CONDICIONES TECNICAS DE PRODUCTIVIDAD Y EFICIENCIA EN PRODUCCION CONJUNTA

Oscar Fernàndez Constantino
El Colegio de Mèxico
Julio de 1985

Para Adriana, Sandra
y Sergio.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi reconocimiento a la E.S.F.M. del I.P.N. por su autorización para la realización de mi Año Sabático 1984-85, dentro de cuyo ejercicio elaboré la presente Tesis. Asimismo, manifiesto mi agradecimiento al Centro de Estudios Económicos de El Colegio de México por su generosa hospitalidad durante el periodo mencionado, y en particular a su Director, el Dr. Jaime Serra, y al Coordinador de la Maestria en Economia, Dr. Kurt Unger, por todas las facilidades proporcionadas durante mi estancia en esa institución.

Mi agradecimiento más amplio al Dr. José Alberro, quien fue mi Supervisor para la realización de esta Tesis prestándome su valiosa atención y apoyo en todo momento, y al Dr. Amit Bhaduri, por la revisión que gentilmente llevó a cabo. Igualmente, mi gratitud para con el Mtro. Antonio Yúnez por la gran ayuda brindada para y durante mi permanencia en el C.E.E.

Asimismo, expreso mi reconocimiento al respaldo técnico dado por el Lic. Luis Arturo Rodriguez y el Lic. José Maria Acle para la impresión computarizada de esta Tesis en la Unidad de Cómputo de El Colegio de México.

INDICE

LISTA DE SIMBOLOS

$\langle x|$: Vector renglòn x.

$|y\rangle$: Vector columna y.

$\langle x|y\rangle$: Producto escalar de los vectores $\langle x|$ y $|y\rangle$.

$Q > 0$: Q es una matriz positiva. Todos sus elementos son positivos.

$Q \geqq 0$: Q es una matriz no negativa. Todos sus elementos son no negativos.

$Q \geq 0$: Q es una matriz semipositiva. Todos sus elementos son no negativos, pero al menos uno de ellos es diferente de cero.

$\langle x| > \langle 0|$: $\langle x|$ es un vector renglòn positivo. Todos sus elementos son positivos. (id. para vectores columna)

$\langle x| \geqq \langle 0|$: $\langle x|$ es un vector renglòn no negativo. Todos sus elementos son no negativos. (id. para vectores columna)

$\langle x| \geq \langle 0|$: $\langle x|$ es un vector renglòn semipositivo. Todos sus elementos son no negativos, pero al menos uno de ellos es diferente de cero. (id. para vectores columna)

A = Matriz de medios de producciòn, en cantidades fisicas de bienes.

$|L\rangle$ = Vector de trabajo.

B = Matriz de producto bruto, en cantidades fisicas de bienes.

N = $B - A$ = Matriz de producto neto.

A' = Matriz de medios de producciòn en el sistema de producciòn bruta simple, en cantidades fisicas de bienes.

$|L'\rangle$ = Vector de trabajo en el sistema de producciòn bruta simple.

B' = I = Matriz de producto bruto en el sistema de producciòn bruta simple, en cantidades fisicas de bienes.

A^* = Matriz de medios de producciòn en el sistema de producciòn neta simple, en cantidades fisicas de bienes.

$|L^*\rangle$ = Vector de trabajo en el sistema de producciòn neta simple.

B^* = Matriz de producto bruto en el sistema de producciòn neta simple, en cantidades fisicas de bienes.

S = Matriz de salarios, en cantidades fisicas de bienes.

$\langle s|$ = Vector de salarios por unidad de trabajo, en cantidades fisicas de bienes.

C = $A + S$ = Matriz de capital, en cantidades fisicas de bienes.

G = Matriz de plusproducto, en cantidades fisicas de bienes.

$|V\rangle$ = Vector de valor.

V = Matriz de valor.

$|V_{ft}\rangle$ = Vector de valor de la fuerza de trabajo.

$|Pv\rangle$ = Vector de plusvalia.

$|p\rangle$ = Vector de precios de producciòn.

r = Tasa de beneficio.

w = Salario en precio.

INTRODUCCION.

Este trabajo tiene el propòsito de revisar las caracterìsticas de operaciòn de los sistemas econòmicos de producciòn conjunta. El ènfasis està puesto en las condiciones tècnicas de productividad y eficiencia, buscando establecer criterios que garanticen el buen funcionamiento de la economìa y que por tanto den lugar a un comportamiento satisfactorio de indicadores econòmicos tales como los valores y los precios de producciòn.

En este sentido, es pertinente contrastar la situaciòn que ha prevalecido en la producciòn conjunta con la que se da en la producciòn simple, ya que entre ambas existen diferencias considerables no tanto en la metodologìa empleada, sino en cuanto a los criterios de productividad seguidos y en torno a una serie de problemas conceptuales que aparecen en la primera de ellas.

Como se sabe, los sistemas de producciòn simple han sido estudiados con gran amplitud, pudiendo decirse que su situaciòn actual es satisfactoria y que no plantean problemas fundamentales para la teorìa econòmica. A partir de la condiciòn de productividad consistente en requerir que un sistema produzca un excedente no nulo sobre los medios de producciòn empleados (a la que llamaremos "condiciòn tradicional de productividad"), y con ayuda del poderoso teorema de Perron-Frobenius, puede demostrarse que es posible obtener conjuntos razonables tanto de valores como de precios de producciòn, ambos con una interpretaciòn y un sentido econòmico claros.

En contraste, los sistemas de producciòn conjunta han presentado problemas casi desde su introducciòn en la teoria econòmica. Ya en los años cuarenta y cincuenta investigadores como Koopmans(1) y Samuelson(2) se percataron de que importantes teoremas econòmicos tales como el Teorema de Sustituciòn, que eran vàlidos en producciòn simple, dejaban de ser aplicables a los sistemas de producciòn conjunta.

En el campo de la Economia Politica, son conocidas las dificultades encontradas por Sraffa(3) en su tratamiento de la producciòn conjunta, particularmente por la apariciòn de elementos negativos entre cantidades que, supuestamente, deberian ser positivas para tener sentido econòmico. Sraffa mismo y otros investigadores como Morishima(4) y

---

(1) Koopmans, T.C., "Maximization and Substitution in Linear Models of Production", 1953. En SCIENTIFIC PAPERS OF T. KOOPMANS, 1970.
(2) Samuelson, P.A., "Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models", en T.C Koopmans, (ed.), ACTIVITY ANALYSIS OF PRODUCTION AND ALLOCATION, 1951.
(3) Sraffa, P.: PRODUCTION OF COMMODITIES BY MEANS OF COMMODITIES, 1960.
(4) Morishima, M.: MARX'S ECONOMICS, 1973.

Steedman[5] encontraron que, bajo el mismo criterio "tradicional" de productividad que en producciòn simple funcionaban tan bien, los sistemas de producciòn conjunta podian conducir a situaciones anòmalas tales como la apariciòn de valores negativos, de precios de producciòn negativos o, inclusive, a la inexistencia de un sistema de precios de producciòn. Tuvieron entonces que añadirse hipòtesis adicionales de caràcter primordialmente matemàtico, tales como las de Manara[6], para eliminar los casos indeseables; estas hipòtesis, sin embargo, resultaron ser correcciones un tanto ad hoc para los problemas encontrados, faltando una base econòmica que permitiera interpretarlas para hacerlas realmente aceptables.

Las dificultades encontradas con la producciòn conjunta en la Economia Politica llevaron incluso a algunos economistas, como Morishima y Steedman, a cuestionar aspectos tan fundamentales como la Ley del Valor, considerando que su validez no debia ir màs allà del nivel de producciòn simple. Segùn esta interpretaciòn, la Ley del Valor ya no "resistia" su aplicaciòn a la producciòn conjunta, en vista de los resultados aparentemente absurdos que se presentaban; en consecuencia, se dieron igualmente intentos por "corregir" la Ley del Valor original con nuevas formulacio-

---

(5) Steedman, I.: MARX AFTER SRAFFA, 1977.
(6) Manara, C.F.: "Sraffa's Model for the Joint Production of Commodities by Means of Commodities", 1968. En L.L. Pasinetti (ed.): ESSAYS ON THE THEORY OF JOINT PRODUCTION, 1977.

nes[7]. Todas estas cuestiones, naturalmente, dieron lugar a intensas polèmicas, muchas de las cuales han continuado hasta hoy dia.

Esta situaciòn hizo que la producciòn conjunta fuese siendo vista como un aspecto un tanto molesto e indeseable de la Economia, que convenia evitar hasta donde fuera posible. Por otra parte, las discrepancias ideològicas frecuentemente tendieron a frenar su desarrollo dentro de la propia Economia Politica.

Sin embargo, la realidad es que la producciòn conjunta no es una cuestiòn marginal o lateral en la teoria econòmica. Por el contrario, constituye una representaciòn màs amplia de la realidad econòmica que la producciòn simple; ello la sitùa en un nivel màs general y elevado de desarrollo teòrico. La producciòn simple, como es conocido, resulta con frecuencia demasiado restringida en su utilizaciòn como modelo de una economia; asi por ejemplo, aspectos tan importantes como la teoria del capital fijo requieren crucialmente de la teoria de la producciòn conjunta para poder expresar los modelos respectivos.

Por los motivos expuestos, hemos considerado de interès el estudiar el funcionamiento de la producciòn conjunta. El punto de vista sustentado es que las dificultades fundamentales encontradas en ella provienen de incluir entre los sistemas tratados sistemas que presentan ciertas inefi-

---

(7) Morishima, op. cit., Cap. 14; Morishima, M. y Catephores, G.: VALUE, EXPLOITATION AND GROWTH, 1978.

ciencias productivas que no son detectadas por el criterio tradicional de productividad. Hemos considerado, por tanto, que ese criterio es insuficiente para garantizar el comportamiento adecuado del sistema en la esfera de la producción; en consecuencia, las anomalias presentes en las variables caracteristicas de la órbita de la circulación -valores y precios de producción- y de la distribución -salarios, plusvalias, tasas de beneficio, etc.- no hacen sino reflejar el carácter ineficiente del proceso productivo.

Desde nuestra perspectiva, la producción de un excedente sobre los medios de producción empleados debe distinguirse de la utilización eficiente de los insumos (medios de producción y trabajo) por el sistema, entendiendo por esto último que los insumos intervengan en el proceso productivo para producir bienes y no para destruirlos. En este sentido, puede decirse que el criterio tradicional de productividad garantiza la producción de un excedente, pero ese hecho no implica por si solo una utilización eficiente de los insumos. En consecuencia, es necesario estudiar más detalladamente la forma de producir del sistema, para poder identificar los comportamientos ineficientes y, una vez localizados, establecer los criterios de productividad y eficiencia que los limiten.

Asi pues, el primer aspecto que tratamos es el de las condiciones técnicas de productividad y de eficiencia. A ello están dedicadas los primeros siete capítulos, en los que se revisan aspectos referentes a la productividad de un sistema económico. Con tal fin, se introduce el concepto de "estado-incremento", que a pesar de ser extremadamente sencillo permite separar y analizar en detalle las consecuencias de variaciones en los niveles de producción. El procedimiento seguido a continuación es igualmente simple, y consiste en llevar a un sistema económico -en general de producción conjunta- a una forma linealmente equivalente de producción simple, que puede ser bruta o neta, según se desée, y que tiene carácter marginal. El hecho de que este sistema equivalente opere en producción simple permite ver con gran claridad la manera en que el sistema lleva a cabo la producción de cada uno de los productos, lo que posibilita estudiar para cada uno de ellos la productividad de los insumos participantes. Aparecen así dos tipos básicos de comportamiento, que hemos denominado "productivo" y "destructivo", respectivamente, que no se muestran explícitamente en el sistema original ni son detectados por el criterio tradicional de productividad, pero que se evidencian cuando el sistema es llevado a la forma de producción neta simple. El comportamiento productivo corresponde al de una economía normal, en tanto que el destructivo está asociado a movimientos relativos de insumos y productos que resultan contrarios al sentido económico convencional y que, como se demuestra, dan lugar a ineficiencias del sistema.

Como las ineficiencias encontradas no se perciben usualmente en el sistema original ni son mostradas por el criterio tradicional de productividad, puede decirse que están "ocultas" por el entremezclamiento de la producción de los diferentes bienes en la producción conjunta, pero que al llevar el sistema a la forma de producción neta simple se resuelve la producción individual de cada bien y se revela por consiguiente la presencia de dichas ineficiencias. Así pues, una vez identificadas es posible aislarlas y por tanto establecer criterios de eficiencia que garanticen el buen funcionamiento de un sistema económico.

En los últimos capítulos se revisan algunos de los principales aspectos de la teoría del valor y de la teoría de los precios de producción, mostrando que cuando los sistemas económicos considerados son eficientes en el sentido antes indicado, tanto los valores como los precios de producción resultan bien comportados económicamente, no apareciendo cantidades negativas en ellos. Lo anterior es una consecuencia lógica que resulta del hecho de trabajar con sistemas eficientes; asimismo, permite entender que cuando un sistema contenga ineficiencias éstas den lugar a valores o precios anómalos, constituyendo entonces un síntoma de que algo está funcionando mal en la economía considerada.

El estudio concluye con una revisión del llamado "Teorema de la Explotación", que afirma que una tasa de beneficio positiva en el sistema de precios implica la explotación de los trabajadores desde el punto de vista del sistema de valores. Demostramos entonces este teorema para producción conjunta cuando el sistema económico es eficiente en el sentido que hemos expuesto anteriormente; sin embargo, encontramos que cuando el sistema es ineficiente no puede asegurarse que haya explotación, dado que pueden tenerse beneficios positivos para los capitalistas con "plusvalias" negativas. Esto resulta natural, ya que al tratar con un sistema ineficiente las ineficiencias pueden repercutir en la esfera de la distribución afectando ya sea a los trabajadores o a los capitalistas; en el caso de los primeros se tendria un reforzamiento de la explotación "usual", mientras que con los segundos podrian tenerse "plusvalias" negativas que significarian pérdidas para los capitalistas a favor de los trabajadores, aun cuando los precios y la tasa de beneficio fueran positivos.

Cabe mencionar que, por razones relativas a la extensión de este trabajo, no se incluyeron otros aspectos importantes relacionados con la producción conjunta. Entre ellos pueden mencionarse el estudio del sistema patrón de Sraffa, asi como el tratamiento de la reducibilidad de un sistema y de los correspondientes bienes básicos y no básicos. Estas cuestiones resultan considerablemente simplificadas cuando se lleva el sistema económico a la forma de producción simple, pues entonces su análisis de hecho se reduce al caso ya conocido de producción simple usual. Tampoco se abordó el tratamiento del capital fijo, el cual requiere, como se sabe, de la utilización de sistemas de producciòn conjunta; no obstante, es claro que si el criterio de eficiencia aqui propuesto se aplica al estudio del capital fijo entonces no deberàn presentarse situacicnes eccnòmicamente irregulares ni con los valores ni con el sistema de precios de producciòn, ya que las dificultades que llegan a presentarse provienen no tanto del hecho de tratar con capital fijo, sino de la teoria de la producciòn conjunta en si.

En sintesis, se trata de hacer ver que la producciòn conjunta, cuando se refiere a sistemas econòmicos eficientes, no presenta nigùn comportamiento que pueda considerarse anormal. No es necesario, pues -desde nuestro punto de vista- hacer correcciones o rectificaciones a los aspectos bàsicos de la Economia Politica al introducir en ella a los sistemas de producciòn conjunta; màs bien son los sistemas estudiados por ella los que deben cumplir, para ser aceptables econòmicamente, el requisito de ser eficientes en la producciòn.

Capitulo 1

SISTEMA ECONOMICO Y ESTADO ECONOMICO.

Principiaremos por establecer el marco general en el que trabajaremos, introduciendo algunos conceptos fundamentales que serán utilizados a lo largo de este estudio.

Consideremos un sistema económico de producción conjunta (A, |L>, B) constituido por m procesos que producen m bienes, y caracterizado por la matriz de medios de producción A, el vector columna de trabajo directo |L> y la matriz de producto bruto B. A y B están expresadas en cantidades físicas de bienes, y |L> en cantidades de trabajo simple; en consecuencia, A y B son matrices semipositivas y |L> es un vector semipositivo.

Pediremos que el sistema conste realmente de m procesos diferentes, en el sentido de que estos procesos sean linealmente independientes entre sí.

Supondremos además que el sistema es productivo en el sentido del siguiente criterio, que llamaremos "criterio tradicional de productividad"(8): si N = B - A designa a la matriz de producto neto del sistema, entonces se cumple que el vector renglón de producto neto total <n|, que es la su-

(8) Este criterio aparece ya en Sraffa, op. cit.

ma de los productos netos de los m procesos del sistema, es positivo:

$$\langle n| = \langle e|N > \langle 0| \qquad (1)$$

siendo $\langle e|$ el vector renglón $|1\ 1\ \ldots\ 1|$.

Tomando al sistema económico $(A, |L\rangle, B)$ como <u>sistema base</u> podemos generar otros sistemas equivalentes, que llamaremos <u>estados del sistema</u>, mediante la operación a diferentes <u>niveles de actividad</u> de los procesos que conforman al sistema; estos niveles quedarán representados por coeficientes numéricos multiplicando a cada uno de los procesos. Podemos entonces construir un vector renglón $\langle y|$, al que denominaremos <u>vector de estado</u> del sistema equivalente, cuyas componentes sean los coeficientes anteriores. Para que el sistema sea <u>factible</u> económicamente, consideraremos sólo estados con $\langle y|$ no negativo.

En esta forma, cada estado del sistema queda definido por su vector de estado $\langle y| \geqq \langle 0|$. Este vector genera, a partir del sistema base $(A, |L\rangle, B)$, a un estado de producción que en conjunto utiliza un vector renglón de medios de producción $\langle a|$ y un trabajo directo l como insumos, y produce un vector renglón de producto bruto $\langle b|$ y un vector renglón de producto neto $\langle n|$. Todas estas cantidades son la suma de las componentes correspondientes sobre los m procesos del sistema en el estado $\langle y|$, y están dadas respectivamente por:

$$\langle a| = \langle y|A \qquad (2)$$

$$1 = \langle y|L\rangle \qquad (3)$$

$$\langle b| = \langle y|B \qquad (4)$$

$$\langle n| = \langle y|N \qquad (5)$$

Por consiguiente, las condiciones totales de producción de un estado $\langle y|$ del sistema quedan especificadas por el conjunto $(\langle a|, 1, \langle b|)$ (o por el conjunto $(\langle a|, 1, \langle n|)$, ya que $\langle n| = \langle b| - \langle a|$), obtenido a partir de $\langle y|$ por medio de las ecuaciones anteriores.

En los casos m = 1, 2 o 3 podemos representar a cada estado $\langle y|$ del sistema como un vector en la recta, el plano o en el espacio, según se trate, cuyas componentes sean los elementos del vector $\langle y|$; como estos vectores son no negativos, deben localizarse en el semieje positivo (m = 1), el primer cuadrante (m = 2) o el primer octante (m = 3); ver Fig. 1. Para m > 3 imaginaremos un espacio de dimensión m,

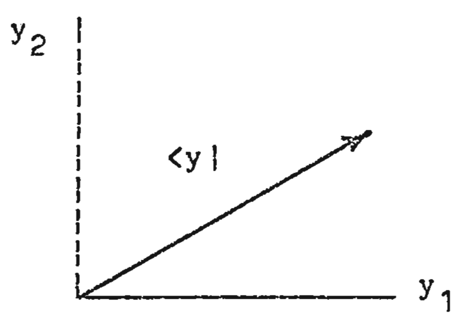

Figura 1. Representación gráfica de un estado del sistema.

en cuyo caso el vector que represente al estado $\langle y|$ estará en el ortante no negativo.

Capitulo 2

ESTADOS-INCREMENTO.

