espera endógena a espera exógena ésta también aumente. Se prueba cada caso por separado.

i) Por probar, que  $\frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial S} \geq 0$ .

Se sabe que  $\tau_{iendo}^* = \left[ -\frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln S} - k \right]$ . Sin pérdida de generalidad (esto se puede hacer porque el

redondeo es hacia arriba)  $\tau_{iendo}^* = -\frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln S} - k$ . Por la regla de la cadena, se tendrá que:

$$\frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial S} = \frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial \beta^*} \frac{\partial \beta^*}{\partial S}. \quad (\text{A4.1})$$

Ahora,

$$\frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial \beta^*} = \frac{1}{\ln S} \left( \frac{1}{1-\beta^*} \right) > 0, \quad (\text{A4.2})$$

ya que  $S > 1$  y  $\beta^* \in (0, 1]$ . Luego,  $\beta^* = \frac{(1-q^k)(S-1)}{pS} = \left(\frac{1-q^k}{p}\right)(1-S^{-1})$ , por lo que:

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial S} = \left(\frac{1-q^k}{p}\right)S^{-2} > 0, \quad (\text{A4.3})$$

así que usando (A4.2) y (A4.3) en (A4.1), se concluye que  $\frac{\partial \tau_{i\text{endo}}^*}{\partial S} > 0$ .

Lcdd

ii) Por probar, que  $\frac{\partial \tau_{i\text{exo}}^*}{\partial S} \geq 0$ .

S.p.g.:

$$\tau_{i\text{exo}}^* = \tau + 1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{p(S - S^{-\tau})}{S - 1}\right)}{\ln q}. \text{ Aplicando nuevamente la Regla de la Cadena:}$$

$$\frac{\partial \tau_{i\text{exo}}^*}{\partial S} = \frac{\partial \tau_{i\text{exo}}^*}{\partial\left(\frac{S - S^{-\tau}}{S - 1}\right)} \frac{\partial\left(\frac{S - S^{-\tau}}{S - 1}\right)}{\partial S}. \quad (\text{A4.4})$$

Por un lado,

$$\frac{\partial \tau_{i\text{exo}}^*}{\partial\left(\frac{S - S^{-\tau}}{S - 1}\right)} = \left(\frac{1}{\ln q}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{p(S - S^{-\tau})}{S - 1}}\right) < 0, \quad (\text{A4.5})$$

ya que el primer factor es negativo y el segundo positivo. Por otro lado, respecto al segundo factor de (A4.4), puede verse que si por ejemplo aumenta  $S$ , mientras que los dos términos del numerador de  $\frac{S - S^{-\tau}}{S - 1}$  aumentan, en el denominador sólo lo hace uno. Es por ello que si bien puede con esto crecer el numerador, lo hará menos que proporcionalmente que el denominador y así la fracción habrá de decrecer. Una demostración más rigurosa de esta afirmación se halla en el Apéndice (AA4.1). Así, se puede decir que:

$$\frac{\partial\left(\frac{S - S^{-\tau}}{S - 1}\right)}{\partial S} \leq 0. \quad (\text{A4.6})$$

De (A4.5) y (A4.6) se determina que  $\frac{\partial \tau_{i\text{exo}}^*}{\partial S} \geq 0$ .

Lcdd

En el anterior resultado no interviene en lo absoluto  $k$ , así que no hay ningún problema por lo

que respecta a la multiplicidad de equilibrios.

iii) Por probar que en el salto de espera endógena a exógena ésta no decrece.

Tal cambio se da justo cuando  $\beta^* = \bar{\beta}$ , o sea, cuando:

$$S^{-\tau} = 1 - \beta^* , \quad (\text{A4.7})$$

por lo que deberá ser que:

$$\tau + 1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{p(S - (1 - \beta^*))}{S - 1}\right)}{\ln q} \geq -\frac{\ln(1 - \beta^*)}{\ln S} - k . \quad (\text{A4.8})$$

Pero por (A4.7), se sabrá que  $\tau = -\frac{\ln(1 - \beta^*)}{\ln(S)}$ , así que sustituyendo en (A4.8) y simplificando, es necesario que:

$$1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{p(S - (1 - \beta^*))}{S - 1}\right)}{\ln q} \geq -k , \quad (\text{A4.9})$$

pero se sabe que<sup>18</sup>  $\beta^* = \frac{(1 - q^k)(S - 1)}{pS}$ , así que sustituyendo esto en (A4.9) y procesando, queda:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\ln\left(q - \frac{1 - q^k}{S}\right)}{\ln q} \geq -k & \Leftrightarrow \frac{\ln\left(q - \frac{1 - q^k}{S}\right) - \ln q}{\ln q} \leq k \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1 - q^k}{qS} \geq q^k & \Leftrightarrow 1 - q^k \geq \frac{1 - q^k}{qS} \Leftrightarrow qS \geq 1 . \end{aligned}$$

Lo cual es una condición necesaria para una espera endógena mayor o igual a cero, y es un hecho que se viene de una así. (Apéndice AA4.2).

lcdd

De todo lo anterior, se concluye que  $\frac{\partial \tau_i^*}{\partial S} \geq 0$

LCDD

---

<sup>18</sup> Si aquí se estuviera trabajando no con  $k$ , sino con  $k'$ , esto seguiría siendo válido, pues no se usaría ese  $\beta^*$ , sino un  $\beta^*(k')$ , el cual, para  $x$  diferente de cero, sería diferente.