El concepto de estado de un sistema introduce una restricción muy severa para garantizar su factibilidad económica, a saber, la no negatividad del vector de estado $\langle y|$. Esta restricción, si bien necesaria, en ocasiones impide ver con claridad el comportamiento del sistema, ya que para analizar algunos aspectos de las producción es necesario recurrir a la variación de los niveles de actividad de un estado y separar el efecto de la variación en relación a lo que ocurría inicialmente. Por este motivo, cuando se realicen variaciones en los niveles de operación de los procesos resulta conveniente emplear, además de estados, lo que denominaremos estados-incremento, tal como los definiremos en este capítulo. Estos estados-incremento nos permitirán estudiar detalladamente el comportamiento del sistema en cuanto a la forma de producir, lo que conducirá a un análisis de la productividad de los insumos del sistema que resultará de gran utilidad para entender el comportamiento de la producción conjunta.

Demos, pues, una variación $d\langle y|$ al vector de estado $\langle y|$ del sistema, de manera que $\langle y|$ cambie a $\langle y'| = \langle y| +$

$d\langle y|$.

En una variación general, $d\langle y|$ puede tener componentes positivas, negativas o cero. Las componentes positivas significan que los niveles de actividad correspondientes van a aumentar; las negativas, que éstos van a disminuir; y las iguales a cero, que no van a cambiar.

Observamos que como $\langle y'|$ debe ser un vector no negativo debemos tener $\langle y'| = \langle y| + d\langle y| \geqq \langle 0|$, de manera que $d\langle y|$ sólo puede añadirse a estados $\langle y|$ del sistema para los que:

$$\langle y| \geqq -d\langle y| \qquad (6)$$

Esta relación expresa la condición de aplicabilidad de una variación $d\langle y|$ a un estado $\langle y|$ del sistema.

La variación $d\langle y|$ originará variaciones $d\langle a|$, dl, $d\langle b|$ y $d\langle n|$ en los medios de producción, el trabajo, el producto bruto y el producto neto, respectivamente, que estarán dadas, según (2), (3), (4) y (5), por:

$$d\langle a| = d\langle y|A \qquad (7)$$

$$dl = d\langle y|L\rangle \qquad (8)$$

$$d\langle b| = d\langle y|B \qquad (9)$$

$$d\langle n| = d\langle y|N \qquad (10)$$

Por consiguiente, con respecto al estado original $\langle y|$ los medios de producción cambiarán a $\langle a'| = \langle a| + d\langle a|$, el trabajo a $l' = l + dl$, el producto bruto a $\langle b'| = \langle b| + d\langle b|$ y el producto neto a $\langle n'| = \langle n| + d\langle n|$. Si $d\langle y|$ contiene elementos negativos, entonces puede ocurrir que $d\langle a|$, dl, etc. tengan también elementos negativos, lo cual indicará que las componentes respectivas en $\langle a'|$, l', etc. disminuirán como resultado de la variación $d\langle y|$.

En esta forma, como consecuencia de la variación efectuada, el estado $\langle y|$ del sistema con el conjunto total ($\langle a|$, l, $\langle b|$) cambiará al estado $\langle y'|$ con el conjunto total ($\langle a| + d\langle a|$, $l + dl$, $\langle b| + d\langle b|$). Este cambio de estados puede verse como la adición, al conjunto total inicial ($\langle a|$, l, $\langle b|$), de un conjunto-incremento ($d\langle a|$, dl, $d\langle b|$) asociado a un <u>estado-incremento</u> con vector de estado $d\langle y|$. Definiremos entonces formalmente este último concepto:

<u>Definición</u>: Un estado-incremento es una combinación lineal de los procesos de un sistema económico, que representa los cambios necesarios en las componentes del sistema para pasar de un estado a otro.

Los coeficientes de la combinación lineal forman el vector de estado correspondiente, $d\langle y|$, en tanto que los cambios en las componentes del sistema, $d\langle a|$, dl y $d\langle b|$, están dados por (7), (8) y (9) respectivamente.

Como se puede apreciar, un estado-incremento tiene todas las características de un estado, excepto que las componentes de su vector de estado $d\langle y|$ pueden ser negativas;

tal circunstancia impide identificarlo con un estado verdadero. No obstante, resulta útil introducir este concepto, con objeto de poder ver con más claridad cómo se lleva a cabo el paso de un estado a otro como resultado de una variación.

Un estado-incremento $d\langle y|$ también puede representarse gráficamente como un vector común cuando $m = 1, 2$ o 3, sólo que como ahora sus componentes pueden tener cualquier signo, ya no tiene que localizarse necesariamente en el semieje positivo, el primer cuadrante o el primer octante (ver Fig. 2). La adición de un estado-incremento $d\langle y|$ a un estado $\langle y|$ se representará como la suma de los vectores $\langle y|$ y $d\langle y|$, que da como resultante a $\langle y'|$; la condición (6) asegura que $\langle y'|$ no caerá fuera del primer cuadrante o del primer octante (ver Fig. 3).

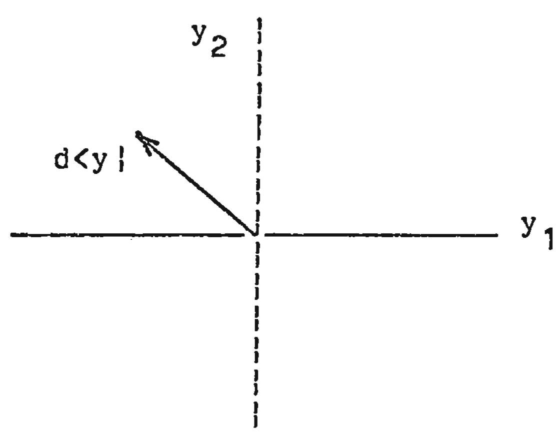

Figura 2. Representación gráfica de un estado-incremento.

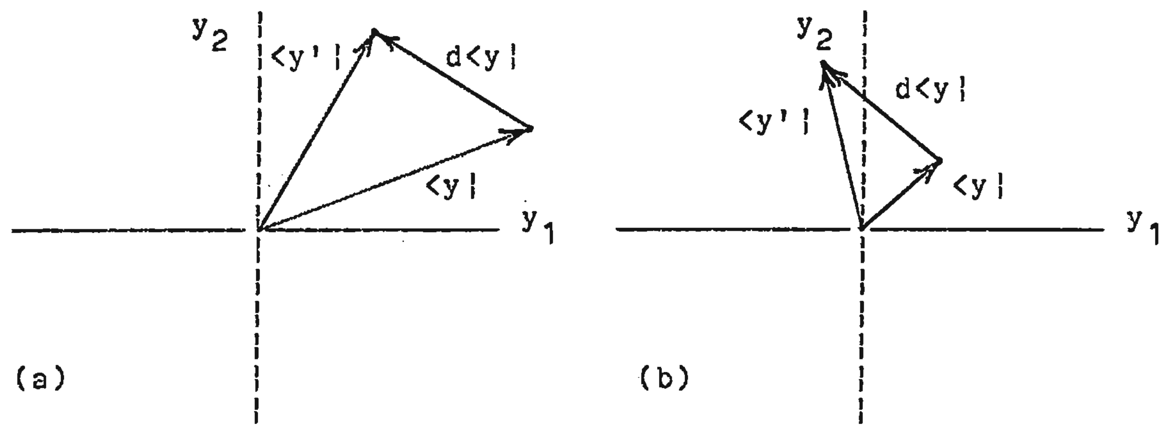

Figura 3. Representación gráfica de la adición de un estado-incremento d<y| a un estado <y|, para producir un nuevo estado <y'|.

(a): Situación factible, con <y'| en el primer cuadrante.

(b): Situación no factible, con <y'| fuera del primer cuadrante (no se cumple la condición (6)).

Capitulo 3

INDEPENDENCIA TECNOLOGICA DE LOS PROCESOS.

Estudiaremos ahora un sistema econòmico desde el punto de vista de la tecnologia utilizada, buscando que los diferentes procesos no dupliquen o repitan sus funciones, es decir, que sean tecnològicamente independientes.

Para que los procesos sean independientes en el sentido indicado pediremos que la tecnologia empleada por cada uno de ellos estè bien definida, es decir, que opere univocamente en la producciòn, de acuerdo con el siguiente criterio:

> Definiciòn: Un sistema econòmico tiene una tecnologia bien definida si un renglòn dado cualquiera de producto bruto $\langle B_j|$ o de producto neto $\langle N_j|$ sòlo puede ser producido mediante su propio renglòn de insumos $(\langle A_j|,\ L_j)$, sin que ninguna otra combinaciòn de insumos pueda producir ese mismo renglòn de producto bruto o de producto neto.

La condiciòn de tener tecnologia bien definida implica, como veremos a continuaciòn, que los renglones de la matriz de producto bruto B deben ser linealmente independientes. Para demostrarlo, notemos que si un renglòn de producto bruto cualquiera, digamos el j, fuera linealmente dependiente de los demàs, entonces ese renglòn podria expresarse en la forma:

$$\langle B_j| = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq j)}}^{m} c_k \langle B_k| \qquad (11)$$

siendo las c_k los coeficientes de la combinaciòn lineal. Si ademàs hacemos $c_j = 0$, obtedriamos un conjunto de m coeficientes que podrian ser vistos como las componentes del vector de estado $d\langle y|$ de un estado-incremento (utilizamos un estado-incremento por si algunas c_k fueran negativas). El producto bruto $d\langle b|$ de este estado-incremento estaria dado, segùn (9), por:

$$d\langle b| = d\langle y|B = \sum_{k=1}^{m} dy_k \langle B_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \langle B_k| \qquad (12)$$

y de acuerdo con (11) seria idèntico al del proceso j; asimismo, sus insumos $d\langle a|$ y dl resultarian ser:

$$(d\langle a|,\ dl) = (d\langle y|A,\ d\langle y|L\rangle) \qquad (13)$$

Pero, por otra parte, los insumos asociados al proceso j son $(\langle A_j|,\ L_j)$. Tendriamos asi dos renglones idènticos de producto bruto: uno, el del proceso j, y otro el del estado-incremento $d\langle y|$; el primero provendria del renglòn de insumos $(\langle A_j|,\ L_j)$, y el segundo del renglòn $(d\langle a|,\ dl)$. Si estos renglones fueran iguales, entonces el proceso j seria linealmente dependiente de los procesos restantes, contrario al supuesto inicial de independencia lineal de los procesos del sistema; pero si fueran diferentes, tendriamos que $<B_j|$ puede ser producido por dos renglones diferentes de insumos, lo cual violaria la condición de tecnologia bien definida. Como ninguna de estas alternativas es aceptable, entonces la premisa de dependencia lineal del renglón j de producto bruto es la que debe ser incorrecta. En consecuencia, los renglones de B deben ser linealmente independientes cuando la tecnologia está bien definida en el sistema.

Un razonamiento análogo permite deducir que si la tecnologia del sistema está bien definida, entonces los renglones de N también deben ser linealmente independientes.

Con todo lo anterior, queda establecido el siguiente teorema:

<u>Teorema 1</u>: Un sistema económico tiene tecnologia bien definida si y sólo si los renglones de las matrices de producto bruto y de producto neto son linealmente independientes.

Es conocido que si los renglones de una matriz cuadrada son linealmente independientes, la matriz tiene rango pleno. Podemos entonces derivar el siguiente corolario:

<u>Corolario 1</u>: Un sistema económico tiene tecnologia bien definida si y sólo si las matrices de producto bruto y de producto neto tienen rango pleno.

y por tanto:

> Corolario 2: En un sistema económico con tecnología bien definida, las matrices de producto bruto y de producto neto son invertibles.

Hemos dicho que un sistema económico tiene tecnología bien definida si para cada proceso del sistema los renglones de producto bruto y de producto neto pueden ser producidos únicamente por el renglón de insumos del mismo proceso. Este resultado puede generalizarse para el vector de producto bruto o de producto neto de cualquier estado del sistema, ya que según las ecuaciones (4) y (5):

$$\langle b| = \langle y|B \qquad (4')$$

$$\langle n| = \langle y|N \qquad (5')$$

En consecuencia, puesto que según el Corolario 2 las matrices B^{-1} y N^{-1} existen, de las ecuaciones anteriores puede despejarse $\langle y|$ en las formas:

$$\langle y| = \langle b|B^{-1} \qquad (14)$$

$$\langle y| = \langle n|N^{-1} \qquad (15)$$

Las relaciones (14) y (15) muestran que los vectores $\langle y|$ que dan lugar a $\langle b|$ y a $\langle n|$, respectivamente, son únicos. Concluimos entonces el siguiente corolario:

> Corolario 3: En un sistema económico de tecnología bien definida, la forma de producir cada vector de pro-

ducto bruto y cada vector de producto neto es única.

En lo que sigue de este trabajo, supondremos que los sistemas económicos considerados tienen siempre su tecnología bien definida.

Capitulo 4

VARIACIONES DEL PRODUCTO BRUTO Y DEL PRODUCTO NETO.

En este capitulo iniciaremos el estudio detallado de la forma en que un sistema lleva a cabo la producción y de la manera de obtener vectores deseados de producto, cuando ello es factible. Estudiaremos primero el producto bruto, pasando después al producto neto.

Supongamos que a partir de un sistema económico base $(A, |L\rangle, B)$ de tecnologia bien definida se desée producir la cantidad $\langle b|$ de producto bruto. Para ello, habrá que operar los diferentes procesos del sistema a los niveles de actividad dados por el vector $\langle y|$ que satisfaga la ecuación (4):

$$\langle b| = \langle y|B \qquad (4')$$

En esta forma $\langle y|$ quedará dado, como vimos en (14), por:

$$\langle y| = \langle b|B^{-1} \qquad (14')$$

teniendo como requisito adicional que $\langle y| \geqq \langle 0|$. Este requisito no siempre se podrá cumplir, puesto que nada impide que B^{-1} contenga elementos negativos; por este motivo, no cualquier producto bruto $\langle b|$ podrà ser producido por el sistema econòmico. El conjunto de vectores $\langle b|$ que satisfacen (4) (o (14')) y que dan lugar a un vector $\langle y|$ no negativo constituyen el <u>producto bruto alcanzable</u> por el sistema:

$$\langle y| = \langle b|B^{-1} \geqq \langle 0| \tag{16}$$

y como (16) debe cumplirse para cada componente y_j de $\langle y|$, debe tenerse:

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} B^{-1}_{kj}\ b_k \geq 0 \tag{17}$$

La desigualdad de (17) representa geomètricamente un semiespacio en el espacio de los productos brutos, y puesto que debe satisfacerse una relaciòn de este tipo para cada valor de $j = 1, 2, \ldots, m$, la regiòn que cumple (16) debe ser la intersecciòn de esos semiespacios. Sin embargo, como B es una matriz semipositiva y $\langle y|$ un vector no negativo, tendremos que $\langle b| = \langle y|B \geqq \langle 0|$, es decir, la regiòn de producto bruto alcanzable se ubicarà siempre en el ortante no negativo (ver la Fig. 4 para un ejemplo con $m = 2$, en donde la intersecciòn mostrada debe ser la ùnica factible, puesto que cualquier otra daria lugar a componentes negativas en $\langle b|$).

Los productos brutos $\langle b|$ que no satisfagan (16) no podràn ser producidos <u>directamente</u> por el sistema. Nòtese, sin embargo, que eso no significa que con el sistema no puedan obtenerse dichos productos. Los vectores $\langle b|$ que no cumplan (16) pueden ser obtenidos indirectamente produciendo

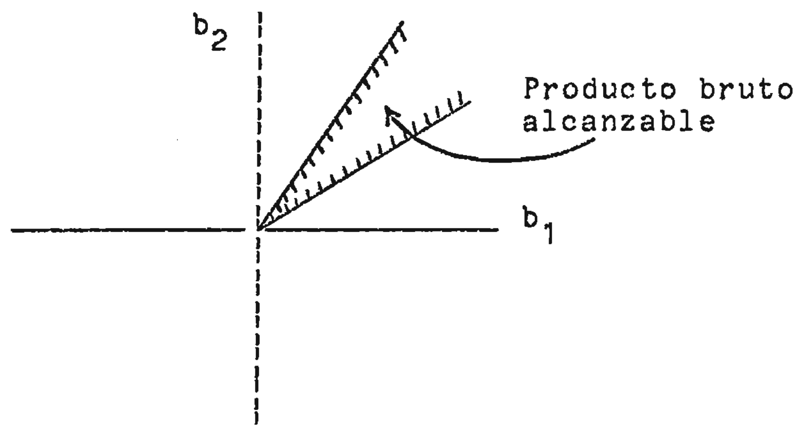

Figura 4. Ejemplo del producto bruto alcanzable por un sistema.

primero (suponiendo que hay recursos suficientes) un vector <b'| que sea mayor que <b| pero que si sea producible, y luego desechando el sobrante <b'| - <b|. Tal forma de producir resulta <u>ineficiente</u>, pero puede ser la única manera de lograr un producto bruto deseado no producible directamente. Puede inclusive buscarse alguna forma de minimizar los insumos utilizados, tal como la empleada por Morishima para calcular sus "valores óptimos" mediante técnicas de programación lineal[(9)]. Si se añaden estos tipos de producción indirecta, entonces cualquier producto <b| podrá ser obtenido con el sistema, con tal de que haya suficiente disponibilidad de recursos (medios de producción y trabajo). Sin embargo, puesto que en cualquier caso habrá que acudir al conjunto de <b| directamente producible definido por (16), nosotros consideraremos como producto obtenible solamente a dicho conjunto, ya que es el realmente relevante para anali-

(9) Morishima, op. cit., Cap. 14.

zar la producción bruta del sistema.

La ecuación (14) expresa cómo obtener el estado $\langle y|$ del sistema que produzca el producto bruto deseado $\langle b|$: según esa ecuación, basta con multiplicar el vector $\langle b|$ requerido por la matriz B^{-1}. En tal sentido, B^{-1} puede interpretarse como la <u>matriz generatriz</u> del vector de estado necesario para la producción del producto bruto deseado $\langle b|$.

Los medios de producción y el trabajo necesarios para la producción de $\langle b|$ pueden calcularse ahora por medio de (2), (3) y (14'):

$$\langle a| = \langle y|A = \langle b|B^{-1}A \qquad (18)$$

$$l = \langle y|L\rangle = \langle b|B^{-1}|L\rangle \qquad (19)$$

y si definimos:

$$A' = B^{-1}A \qquad (20)$$

$$|L'\rangle = B^{-1}|L\rangle \qquad (21)$$

entonces (18) y (19) pueden escribirse en la forma:

$$\langle a| = \langle b|A' \qquad (22)$$

$$l = \langle b|L'\rangle \qquad (23)$$

Las relaciones (22) y (23) muestran que para calcular los medios de producción y el trabajo necesarios para la producción de $\langle b|$, basta utilizar a la matriz A' y al vector $|L'\rangle$. A' y $|L'\rangle$ aparecen así, en analogía con B^{-1} para

$\langle y|$, como los <u>generadores</u> de los insumos (medios de producción y trabajo) requeridos por el sistema para la producción de un producto bruto deseado cualquiera $\langle b|$.

Notemos, sin embargo, que la restricción de que los niveles de actividad sean no negativos desaparece si en vez de utilizar estados -con los que se tiene la limitante mencionada- empleamos estados-incremento, para los que no se tiene esa restricción. El problema se replantea entonces sobre cómo producir la cantidad $d\langle b|$ de producto bruto; para lograrlo, debemos aplicar al sistema el vector de estado $d\langle y|$ que satisface la relacion (9):

$$d\langle b| = d\langle y|B \qquad (9')$$

de donde obtenemos:

$$d\langle y| = d\langle b|B^{-1} \qquad (24)$$

El vector $d\langle y|$, como analizamos antes en el Capitulo 2, puede tener elementos negativos, que significan simplemente una reducción en los niveles de actividad de los procesos asociados a esos elementos. Por tanto, no existe ninguna dificultad con $d\langle y|$ en caso de que aparezcan elementos negativos; la restricción de no negatividad se traslada entonces a los estados $\langle y|$ a los que puede aplicarse el incremento $d\langle y|$, y que se encuentra expresada por la condición (6).

Una vez obtenido $d\langle y|$, los medios de producción y el trabajo necesarios para la producción de $d\langle b|$ pueden calcularse por medio de (7) y (8):

$$d\langle a| = d\langle y|A = d\langle b|B^{-1}A \qquad (25)$$

$$dl = d\langle y|L\rangle = d\langle b|B^{-1}|L\rangle \qquad (26)$$

y con las definiciones de (20) y (21), vemos que las ecuaciones anteriores pueden escribirse en la forma:

$$d\langle a| = d\langle b|A' \qquad (27)$$

$$dl = d\langle b|L'\rangle \qquad (28)$$

El vector $d\langle b|$ puede tener componentes positivas, negativas o cero. Según sea el signo de estas componentes, podemos tener las siguientes situaciones:

a) $d\langle b| \geq \langle 0|$. En este caso, al añadir el estado-incremento $d\langle y|$ a un estado $\langle y|$ que cumpla la condición de aplicabilidad (6), el producto bruto se verá incrementado en al menos una componente, sin que disminuya ninguna otra. Por tal razón, diremos que si $d\langle b| \geq \langle 0|$ entonces el estado-incremento corresponde a un *producto bruto creciente*.

b) $d\langle b| \leq \langle 0|$. Este caso es el opuesto al anterior, ya que ahora ninguna componente del producto bruto aumentará y si al menos una disminuirá. Diremos que un estado-incremento con estas características corresponde a un *producto bruto decreciente*.

c) Si $d\langle b|$ contiene elementos tanto positivos como negativos o cero, entonces algunas componentes del producto bruto crecerán, otras decrecerán y algunas más permanecerán sin cambio. En este caso no podemos considerar que el producto bruto aumentará o disminuirá; diremos por tanto que a un estado-incremento asi corresponde un producto bruto con comportamiento indefinido.

Geométricamente, la región de producto bruto creciente puede ser representada en el espacio vectorial de estados-incremento d<y|. Puesto que, como hemos visto en (9'), d<b| = d<y|B, deberemos tener:

$$db_j = \sum_{k=1}^{m} B_{kj}\, dy_k \geq 0 \qquad (29)$$

que representa un semiespacio en el espacio de vectores d<y|. Para obtener d<b| $\geq$ <0| tendremos entonces que aplicar (29) simultáneamente a j = 1, 2, ..., m, lo que conduce a tomar la intersección de dichos semiespacios, que constituirá por consiguiente la región de producto bruto creciente. Esta región puede ubicarse en cualquier parte del espacio de vectores d<y|, puesto que las componentes dy_k pueden ser negativas.

Un análisis similar puede ser hecho en relación a las regiones de producto bruto decreciente y de producto bruto con comportamiento indefinido, que como en el caso anterior, consistirán en la intersección de semiespacios análogos a (29). Para las regiones de producto bruto decreciente, cambiará el sentido de todas las desigualdades en (29). Para las regiones de producto bruto con comportamiento indefinido sólo cambiarán algunas de las desigualdades, correspondientes a las b_j que disminuyan; en otras la desigualdad se reemplazará por una igualdad, cuando b_j no cambie, y en las restantes no habrá modificación, pues se seguirá teniendo un aumento en b_j. El espacio vectorial de estados-incremento d<y| quedará dividido entonces en estas tres regiones características, teniendo todas ellas como frontera a los hiperplanos definidos por la igualdad de la relación (29) (ver la Fig. 5 para un caso típico con m = 2).

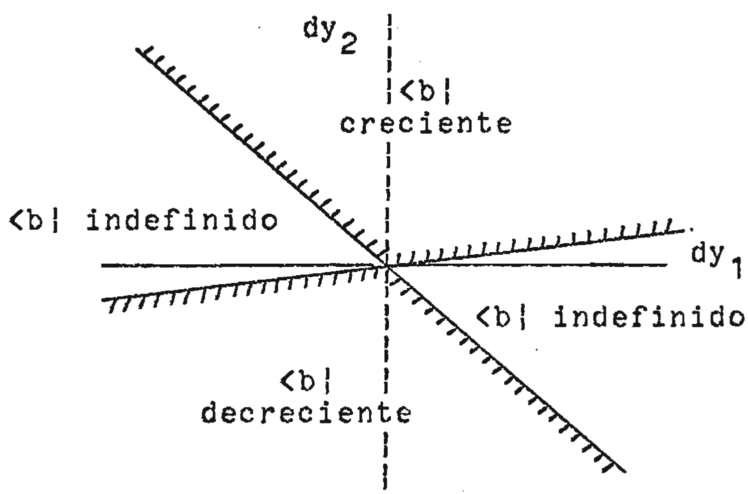

Figura 5. Regiones del espacio de estados-incremento d<y|, según el comportamiento producido en <b|.

Al añadir el estado-incremento d<y| a un estado inicial <y| del sistema, el diagrama de la Fig. 5 deberá trasladarse del espacio de d<y| al espacio de <y|, quedando colocado

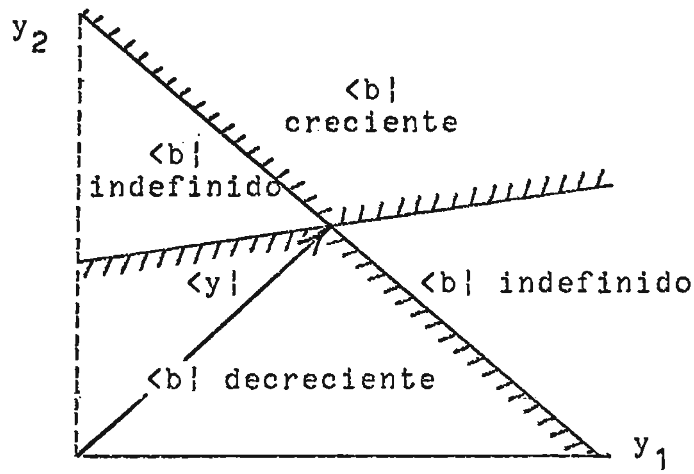

Figura 6. Comportamiento de $\langle b|$ al variar $d\langle y|$ a partir de un estado inicial $\langle y|$.

el origen en el punto que representa al estado inicial $\langle y|$ (ver Fig. 6). Las tres regiones anteriores estarán ahora limitadas por la condición de que todos los estados factibles queden ubicados en el primer cuadrante, y nos mostrarán el comportamiento de $\langle b|$ según la región en la que quede colocado el nuevo vector $\langle y'| = \langle y| + d\langle y|$.

El tratamiento anterior ha sido hecho para estudiar el comportamiento del producto bruto. Un análisis enteramente análogo puede hacerse para estudiar la forma de producir un producto neto deseado $\langle n|$.

A partir de (5), vemos que el vector de estado $\langle y|$ necesario para producir el producto neto $\langle n|$ está dado por:

$$\langle y| = \langle n|N^{-1} \qquad (30)$$

Esta relación, análoga a la de la ecuación (14'), no siempre tiene solución, debido al requisito de no negatividad de $\langle y|$. El conjunto de vectores $\langle n|$ de (5) y (30) para los que $\langle y| \geqq \langle 0|$ constituye el *producto neto alcanzable* por el sistema:

$$\langle y| = \langle n|N^{-1} \geqq \langle 0| \qquad (31)$$

Si graficamos la región permitida por (31) en el espacio de productos netos, obtendremos un diagrama similar al de la Fig. 4. Sin embargo ahora la matriz N, a diferencia de B, puede contener elementos negativos; ello hace que el vector $\langle n| = \langle y|N$ pueda también tener componentes negativas. Así pues, la región de producto neto alcanzable (31) puede ubicarse en cualquier parte del espacio de productos netos, y ya no sólo en el primer ortante, como era el caso con el producto bruto. De hecho, si no se imponen restricciones podrían tenerse sistemas en los que esta región quedara fuera del primer ortante, dando lugar a situaciones claramente antieconómicas. Es importante notar entonces que la condición de productividad (1):

$$\langle n| = \langle e|N > \langle 0| \qquad (1')$$

permite garantizar que en los sistemas económicos que consideramos, al menos una parte de la región de $\langle n|$ alcanzable (a la cual pertenece el vector $\langle n|$ de (1')) se encuentre en el ortante positivo del espacio de productos netos, siendo por tanto significativa económicamente.

Si ahora pasamos a utilizar estados-incremento, tendremos que el vector de estado $d\langle y|$ necesario para producir la cantidad $d\langle n|$ de producto neto está dado, según (10), por:

$$d\langle y| = d\langle n|N^{-1} \qquad (32)$$

en donde $d\langle y|$ puede tener componentes negativas, pero sólo puede añadirse a estados cuyo vector $\langle y|$ satisfaga la condición (6). De (32) vemos que N^{-1} es la matriz generatriz del vector de estado requerido para la producción del producto neto $d\langle n|$.

Utilizando el vector $d\langle y|$ de (32), los medios de producción y el trabajo necesarios para la producción de $d\langle n|$ resultan, de acuerdo con (7) y (8):

$$d\langle a| = d\langle y|A = d\langle n| \qquad (33)$$

$$dl = d\langle y|L\rangle = d\langle n|N^{-1}|L\rangle \qquad (34)$$

y definiendo:

$$A^* = N^{-1}A \qquad (35)$$

$$|L^*\rangle = N^{-1}|L\rangle \qquad (36)$$

tenemos entonces que (33) y (36) pueden escribirse:

$$d\langle a| = d\langle n|A^* \qquad (37)$$

$$dl = d\langle n|L^*\rangle \qquad (38)$$

que son las relaciones que corresponden a (27) y (28). Las ecuaciones (37) y (38) muestran asimismo que la matriz A^* y el vector $|L^*\rangle$ son los generadores de los insumos (medios de producción y trabajo) requeridos para la producción del incremento $d\langle n|$ en el producto neto[10].

De acuerdo a los signos de las componentes de $d\langle n|$, podemos decir que el estado-incremento respectivo corresponde a un producto neto creciente si $d\langle n| \geq \langle 0|$, a un producto neto decreciente si $d\langle n| \leq \langle 0|$, y a un producto neto con comportamiento indefinido cuando las componentes de $d\langle n|$ tienen signos diferentes. Si graficamos en el espacio de niveles de actividad, obtendremos diagramas similares a los de las Figs. 5 y 6, mostrando estas tres regiones características (ver Figs. 8, 10, 13 y 14).

---

(10) Nótese que A^* coincide con la matriz H de "capacidad productiva verticalmente integrada" de Pasinetti (Pasinetti, L.L.: "The Notion of Vertical Integration in Economic Analysis", 1973, en L.L. Pasinetti (ed.), op. cit.). A su vez $|L^*\rangle$ es el vector $|V\rangle$ de valores-trabajo, que aparece ya en Brody, A.: PROPORTIONS, PRICES AND PLANNING, 1970, Sec. 1.1.3. Véase el Cap. 9 nuestro, más adelante.

Capitulo 5

FORMAS DE PRODUCCION SIMPLE DE UN SISTEMA ECONOMICO.

Uno de los principales problemas que se plantean en la producción conjunta es que, precisamente por el hecho de ser conjunta, no permite analizar directamente la forma en que se produce cada bien, puesto que en cada proceso se entremezcla la producción de unos bienes con la de otros, dando lugar a que lo único observable sea la producción de conjunto. Esto impide ver, por ejemplo, en qué proporción se distribuyen los insumos entre cada uno de los bienes producidos; tampoco puede apreciarse cómo habrian de modificarse los insumos ante variaciones individuales de cada producto. Estas cuestiones resultarian de gran importancia para determinar la productividad de los insumos, ya que de hecho, como mostraremos más adelante, pueden existir ineficiencias en el comportamiento de los insumos en el proceso productivo que quedan ocultas por la superposición de efectos resultante de la producción conjunta, y que pueden no ser detectadas acudiendo sólo al producto obtenido, como plantea la condición de productividad tradicional (1).

En consecuencia, resulta útil ver la posibilidad de que un sistema económico de producción conjunta pueda ser llevado a una forma de producciòn simple, en la que puedan ser estudiadas las caracteristicas de producciòn de cada bien separadamente; ello constituiria una especie de placa radiogràfica del sistema, que mostraria los detalles de la manera en que se efectùa la producciòn.

Asi pues, a partir del sistema base (A, $|L\rangle$, B), veamos si es posible construir un sistema equivalente que realice producciòn simple, ya sea bruta o neta.

Supongamos primero que a partir del sistema base se desèe encontrar un estado en el que se produzca sòlo una unidad bruta del bien j, es decir, en el que se tenga producciòn simple de ese bien. Por consiguiente:

$$\langle b| = \langle e_j| \tag{39}$$

en donde $\langle e_j| = |0 \;...\; 1 \;.....\; 0|$ es un vector renglòn cuyas componentes son todas cero excepto la j, que vale 1. Empleando (4) y (39), vemos que el vector de estado $\langle y_j|$ requerido està dado por:

$$\langle y_j| = \langle b|B^{-1} = \langle e_j|B^{-1} =$$

$$= \langle B^{-1}{}_j| \tag{40}$$

siendo $\langle B^{-1}{}_j|$ el vector renglòn formado con el renglòn j de B^{-1}.

La expresiòn (40) sòlo tiene sentido cuando $\langle B^{-1}{}_j|$ no contiene elementos negativos. Si esta condiciòn se satisface para todo valor de j, es decir, si:

$$B^{-1} \geq 0 \qquad (41)$$

vemos que entonces el sistema econòmico es <u>reducible a producciòn simple</u>, es decir, puede ser llevado a una forma equivalente en la que existe una "industria compuesta" para la producciòn separada de cada uno de los bienes del sistema.

Sin embargo, si B^{-1} contiene elementos negativos -lo cual puede ocurrir en general- entonces estos elementos apareceràn como componentes de $\langle y_j|$ para al menos un valor de j, de acuerdo con (40). Pero entonces ese $\langle y_j|$ no podrà ser interpretado como un vector de estado, ya que el requisito de factibilidad econòmica pide que todo $\langle y|$ sea no negativo. En consecuencia, cuando B^{-1} tenga elementos negativos no existirà un sistema equivalente de estados de producciòn simple; en otras palabras, se tendrà un sistema econòmico <u>autènticamen</u>te de producciòn conjunta.

La dificultad para llevar a un sistema general a la forma de producciòn simple desaparece si, en vez de usar estados, pedimos estados-incremento de producciòn simple. En este caso, lo que deseamos no es la producciòn total de sòlo una unidad bruta del bien j, sino el incremento de la producciòn ya existente en sòlo una unidad bruta de dicho bien. En otras palabras, queremos que la producciòn bruta simple tenga un caràcter <u>marginal</u>. Para ello, debemos tener:

$$d\langle b| = \langle e_j| \qquad (42)$$

de manera que el vector de estado $d\langle y_j|$ necesario estará dado, según (9), por:

$$d\langle y_j| = \langle e_j|B^{-1} = \langle B^{-1}{}_j| \qquad (43)$$

y tiene ahora la posibilidad de tener componentes negativas, las que indicarian que para producir una unidad bruta extra del bien j es preciso reducir el nivel de actividad de algunos procesos del sistema. Debemos recordar, sin embargo, la condición (6), que en la situación actual expresa que el estado inicial $\langle y|$ a partir del cual se va a producir la unidad bruta extra deseada debe satisfacer

$$\langle y| \geqq -\langle B^{-1}{}_j| \qquad (44)$$

Si esta condición no se cumple, entonces no será posible la producción simple del bien extra a partir del estado inicial $\langle y|$ dado.

Vemos asi que para cada valor de j es posible encontrar un estado-incremento del sistema que realice producción simple marginal del bien j. Si consideramos el conjunto de estados-incremento correspondientes a j = 1, 2, ..., m, tendremos entonces un sistema económico completo que realiza ahora <u>producción bruta simple de carácter marginal</u> de cada bien de la economia.

En este contexto, la matriz B^{-1} adquiere un significado económico definido: sus renglones constituyen los vectores de estado de los estados-incremento que realizan la producción bruta simple de carácter marginal de cada bien de la economía.

Notemos que como evidentemente la matriz B^{-1} es invertible, debe tener rango pleno, razón por la cual el conjunto de vectores $d\langle y_1|$, $d\langle y_2|$, ..., $d\langle y_m|$, que forman sus renglones, debe ser linealmente independiente.

Los medios de producción $d\langle a_j|$ empleados por el estado-incremento j son, según (27) y (42):

$$d\langle a_j| = d\langle b|A' = \langle e_j|A' = \\ = \langle A'_j| \qquad (45)$$

Con estos vectores $d\langle a_j|$ como renglones, podemos construir la matriz de medios de producción del sistema de producción bruta simple de carácter marginal, da, que resulta así ser idéntica a la matriz A' definida por (20):

$$da = (d\langle a_j|) = (\langle A'_j|) = \\ = A' \qquad (46)$$

de manera que A' es tanto la matriz generatriz de los medios de producción requeridos para la obtención de un producto bruto dado (ec. (20)), como la matriz de medios de producción del sistema de producción bruta simple de carácter marginal (ec. (46)). Estas dos interpretaciones resultan complementarias.

Similarmente, el trabajo directo dl_j utilizado por el estado-incremento j es, de acuerdo con (28) y (42):

$$dl_j = d\langle b|L'\rangle = \langle e_j|L'\rangle =$$

$$= L'_j \qquad (47)$$

con lo cual podemos construir el <u>vector de trabajo directo del sistema de estados-incremento de producciòn bruta simple de caràcter marginal</u>, $d|l\rangle$, que segùn vemos, coincide con el vector $|L'\rangle$ definido por (21):

$$d|l\rangle = (dl_j) = (L'_j) =$$

$$= |L'\rangle \qquad (48)$$

de modo que $|L'\rangle$ resulta ser tanto el vector generador del trabajo directo necesario para obtener un producto bruto dado (ec. (21)), como el vector de trabajo directo del sistema de estados-incremento de producciòn bruta simple de caràcter marginal (ec. (48)). Estas dos interpretaciones son, asimismo, complementarias.

Como el producto bruto de cada estado-incremento j es por construcciòn $\langle e_j|$, la matriz de producto bruto del sistema de producciòn bruta simple de caràcter marginal, db, resulta ser la matriz identidad I. Esta matriz puede escribirse en la forma $I = B^{-1}B$, lo que hace que pueda calcularse de manera similar a como se obtienen $A' = B^{-1}A$ y $|L'\rangle = B^{-1}|L\rangle$, es decir:

$$db = B' = B^{-1}B = I$$

Vemos asi que la matriz A' y el vector $|L'\rangle$ proporcionan los insumos (medios de producciòn y trabajo) requeridos para la producciòn de una unidad bruta adicional de cada bien de la economìa. En otras palabras, la matriz B^{-1} transforma al sistema base (A, $|L\rangle$, B) en un sistema equivalente (A', $|L'\rangle$, I) que opera en producciòn bruta simple de caràcter marginal.

El mismo tratamiento que se ha dado a la producciòn bruta para obtener su forma de producciòn simple puede ser aplicado a la producciòn neta; para ello, basta ùnicamente remplazar a B por N.

Asi, para que un estado produzca sòlo una unidad neta del bien j debe tenerse:

$$\langle n| = \langle e_j| \tag{49}$$

para lo cual el vector de estado $\langle y_j|$ necesario estarà dado por:

$$\langle y_j| = \langle e_j|N^{-1} = \langle N^{-1}{}_j| \tag{50}$$

Esta expresiòn sòlo tiene sentido cuando $\langle N^{-1}|$ no contiene componentes negativas. En otras palabras, sòlo cuando:

$$N^{-1} \geq 0 \qquad (51)$$

serà posible llevar al sistema econòmico a la forma de producciòn neta simple, en la que exista una "industria compuesta" asociada a la producciòn neta de cada uno de los bienes de la economia. Si èsto ocurre, diremos que el sistema econòmico es <u>reducible</u> a la forma de producciòn neta simple.

Un caso importante de reducibilidad a producciòn neta simple ocurre cuando tenemos un sistema de producciòn simple ($B = I$, siendo I la matriz identidad) que satisface el criterio de productividad de (1). Esta situaciòn queda establecida por el siguiente teorema y el corolario que le sigue:

<u>Teorema 2</u>: Si un sistema de producciòn simple satisface la condiciòn de productividad:

$$\langle n| = \langle e|N > \langle 0| \qquad (1')$$

entonces $N^{-1} \geq 0$.