AA4.1

Demostrar que  $\frac{\partial \left( \frac{S - S^{-\tau}}{S - 1} \right)}{\partial S} \leq 0$ . Se lleva a cabo la derivación:

$$\frac{\partial \left( \frac{S - S^{-\tau}}{S - 1} \right)}{\partial S} = (S - S^{-\tau})(-1)(S - 1)^{-2} + (S - 1)^{-1}(1 + \tau S^{-\tau-1}).$$

Para que la proposición sea cierta, debe ser que:

$$(S - S^{-\tau})(-1)(S - 1)^{-2} + (S - 1)^{-1}(1 + \tau S^{-\tau-1}) \leq 0.$$

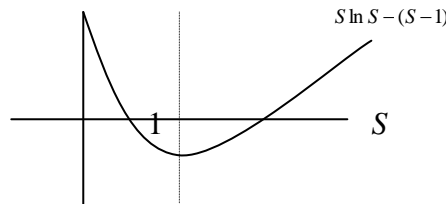
Aseando la expresión, deberá ser que  $S^{-\tau}(1 + \tau - \tau S^{-1}) \leq 1$ . Multiplicando ambos lados por  $S^{\tau+1}$ ,  $S + \tau S - \tau \leq S^{\tau+1}$

$$\Leftrightarrow S^{\tau+1} - S(\tau + 1) + \tau \geq 0. \quad (\text{AA4.1})$$

Minimizando el lado izquierdo de la desigualdad respecto a  $S$ :

$$\frac{\partial (S^{\tau+1} - S(\tau + 1) + \tau)}{\partial S} = S^{\tau+1} \ln S - (S - 1).$$

¿Cuánto vale este mínimo? Considérese sólo a  $S \ln S - (S - 1)$ . Si se grafica respecto a  $S$ :



Puede demostrarse que la raíz de  $S \ln S - (S - 1)$  es  $S = 1$ , y que por lo tanto el mínimo será 0. Es decir,  $S \ln S - (S - 1) \geq 0$ . Luego, como  $\tau \geq 1$ , se tendrá que efectivamente se cumple (AA4.1), por lo que se concluye que:

$$\frac{\partial \left( \frac{S - S^{-\tau}}{S - 1} \right)}{\partial S} \leq 0.$$

LCDD

AA4.2

Demostrar que si  $qS \geq 1 \Rightarrow \tau_{iendo}^* \geq 0$ .

Primero demuéstrese que si  $qS = 1 \Rightarrow \tau_{iempo}^* = 0$ . Se sabe que  $\tau_{iempo}^* = -\frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln S} - k$ .

Por ello,  $\tau_{iempo}^* = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln(1-\beta^*)}{\ln S} - k = 0 \Leftrightarrow \ln(1-\beta^*) = -k \ln S \Leftrightarrow 1-\beta^* = S^{-k}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{(1-q^k)(S-1)}{(1-q)S} = S^{-k}$ . Con más álgebra,  $\Leftrightarrow \frac{1-q^k}{1-q} = \frac{1-S^{-k}}{1-S^{-1}}$ , pero si se usa el supuesto de que  $qS = 1 \Rightarrow S^{-1} = q \Rightarrow S^{-k} = q^k$ , se comprueba la hipótesis.

lcdd

Ahora se debe probar que si a partir de esa situación cambia  $q$  o  $S$  o ambos, de tal forma que  $qS > 1$  entonces deberá ser que  $\tau_{iempo}^* > 0$ .

Se parte de:

$$\frac{1-q^k}{1-q} = \frac{1-S^{-k}}{1-S^{-1}}. \quad (\text{AA4.2.2})$$

A manera de Lema, pruébese que  $\frac{\partial \left( \frac{1-q^k}{1-q} \right)}{\partial q} > 0$  y que  $\frac{\partial \left( \frac{1-S^{-k}}{1-S^{-1}} \right)}{\partial S} < 0$ :

Se sabe que  $\sum_{x=0}^n q^x = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .  $\Rightarrow \frac{1-q^k}{1-q} = \sum_{x=0}^{k-1} q^x = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}$ ,

por lo que es muy simple ver que  $\frac{\partial \left( \frac{1-q^k}{1-q} \right)}{\partial q} > 0$ . Análogamente es sencillo demostrar que:

$$\frac{\partial \left( \frac{1 - \left( \frac{1}{S} \right)^k}{1 - \frac{1}{S}} \right)}{\partial q} > 0, \text{ por lo que deberá ser que } \frac{\partial \left( \frac{1-S^{-k}}{1-S^{-1}} \right)}{\partial S} < 0 \text{ y con esto se prueba este Lema.}$$

Ahora, si aumenta  $q$ , deberá ser que  $\frac{1-q^k}{1-q} > \frac{1-S^{-k}}{1-S^{-1}}$ , así que siguiendo la demostración que llevó a (AA4.2.1) pero en sentido inverso, se puede asegurar que  $\tau_{iempo}^* > 0$ . Lo mismo sucederá si se aumenta  $S$ .

LCDD



A5

Igual que en la anterior demostración, ésta se lleva a cabo en tres tramos:

i) A probar que  $\frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial q} \geq 0$ .

Ya se sabe que  $\frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial \beta^*} > 0$ . Luego,  $\frac{\partial \beta^*}{\partial q} = \frac{S-1}{S} \left( \frac{\partial \left( \frac{1-q^k}{1-q} \right)}{\partial q} \right)$ .

Pero en el apéndice se demuestra que  $\frac{\partial \left( \frac{1-q^k}{1-q} \right)}{\partial q} > 0$ , por lo que debe ser que  $\frac{\partial \beta^*}{\partial q} > 0$ , así que

$$\frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial q} = \frac{\partial \tau_{iendo}^*}{\partial \beta^*} \frac{\partial \beta^*}{\partial q} \geq 0.$$

Donde la desigualdad débil obedece al redondeo.