Para demostrarlo, notemos que como la matriz de medics de producciòn A es semipositiva entonces, por el Teorema de Perron-Frobenius (Teorema A.1 del Apèndice), tiene un autovalor dominante $a \geq 0$ asociado a un autovector $|a\rangle \geq |0\rangle$:

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

Entonces, ya que para este sistema $B = I$, tendremos:

$$\langle e|N|a\rangle = \langle e|(I - A)|a\rangle =$$

$$= \langle e|(|a\rangle - a|a\rangle) =$$

$$= (1 - a)\langle e|a\rangle \qquad (52)$$

Como $\langle e|N > \langle 0|$ y $|a\rangle \geq \langle 0|$, deben tenerse $\langle e|N|a\rangle > 0$ y $\langle e|a\rangle > 0$. Por tanto $1 - a > 0$, y en consecuencia:

$$1 < 1/a \qquad (53)$$

Por otra parte, según el Teorema A.2 del Apéndice, que es consecuencia del de Perron-Frobenius, sabemos que para todo número x tal que $0 \leq x < 1/a$, la matriz $(I - xA)^{-1}$ es semipositiva. Como haciendo $x = 1$ se tiene que $(I - xA)^{-1} = (I - A)^{-1} = N^{-1}$, al tiempo que según (53) se cumple que $x < 1/a$, vemos que (53) implica, de acuerdo con este último teorema, que $N^{-1} \geq 0$. Esto prueba el Teorema 2.

Examinando (50), obtenemos el siguiente corolario:

<u>Corolario</u>: Un sistema económico de producción simple que sea productivo en el sentido de (1) siempre puede ser llevado a la forma de producción neta simple.

Cabe hacer notar que si ocurre que $N^{-1} \geq 0$, ésto no tiene por qué implicar que $B^{-1} \geq 0$. En otras palabras, la posibilidad de producción neta simple en un sistema no asegura la reducibilidad del sistema a producción (bruta) simple.

En síntesis: cuando $N^{-1} \geq 0$, entonces:

a) Si $B^{-1} \geq 0$, el sistema es reducible a producciòn simple.

b) Si B^{-1} contiene elementos negativos, el sistema no es reducible a producciòn simple, tratàndose entonces de un sistema de producciòn conjunta autèntica.

Volviendo a la situaciòn general de producciòn conjunta, de (50) vemos que, debido a la posible presencia de elementos negativos en N^{-1}, no es siempre factible llevar al sistema econòmico a una forma de producciòn neta simple, No obstante, sí es posible pasar a un sistema de estados-incremento que realicen producciòn neta simple de caràcter marginal, èsto es, que produzcan cada uno una unidad neta adicional de cada bien j de la economía:

$$d\langle n_j| = \langle e_j|. \qquad (54)$$

En analogía con (43), los vectores de estado de estos estados-incremento estaràn dados por:

$$d\langle y_j| = \langle N^{-1}{}_j| \qquad (55)$$

siendo $\langle N^{-1}{}_j|$ el vector renglòn formado con el renglòn j de N^{-1}. El requisito de factibilidad econòmica nos dice que esta producciòn simple deberà realizarse sòlo a partir de estados $\langle y|$ que satisfagan la condiciòn (6), que en el caso actual puede escribirse, de acuerdo con (55):

$$\langle y| \geqq -\langle N^{-1}{}_j| \qquad (56)$$

La relación (56) se corresponde con la (44) para el caso del producto bruto.

De esta manera, la matriz N^{-1} cobra un significado parecido al de B^{-1}: sus renglones constituyen los vectores de estado de los estados-incremento que realizan la producción neta simple de carácter marginal. Estos vectores son linealmente independientes, ya que N^{-1} es una matriz invertible y por tanto de rango pleno.

Asimismo, la matriz

$$A^* = N^{-1}A \qquad (35')$$

y el vector

$$|L^*\rangle = N^{-1}|L\rangle \qquad (36')$$

definidos en (35) y (36), respectivamente, como la matriz generatriz de los medios de producción y el vector generador del trabajo directo necesarios para la obtención de un producto neto dado, son al mismo tiempo la matriz de medios de producción y el vector de trabajo directo del sistema de producción neta simple de carácter marginal.

Finalmente, como la matriz de producto neto es igual por definición a la matriz de producto bruto menos la matriz de medios de producción, tendremos que en el nuevo sistema de producción neta simple, en el que la matriz de producto neto es la matriz identidad I:

$$B^{*} = A^{*} + I \qquad (57)$$

siendo B^{*} la matriz de producto bruto correspondiente.

Esta ecuaciòn puede reescribirse, con ayuda de (35), en la forma:

$$\begin{aligned} B^{*} &= A^{*} + I = \\ &= N^{-1}A + N^{-1}N = \\ &= N^{-1}(A + N) = \\ &= N^{-1}B \qquad (58) \end{aligned}$$

lo cual permite ver que B^{*} puede obtenerse premultiplicando a B por N^{-1}, en forma anàloga a como A^{*} y $|L^{*}\rangle$ se obtienen de A y $|L\rangle$ en (35) y (36).

En esta forma, la matriz $A^{*} = N^{-1}A$ y el vector $|L^{*}\rangle = N^{-1}|L\rangle$ constituyen los insumos (medios de producciòn y trabajo) requeridos para la producciòn de una unidad neta adicional de cada bien de la economìa. Es decir, la matriz N^{-1} transforma al sistema base (A, $|L\rangle$, B) en un sistema equivalente (A^{*}, $|L^{*}\rangle$, $A^{*} + I$) que opera en producciòn neta simple de caràcter marginal.

Capítulo 6

COMPORTAMIENTO PRODUCTIVO Y DESTRUCTIVO DE LOS INSUMOS DE UN SISTEMA ECONOMICO.

Estudiaremos ahora con más detalle las condiciones de productividad de un sistema económico. Esto significa revisar el comportamiento de los insumos en el proceso productivo, viendo la forma en que cada uno de ellos contribuye a la producción. Aplicaremos las ideas desarrolladas en el capítulo anterior, puesto que permiten ver con claridad los detalles de la producción de cada bien.

Para estudiar la productividad de un sistema debemos acudir al producto neto, pues es ésta la cantidad que mide el producto realmente creado en el proceso productivo; el producto bruto no resulta útil para este propósito, puesto que en él se reproducen como producto final parte de los insumos (medios de producción) utilizados.

Hemos visto en el capítulo anterior que mediante la matriz N^{-1} podemos llevar al sistema original $(A, |L\rangle, B)$ a la forma $(A^*, |L^*\rangle, A^* + I)$, que realiza producción neta simple de carácter marginal. Este nuevo sistema es enteramente equivalente al sistema original, puesto que los estados-incremento que lo constituyen están construidos como combinaciones lineales de los procesos del sistema original y representan por consiguiente las mismas condiciones tecnológicas de producción. La manera de producir es la misma; sin embargo, el análisis de la forma de operación es más sencillo en el sistema de producción simple, ya que aquí puede observarse separadamente para cada bien la manera en que es producido por la economía.

La producción de una unidad neta adicional del bien j puede ser representada por el siguiente esquema:

$$(\langle A^*_j|,\ L^*_j) \dashrightarrow \langle B^*_j| = \langle A^*_j| + \langle e_j| \qquad (59)$$

en donde $(\langle A^*_j|, L^*_j)$ es el renglón de insumos requeridos para la producción de la unidad neta adicional $\langle e_j|$. Esta expresión nos permite ver claramente la forma en que cada insumo contribuye a la producción de una unidad neta del bien j.

Según se desprende de las definiciones (35) y (36), A* y $|L^*\rangle$ pueden tener componentes negativas, provenientes de N^{-1}. Por consiguiente, en una situación general el renglón $(\langle A^*_j|, L^*_j)$ puede tener elementos positivos, cero y negativos, cuya interpretación es la siguiente:

a) Un elemento positivo significa que hay que <u>aumentar</u> la cantidad de ese insumo para producir una unidad neta adicional del bien j. Es decir, ese insumo <u>entra</u> en el sistema para la producción de dicho bien.

b) Un elemento igual a cero indica que el insumo respectivo *no interviene* en la producción neta del bien j.

c) Un elemento negativo implica que hay que *disminuir* la cantidad del insumo correspondiente para producir una unidad neta adicional del bien j. En otras palabras, ese insumo *sale* o es *liberado* por el sistema (puesto que disminuye su utilización) en la producción de aquel bien.

Las situaciones (a) y (b) no requieren de más comentarios; sin embargo, la (c) necesita mayor explicación. Con este fin, notemos que si en vez de pedir la producción de una unidad neta más del bien j quisiéramos su *disminución* en una unidad neta, tendriamos en lugar de (54):

$$d\langle n_j| = -\langle e_j| \qquad (60)$$

y por tanto, según (37), (38) y (60), puede verse que:

$$d\langle a_j| = -\langle A^*_j| \qquad (61)$$

$$dl_j = -L^*_j \qquad (62)$$

Asi pues, la producción de una unidad neta menos del bien j requiere que los insumos utilizados cambien en $(-\langle A^*_j|, \ -L^*_j)$. Resulta de aqui que aquellos elementos negativos de $\langle A^*_j|$ y L^*_j contribuirán ahora positivamente a la reducción de la producción neta de dicho bien. Es decir, estos insumos *entran* en el sistema para *disminuir* la producción del bien j. Este comportamiento se complementa con el descrito en el inciso c) arriba: si el incremento de dichos insumos ocasiona la disminución del producto neto, entonces su retiro permite que éste aumente.

El argumento último nos permite ver igualmente que el aumento del producto neto del bien j ocasionado por un decrecimiento de los insumos asociados a los elementos negativos de $\langle A^*_j|$ y/o $L^*_j\rangle$ tiene un limite, que se alcanza cuando estos insumos se reducen hasta que ya no pueden disminuir más. Esta situación se presenta cuando, tras añadirle estados-incremento del tipo (59) al estado inicial para incrementar el producto neto del bien j, los términos negativos de $\langle A^*_j|$ o L^*_j ocasionan que algún insumo disminuya hasta hacerse cero. Cuándo y para qué insumo se dará ésto, dependerá de la dotación de insumos del estado inicial.

Las consideraciones anteriores motivan las siguientes definiciones:

Definición: Diremos que un insumo se comporta *productivamente* en la producción de un bien si *entra* al sistema de producción neta simple para aumentar el producto neto de ese bien.

Definición: Diremos que un insumo se comporta *destructivamente* en la producción de un bien si *entra* al sistema de producción neta simple para dismunuir el producto neto de ese bien.

En consecuencia, los elementos positivos de $(\langle A^*_j|$, $L^*_j)$ corresponden a insumos productivos en relación a la producción del bien j, en tanto que los elementos negativos se refieren a insumos destructivos respecto a ese bien. Los elementos nulos indican, como ya se dijo, que los insumos respectivos no intervienen en esa producción.

Así pues, las condiciones para que un sistema económico no presente comportamientos destructivos en los insumos son que:

$$A^* \geq 0 \qquad (63)$$

$$|L^*\rangle \geq |0\rangle \qquad (64)$$

Pero de acuerdo con las definiciones de (35) y (36) vemos que como A y $|L\rangle$ son semipositivos, $A^* = N^{-1}A$ y $|L^*\rangle = N^{-1}|L\rangle$ sólo pueden tener elementos negativos si N^{-1}, a su vez, los tiene. Por tanto, si sucede que:

$$N^{-1} \geq 0 \qquad (65)$$

entonces el sistema no presentará comportamientos destructivos, ya que A^* y $|L^*\rangle$ serán semipositivos.

En resumen, puede afirmarse lo siguiente:

a) $N^{-1} \geq 0$ implica necesariamente $A^* \geq 0$ y $|L^*\rangle \geq |0\rangle$.

b) Si A^* o $|L^*\rangle$ contienen elementos negativos, entonces necesariamente N^{-1} tiene elementos negativos.

c) N^{-1} puede contener elementos negativos y tenerse $A^* \geq 0$ y/o $|L^*\rangle \geq |0\rangle$.

Obsérvese que la relación (65) coincide con la (51).

En este sentido, si $N^{-1} \geq 0$ pero B^{-1} contiene elementos negativos el sistema no podrá ser llevado a la forma de producción simple, tal como se vio en el capitulo anterior. En otras palabras, se tendrá un sistema de producción conjunta auténtica con comportamiento productivo. Por otra parte, si A^* o $|L'\rangle$ tienen elementos negativos entonces también N^{-1} debe tenerlos necesariamente; en consecuencia, de acuerdo con el Teorema 2 y su Corolario, el sistema no podrá ser llevado a la forma de producción simple. En este caso se tendrá un sistema auténtico de producción conjunta, pero con comportamientos destructivos.

Cabe insistir en que el criterio de productividad que hemos adoptado aquí se refiere al producto neto y por tanto involucra a la matriz N. Podría pensarse que igualmente sería factible acudir al producto bruto y estudiar el significado de elementos negativos en la matriz B^{-1}, estableciendo condiciones de productividad similares a las de (63), (64) y (65) pero con A' y $|L'\rangle$ (definidos en (20) y (21)) en vez de A^* y $|L^*\rangle$. Sin embargo, como hemos expresado al principio de este capitulo, la productividad de un sistema debe medirse con el producto neto y no con el producto bruto, ya que es en el primero donde realmente aparece la creación de nuevo producto. Bajo este criterio, vemos entonces que la presencia de elementos negativos en B^{-1}, A' o $|L'\rangle$ no corresponde necesariamente a un comportamiento destructivo por parte de los insumos, ya que si N^{-1} es semipositiva entonces, como acabamos de ver, el sistema se comportará productivamente.

Igualmente, resulta claro que la condición tradicional de productividad, expresada por la ec. (1), no tiene por qué garantizar el comportamiento productivo de los insumos en el sentido que le hemos dado aquí. Como puede verificarse fácilmente (ver el Ejemplo 4 del Cap. 8), existen sistemas de producción conjunta en los que los insumos se comportan destructivamente, a pesar de lo cual es posible obtener un producto neto $\langle n|$ positivo, satisfaciendo, por tanto, la condición (1). Cuando esto ocurre, el comportamiento destructivo no alcanza a manifestarse en el producto neto total $\langle n|$, que es positivo, sino en el sentido inverso que tienen las variaciones de los insumos en relación a las variaciones del producto neto. Por consiguiente, se refiere no al producto neto en sí, sino a la <u>forma de utilización</u> de los insumos empleados.

El tratamiento anterior se ha referido a la producción de sólo una unidad neta adicional. Sin embargo, puede ser extendido fácilmente para estudiar el comportamiento de los insumos ante la producción de un producto neto cualquiera $d\langle n|$.

Notando que la producción de un vector $d\langle n|$ cualquiera requiere, en general, de la utilización de todos los estados-incremento de producción simple neta, remplazaremos al renglón de insumos $(\langle A^*_j|, L^*_j)$ del bien j por la matriz ampliada $(A^*, |L^*\rangle)$ del sistema. Asimismo, para estudiar con más claridad el comportamiento de cada bien k como insumo, es conveniente ver a las columnas de la matriz A* como vectores columna $|A^*_k\rangle$, ésto es:

$$A^* = (|A^*_k\rangle) \tag{66}$$

Cada uno de estos vectores columna contiene un solo tipo de insumo, de modo que al escribir en esta forma a la matriz ampliada:

$$(A^*, |L^*\rangle) = (|A^*_1\rangle \;\dots\; |A^*_m\rangle \; |L^*\rangle) \tag{67}$$

todos los insumos del sistema aparecen como vectores columna.

Los insumos totales requeridos para producir el producto neto $d\langle n|$ son, según (37), (38) y (56):

$$d\langle a| = d\langle n|A^* = d\langle n|(|A^*_k\rangle) =$$

$$= (d\langle n|A^*_k\rangle) \tag{68}$$

$$dl = d\langle n|L^*\rangle \tag{69}$$

de manera que el renglón de insumos totales necesarios para la producción de $d\langle n|$ es:

$$(d\langle a|, dl) = (d\langle n|A^*_1\rangle \;\dots\; d\langle n|A^*_m\rangle \; d\langle n|L^*\rangle) \tag{70}$$

con lo cual:

$$da_k = d\langle n|A^*_k\rangle = \sum_{j=1}^{m} A^*_{kj}\, dn_j \tag{71}$$

$$dl = d\langle n|L^*\rangle = \sum_{j=1}^{m} L^*_j\, dn_j \tag{72}$$

Obsérvese que en cada una de estas ecuaciones sólo aparece un tipo de insumo.

Por el papel que juegan los vectores $|A^*_k\rangle$ ($k = 1, \ldots, m$) y $|L^*\rangle$ en las ecuaciones (71) y (72), los denominaremos <u>vectores generadores</u> de los insumos medios de producción y trabajo, respectivamente.

Distinguiremos ahora dos situaciones diferentes:

a) $d\langle n| \geq \langle 0|$, es decir, el producto neto aumenta.

b) $d\langle n| \leq \langle 0|$, es decir, el producto neto disminuye.

Analicemos ambas situaciones según que los vectores generadores de insumos requeridos sean positivos, semipositivos o de carácter indefinido. Si examinamos los signos de A^*_{kj}, L^*_j y dn_j en las ecuaciones (71) y (72), podemos ver lo siguiente:

1. Supongamos que:

$|A^*_k\rangle > |0\rangle$. Entonces:

a) Si $d\langle n| \geq \langle 0|$, debe tenerse $da_k > 0$.

b) Si $d\langle n| \leq \langle 0|$, debe tenerse $da_k < 0$.

$|L^*\rangle > |0\rangle$. Entonces:

a) Si $d\langle n| \geq \langle 0|$, debe tenerse $dl > 0$.

b) Si $d\langle n| \leq \langle 0|$, debe tenerse $dl < 0$.

2. Supongamos que:

$|A^*_k\rangle \geq |0\rangle$. Entonces:

a) Si $d\langle n| \geq \langle 0|$, debe tenerse $da_k \geq 0$.

b) Si $d\langle n| \leq \langle 0|$, debe tenerse $da_k \leq 0$.

$|L^*\rangle \geq |0\rangle$. Entonces:

a) Si $d\langle n| \geq \langle 0|$, debe tenerse $dl \geq 0$.

b) Si $d\langle n| \leq \langle 0|$, debe tenerse $dl \leq 0$.

3. Supongamos que:

$|A^*_k\rangle$ tiene componentes negativas. Entonces:

a) Si $d\langle n| \geq \langle 0|$, puede ocurrir que $da_k < 0$.

b) Si $d\langle n| \leq \langle 0|$, puede ocurrir que $da_k > 0$.

$|L^*\rangle$ tiene componentes negativas. Entonces:

a) Si $d\langle n| \geq \langle 0|$, puede ocurrir que $dl < 0$.

b) Si $d\langle n| \leq \langle 0|$, puede ocurrir que $dl > 0$.

Las conclusiones anteriores dan lugar, respectivamente, a los siguientes teoremas:

<u>Teorema 3</u>: El vector generador de un insumo es positivo si y sólo si es imposible aumentar (disminuir) el producto neto total sin aumentar (disminuir) ese insumo.

Teorema 4: El vector generador de un insumo es semipositivo si y sòlo si es imposible aumentar (disminuir) el producto neto total simultàneamente con una disminuciòn (aumento) de ese insumo. Si el vector generador del insumo tiene alguna componente igual a cero, entonces es posible dar un aumento o una disminuciòn a $\langle n|$ manteniendo el insumo constante.

Teorema 5: El vector generador de un insumo contiene elementos negativos si y sòlo si es posible encontrar estados en los que el producto neto total aumente (disminuya) simultàneamente con una disminuciòn (aumento) de ese insumo.

En la situaciòn cubierta por el Teorema 3, vemos que si a partir de un estado inicial $\langle y|$ nos movemos de manera que el insumo considerado se mantenga constante, entonces en este movimiento $\langle n|$ debe tener un comportamiento indefinido, ya que si $\langle n|$ aumentara o disminuyera se violaria el Teorema 3. Esto significa geomètricamente que la regiòn en la que el insumo se mantiene constante, que es un hiperplano definido por $da_k = 0$ o bien $dl = 0$, no puede intersectar a las regiones de $\langle n|$ creciente o $\langle n|$ decreciente, sino que debe estar situado en la zona de $\langle n|$ indefinido (ver Fig. 8).

Por el contrario, en los casos de los Teoremas 4 y 5 $\langle n|$ puede aumentar o disminuir sin que el insumo cambie. Esto significa que el hiperplano sobre el que el insumo es constante debe ahora intersectar a las regiones de $\langle n|$ creciente y $\langle n|$ decreciente (ver Figs. 10, 13 y 14).

Capitulo 7

PRODUCTIVIDAD FISICA Y EFICIENCIA.

Con objeto de ampliar nuestro estudio sobre el comportamiento eficiente o ineficiente de los insumos de un sistema económico, introduciremos a continuación el concepto de productividad física de un insumo.

Definiremos la productividad física de un insumo en un estado dado $\langle y|$ como el producto neto obtenido por unidad de ese insumo en el estado considerado:

$$\frac{\langle n|}{a_k} = \frac{\langle y|N}{\langle y|A_k\rangle} \tag{73}$$

en el caso del medio de producción k, y

$$\frac{\langle n|}{l} = \frac{\langle y|N}{\langle y|L\rangle} \tag{74}$$

en el caso del trabajo.

Observemos que, en virtud de las definiciones (73) y (74), el vector de productividad física de un insumo es el mismo sobre estados cuyos vectores de estado sean proporcionales. Geométricamente ésto significa, en el espacio de niveles de actividad, que la productividad física es la misma sobre el rayo definido por la dirección de cada vector $\langle y|$, èsto es, sobre todos los vectores de la forma $\langle y'| = x\langle y|$, siendo x un nùmero positivo.

Como veremos a continuaciòn, una consecuencia importante de los teoremas ùltimos es que, en la situaciòn correspondiente al Teorema 3, la productividad fìsica del insumo considerado, en un estado dado $\langle y|$, no puede ser aumentada o disminuida al pasar a otro estado cualquiera $\langle y'|$. Por el contrario, en los casos cubiertos por los Teoremas 4 y 5 existen estados para los cuales es posible aumentar (o disminuir) la productividad fìsica del insumo al que se apliquen esos teoremas.

Las consideraciones anteriores quedan expresadas en el siguiente teorema[11]:

<u>Teorema 6</u>: El vector generador de un insumo contiene componentes no positivas si y sòlo si es posible encontrar dos estados P y Q para los cuales la productividad fìsica de ese insumo en uno de ellos (digamos el Q) es mayor que en el otro:

$$\frac{\langle n_Q|}{a_{kQ}} \geq \frac{\langle n_P|}{a_{kP}} \qquad (75)$$

o bien:

---

(11) Stamatis introduce una parte de la idea de este teorema para el caso del insumo trabajo, en un ejemplo particular con m = 2. Stamatis, G.: "On Negative Labor Values", <u>REVIEW OF RADICAL POLITICAL ECONOMICS</u>, 1983.

$$\frac{\langle n_Q|}{l_Q} \geq \frac{\langle n_P|}{l_P} \qquad (76)$$

Para demostrarlo, vemos que según los Teoremas 4 y 5 $|A^*_k\rangle$ o $|L^*\rangle$ tienen al menos una componente no positiva si y sólo si podemos tener $d\langle n| = \langle n_Q| - \langle n_P| \geq \langle 0|$ con $da_k = a_{kQ} - a_{kP} \leq 0$ o bien dl $l_Q - l_P \leq 0$, es decir, $\langle n_Q| \geq \langle n_P|$ con $a_{kQ} \leq a_{kP}$ o bien $l_Q \leq l_P$. De aqui:

$$a_{kP}\langle n_Q| \geq a_{kQ}\langle n_Q| \geq a_{kQ}\langle n_P| \qquad (77)$$

o bien:

$$l_P\langle n_Q| \geq l_Q\langle n_Q| \geq l_Q\langle n_P| \qquad (78)$$

de donde se concluyen (75) o (76), respectivamente.

Asi pues, cuando el vector generador de un insumo es positivo, èsto es, cuando ese insumo se comporta productivamente, cada estado lo utiliza eficientemente, en el sentido de que su productividad fisica no puede ser incrementada (ni disminuida) cambiando a otro estado. Sin embargo, si el vector generador del insumo contiene elementos negativos -lo cual significa que tiene comportamientos destructivos- entonces el sistema no empleará eficientemente a dicho insumo, ya que su productividad fisica podrá en general ser aumentada (o disminuida) pasando a otro estado. Cabe señalar que èsto tambièn ocurre cuando hay elementos iguales a cero en $|A^*_k\rangle$ o $|L^*\rangle$; sin embargo en este caso consideraremos que el insumo involucrado no se comporta destructivamente, ya que al ser igual a cero lo que sucede es que no interviene en la producción neta correspondiente.

En suma, diremos lo siguiente:

<u>Definición</u>: Un insumo es utilizado <u>eficientemente</u> por un sistema económico cuando no presenta comportamientos destructivos, ésto es, cuando su vector generador es semipositivo.

La presencia de insumos que se comporten destructivamente constituye una situación antieconómica, por lo que a los sistemas que contengan insumos de ese tipo los consideraremos ineficientes, en el sentido de los párrafos anteriores. Esta ineficiencia se refiere en realidad a la tecnología empleada por el sistema, que es la que define la forma de actuar de los insumos. En consecuencia, diremos que la tecnología de un sistema es <u>ineficiente</u> cuando la matriz A^* o el vector $|L^*\rangle$ tengan elementos negativos.

Capitulo 8

EJEMPLOS NUMERICOS ILUSTRATIVOS.

Veamos ahora algunos ejemplos numèricos sencillos que ilustren las principales situaciones antericres.

Ejemplo 1. Consideremos en primer tèrmino el sistema econòmico mostrado en la Tabla 1:

Tabla 1

Proceso	Bien 1	Bien 2	Trabajo		Bien 1	Bien 2
1)	3	3	3	-->	5	2
2)	3	3	12	-->	2	5

Con los datos de esta tabla, se obtiene que:

$$N = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad N^{-1} = 1/3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (79)$$

Obsèrvese que se satisface la condiciòn tradicional de productividad (1).

El producto neto $\langle n|$ alcanzable por el sistema resulta de la aplicaciòn de la condiciòn de factibilidad (31):

$$\langle y| = \langle n|N^{-1} =$$

$$= |n_1 \quad n_2| \; 1/3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1/3 \; |2n_1 + n_2 \qquad n_1 + 2n_2| \geqq$$

$$\geqq |0 \quad 0| \tag{80}$$

que da lugar a las desigualdades simultàneas:

$$\begin{aligned} n_2 &\geq -2n_1 \\ n_2 &\geq -1/2 \; n_1 \end{aligned} \tag{81}$$

La Fig. 7 muestra la regiòn de producto neto alcanzable, que satisface (81).

Como N^{-1} no contiene elementos negativos, todos los in-

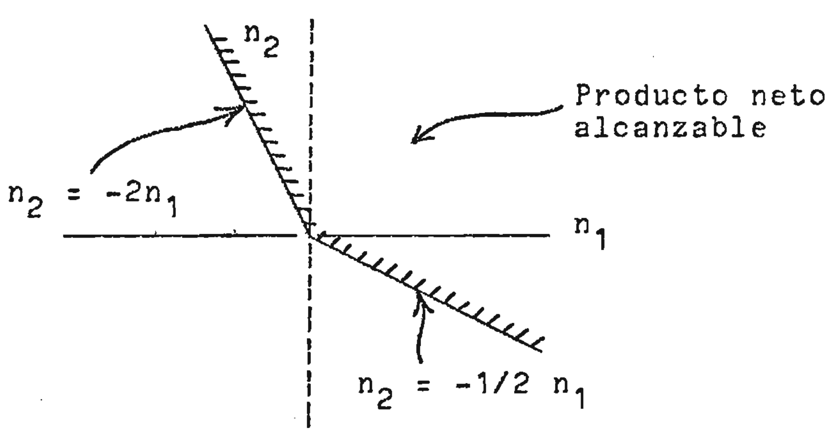

Figura 7. Producto neto alcanzable por el sistema del Ejemplo 1.

sumos (medios de producciòn y trabajo) se comportaràn productivamente, lo que puede verificarse fàcilmente calculando $A^* = N^{-1}A$ y $|L^*\rangle = N^{-1}|L\rangle$, dados por:

$$A^* = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \qquad |L^*\rangle = \begin{vmatrix} 6 \\ 9 \end{vmatrix} \tag{82}$$

Estas matrices representan los medios de producciòn y el trabajo utilizados en el sistema de producciòn neta simple, tal como se vio en el Capìtulo 5 (ecs. (35') y (36')).

Si suponemos que estamos operando el sistema al nivel unidad de actividad $\langle y_o| = \langle e|$ y deseamos incrementar el producto neto $\langle no| = \langle y_o|N$ a $\langle n| = \langle no| + d\langle n|$, tendremos que pasar de $\langle y_o|$ a $\langle y| = \langle y_o| + d\langle y|$. La relaciòn entre $d\langle n| \geq \langle 0|$ y $d\langle y|$ serà, de acuerdo con (10):

$$d\langle n| = d\langle y|N =$$

$$= |dy_1 \quad dy_2| \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= |2dy_1 - dy_2 \quad -dy_1 + 2dy_2| \geq$$

$$\geq |0 \quad 0| \tag{83}$$

con lo que deben satisfacerse simultàneamente:

$$\begin{aligned} dy_2 &\leq 2dy_1 \\ dy_2 &\geq 1/2\ dy_1 \end{aligned} \tag{84}$$

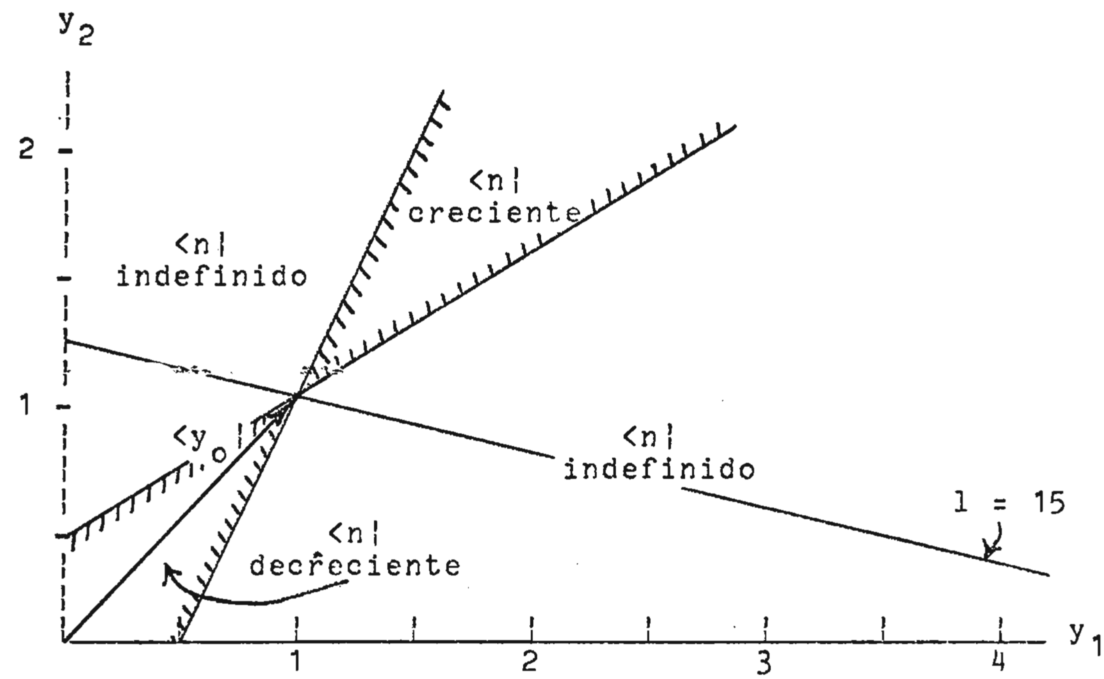

Figura 8. Comportamiento de <n| al variar d<y| a partir del estado inicial $\langle y_o|$ = <e| en el Ejemplo 1. Se muestra además la recta l = 15.

La región definida por estas desigualdades se muestra en la Fig. 8. Si a partir del estado inicial $\langle y_o| = \langle e|$ deseamos que <n| crezca, deberemos movernos de $\langle y_o|$ a cualquier estado <y| que se encuentre en la zona de <n| creciente. Puede verificarse que si pasamos a un punto de la zona de <n| decreciente <n| disminuirá, en tanto que si vamos a cualquier otro punto, una componente de <n| crecerá y la otra decrecerá, es decir, <n| tendrá un comportamiento indefinido.

Estudiemos ahora, por ejemplo, el comportamiento del insumo trabajo. El valor del trabajo total del sistema en el estado inicial $\langle y_o|$ es igual a 3 + 12 = 15, según la Tabla

1. Si nos movemos de $\langle y_o |$ de tal manera que l no cambie de este valor, deberemos tener dl = 0, lo que puede escribirse, de acuerdo con (8), en la forma:

$$dl = d\langle y | L\rangle =$$

$$= |dy_1 \quad dy_2| \begin{vmatrix} 3 \\ 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 3dy_1 + 12dy_2 = 0 \qquad (85)$$

La relación (85) representa una linea recta de pendiente $dy_2/dy_1 = -1/4$, y para que corresponda a l = 15 su ordenada al origen deberá ser l/12 = 5/4. Esta recta separa al cuadrante positivo en dos partes: la superior, en la que l > 15, y la inferior, en la que l < 15 (ver Fig. 8).

Vemos así gráficamente que si queremos incrementar $\langle n|$ a partir de $\langle y_o |$ entonces l debe aumentar necesariamente, ya que tendremos que pasar a puntos de la zona de $\langle n|$ creciente, por encima de la recta l = 15. Podemos ver igualmente que si deseamos que $\langle n|$ disminuya, entonces deberemos pasar a la zona de $\langle n|$ decreciente, por debajo de la recta l = 15.

En esta forma hemos ilustrado el comportamiento productivo al que corresponde el Teorema 3, ya que en este ejemplo $|L^*\rangle > |0\rangle$ y un aumento (disminución) de $\langle n|$ implica asimismo un aumento (disminución) de l.

Estudiemos ahora la productividad física del insumo trabajo.

Para ello, sean $\langle n_o|$ y l_o el producto neto y el trabajo total, respectivamente, en el estado inicial $\langle y_o|$. Puede verse que la productividad física del trabajo en el estado $\langle y_o|$ es, de acuerdo con los datos de la Tabla 1:

$$\frac{\langle n_o|}{l_o} = 1/15 \; |1 \quad 1| \tag{86}$$

y representa el producto neto por unidad de trabajo en el estado inicial $\langle y_o|$.

Si ahora nos movemos a partir de $\langle y_o|$ sobre la recta $l = 15$, en la Fig. 8 vemos que nos desplazaremos sobre las zonas de $\langle n|$ indefinido, de manera que sobre los puntos de esta recta la productividad física del trabajo, que es el cociente $\langle n|/l$, tiene un comportamiento indefinido. Pero, según vimos en el Capítulo 7, la productividad física es constante sobre cualquier rayo que parta del origen, de lo cual resulta que todo rayo que salga del origen cortará a la recta $l = 15$ en un punto que definirá la productividad física del trabajo para ese rayo; es decir, los diferentes rayos tendrán la productividad del punto donde corten a la recta $l = 15$. Pero como esta productividad tiene un comportamiento indefinido sobre dicha recta, resulta que la productividad física del trabajo sobre los diferentes rayos del primer cuadrante y_1y_2 tendrá a su vez ese mismo comportamiento indefinido.

A manera de ilustración veamos, por ejemplo, lo que sucede sobre los semiejes positivos y_1 y y_2.

Para estados sobre el semieje y_1, puede verificarse con ayuda de (79) que $\langle n| = \langle y|N = |2y_1 \quad -y_1|$ y $l = \langle y|L\rangle = 3y_1$, por lo que:

$$\frac{\langle n|}{l} = 1/3 \; |2 \quad -1| \tag{87}$$

Nótese que en esta productividad la primera componente es mayor que la primera componente de (86), en tanto que la segunda componente es menor que la de (86). Por esta razón, no puede afirmarse que la productividad física del trabajo haya aumentado o disminuido con relación a la del estado $\langle y_o|$; su comportamiento es indefinido.

Similarmente, sobre el semieje y_2 se obtienen $\langle n| = |-1 \quad 2|$ y $l = 12$, de modo que:

$$\frac{\langle n|}{l} = 1/12 \; |-1 \quad 2| \tag{88}$$

Aquí, respecto de (86) la primera componente del vector de productividad disminuyó, mientras que la segunda aumentó. De nuevo, no puede decirse que la productividad física del trabajo haya crecido o decrecido, sino que tuvo un comportamiento indefinido.

Estos resultados ilustran el Teorema 6: al ser positivo el vector generador $|L^*\rangle$ (ec. (82)), no es posible aumentar o disminuir la productividad física del trabajo.

Ejemplo 2. Veamos ahora el sistema econòmico mostrado en la Tabla 2.

Tabla 2

Proceso	Bien 1	Bien 2	Trabajo		Bien 1	Bien 2
1)	2	2	3	-->	5	1
2)	2	2	0	-->	2	4

Obsèrvese que el proceso 2 no utiliza trabajo directo, por lo que puede verse como un proceso totalmente automatizado.

Con los datos de la Tabla 2, obtenemos:

$$N = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad N^{-1} = 1/6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \tag{89}$$

viendo que la condiciòn (1) se satisface. Asimismo, el producto neto $\langle n|$ alcanzable por el sistema, dado por (31), cumple que $\langle y| = \langle n|N^{-1} \geqq \langle 0|$, lo que da lugar, con la matriz N^{-1} de (89), a la regiòn (ver Fig. 9):

$$\begin{aligned} n_1 &\geq 0 \\ n_2 &\geq -1/3\ n_1 \end{aligned} \tag{90}$$

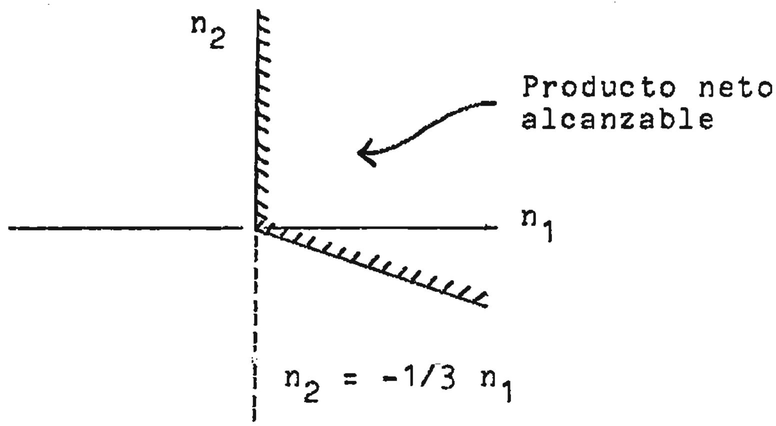

Figura 9. Producto neto alcanzable
por el sistema del Ejemplo 2.

Como no aparecen elementos negativos en N^{-1}, no habrá comportamiento destructivo en los insumos. Puede verificarse que las matrices de insumos del sistema de producción neta simple están dadas por:

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad |L^*\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (91)$$

Notamos por el elemento 0 de $|L^*\rangle$ que el bien 2 no requiere de trabajo para su producción neta, por lo que puede considerarse como un bien de la naturaleza.

Si nuevamente operamos el sistema a partir del nivel unidad de actividad $\langle y_o| = \langle e|$, para obtener el incremento $d\langle n| \geq \langle 0|$ tendremos, con la matriz N de (89):

$$d\langle n| = d\langle y|N =$$

$$= 1/6\ |2dy_1 \qquad dy_1 + 3dy_2| \geq$$

$$\geq |0 \quad 0| \qquad (92)$$

que conduce a las desigualdades simultáneas:

$$dy_1 \geq 0$$
$$dy_2 \geq dy_1 \qquad (93)$$

La gráfica de la región de <n| creciente, definida por (93), aparece en la Fig. 10.