Lcdd

ii) Probar que  $\frac{\partial \tau_{iexo}^*}{\partial q} \geq 0$

S.p.g se puede decir que:

$$\tau_{iexo}^* = \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln \left( 1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}})}{S-1} \right)}{\ln q}, \text{ así que sólo el último término sufrirá cambios al moverse } q.$$

Éste también se puede expresar así:

$$\frac{\ln \left( 1 - \frac{(1-q)(S - S^{-\tau})}{S-1} \right)}{\ln q^{-1}}. \tag{A5.1}$$

Luego, se tendrá que  $\frac{\partial (\ln q^{-1})}{\partial q} = -\frac{1}{q} < 0$ , en tanto que:

$$\frac{\partial \ln \left( 1 - \frac{(1-q)(S - S^{-\tau})}{S-1} \right)}{\partial q} = \frac{1}{1 - \frac{(1-q)(S - S^{-\tau})}{S-1}} \frac{S - S^{-\tau}}{S-1} > 0,$$

de tal forma que cuando aumenta  $q$ , el denominador de (A5.1) disminuye y el numerador aumenta, por lo que invariablemente todo el cociente debe aumentar. Entonces, se comprueba que:

$$\frac{\partial \tau_{iexo}^*}{\partial q} \geq 0.$$

Lcdd

iii) Probar que en el salto no decrece.

La prueba de la tercera parte de la Proposición 4 vale igualmente para esta tercera parte de la Proposición 5.

LCDD

A6

Se tiene que:

$$\frac{\Delta \tau_{iendo}^*}{\Delta k} = - \frac{\ln \left( 1 - \frac{(1-q^{k+1})(S-1)}{pS} \right)}{\ln S} - (k+1) - \left( - \frac{\ln \left( 1 - \frac{(1-q^{k+1})(S-1)}{pS} \right)}{\ln S} - k \right),$$

con algo de álgebra queda  $\frac{\Delta \tau_{iendo}^*}{\Delta k} = \frac{\ln \left( \frac{pS - (1-q^k)(S-1)}{pS - (1-q^{k+1})(S-1)} \right)}{\ln S} - 1$ , así que para que:

$$\frac{\Delta \tau_{iendo}^*}{\Delta k} \geq 0, \text{ debe ser que } \frac{\ln \left( \frac{pS - (1-q^k)(S-1)}{pS - (1-q^{k+1})(S-1)} \right)}{\ln S} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{pS - (1-q^k)(S-1)}{pS - (1-q^{k+1})(S-1)} \geq S$$

$$\Leftrightarrow pS - (1-q^k)(S-1) \geq S(pS - (1-q^{k+1})(S-1)) \Leftrightarrow Sq(1-q^k) - (1-q^k) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow qS \geq 1.$$

Pero esto último ya se había demostrado en este Apéndice, así que se comprueba que:

$$\frac{\Delta \tau_{iendo}^*}{\Delta k} \geq 0$$

LCDD

A7

Se tiene que 
$$\frac{\Delta \tau_{iexo}^*}{\Delta \bar{\tau}} = \bar{\tau} + 2 - \frac{\ln\left(1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}-1})}{S-1}\right)}{\ln q} - \left( \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}})}{S-1}\right)}{\ln q} \right).$$

Debe ser que:

$$\bar{\tau} + 2 - \frac{\ln\left(1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}-1})}{S-1}\right)}{\ln q} - \left( \bar{\tau} + 1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}})}{S-1}\right)}{\ln q} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left( \frac{1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}-1})}{S-1}}{1 - \frac{p(S - S^{-\bar{\tau}})}{S-1}} \right) \geq \ln q$$

$$\Leftrightarrow S - 1 - p(S - S^{-\bar{\tau}-1}) \geq q \left( S - 1 - p(S - S^{-\bar{\tau}}) \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - qS + qS^{-\bar{\tau}} - S^{-\bar{\tau}-1} \leq 0 \Leftrightarrow (1 - qS)(1 - S^{-\bar{\tau}-1}) \leq 0$$

$\Leftrightarrow qS \geq 1$ , lo cual ya se había demostrado antes.

$$\therefore \frac{\Delta \tau_{iexo}^*}{\Delta \bar{\tau}} \geq 0.$$

LCDD

## **Apéndice segundo artículo**

## A.1

*Discusión: Actualización de creencias.*

Las funciones de probabilidad aquí obtenidas no conllevan ninguna actualización con respecto al instante en que despiertan los agentes, a la posible espera de sus compañeros y al hecho de que la burbuja en ese instante no ha reventado. A primera vista, pareciera que el uso de estas funciones sería justificado sólo si la estrategia para vender se fijara antes de percatarse de la existencia la burbuja, por si en algún momento llegara a ocurrir. Por el contrario, si la estrategia se fija al despertar, habría un conjunto de combinaciones de posibles esperas y rankings que no serían compatibles.

Por ejemplo, para cualquier agente  $I$  hay una imposibilidad entre los eventos  $a=1$  y  $\tau_A=0$ , ya que cuando éste despierte sabrá con certeza que la burbuja no ha tronado, pues el precio de mercado es alto (se está modelando para el agente representativo de  $I$  que despierta y el precio es alto; obviamente habrá agentes que no alcancen a despertar cuando la burbuja ya tronó), por lo que si  $\tau_A=0$ , no podrá ser que el líder sea el primer clasificado o viceversa. Esta misma rectificación la podrá hacer también respecto al resto de los agentes  $I$ . En el mismo sentido del ejemplo anterior, si ellos esperan cero instantes,  $i$  sabrá que no podrá ser el  $(k+1)$ -ésimo.