Puesto que A* > 0, los medios de producción se comportan productivamente, como ya se indicó. Sin embargo, |L*> contiene una componente igual a cero, por lo que resulta de interés ver gráficamente qué sucede en este caso.

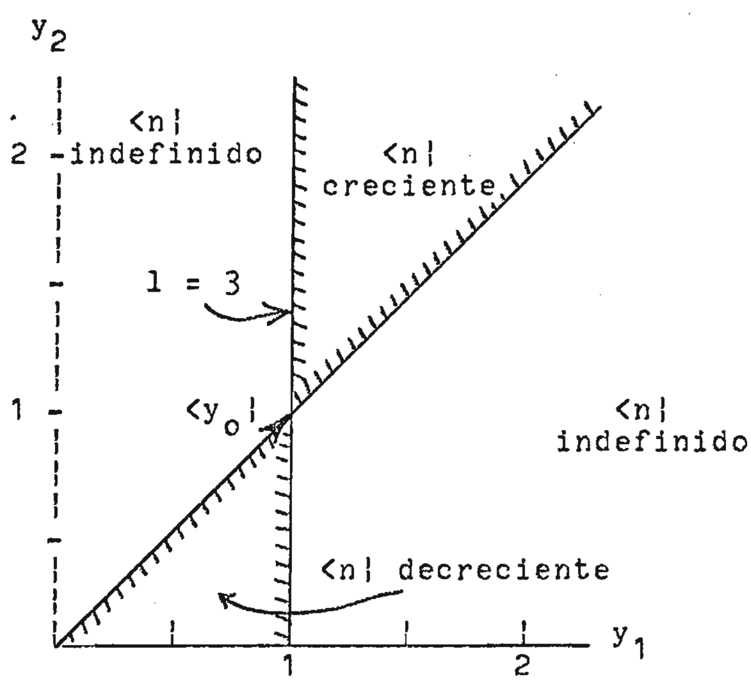

Figura 10. Comportamiento de <n| al variar d<y| a partir del estado inicial <y_o| = <e| en el Ejemplo 2. Se muestra además la recta l = 3.

El trabajo total del sistema en el estado $\langle y_o | = \langle e |$, conforme a la Tabla 2, es ahora igual a 3. La recta de trabajo constante $l = 3$ cumple la condición:

$$dl = d\langle y | L\rangle = 3dy_1 = 0 \qquad (94)$$

resultando tener una pendiente infinita y una abscisa al origen $l/3 = 1$. En esta forma, en la Fig. 10 los puntos situados a la derecha de la recta corresponden a $l > 3$, mientras que los que se encuentran a la izquierda tienen $l < 3$.

Puede verse así que si se quiere incrementar $\langle n|$ a partir del estado $\langle y_o|$ entonces $l \geq 3$. En particular, puede observarse que es posible aumentar $\langle n|$ manteniendo el trabajo constante en $l = 3$; ello ocurre cuando el estado final se sitúa sobre la recta $l = 3$ y por encima del punto $\langle y_o|$. Asimismo, vemos por el mismo argumento que $\langle n|$ puede disminuir con l constante cuando el estado final cae en la recta $l = 3$ pero abajo de $\langle y_o|$.

La situación estudiada aquí ilustra el contenido del Teorema 4, ya que en este ejemplo el vector $|L^{\#}\rangle$ es semipositivo, y acabamos de ver que un aumento (disminución) de $\langle n|$ sólo puede lograrse a condición de que l no disminuya (no aumente).

La productividad física del insumo trabajo en el estado inicial $\langle y_o| = \langle e|$ resulta ser, en este ejemplo:

$$\frac{\langle n_o|}{l_o} = |1 \quad 1/3| \qquad (95)$$

Como es seguro que la productividad de un insumo se incrementa si nos movemos a estados en los que $\langle n|$ aumenta al tiempo que el insumo se mantiene constante, de la Fig. 10 vemos que la productividad del trabajo crecerá si de $\langle y_0|$ pasamos a puntos situados en la región de $\langle n|$ creciente y que se encuentren sobre la recta $l = 3$. Pero como la productividad física es constante sobre cualquier rayo que parta del origen, resulta entonces que sobre todos los rayos que, partiendo del origen pasan por arriba de $\langle y_0|$ y por consiguiente por la zona de $\langle n|$ creciente con l constante, la productividad física del trabajo será mayor que en $\langle y_0|$. En esta forma, si a partir de $\langle y_0|$ nos movemos hacia arriba, dicha productividad aumentará hasta que, llegando como límite al semieje positivo y_2, se vuelva infinita, ya que en este semieje l vale cero, según puede verse en la Tabla 2. (Sin embargo, el que un insumo valga cero en un proceso no implica que su vector de productividad física aumente indefinidamente cuando en el sistema se opera únicamente ese proceso; puede ocurrir que algunas componentes tiendan a $+\infty$ y otras a $-\infty$)

Siguiendo los mismos argumentos, podemos ver que la productividad física del trabajo disminuye conforme los rayos se acercan al semieje positivo y_1, puesto que entonces pasan por la recta donde $\langle n|$ es decreciente y l constante. El valor mínimo de esta productividad se obtiene sobre el semieje y_1, y resulta ser:

$$\frac{\langle n|}{1} = |1/9 \quad 1/18| \tag{96}$$

Vemos así que la productividad física del trabajo es máxima sobre el eje y_2, cuando el sistema se opera únicamente con el proceso 2; y que es mínima sobre el eje y_1, asociado a la operación del sistema sólo con el proceso 1. En otras palabras, <u>desde el punto de vista de la utilización del trabajo</u>, el proceso 1 es ineficiente comparado con el proceso 2. Tal situación resulta evidente si uno analiza la Tabla 2, en donde ve que cualquier producto neto deseado $\langle n|$ puede obtenerse usando sólo el proceso 2 (si un $\langle n|$ dado no puede producirse exactamente, entonces puede producirse un producto $\langle n'| \geq \langle n|$ y desecharse el sobrante) <u>sin</u> la utilización de trabajo.

Ejemplo 3. Estudiemos a continuación el sistema económico de la Tabla 3.

<u>Tabla 3</u>

Proceso	Bien 1	Bien 2	Trabajo		Bien 1	Bien 2
1)	3	3	5	-->	4	5
2)	5	5	9	-->	6	9

Aquí:

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad N^{-1} = 1/2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (97)$$

Se cumple la condición (1). De la relación (31) $\langle y| = \langle n|N^{-1} \geqq \langle 0|$ resulta que el producto neto obtenible está dado por:

$$\begin{aligned} n_2 &\leq 4n_1 \\ n_2 &\geq 2n_1 \end{aligned} \qquad (98)$$

cuya gráfica aparece en la Fig. 11.

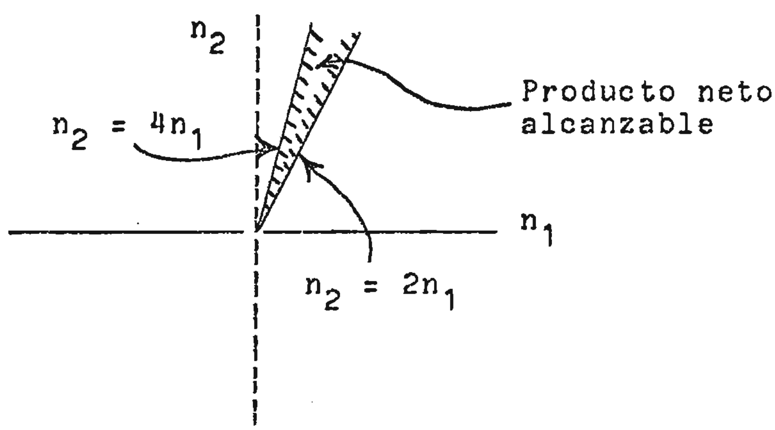

Figura 11. Producto neto alcanzable por el sistema del Ejemplo 3.

Como N^{-1} contiene elementos negativos, se abre la posibilidad de comportamientos destructivos. Sin embargo, como puede verificarse, la matriz A* y el vector |L*> resultan ahora:

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad |L^*\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \tag{99}$$

y al no tener estas matrices elementos negativos el sistema se comportarà productivamente, por lo que su anàlisis resulta anàlogo al del Ejemplo 1 y ya no se repetirà aquì.

El interès de este ejemplo radica en que permite ver que, como los renglones de N^{-1} son los vectores de estado $\langle y_j|$ para pasar a la forma de producciòn neta simple, al contener elementos negativos tal paso no es posible; en consecuencia, tenemos un sistema de producciòn conjunta autèntica. Pero como aquì A^* y $|L^*\rangle$ no tienen elementos negativos, el sistema resulta tener comportamiento productivo en sus insumos. Asì pues, este ejemplo muestra un caso de producciòn conjunta autèntica con comportamiento productivo.

Ejemplo 4. Estudiemos ahora el sistema econòmico de la Tabla 4[12]:

Tabla 4

Proceso	Bien 1	Bien 2	Trabajo		Bien 1	Bien 2
1)	5	0	1	-->	6	1
2)	0	10	1	-->	3	12

(12) Steedman, op. cit., Cap. 11.

para el que obtenemos:

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \qquad N^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \tag{100}$$

Nuevamente se cumple la condición tradicional de productividad (1). El producto neto obtenible, dado por la relación (31), está ahora constituido por la región:

$$\begin{aligned} n_2 &\geq 2/3\ n_1 \\ n_2 &\leq n_1 \end{aligned} \tag{101}$$

que se muestra en la Fig. 12.

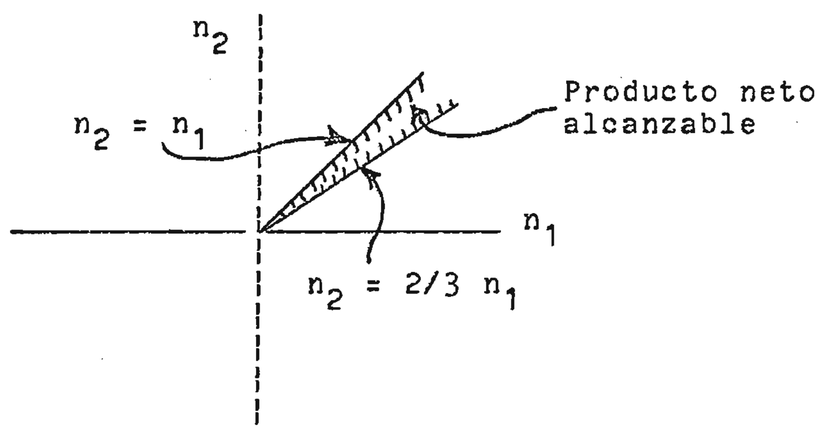

Figura 12. Producto neto alcanzable
por el sistema del Ejemplo 4.

Vemos que aparecen elementos negativos en N^{-1}, lo cual puede dar lugar a comportamientos destructivos en los insumos. Para ver si èsto ocurre debemos acudir a las matrices de insumos A* y |L*>, que resultan ser:

$$A^* = \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 15 & -10 \end{vmatrix}, \qquad |L^*\rangle = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \qquad (102)$$

y debido a los elementos negativos que contienen, muestran la existencia de comportamiento destructivo en los tres insumos: el bien 1, el bien 2 y el trabajo.

Notamos asì, con base en lo expuesto en los Capìtulos 5 y 6, que la producciòn de una unidad neta adicional del bien 1 requiere de una disminuciòn de 10 unidades en el insumo 1 y de un aumento de 10 unidades en el insumo 2 como medios de producciòn del sistema, en tanto que el trabajo total debe reducirse en 1 unidad. Alternativamente, siguìendo la interpretaciòn de (61) y (62), podemos decir que la reducciòn de la producciòn en una unidad neta del bien 1 requiere que en los medios de producciòn el bien 1 aumente en 10 unidades y el bien 2 disminuya en 10 unidades, y que el trabajo total aumente en 1 unidad. Por tanto, el bien 1 y el trabajo son insumos que actùan destructivamente en la producciòn del bien 1, y sòlo el bien 2 se comporta productivamente. Igualmente, podemos ver que el bien 1 y el trabajo actùan productivamente y el bien 2 destructivamente en la producciòn neta del bien 2.

Para fines de comparaciòn con los ejemplos anteriores, operaremos nuevamente el sistema al nivel unidad de actividad $\langle y_o| = \langle e|$, y a partir este estado incrementaremos al producto neto en $d\langle n| \geq \langle 0|$. Para ello, deberá satisfacerse la condición:

$$d\langle n| = d\langle y|N =$$

$$= |dy_1 + 3dy_2 \quad dy_1 + 2dy_2| \geq$$

$$\geq |0 \quad 0| \tag{103}$$

que equivale al sistema:

$$dy_2 \geq -1/3\ dy_1$$
$$dy_2 \geq -1/2\ dy_1 \tag{104}$$

La gráfica de las regiones correspondientes se muestra en las Figs. 13 y 14.

Estudiaremos ahora el comportamiento de los insumos, escogiendo para ello a uno de los bienes, por ejemplo el 2, así como al trabajo.

Empecemos con el análisis del insumo 2. La cantidad total a_2 de este bien como insumo en el estado $\langle y_o| = \langle e|$ es igual a $0 + 10 = 10$, según vemos en la Tabla 4. El lugar geométrico de los puntos para los que a_2 se mantiene constante en el valor $a_2 = 10$ debe satisfacer, de acuerdo con (71), (10) y (35), la condición de que:

$$da_2 = d\langle n|A^*_2\rangle = (d\langle y|N)(N^{-1}|A_2\rangle) =$$

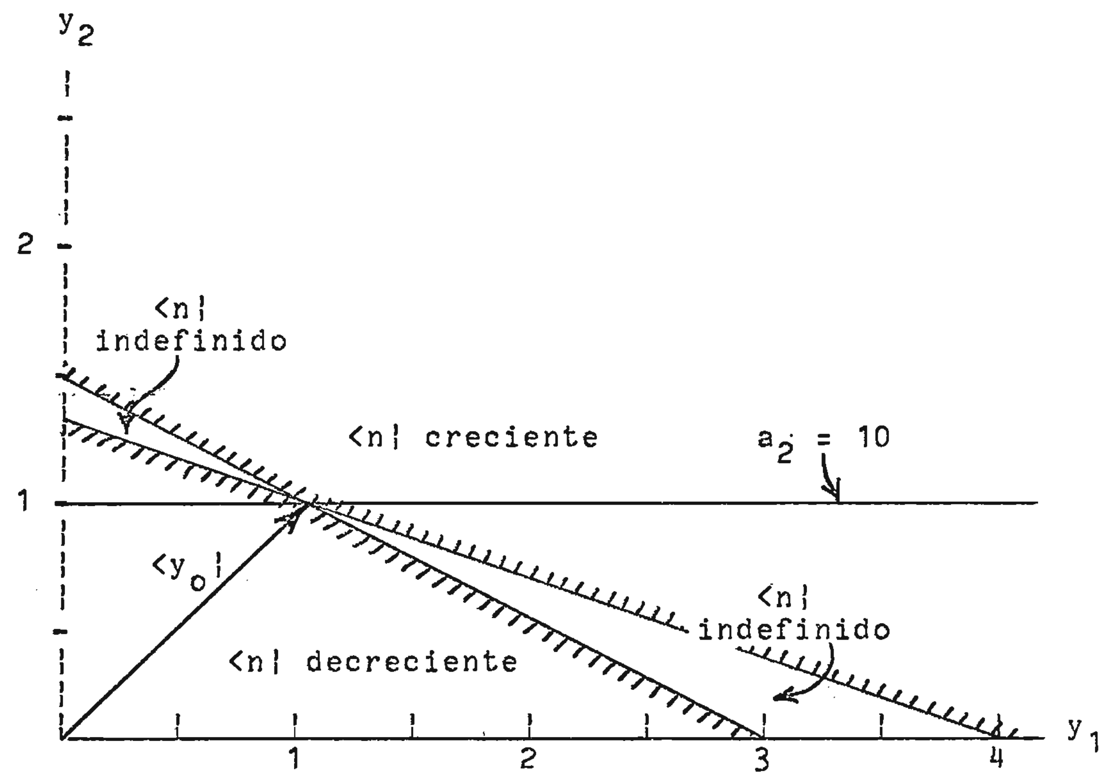

Figura 13. Comportamiento de ⟨n¦ al variar d⟨y¦ a partir del estado inicial ⟨y_o¦ = ⟨e¦ en el Ejemplo 4. Se muestra además la recta $a_2 = 10$.

$$= d\langle y|A_2\rangle =$$

$$= |dy_1 \quad dy_2| \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 10dy_2 = 0 \tag{105}$$

y resulta ser la recta $y_2 = 1$. Vemos así que al incrementar ⟨n¦ a partir de ⟨y_o¦ entonces a_2 puede aumentar, disminuir o permanecer constante según que el nuevo estado quede arriba, abajo o sobre la línea $a_2 = 10$. Similarmente, ⟨n¦ puede disminuir con a_2 mayor, menor o igual a 10 conforme a que el nuevo estado se localice arriba, abajo o sobre la recta mencionada.

Sean nuevamente $\langle n_o|$ y a_{2o} el producto neto y la cantidad total del insumo 2, respectivamente, en el estado inicial $\langle y_o|$. La productividad fisica del insumo 2 en este estado es entonces, de acuerdo con los datos de la Tabla 4:

$$\frac{\langle n_o|}{a_{2o}} = 1/10 \;|4 \quad 3| \tag{106}$$

y representa el producto neto por unidad de insumo 2 en el estado $\langle y_o|$.

Como la productividad de un insumo se incrementa si nos movemos a estados en los que $\langle n|$ aumenta al tiempo que el insumo permanece constante, en la Fig. 13 observamos que la productividad del insumo 2 crecerá si, partiendo de $\langle y_o|$, pasamos a puntos sobre la recta $a_2 = 10$ ubicados en la zona de $\langle n|$ creciente. Mas aún: puesto que la productividad fisica de un insumo es constante sobre cualquier rayo que parta del origen, vemos que sobre todos los rayos que se encuentren a la derecha de $\langle y_o|$ y que, en consecuencia, corten a la recta $a_2 = 10$ en la zona de $\langle n|$ creciente, la productividad fisica del insumo 2 será mayor que en $\langle y_o|$. En esta forma, notamos que dicha productividad aumenta hasta volverse infinita en los puntos sobre el eje y_1, debido a que en este eje y_2 vale cero y por tanto, de acuerdo con la Tabla 4, a_2 también se hace cero. (Aqui repetiremos que el hecho de que un insumo valga cero en un proceso no implica que su productividad física aumente indefinidamente como vector cuando se opera únicamente ese proceso, ya que algunas componentes pueden tender a +oo y otras a -oo)

De manera similar, puede verse que la productividad física del insumo 2 disminuye cuando, apartiir de $\langle y_o|$, pasamos a puntos situados sobre rayos que se encuentren a la izquierda de $\langle y_o|$. En particular, puede verificarse que para puntos sobre el eje y_2 la productividad del insumo 2 es mínima, y resulta:

$$\frac{\langle n_P|}{a_{2P}} = |3y_2 \quad 3y_2|/10y_2 =$$

$$= 1/10\ |3 \quad 2| \qquad (107)$$

que es menor que en (106). Por todo èsto, podemos decir que en los puntos del semieje y_1 el insumo 2 se comporta con la eficiencia màxima, en tanto que sobre el semieje y_2 su eficiencia es mínima. En otras palabras, estos resultados nos muestran que <u>respecto al insumo 2</u> el proceso 2 (eje y_2) opera ineficientemente comparado con el proceso 1 (eje y_1), siendo preferible por tanto operar sòlo con este último. Tal situaciòn aparece explícita si uno analiza la Tabla 4, en donde observa que para obtener cualquier producto neto deseado $\langle n|$ basta con operar el proceso 1 (si $\langle n|$ no puede producirse exactamente, entonces puede producirse un producto $\langle n'| \geq \langle n|$ y desecharse el sobrante), sin la participación del insumo 2.