Ahora que está presente la posibilidad de actualizar las creencias, sea  $\hat{R}_i(a, b, \tau)$  la probabilidad de los rankings  $a$  y  $b$ , como antes, pero ahora condicionado a que los agentes juegan la estrategia  $\tau$ , con  $\tau = (\tau_i, \tau_A, \tau_{I-i})$ , donde a su vez  $\tau_i$  es la estrategia de espera de  $i$ ,  $\tau_A$  la del líder y  $\tau_{I-i}$  la del resto de los agentes. En algunos ejemplos numéricos (que aquí no se presentan) se vio que el equilibrio con actualización de creencias es exactamente el mismo que sin ellas. Esto se da pese a que en el primero el pago esperado de cada estrategia es superior al derivado del segundo. Ello es así porque hay escenarios adversos para el agente  $i$  que a través de la actualización son descartados. Así, se le da probabilidad cero a tales contextos y necesariamente se infla la ponderación de los favorables, por lo que el pago esperado termina aumentando. Sin embargo, aunque la comparación entre los pagos esperados con o sin actualización sí da resultados diferentes, la comparación entre pagos al interior de un método u otro es tal que se preserva la relación entre los pagos, por lo que el proceso de maximización se da bajo la misma tesitura y el equilibrio no sufre modificación alguna. Estos renglones han servido para clarificar la idea de que no importa cuál supuesto sea usado, si los agentes formulan su estrategia antes de despertar o después, el equilibrio será el mismo.

## A.2

Demostración de la Proposición 1.

(i)

En la ecuación (24), para que se tenga por lo menos alguna combinación de rankings que arroje pago alto, debe ser que  $\theta - \tau_i \geq 1$ , como lo indican los límites para  $b$  del segundo término de dicha ecuación. Pero si se sabe que  $\theta < \tau_A + 1$ , y que además  $\tau_i \geq \tau_A$ , necesariamente será que  $\theta - \tau_i < 1$ , por lo que se confirma la inexistencia de combinaciones de pago alto. Con esto queda demostrado que siempre será  $i$  moderado respecto a  $A$ .

Ahora se debe obtener  $\tau_{i(1,1)}$ . Se tendrá que:

$$\begin{aligned}
 G_{i(1,1)}(\tau) &= L + \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} R_i(a, b) \left( S^{\tau_i} - S^{1-b} \right) \\
 &= L + S \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} R_i(a, b) \left( S^{\tau_{i-1}} - S^{-b} \right) = L + S \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} \frac{pq^{n-b}}{1-q^n} \frac{\alpha(1-\alpha)^{a-1}}{1-(1-\alpha)^n} \left( S^{\tau_{i-1}} - S^{-b} \right) \\
 &= L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{\alpha(1-\alpha)^{-1}}{1-(1-\alpha)^n} \sum_{a=1}^n q^{-b} \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} (1-\alpha)^a \left( S^{\tau_{i-1}} - S^{-b} \right) \\
 &= L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{\alpha(1-\alpha)^{-1}}{1-(1-\alpha)^n} \left[ S^{\tau_{i-1}} \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} q^{-b} \sum_{a=1}^n (1-\alpha)^a - \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} (qS)^{-b} \sum_{a=1}^n (1-\alpha)^a \right] \\
 &= L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{\alpha(1-\alpha)^{-1}}{1-(1-\alpha)^n} \left[ S^{\tau_{i-1}} \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} q^{-b} \frac{(1-\alpha) - (1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} - \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} (qS)^{-b} \frac{(1-\alpha) - (1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} \right] \\
 &= L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \left[ S^{\tau_{i-1}} \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} q^{-b} - \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} (qS)^{-b} \right] = L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \left[ S^{\tau_{i-1}} \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} q^{-b} - \sum_{b=1}^{\theta - \tau_i} (qS)^{-b} \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$G_{i(1,1)}(\tau) = L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \left[ S^{\tau_{i-1}} \frac{1-q^{\tau_i-\theta}}{q-1} - \frac{1-(qS)^{\tau_i-\theta}}{qS-1} \right]$$

De la anterior ecuación, la parte a maximizar será:

$$\max_{\tau_i} \frac{S^{\tau_i}}{S(q-1)} + (qS)^{\tau_i} \left( \frac{(qS)^{-\theta}}{qS-1} - \frac{S^{-1}q^{-\theta}}{q-1} \right)$$

CPO:

$$\frac{S^{\tau_i+1} - S^{\tau_i}}{S(q-1)} + (qS)^{\tau_i+1} - (qS)^{\tau_i} \left( \frac{(qS)^{-\theta}}{qS-1} - \frac{S^{-1}q^{-\theta}}{q-1} \right) \leq 0$$

Multiplicando todo por  $S^{-\tau_i}$ , usando que  $p = 1 - q$  y con algo de álgebra, se llega a:

$$q^{\tau_i} \leq \frac{(S-1)(qS)^\theta}{pS + (qS-1)S^\theta}$$

Finalmente, despejando:

$$\tau_{i(1.1)} = \left\lceil \frac{\ln \left( \frac{(S-1)(qS)^\theta}{pS + (qS-1)S^\theta} \right)}{\ln q} \right\rceil$$

Que, desde luego, por las restricciones existentes, si este valor resulta ser mayor o igual a la espera del líder, se tomará el entero anterior.

lcdd

(iii) y (v):

Se demuestran estos dos incisos al mismo tiempo. Sea:

$$\Gamma = \min \{ \tau_A + n \}$$

El pago esperado para el que resultara de ambos casos sería:

$$\begin{aligned} L + \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n \sum_{b=1}^{\Gamma-\tau_i} R_i(a,b)(S^{\tau_i} - S^{1-b}) &= L + S \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n \sum_{b=1}^{\Gamma-\tau_i} R_i(a,b)(S^{\tau_i-1} - S^{-b}) \\ &= L + S \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n \sum_{b=1}^{\Gamma-\tau_i} \frac{pq^{n-b}}{1-q^n} \frac{\alpha(1-\alpha)^{a-1}}{1-(1-\alpha)^n} (S^{\tau_i-1} - S^{-b}) \\ &= L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{\alpha(1-\alpha)^{-1}}{1-(1-\alpha)^n} \left[ S^{\tau_i-1} \sum_{b=1}^{\Gamma-\tau_i} q^{-b} \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n (1-\alpha)^a - \sum_{b=1}^{\Gamma-\tau_i} (qS)^{-b} \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n (1-\alpha)^a \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{\alpha(1-\alpha)^{-1}}{1-(1-\alpha)^n} \left[ S^{\tau_i-1} \sum_{b=1}^{\Gamma-\tau_i} q^{-b} \frac{(1-\alpha)^{b-\tau_A+\tau_i} - (1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} - \sum_{b=1}^{\Gamma-\tau_i} (qS)^{-b} \frac{(1-\alpha)^{b-\tau_A+\tau_i} - (1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} \right] \\
&= L + S \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{1}{1-(1-\alpha)^n} \left[ S^{\tau_i-1} \left( (1-\alpha)^{-\tau_A+\tau_i-1} \frac{\left(\frac{1-\alpha}{q}\right) - \left(\frac{1-\alpha}{q}\right)^{\Gamma-\tau_i+1}}{1-\left(\frac{1-\alpha}{q}\right)} - (1-\alpha)^n \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{q}^{\Gamma-\tau_i+1}}{1-\frac{1}{q}} \right) \right. \\
&\quad \left. - (1-\alpha)^{-\tau_A+\tau_i-1} \frac{\left(\frac{1-\alpha}{qS}\right) - \left(\frac{1-\alpha}{qS}\right)^{\Gamma-\tau_i+1}}{1-\left(\frac{1-\alpha}{qS}\right)} + (1-\alpha)^n \frac{\left(\frac{1}{qS}\right) - \left(\frac{1}{qS}\right)^{\Gamma-\tau_i+1}}{1-\left(\frac{1}{qS}\right)} \right]
\end{aligned}$$

Con más álgebra quedaría:

$$= L + \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{S}{1-(1-\alpha)^n} \left[ S^{\tau_i-1} \left( (1-\alpha)^{\tau_i-\tau_A} \frac{1-\left(\frac{q}{1-\alpha}\right)^{\tau_i-\Gamma}}{q-(1-\alpha)} - (1-\alpha)^n \frac{1-q^{\tau_i-\Gamma}}{q-1} \right) - (1-\alpha)^{\tau_i-\tau_A} \frac{1-\left(\frac{qS}{1-\alpha}\right)^{\tau_i-\Gamma}}{qS-(1-\alpha)} + (1-\alpha)^n \frac{1-(qS)^{\tau_i-\Gamma}}{qS-1} \right]$$

De la anterior expresión, el problema será:

$$\max_{\tau_i} S^{\tau_i-1} \left( (1-\alpha)^{\tau_i-\tau_A} \frac{1-\left(\frac{q}{1-\alpha}\right)^{\tau_i-\Gamma}}{q-(1-\alpha)} - (1-\alpha)^n \frac{1-q^{\tau_i-\Gamma}}{q-1} \right) - (1-\alpha)^{\tau_i-\tau_A} \frac{1-\left(\frac{qS}{1-\alpha}\right)^{\tau_i-\Gamma}}{qS-(1-\alpha)} - (1-\alpha)^n \frac{(qS)^{\tau_i-\Gamma}}{qS-1}$$

con álgebra, el problema se transforma en:

$$\begin{aligned}
&\max_{\tau_i} S^{\tau_i} \left[ \frac{(1-\alpha)^n}{pS} \right] + \left[ (1-\alpha)^{\tau_i} \right] \left[ \frac{1}{S \left[ 1-(1-\alpha) \right] (1-\alpha)^{\tau_A}} \right] + \\
&(qS)^{\tau_i} \left[ \frac{1}{Sq^\Gamma} \left( \frac{(1-\alpha)^n}{q-1} - \frac{(1-\alpha)^{\Gamma-\tau_A}}{q-(1-\alpha)} \right) - \frac{1}{(qS)^\Gamma} \left( \frac{(1-\alpha)^n}{qS-1} - \frac{(1-\alpha)^{\Gamma-\tau_A}}{qS-(1-\alpha)} \right) \right] - (1-\alpha)^{\tau_i} \left[ \frac{1}{(1-\alpha)^{\tau_A} [qS-(1-\alpha)]} \right]
\end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned}
&\left[ (1-\alpha)^{\tau_i+1} - S^{\tau_i} \left[ \frac{(1-\alpha)^n}{pS} \right] + \left[ (1-\alpha)^{\tau_i+1} \right] - \left[ (1-\alpha)^{\tau_i} \right] \left[ \frac{1}{S \left[ 1-(1-\alpha) \right] (1-\alpha)^{\tau_A}} \right] + \right. \\
&\left[ (qS)^{\tau_i+1} - (qS)^{\tau_i} \left[ \frac{1}{Sq^\Gamma} \left( \frac{(1-\alpha)^n}{q-1} - \frac{(1-\alpha)^{\Gamma-\tau_A}}{q-(1-\alpha)} \right) - \frac{1}{(qS)^\Gamma} \left( \frac{(1-\alpha)^n}{qS-1} - \frac{(1-\alpha)^{\Gamma-\tau_A}}{qS-(1-\alpha)} \right) \right] \right. \\
&\left. - \left[ (1-\alpha)^{\tau_i+1} - (1-\alpha)^{\tau_i} \left[ \frac{1}{(1-\alpha)^{\tau_A} [qS-(1-\alpha)]} \right] \right] \leq 0
\end{aligned}$$