Pasaremos ahora al análisis del insumo trabajo. El trabajo total l en el estado $\langle y_o| = \langle e|$ es igual a 2, conforme a la Tabla 4. La recta de trabajo constante $l = 2$ satisface la condición:

$$dl = d\langle y|L\rangle =$$

$$= dy_1 + dy_2 = 0 \qquad (108)$$

y resulta tener la ecuación $y_2 = -y_1 + 2$ (ver Fig. 14). Los puntos situados arriba de ella tienen $l > 2$, y los que se encuentran debajo corresponden a $l < 2$.

Vemos entonces que si se quiere incrementar $\langle n|$ a partir de $\langle y_o|$, entonces el trabajo l aumentará, disminuirá o permanecerá constante según que el estado al que se vaya esté arriba, abajo o sobre la recta $l = 2$. Asimismo, $\langle n|$ puede disminuir con l mayor, menor o igual a 2 de acuerdo a que el nuevo estado quede situado arriba, abajo o sobre la recta $l = 2$.

Si de nuevo $\langle n_o|$ y l_o son, respectivamente, el producto neto y el trabajo total en el estado inicial $\langle y_o|$, entonces el vector de productividad física del trabajo en este estado será, conforme a los datos de la Tabla 4:

$$\frac{\langle n_o|}{l_o} = |2 \quad 3/2| \qquad (109)$$

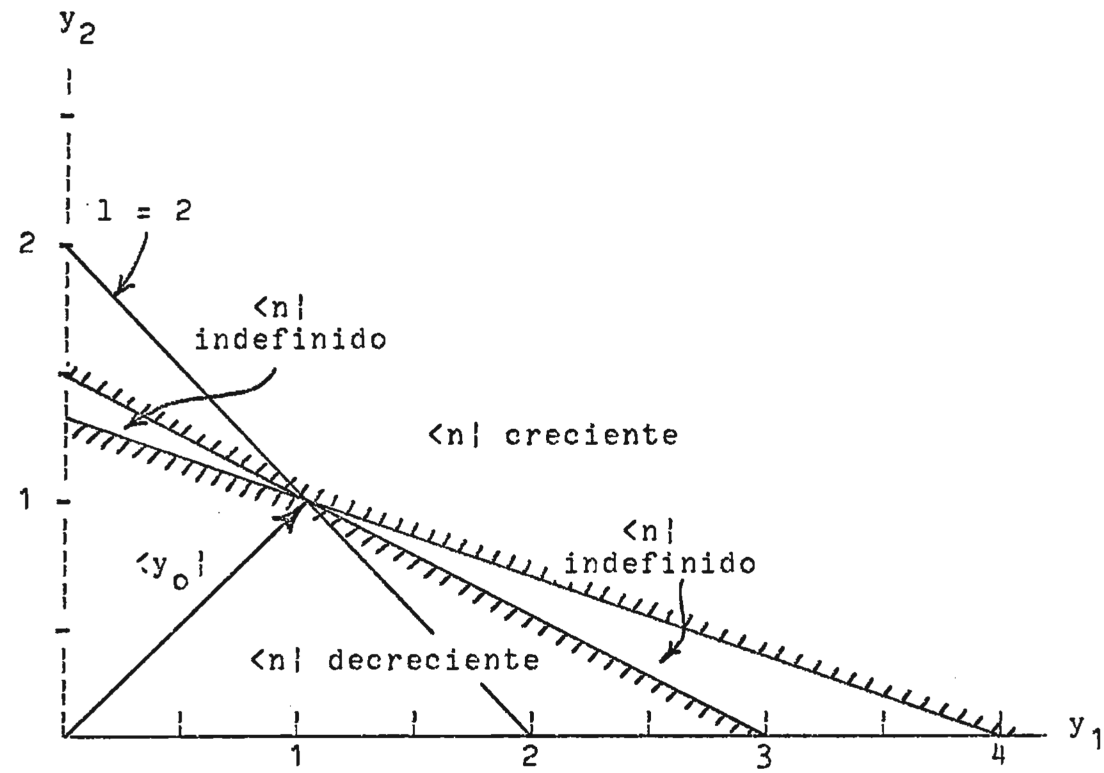

Figura 14. Comportamiento de <n¦ al variar d<y¦ a partir del estado inicial $\langle y_o ¦ = \langle e ¦$ en el Ejemplo 4. Se muestra además la recta l = 2.

y representa el producto neto por unidad de trabajo en el estado inicial $\langle y_o ¦$.

Si ahora nos movemos a partir de $\langle y_o ¦$ de manera que <n¦ crezca en tanto que l se mantiene constante, entonces tenemos la seguridad de que la productividad física del trabajo aumentará. En la Fig. 14 vemos que ésto ocurre si de $\langle y_o ¦$ pasamos a puntos de la recta l = 2 situados en la zona de <n¦ creciente, a la izquierda de $\langle y_o ¦$. Como la productividad física del trabajo es constante sobre cada rayo que parta del origen, tendremos entonces que en todos los rayos que se

encuentren a la izquierda de $\langle y_0|$ y que, por tanto, corten a la recta de l constante en la región de $\langle n|$ creciente, la productividad fisica del trabajo será mayor que en $\langle y_0|$. Como este mismo argumento puede aplicarse no sólo al estado inicial $\langle y_0| = \langle e|$, sino a cualquier otro estado inicial, no importa qué tan cercano se encuentre del rayo formado por el semieje positivo y_2, concluimos que el rayo de máxima productividad fisica del trabajo es precisamente el semieje y_2, sobre el que dicha productividad resulta ser:

$$\frac{\langle n|}{l} = |3 \quad 2| \tag{110}$$

y que es mayor que la de (109).

Siguiendo los mismos argumentos, podemos ver que la productividad fisica del trabajo disminuye conforme los rayos se acercan al semieje positivo y_1, y que en este último resulta ser:

$$\frac{\langle n|}{l} = |1 \quad 1| \tag{111}$$

Vemos asi que la productividad fisica del trabajo es máxima sobre el eje y_2, lo que corresponde a operar el sistema únicamente con el proceso 2; y que es minima sobre el eje y_1, asociado a la operación del sistema sólo con el proceso 1. En otras palabras, *desde el punto de vista de la utilización del trabajo* el proceso 1 es ineficiente comparado con el proceso 2. Esta conclusión resulta evidente si uno observa la Tabla 4 y la matriz N correspondiente en

(100), en donde puede ver que aun cuando ambos procesos emplean la misma cantidad de trabajo (1 unidad), el proceso 1 genera el vector de producto neto |1 1|, menor que el del proceso 2, |3 2|.

Por último, comparando el análisis del comportamiento del insumo 2 con el del trabajo vemos que en el caso del insumo 2 el proceso eficiente fue el 1, mientras que para el trabajo el proceso eficiente resultó ser el 2 (puede verificarse que con el insumo 1 el proceso eficiente es el 2). Así pues, no puede decirse en este ejemplo que exista un solo proceso eficiente, pues eso depende del insumo analizado. En todo caso, como ya hemos señalado anteriormente, la ineficiencia es atribuible a la tecnología empleada, que es la que define el comportamiento de los diferentes insumos utilizados por el sistema.

Ejemplo 5. En el ejemplo anterior estudiamos un sistema que presentaba comportamiento destructivo en sus insumos, lo cual constituía una utilización ineficiente de ellos. En el caso del trabajo, por ejemplo, ya desde la presentación de los datos en la Tabla 4 podía notarse que el proceso 2 era ineficiente con respecto al proceso 1, puesto que utilizando la misma cantidad de trabajo producía un vector de producto neto menor que el del proceso 2. Esto iría de conformidad con el Teorema 6, que señala que cuando hay elementos no positivos en $|L^{*}\rangle$ entonces existen estados en los que la productividad física del trabajo es mayor, como es el caso del proceso 2 en relación al 1.

Sin embargo, no siempre es posible detectar la ineficiencia de un insumo por la simple inspección de su productividad física en los procesos originales del sistema. El ejemplo de la Tabla 5 ilustrará esta situación:

Tabla 5

Proceso	Bien 1	Bien 2	Bien 3	Trabajo		Bien 1	Bien 2	Bien 3
1)	2	0	0	10	-->	0	10	10
2)	9	5	0	10	-->	10	0	0
3)	15	0	5	25	-->	25	0	0

de donde resulta:

$$N = \begin{vmatrix} -2 & 10 & 10 \\ 1 & -5 & 0 \\ 10 & 0 & -5 \end{vmatrix} \qquad (112)$$

cumpliéndose la condición de productividad (1).

Como puede apreciarse, aquí ningún proceso es dominante ni dominado.

En particular, consideremos el caso del trabajo. Calculando $|L^*\rangle = N^{-1}|L\rangle$ obtenemos:

$$|\underline{L}^*\rangle = \begin{vmatrix} 4 \\ -6/5 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad (113)$$

apareciendo un elemento negativo en $|L^*\rangle$. En consecuencia, de acuerdo con el Teorema 6, deben existir estados para los que la productividad fìsica del trabajo sea mayor en uno de ellos que en el otro. Como èsto no se observa en los procesos originales de la Tabla 1, si se quiere observar este comportamiento debe ser necesario construir esos estados.

El procedimiento es sencillo, y se basa en la construcciòn de un estado-incremento $d\langle y|$ para el que el producto neto aumente al tiempo que el trabajo se reduce. Esto es factible dado que hay un elemento negativo en $|L^*\rangle$: en efecto, segùn la relaciòn (59), la producciòn de una unidad neta adicional del bien 2, $\langle e_2|$, requiere del incremento $L^*_2 = -6/5$ en el trabajo, que como es negativo representa en realidad una disminuciòn. Asì pues, podemos construir un estado-incremento $d\langle y|$ para el que:

$$\begin{aligned} d\langle n| &= \langle e_2| = |0 \quad 1 \quad 0|, \\ dl &= L^*_2 = -6/5 \end{aligned} \qquad (114)$$

de manera que:

$$d\langle y| = d\langle n|N^{-1} =$$

$$= |0 \quad 1 \quad 0| \; 1/100 \begin{vmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 1 & -18 & 2 \\ 10 & 20 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1/100 \; |1 \quad -18 \quad 2| \qquad (115)$$

Formemos entonces los estados $\langle y_P|$ y $\langle y_Q|$, con $\langle y_Q| = \langle y_P| + d\langle y|$, recordando la condición de factibilidad (6), que en nuestro caso será, conforme a (115):

$$\langle y_P| \geq -d\langle y| =$$

$$= 1/100 \; |-1 \quad 18 \quad -2| \qquad (116)$$

Como $\langle y_P|$ es completamente arbitrario salvo por la condición (116), podemos tomarlo, por ejemplo, como:

$$\langle y_P| = 1/100 \; |0 \quad 18 \quad 0| \qquad (117)$$

que cumple (116). Así:

$$\langle y_Q| = \langle y_P| + d\langle y| =$$

$$= 1/100 \; |1 \quad 0 \quad 2| \qquad (118)$$

Puede verificarse entonces que los estados P y Q, cuyos vectores de estado $\langle y_P|$ y $\langle y_Q|$ están dados por (117) y (118), dan lugar a los siguientes vectores de productividad física del trabajo:

$$\frac{\langle n_P|}{l_P} = \frac{\langle y_P|N}{\langle y_P|L\rangle} =$$

$$= |9/50 \quad -9/10 \quad 0|/(9/5) =$$

$$= |1/10 \quad -1/2 \quad 0| \qquad (119)$$

$$\frac{\langle n_Q|}{l_Q} = \frac{\langle y_Q|N}{\langle y_Q|L\rangle} =$$

$$= |9/50 \quad 1/10 \quad 0|/(3/5) =$$

$$= |3/10 \quad 1/6 \quad 0| \qquad (120)$$

Se observa que la productividad física del trabajo es mayor en el estado Q que en el P, por lo que la utilización del trabajo en este último estado resulta comparativamente ineficiente.

Finalmente, si sobre los rayos generados por $\langle y_P|$ y $\langle y_Q|$ tomamos dos estados $\langle y_{P'}|$ y $\langle y_{Q'}|$ tales que en ambos el trabajo total $l_{P'}$ y $l_{Q'}$ sea igual, digamos por ejemplo a 30, tendremos, de acuerdo con (3):

$$\begin{aligned} l_{P'} &= \langle y_{P'}|L\rangle = 30, \\ l_{Q'} &= \langle y_{Q'}|L\rangle = 30 \end{aligned} \qquad (121)$$

siendo:

$$\langle y_{P'}| = \frac{30\langle y_P|}{\langle y_P|L\rangle} =$$

$$= |0 \quad 3 \quad 0| \qquad (122)$$

$$\langle y_{Q'}| = \frac{10\langle y_Q|}{\langle y_Q|L\rangle} =$$

$$= |1/2 \quad 0 \quad 1| \qquad (123)$$

Con los vectores $\langle y_{P'}|$ y $\langle y_{Q'}|$ podemos calcular los medios de producción totales $\langle a_{P'}|$ y $\langle a_{Q'}|$, así como los productos brutos totales $\langle b_{P'}|$ y $\langle b_{Q'}|$, utilizando (2) y (4). Con ellos obtenemos los estados P' y Q', que pueden verse como "procesos compuestos" ($\langle a_{P'}|$, $l_{P'}$, $\langle b_{P'}|$) y ($\langle a_{Q'}|$, $l_{Q'}$, $\langle b_{Q'}|$), y que aparecen en la Tabla 6.

Tabla 6

Estado	Bien 1	Bien 2	Bien 3	Trabajo		Bien 1	Bien 2	Bien 3
P')	27	15	0	30	-->	30	0	0
Q')	16	0	5	30	-->	25	5	5

En esta Tabla puede apreciarse que el "proceso" Q' domina al "proceso" P', en el sentido de tener un producto neto mayor con la misma cantidad de trabajo $l_{P'} = l_{Q'} = 30$:

$$\begin{aligned} \langle n_{P'}| &= |3 \quad -15 \quad 0| \\ \langle n_{Q'}| &= |9 \quad 5 \quad 0| \end{aligned} \qquad (124)$$

Desde luego, las productividades físicas del trabajo son las mismas que en (119) y (120), ya que los estados se encuentran sobre los mismos rayos en el espacio de niveles de actividad.

El interés de este ejemplo consiste en ilustrar que aun cuando en el sistema original (Tabla 5) puede no aparecer ningún proceso dominado, ello no asegura que el sistema sea eficiente, como lo muestra aquí la presencia del elemento negativo de $|L^*\rangle$ en (113). Así, el trabajo se comporta ineficientemente, como vemos en (119) y (120), pudiendo encontrarse procesos dominados, si bien no en los procesos originales, sí en procesos compuestos como la pareja P' y Q' de la Tabla 6.

Capitulo 9

LA TEORIA DEL VALOR.

Hasta ahora hemos tratado en situaciòn de igualdad a los medios de producciòn y al trabajo, como insumos de un sistema econòmico. Sin embargo, si bien ambos tienen la misma importancia desde el punto de vista tècnico, no ocurre lo mismo desde la perspectiva de la Economia Politica. Para esta disciplina, debemos partir del hecho de que las actividades econòmicas se llevan a cabo entre personas e involucran la participaciòn de clases sociales; ello da a esas actividades un caràcter social y no meramente tècnico.

Asi, veamos lo que ocurre si consideremos que los sistemas econòmicos que hemos estudiado anteriormente se desarrollan dentro de un contexto especifico: el modo de producciòn capitalista.

Como se sabe, el objetivo de la producciòn en una economia capitalista es que los bienes producidos se transformen en mercancias para intercambiarse en el mercado. A su vez, la raiz del intercambio de mercancias se encuentra no en el simple hecho de que èstas sean objetos ùtiles que satisfacen determinadas necesidades, sino en que constituyen productos del trabajo humano. Es decir, lo que realmente se lleva a cabo en el mercado es el intercambio de mercancías consideradas como productos del trabajo humano.

Por lo anterior, resulta evidente que el trabajo desarrollado en la producción adquiere un carácter de primera importancia, pues es el que va a determinar y normar las relaciones existentes entre los diferentes agentes económicos. Surge así una distinción esencial, de naturaleza social y no técnica, entre el trabajo y los medios de producción. Estos últimos, vistos a su vez como mercancías adquiridas por los capitalistas para llevar a cabo los procesos productivos, representan también productos del trabajo humano, de manera que en última instancia el insumo fundamental es, como hemos dicho, el trabajo desempeñado por los productores.

Bajo esta concepción, la propiedad más importante de una mercancía es su valor, definido como la cantidad de trabajo socialmente necesario requerida para su producción. Es conocido que este trabajo puede obtenerse a partir de los datos técnicos de producción constituidos por las matrices $(A, |L\rangle, B)$ (suponiendo que dichas matrices representen asimismo las condiciones sociales de producción; es decir, que las mercancías producidas sean objetos socialmente útiles, y que los procesos reflejen las condiciones medias de producción empleadas por la sociedad).

En efecto: si $|V\rangle$ designa al vector de valores de las mercancias producidas por el sistema econòmico, entonces $A|V\rangle$ serà el valor de los medios de producciòn y $B|V\rangle$ el del producto bruto obtenido. Como la cantidad de trabajo contenida en el producto debe ser igual a la cantidad de trabajo presente en los medios de producciòn màs el trabajo $|L\rangle$ que se incorpora en el proceso productivo, debemos tener:

$$A|V\rangle + |L\rangle = B|V\rangle \qquad (125)$$

con lo que[13]:

$$|V\rangle = (B - A)^{-1}|L\rangle =$$

$$= N^{-1}|L\rangle \qquad (126)$$

Pero el miembro derecho de la ecuaciòn (126) es el vector $|L^*\rangle$ definido por la relaciòn (36), èsto es:

$$|V\rangle = |L^*\rangle \qquad (127)$$

de manera que $|L^*\rangle$, definido como el vector generador del trabajo requerido para el incremento del producto neto en una unidad, resulta ser igualmente el vector de valor de las mercancias del sistema econòmico. Estas dos interpretaciones son complementarias, ya que el valor de una mercancia, considerado como la cantidad de trabajo socialmente necesario contenido en ella, se determina en la òrbita de la producciòn como el trabajo requerido para producir una unidad

---

(13) Recuèrdese que hemos supuesto que el sistema tiene una tecnologia bien definida, de modo que la matriz N^{-1} existe. Vèase el Cap. 3.

neta de esa mercancía. Ese trabajo, realizado por la clase trabajadora, puede ser visto como materializado en la mercancía. Por consiguiente, en la medida en que los trabajadores del sistema económico deban trabajar para producir una cierta mercancía, en esa misma medida determinarán su contenido de valor, ya que el trabajo desarrollado quedará plasmado en la mercancía producida.

Sin embargo, si bien la ecuación (127) es correcta matemáticamente, debemos revisar las características del vector $|L^*\rangle$ antes de darle pleno sentido económico, ya que hemos visto que si admitimos comportamientos destructivos en los insumos de un sistema, el vector $|L^*\rangle$ puede contener elementos positivos, negativos o cero. Analicemos estas tres posibilidades, en relación con sus implicaciones para la interpretación de $|L^*\rangle$ como vector de valores en (127).

Los elementos positivos de $|L^*\rangle$ significan, de acuerdo con la interpretación dada en el Capítulo 6 (ec. (59), que para la producción de una unidad neta de los bienes respectivos se requiere que <u>entre</u> trabajo al sistema, es decir, el trabajo debe aumentar si se desea que el producto neto de esos bienes crezca. Este trabajo quedará depositado en dichos bienes, los que por consiguiente representarán <u>valores</u> y podrán constituirse en mercancías.

A su vez, los elementos cero de $|L^*\rangle$ indican que para producir los bienes correspondientes el trabajo requerido es cero, ésto es, los bienes pueden considerarse como "naturales". Por tal razón esos bienes no constituirán mercancías: su valor es cero, puesto que no representan productos del trabajo humano.