A partir de la anterior expresión, si se multiplica por  $S^{-\tau_i}(1-\alpha)^{\tau_A}$ , se sustituye el respectivo valor de  $\Gamma$  y se procesa con álgebra, se llega a:

$$(1-\alpha)^{\tau_i(2,2)} \left( \frac{S(1-\alpha)-1}{S[q-(1-\alpha)]} \right) + q^{\tau_i(2,2)} \left( \frac{qS-1}{Sq^\theta} \left( \frac{(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{q-1} - \frac{(1-\alpha)^\theta}{q-(1-\alpha)} \right) - \frac{qS-1}{(qS)^\theta} \left( \frac{(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{qS-1} - \frac{(1-\alpha)^\theta}{qS-(1-\alpha)} \right) \right) \\ + \left( \frac{1-\alpha}{S} \right)^{\tau_i(2,2)} \left( \frac{\alpha}{qS-(1-\alpha)} \right) + \frac{(S-1)(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{pS} \leq 0$$

si  $\Gamma = \theta$ , y:

$$(1-\alpha)^{\tau_i(3,2)} \left( \frac{S(1-\alpha)-1}{S[q-(1-\alpha)]} \right) - q^{\tau_i(3,2)} (qS-1)\alpha \left[ \left( \frac{1-\alpha}{q} \right)^{n+\tau_A} \frac{1}{pS(\alpha-p)} + \left( \frac{1-\alpha}{qS} \right)^{n+\tau_A} \frac{1}{(qS-1)[qS-(1-\alpha)]} \right] \\ + \left( \frac{1-\alpha}{S} \right)^{\tau_i(3,2)} \left( \frac{\alpha}{qS-(1-\alpha)} \right) + \frac{(S-1)(1-\alpha)^{n+\tau_A}}{pS} \leq 0$$

en el otro caso.

lcdd

(ii)

Aquí el pago será:

$$G_{i(2,1)}(\tau) = L + \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\tau_A-\tau_i} R_i(a,b) \left( S^{\tau_i} - S^{1-b} \right) + \sum_{a=b-\tau_A+\tau_i}^n \sum_{b=\tau_A-\tau_i+1}^{\theta-\tau_i} R_i(a,b) \left( S^{\tau_i} - S^{1-b} \right)$$

El álgebra y los procedimientos estándar de las anteriores demostraciones llevan a:

$$G_{i(2,1)}(\tau) = L + \frac{pq^n}{1-q^n} \frac{S}{1-(1-\alpha)^n} \left[ (1-\alpha)^{\tau_i-\tau_A} \left( S^{\tau_i-1} \frac{1-q^{\tau_i-\tau_A}}{q-1} - \frac{1-(qS)^{\tau_i-\tau_A}}{qS-1} + \frac{\left( \frac{q}{1-\alpha} \right)^{\tau_i-\tau_A} - \left( \frac{q}{1-\alpha} \right)^{\tau_i-\theta}}{q-(1-\alpha)} - \frac{\left( \frac{qS}{1-\alpha} \right)^{\tau_i-\tau_A} - \left( \frac{qS}{1-\alpha} \right)^{\tau_i-\theta}}{qS-(1-\alpha)} \right) \right. \\ \left. - (1-\alpha)^n \left( S^{\tau_i-1} \frac{1-q^{\tau_i-\theta}}{q-1} - \frac{1-(qS)^{\tau_i-\theta}}{qS-1} \right) \right]$$

Si se procesa lo anterior, el problema será:

$$\max_{\tau_i} -S^{\tau_i} \left( \frac{1-(1-\alpha)^n}{pS} \right) + (qS)^{\tau_i} H$$

Con  $H$  como ya se definió en el texto.

CPO:

$$- \left[ S^{\tau_i+1} - S^{\tau_i} \left( \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{pS} \right) \right] + \left[ (qS)^{\tau_i+1} - (qS)^{\tau_i} \right] \bar{H} \leq 0$$

Por lo que si se despeja y luego se inserta la restricción, se llega a:

$$\tau_{i(2.1)} = \max \left\{ \tau_A - 1, \frac{\ln \left( \frac{(S-1) \left( \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{pS} \right)}{H(qS-1)} \right)}{\ln q} \right\}$$

lcdd

(iv)

Finalmente, si se presenta esta circunstancia, el pago será:

$$G_{i(3.1)}(\tau) = L + \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^{\tau_A - \tau_i} R_i(a, b) \left( S^{\tau_i} - S^{1-b} \right) + \sum_{a=b - \tau_A + \tau_i}^n \sum_{b=\tau_A - \tau_i + 1}^n R_i(a, b) \left( S^{\tau_i} - S^{1-b} \right)$$

Así que repitiendo los procesos ya descritos arriba, pero considerando los límites correspondientes, se demuestra lo afirmado en la Proposición.

LCDD

### **Apéndice tercer artículo**

## A1

Empleando la Regla de Bayes:

$$\Pr(\#_i = b | b \leq a) = \frac{\Pr(b \leq a | \#_i = b) \Pr(\#_i = b)}{\Pr(b \leq a | \#_i = 1) \Pr(\#_i = 1) + \dots + \Pr(b \leq a | \#_i = b) \Pr(\#_i = b) + \dots + \Pr(b \leq a | \#_i = n) \Pr(\#_i = n)} \quad (\text{A1.1})$$

Pero como  $a \in \{2, \dots, \tilde{n}\}$ , deberá ser que  $b \in \{2, \dots, \tilde{n}\}$  (este es el rango más general en donde puede estar situado  $b$ , en realidad debe ser que  $b \in \{2, \dots, a\}$ ), por lo que:

$$\Pr(b \leq a | \#_i = \tilde{n} + 1) = \Pr(b \leq a | \#_i = \tilde{n} + 2) = \dots = \Pr(b \leq a | \#_i = n) = 0.$$

Así que (A1.1) quedará:

$$\Pr(\#_i = b | b \leq a) = \frac{\Pr(b \leq a | \#_i = b) \Pr(\#_i = b)}{\Pr(b \leq a | \#_i = 1) \Pr(\#_i = 1) + \dots + \Pr(b \leq a | \#_i = b) \Pr(\#_i = b) + \dots + \Pr(b \leq a | \#_i = \tilde{n}) \Pr(\#_i = \tilde{n})} \quad (\text{A1.2})$$

Luego, se sabe que:

$$\Pr(\#_i = b) = R(b) = \frac{pq^{n-b}}{1-q^n} \text{ para } b \in \{2, \dots, n\}. \quad (\text{A1.3})$$

Además:

$$\Pr(b \leq a | \#_i = b) = \sum_{y=b}^{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} = \frac{1}{\tilde{n}}(\tilde{n} - b + 1), \quad (\text{A1.4})$$

para  $b \in \{2, \dots, \tilde{n}\}$  y cero en otro caso.

Sustituyendo (A1.3) y (A1.4) en (A1.2):

$$\begin{aligned} \Pr(\#_i = b | b \leq a) &= \frac{\frac{1}{\tilde{n}}(\tilde{n} - b + 1) \frac{pq^{n-b}}{1-q^n}}{\frac{1}{\tilde{n}}(\tilde{n}) \frac{pq^{n-1}}{1-q^n} + \frac{1}{\tilde{n}}(\tilde{n}-1) \frac{pq^{n-2}}{1-q^n} + \dots + \frac{1}{\tilde{n}}(\tilde{n} - b + 1) \frac{pq^{n-\tilde{n}}}{1-q^n}} \\ &= \frac{\frac{1}{\tilde{n}}(\tilde{n} - b + 1) \frac{pq^{n-b}}{1-q^n}}{\frac{1}{\tilde{n}} \left( \frac{pq^n}{1-q^n} \right) [q^{-1} + (\tilde{n}-1)q^{-2} + \dots + q^{-\tilde{n}}]} = \frac{(\tilde{n} - b + 1)q^{-b}}{\sum_{w=1}^{\tilde{n}} (\tilde{n} - w + 1)q^{-w}} = \frac{(\tilde{n} - b + 1)q^{-b}}{\sum_{w=1}^{\tilde{n}} (\tilde{n} + 1)q^{-w} - \sum_{w=1}^{\tilde{n}} wq^{-w}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\Pr \left\{ \#_i = b \mid b \leq a \right\} = \frac{(\tilde{n} - b + 1)q^{-b}}{(\tilde{n} + 1) \sum_{w=1}^{\tilde{n}} \left( \frac{1}{q} \right)^w - \sum_{w=1}^{\tilde{n}} \frac{w}{q^w}}. \quad (\text{A1.5})$$

Aquí se trabaja el primer término del denominador de la anterior expresión. Por un lado:

$$(\tilde{n} + 1) \sum_{w=1}^{\tilde{n}} \left( \frac{1}{q} \right)^w = (\tilde{n} + 1) \frac{\frac{1}{q} - \left( \frac{1}{q} \right)^{\tilde{n}+1}}{1 - \frac{1}{q}} = (\tilde{n} + 1) \frac{q^{-1} - q^{-1-\tilde{n}}}{\frac{q-1}{q}} = \frac{(\tilde{n} + 1)(q^{-\tilde{n}} - 1)}{p}, \quad (\text{A1.6})$$

mientras que por otro:

$$\begin{aligned} \sum_{w=1}^{\tilde{n}} \frac{w}{q^w} &= \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \dots + \frac{\tilde{n}}{q^{\tilde{n}}} = \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{\tilde{n}}} \right) + \left( \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots + \frac{1}{q^{\tilde{n}}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{q^{\tilde{n}-1}} + \frac{1}{q^{\tilde{n}}} \right) + \left( \frac{1}{q^{\tilde{n}}} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{q^{\tilde{n}+1}}}{1 - \frac{1}{q}} + \frac{\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^{\tilde{n}+1}}}{1 - \frac{1}{q}} + \dots + \frac{\frac{1}{q^{\tilde{n}-1}} - \frac{1}{q^{\tilde{n}+1}}}{1 - \frac{1}{q}} + \frac{\frac{1}{q^{\tilde{n}}} - \frac{1}{q^{\tilde{n}+1}}}{1 - \frac{1}{q}} \\ &= \frac{\sum_{x=1}^{\tilde{n}} \left( \frac{1}{q} \right)^x - \sum_{x=1}^{\tilde{n}} \left( \frac{1}{q} \right)^{\tilde{n}+1}}{1 - \frac{1}{q}} = - \frac{\frac{1 - q^{-\tilde{n}}}{q-1} - \frac{\tilde{n}}{q^{\tilde{n}+1}}}{\frac{p}{q}} = \frac{\tilde{n}q^{-\tilde{n}} - \frac{q^{-\tilde{n}+1} - q}{p}}{p}. \end{aligned}$$

Con un poco más de simple álgebra, se llega a que:

$$\sum_{w=1}^{\tilde{n}} \frac{w}{q^w} = \frac{q \left[ + q^{-\tilde{n}-1} (\tilde{n}p - q) \right]}{p^2}. \quad (\text{A1.7})$$

Uniendo (A1.6) y (A1.7), el denominador de (A1.5) será:

$$\begin{aligned} (\tilde{n} + 1) \sum_{w=1}^{\tilde{n}} \left( \frac{1}{q} \right)^w - \sum_{w=1}^{\tilde{n}} \frac{w}{q^w} &= \frac{(\tilde{n} + 1)(q^{-\tilde{n}} - 1)}{p} - \frac{q \left[ + q^{-\tilde{n}-1} (\tilde{n}p - q) \right]}{p^2} \\ &= \frac{p(\tilde{n} + 1)(q^{-\tilde{n}} - 1) - q \left[ + q^{-\tilde{n}-1} (\tilde{n}p - q) \right]}{p^2} = \dots = \frac{q^{-\tilde{n}} - p\tilde{n} - 1}{p^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo el anterior resultado en (A1.5):

$$\tilde{R}(b) = \Pr\{i = b | b \leq a\} = \frac{p^2 (\tilde{n} - b + 1) q^{-b}}{q^{-\tilde{n}} - p\tilde{n} - 1}.$$

Para ahorrar notación, sea la constante  $d$  tal que:

$$d \equiv \frac{p^2}{q^{-\tilde{n}} - p\tilde{n} - 1}.$$

Así, se tendrá que la función de probabilidad matizada por el hecho de que aún no despierta el líder quedará:

$$\tilde{R}(b) = dq^{-b} (\tilde{n} - b + 1) \tag{A1.8}$$

para  $b \in \{2, \dots, \tilde{n}\}$  y cero en otro caso.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abreu, d. and M. K. Brunnermeier (2003): “Bubbles and Crashes”, *Econometrica*, 71, 1, 173-204.
- Bikhchandani, S., D. Hirshleifer, and Ivo Welch (1992): “A Theory of Fads, Fashion, Custom, and cultural Change as Informational Cascades,” *Journal of Political Economy*, 100, 5, 992-1026.
- Blanchard, O. J., y M. W. Watson, (1982): “Bubbles, Rational Expectations, and Financial Markets”. En P. Wachtel (ed.), *Crisis in the Economic and Financial Structure*. Lexington, MA: Lexington Press.
- Brunnermeier, M. K. (2001): *Asset Pricing under Asymmetric Information: Bubbles, Crashes, Technical Analysis and Herding*. Oxford: Oxford University Press.
- Brunnermeier, M. K. and J. Morgan (2006). “Clock Games: Theory and Experiments”. *Mimeo, Princeton University*. [http://www.princeton.edu/~markus/research/papers/clock\\_games.pdf](http://www.princeton.edu/~markus/research/papers/clock_games.pdf).
- Brunnermeier, M. K. (2008): “Bubbles”. En L. Blume y S. Durlaug (eds), *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Oxford: Oxford University Press.
- Corsetti, G., A. Dasgupta, S. Morris, and H. S. Shin (2004). “Does One Soros Make a Difference? A Theory of Currency Crises with Large and Small Traders”. *Review of Economic Studies* 71 (1), 87-113.
- De Long, J. B., A. Shleifer, L. H. Summers, R. J. Waldmann (1990): “Noise Trader Risk in Financial Markets,” *Journal of Political Economy*, 98, 4, 703-738.
- Hommes, C. H, (2006). “Heterogeneous agent models in economics and finance”. En Judd, K. L., Tesfatsion, L. (Eds.) *Handbook of computational Economics*, Vol. 2: Agent-Based Computational Economics, Capítulo 23. Amsterdam: North-Holland.
- Kindleberger, C. P. (1996): *Manias, Panics and Crashes: A History of Financial Crises*, 3<sup>rd</sup> ed. New York: John Wiley & Sons.
- Miller, E. M. (1977): “Risk, uncertainty, and divergence of Opinion”. *Journal of Finance*, 32, 1151-68.
- O’Hara, Maureen (2008): “Bubbles: Some Perspectives (and Loose Talk) from History”, *The Review of Financial Studies*, Vol. 21, No. 1, pp. 11-17.
- Ofek, E. y Richardson, M. (2003): “DotCom mania: the rise and fall of Internet stocks”. Working Paper No. FIN-01-037 58(3), 1113–38. New York University, Stern School.
- Santos, M. S. and M. Woodford (1997): “Rational Asset Pricing Bubbles,” *Econometrica*, 61, 1, 19-57.
- Scheinkman, J. y Xiong, W. (2003): “Overconfidence and speculative bubbles”. *Journal of Political Economy* 111, 1183–219.
- Tirole, J. (1982): “On the possibility of Speculation under Rational Expectations”, *Econometrica*, 50, 1163-1182.

## Índice de Cuadros

### Primer artículo

Cuadro 1. Ejemplos de algunos valores parametrales y los equilibrios correspondientes.	43
--	----

### Segundo artículo

Cuadro 1. División de casos según las conductas de los agentes y del líder.	64
Cuadro 2. Combinaciones de estrategias de todos los agentes participantes y reacción óptima de $i$ .	70
Cuadro 3. Funciones de reacción de $I$ y de $A$ .	71
Cuadro 4. Comparación de resultados con el modelo sin líder.	74

### Tercer artículo

Cuadro 1. Ejemplificación de resultados	114
---	-----



## Índice de Gráficas

### Primer artículo

Gráfica 1. Proceso de precios.	13
Gráfica 2. Creencias Posteriores	13
Gráfica 3. Rompimiento endógeno y rompimiento exógeno	16
Gráfica 4. Espera óptima en función de $k$ , bajo las condiciones señaladas.	39

### Segundo artículo

Gráfica 1. Función de probabilidad para el líder.	51
Gráfica 2. Ejemplos de rompimiento endógeno y de rompimiento por el líder.	57

### Tercer artículo

Gráfica 1. Comparación de funciones de probabilidad.	95
Gráfica 2. Raiz de la ecuación para diferentes valores de los parámetros para el caso (i).	105
Gráfica 3. Raiz de la ecuación para diferentes valores de los parámetros para el caso (ii).	107