Por último, los elementos negativos de $|L^*\rangle$ indican que el trabajo se comporta destructivamente en la producción de una unidad neta de los bienes respectivos, ya que entra al sistema para disminuir su producto neto o, alternativamemente, sale del sistema para que éste pueda aumentar. Es decir, dichos bienes no son el producto de la realización de un trabajo, dado que, por el contrario, se tiene que retirar trabajo para poder producirlos. Así pues, el trabajo incorporado a ellos resulta negativo: no entra al sistema para depositarse en los bienes creados, sino que, al revés, <u>sale</u> de él al fabricarlos, representando entonces una suerte de "débito" en el trabajo. Por este motivo, como no puede decirse que los bienes referidos constituyan depósitos de trabajo, tampoco pueden propiamente tener asociado un valor, puesto que no pueden ser vistos como productos del trabajo humano (en todo caso, podría considerarse que los bienes así producidos son depositarios de un "déficit" de valor, es decir, que son "antivalores"). En consecuencia, no podrán constituirse en mercancías.

Las conclusiones del párrafo anterior no deben causar extrañeza, ya que hemos visto anteriormente que el hecho de que un insumo se comporte destructivamente significa que hay una ineficiencia en la utilización del insumo por el sistema. Por tanto, los resultados anteriores son consecuencia de que el sistema econômico considerado era ineficiente, debido al supuesto de la presencia de elementos negativos en $|L^*\rangle$. En este sentido, el trabajo involucrado fue un trabajo <u>improductivo</u>.

Así pues, el trabajo utilizado por un sistema econômico sólo será <u>productivo</u> cuando sea usado eficientemente, es decir, cuando se cumpla que:

$$|L^*\rangle > |0\rangle \qquad (128)$$

y por la misma razôn, sôlo entonces podrâ decirse propiamente que $|V\rangle = |L^*\rangle$, en vista de la connotaciôn que le hemos dado a $|V\rangle$. Igualmente, solamente en este caso los bienes producidos podrân ser considerados como mercancías.

Debe observarse que la condiciôn (128) responde a la necesidad de garantizar que el trabajo empleado por el sistema econômico se comporte productivamente; ello trae implícito el que el sistema sea eficiente. En este sentido, parece inadecuado que cuando un sistema presente ineficiencias del tipo señalado y por tanto aparezcan têrminos negativos en $|L^*\rangle$, se les trate de ignorar y simplemente se les reemplace por cantidades positivas para formar un vector de valor $|V\rangle > |0\rangle$, tal como por ejemplo pretende hacer Morishima con sus "valores ôptimos" para corregir la ley del valor[14]. Esto conduce a ocultar las ineficiencias del sis-

(14) Morishima, op. cit., Cap. 14; Morishima y Catephores, op. cit., Cap. 2.

tema mediante una simple redefinición del valor, pero conservando las ineficiencias en el sistema. Para que $|V\rangle$ resulte positivo es condición suficiente que el sistema sea eficiente, como debe ser el caso cuando se toma a un sistema como prototipo de una economía normal. Alternativamente, en caso de que se utilicen sistemas ineficientes, es mejor reconocerlo así y admitir trabajos improductivos, sin extrañarse de que éstos den lugar a "valores" negativos.

Nótese que la condición (128) es muy diferente de la condición tradicional de productividad expresada por la ec. (1); esta última implica simplemente la existencia de un excedente $\langle n|$ obtenido sobre los medios de producción utilizados:

$$\langle n| = \langle e|N\rangle \langle 0| \qquad (1')$$

Juzgar entonces a un sistema sólo a través de la presencia del excedente $\langle n|$ puede constituir una forma del llamado "fetichismo" de las mercancías, conforme al cual las relaciones económicas parecen tener su origen en las propiedades físicas de los objetos y no en su carácter de productos del trabajo.

Estudiemos ahora brevemente la forma en que se desarrolla el proceso productivo desde el punto de vista de los valores que invervienen y que se generan en él, así como de la manera en que estos valores se distribuyen entre las dos grandes clases participantes en la producción: los <u>proleta</u>-

rios, o trabajadores asalariados, y los capitalistas, o propietarios del capital.

Los capitalistas son los dueños del capital, que representaremos por la matriz C. Este capital está constituido por los medios de producción, dados por la matriz A (no consideraremos capital fijo), y por el capital-salarios, que eventualmente se transformará en los bienes-salario que consumirán los trabajadores, y que por consiguiente puede ser representado por una matriz de bienes-salario S. Tendremos entonces(15):

$$C = A + S \tag{129}$$

Aquí, las matrices C, A y S contienen mercancías medidas en unidades físicas. Podemos sin embargo expresarlas en unidades de valor, obteniendo así las matrices de capital total $C^{(v)}$, de capital constante $A^{(v)}$ y de capital variable $S^{(v)}$, definidas por:

$$C^{(v)} = CV \tag{130}$$

$$A^{(v)} = AV \tag{131}$$

$$S^{(v)} = SV \tag{132}$$

en donde V es la matriz de valor, que es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores V_j tomados del vector $|V\rangle$ de (127):

(15) Cabe observar que en la obra de Sraffa el capital está concebido únicamente como los medios de producción: C = A. Sraffa, op. cit.

$$V_{jk} = \begin{cases} V_j & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \qquad (133)$$

Los trabajadores, por su parte, aportan su trabajo $|L\rangle$ al proceso productivo, el cual constituye el valor que es creado y añadido a los medios de producción para dar como resultado el producto B, tal como se plantea en términos del vector de valor $|V\rangle$ en la ecuación (125):

$$A|V\rangle + |L\rangle = B|V\rangle \qquad (125')$$

Por tanto:

$$|L\rangle = (B - A)|V\rangle = N|V\rangle \qquad (134)$$

La ecuación (134) expresa que el trabajo realizado por los trabajadores es igual al valor del producto neto; en otras palabras, el trabajo $|L\rangle$ queda plasmado en N.

Sin embargo, aun cuando los trabajadores aportan el trabajo $|L\rangle$, no reciben a cambio el producto neto N, sino el conjunto de bienes-salario S, cuyo valor $|V_{ft}\rangle$ es:

$$|V_{ft}\rangle = S|V\rangle \qquad (135)$$

y corresponde al valor de su fuerza de trabajo, por el cual fueron contratados. La diferencia entre lo que los trabajadores dan y lo que reciben es la plusvalia $|Pv\rangle$, de la cual se apropian los capitalistas:

$$|Pv\rangle = |L\rangle - |V_{ft}\rangle \qquad (136)$$

y constituye la base de la <u>teoría de la explotación</u> en el modo de producción capitalista.

La ecuación (136) puede escribirse, de acuerdo con (134) y (135), en la forma:

$$|Pv\rangle = N|V\rangle - S|V\rangle =$$

$$= (N - S)|V\rangle =$$

$$= G|V\rangle \qquad (137)$$

siendo G la matriz de <u>plusproducto</u> del sistema:

$$G = N - S \qquad (138)$$

La ecuación (137) expresa que la plusvalía es igual al valor del plusproducto, ésto es, que la plusvalía queda materializada en las mercancías que conforman G. Esta matriz contiene las mercancías que quedan en poder de los capitalistas después de deducir del producto neto los bienes-salario, y que constituyen por tanto su ganancia.

Así pues, según (138) la distribución del ingreso, es decir, del producto neto del trabajo, es como sigue:

$$N = S + G \qquad (139)$$

siendo por consiguiente el producto neto igual a la suma de salarios y beneficios.

Análogamente, (136) puede escribirse:

$$|L\rangle = |V_{ft}\rangle + |Pv\rangle \qquad (140)$$

que expresa la distribución del trabajo $|L\rangle$ desarrollado por los trabajadores, del cual una parte $|V_{ft}\rangle$ les es retribuida y la otra, $|Pv\rangle$, queda en poder de los capitalistas y representa en consecuencia trabajo no retribuido.

Asimismo, notemos que si en (140) multiplicamos ambos miembros por el vector de estado $\langle y|$ que caracteriza al estado económico del sistema, obtendremos para el estado en su conjunto la cantidad de trabajo total 1, el valor total de la fuerza de trabajo v_{ft} y la plusvalia total p_v dados por:

$$1 = \langle y|L\rangle \qquad (141)$$

$$v_{ft} = \langle y|V_{ft}\rangle \qquad (142)$$

$$p_v = \langle y|Pv\rangle \qquad (143)$$

que satisfacen la relación:

$$1 = v_{ft} + p_v \qquad (144)$$

la cual expresa la distribución del trabajo para el total de la economia.

Finalmente, notemos que cuando el sistema presente ineficiencias en el uso del trabajo, $|L^*\rangle$ tendrá elementos negativos. En tal caso, si a pesar de la discusión que hicimos antes admitiéramos "valores" negativos en $|V\rangle$ en (127), entonces esos elementos pasarian a la matriz V de (133), y podrian ocasionar que $|V_{ft}>$ en (135) y $|Pv>$ en (136), asi como v_{ft} y p_v en (144), tuvieran también componentes negativas. Habria entonces "valores" negativos de la fuerza de trabajo y "plusvalias" negativas(16).

La situación anterior se presentará cuando en las matrices S y G figuren bienes con "valores" negativos, éste es, objetos cuya producción lleve aparejada una disminución del trabajo utilizado. Tales bienes reducirán el valor de los salarios y del plusproducto, es decir, serán bienes desvalorizadores. Su inclusión entre los bienes de distribución afectará en consecuencia a los trabajadores, en el caso de S, y a los capitalistas en el de G, ya que recibirán objetos que no constituyen productos del trabajo y que no tienen por tanto ninguna validez económica como retribución.

Podrian presentarse entonces situaciones como la siguiente: imaginemos, por ejemplo, que V_{ft} resultara negativo. En este caso, según (144), p_v seria mayor que 1, lo que significaria una sobreexplotación de los trabajadores, ya que a cambio de la realización de trabajo estarian percibiendo como salario bienes que se produjeron mediante la eliminación de trabajo. A la inversa, si p_v fuera negativa entonces v_{ft} resultaria mayor que 1, es decir, los trabajadores recibirán a cambio de su trabajo 1 bienes-salario que contendrian más trabajo que el aportado por ellos; en tal situación, serian los trabajadores quienes explotaran a

(16) Steedman, op. cit., Cap. 11.

los capitalistas (si estos últimos lo permitieran, lo cual evidentemente iria en contra de la racionalidad capitalista).

En cualquiera de las situaciones anteriores, lo que ocurriria en realidad es que el costo de las ineficiencias presentes en el sistema estaria recayendo en una u otra de las dos grandes clases sociales.

Capitulo 10

LA TEORIA DE LOS PRECIOS DE PRODUCCION.

En la producciòn capitalista, las mercancias se producen para ser intercambiadas en el mercado. Estas mercancias constituyen productos del trabajo humano y por tanto son valores; sin embargo, en general no se van a intercambiar por sus valores, sino por sus precios de producciòn.

Veamos còmo se forman estos precios de producciòn.

En primer tèrmino, los capitalistas consisideran cuâl es el costo de las mercancias que van a producir. Este costo comprende a los medios de producciòn A y a los salarios S, es decir, corresponde al capital invertido C = A + S (ec. (129)).

En segundo lugar, al terminar el proceso productivo los capitalistas obtienen los beneficios representados por la matriz de plusproducto G = N - S (ec. (133)).

Sin embargo, hemos considerado que las mercancias van a intercambiarse en el mercado no como objetos fisicos ùtiles, sino como productos del trabajo que son, es decir, como valores. Por tanto, expresaremos a C y G, originalmente medidas en unidades fisicas, en unidades de valor, tal como hicimos al final del capitulo anterior en las ecuaciones (130) a (132). Obtendremos entonces las matrices $C^{(v)}$ y $G^{(v)}$ definidas por:

$$C^{(v)} = CV \qquad (145)$$

$$G^{(v)} = GV \qquad (146)$$

siendo V la matriz de valor definida por (133).

Para pasar a la formación de los precios de producción, debemos tomar ahora en consideración dos cuestiones fundamentales:

a) Cada capitalista reclama para si un beneficio proporcional al capital aportado. En esta forma, al determinar el precio de sus mercancias, cada capitalista mide el beneficio obtenido en relación al capital invertido; esta relación constituye su tasa de beneficio.

b) Aun cuando cada capitalista busque maximizar su tasa de beneficio, si se supone una libre concurrencia de capitales la tasa de beneficio debe ser en promedio la misma para todos los capitalistas.

El cumplimiento de estos dos aspectos permite establecer el sistema de precios de producción.

En efecto, sea $|p^{(v)}\rangle$ el vector de precios de producción cuando las mercancias se miden en unidades de valor; es decir, $p_j^{(v)}$ es el precio de una unidad de valor contenida en la mercancia j. Sea además r la tasa (común) de beneficio del sistema. Las condiciones anteriores quedan planteadas por la <u>ecuación de precios de producción</u>:

$$G^{(v)}|p^{(v)}> = rC^{(v)}|p^{(v)}> \qquad (147)$$

que, a partir de $G^{(v)}$ y $C^{(v)}$, permite obtener el vector de precios de producción $|p^{(v)}>$ y la tasa de beneficio r.

La ecuación (147) está referida a los valores de las mercancias. Pero sustituyendo $G^{(v)}$ y $C^{(v)}$ por sus expresiones (145) y (146) en términos de unidades fisicas, tendremos:

$$GV|p^{(v)}> = rCV|p^{(v)}> \qquad (148)$$

y si notamos que el vector $|p>$ definido por:

$$|p> = V|p^{(v)}> \qquad (149)$$

es el vector de precios de producción cuando las mercancias están medidas en unidades fisicas, vemos que la ecuación de precios de producción (148) puede escribirse:

$$G|p> = rC|p> \qquad (150)$$

que muestra que r y $|p>$ pueden calcularse directamente a partir de las cantidades fisicas de mercancias que participan en el proceso productivo.

Como hemos dicho, las ecuaciones (147) o (150) permiten calcular los precios de producción y la tasa de beneficio.

Sin embargo, debemos notar que en un sistema económico productivo tanto los precios de producción como la tasa de beneficio deben ser cantidades no negativas, para que tengan sentido económico. Debemos reexaminar, pues, las ecuaciones mencionadas, para ver bajo qué condiciones las soluciones serán aceptables económicamente.

Para ello, es conveniente dividir el problema en dos partes: la primera, cuando los salarios S son cero y por tanto el producto neto N va íntegramente a los capitalistas, y la segunda cuando ya hay una distribución entre salarios y beneficios, de modo que ninguno de ellos es nulo. Como veremos, la resolución de la primera cuestión sienta las condiciones para resolver la segunda.

Por simplicidad utilizaremos la ecuación de precios de producción (150), ya que está expresada en términos de las matrices de cantidades físicas de mercancías, las que hemos venido considerando que constituyen los datos del sistema económico.

Supongamos inicialmente, pues, que S = 0. Por tanto, G = N y C = A. Para esta situación, hagamos además $|p\rangle = |P\rangle$ y r = R. La ecuación de precios de producción (150) correspondiente será entonces:

$$N|P\rangle = RA|P\rangle \qquad (151)$$

y si multiplicamos ambos miembros por la izquierda por N^{-1}, obtendremos:

$$|P\rangle = RN^{-1}A|P\rangle =$$

$$= RA^*|P\rangle \qquad (152)$$

siendo $A^* = N^{-1}A$ la matriz generatriz definida por (35), que representa a la matriz de medios de producción en el sistema de producción neta simple (ver el Cap. 5, ec. (35')). La ecuación (152) puede verse entonces como la ecuación de precios de producción para el caso G = N en el sistema de producción neta simple.

De (152) vemos que $|P\rangle$ debe ser un autovector derecho de la matriz A*, siendo 1/R el autovalor respectivo:

$$A^*|P\rangle = 1/R\ |P\rangle \qquad (153)$$

El problema consiste entonces en ver bajo qué condiciones de productividad la matriz A* tiene un autovalor $|P\rangle$ no negativo, con el correspondiente autovalor 1/R también no negativo.

Si suponemos que la condición de productividad del sistema es sólo la condición tradicional (1) entonces, como hemos visto en el Capítulo 6, nada impide que la matriz A* tenga elementos negativos. Por consiguiente, tampoco puede asegurarse que (153) vaya a tener soluciones económicamente significativas. Como se sabe, este es uno de los problemas fundamentales que aparecen en la producción conjunta.

Sin embargo, vimos igualmente en el Capítulo 6 que la aparición de elementos negativos en A^* (y en $|L^*\rangle$) indicaba la existencia de comportamientos destructivos ên los insumos, que daban lugar a un uso ineficiente de ellos por parte del sistema. En consecuencia, un sistema eficiente, y por tanto realmente productivo, debe satisfacer la condición (63):

$$A^* \geq 0 \qquad (63')$$

Pero si la matriz A^* es semipositiva, entonces podemos aplicar el conocido Teorema de Perron-Frobenius (Teorema A.1 del Apèndice) a la ecuación de precios de producción (153), vista como ecuación de autovectores. Este Teorema afirma que toda matriz A semipositiva tiene un autovalor $a \geq 0$ y un autovector $|a\rangle \geq |0\rangle$ correspondiente a ese autovalor. Aplicando dicho resultado a la matriz A^* que cumple (63') y a su autovalor $a = 1/R$ con autovector $|a\rangle = |P\rangle$, obtenemos entonces el siguiente teorema:

<u>Teorema 7</u>: Si un sistema económico utiliza eficientemente sus medios de producción en el sentido de que:

$$A^* \geq 0$$

entonces la ecuación de precios:

$$A^*|P\rangle = 1/R\ |P\rangle$$

tiene siempre solución con $1/R \geq 0$ y $|P\rangle \geq |0\rangle$.

Asì pues, en el caso en que G = N el sistema de precios de producción de un sistema eficiente siempre tiene solución aceptable económicamente.

Pasemos ahora a la situación general en que $G = N - S$. La ecuación de precios correspondiente es (150):

$$G|p\rangle = rC|p\rangle \qquad (150')$$

Sustituyendo en esta ecuación las relaciones $G = N - S$ y $C = A + S$ (esta última de (129)), y multiplicando a la izquierda por N^{-1}, tenemos:

$$N^{-1}(N - S)|p\rangle = rN^{-1}(A + S)|p\rangle \qquad (154)$$

es decir:

$$(I - S^*)|p\rangle = r(A^* + S^*)|p\rangle \qquad (155)$$

habiendo hecho, en analogia con A^* en (35):

$$S^* = N^{-1}S \qquad (156)$$

Entonces, de (156) obtenemos:

$$|p\rangle = (1 + r)(I - rA^*)^{-1}S^*|p\rangle \qquad (157)$$

suponiendo que $(I - rA^*)^{-1}$ existe; este punto lo discutiremos más adelante.

Supongamos ahora por simplicidad que el salario fisico pagado por unidad de trabajo realizado es uniforme e igual al vector de bienes-salario $\langle s|$ para toda la economia. En este caso, la matriz de salarios S tomará la forma:

$$S = |L\rangle\langle s| \tag{158}$$

de manera que:

$$S^* = N^{-1}S = N^{-1}|L\rangle\langle s| =$$

$$= |L^*\rangle\langle s| \tag{159}$$

Entonces, si llamamos w al precio del salario:

$$w = \langle s|p\rangle \tag{160}$$

la relación (157) podrá escribirse finalmente:

$$|p\rangle = w(1 + r)(I - rA^*)^{-1}|L^*\rangle \tag{161}$$

que es la ecuación de precios de producción del sistema[17].

Como en un sistema económico normal los precios y la tasa de beneficio deben ser cantidades no negativas, debemos examinar la ecuación (161), para ver bajo qué condiciones su solución satisface este requisito.

Nuevamente ocurre que si sólo suponemos la condición tradicional de productividad (1), entonces nada garantiza que (161) tenga solución. De hecho, existen ejemplos de sistemas en los que (1) se cumple y (161) no tiene solución[18]; la razón es que, como hemos dicho antes, (1) no

---

(17) La ecuación correspondiente en la teoria de Sraffa, en la que C = A (ver Nota (15)), es:

$$|p\rangle = w(I - rA^*)^{-1}|L^*\rangle$$

(18) Manara, op. cit.

asegura que el sistema sea eficiente en la utilización de sus insumos.

Sin embargo, si suponemos que el sistema es eficiente entonces, según (63), A^* debe ser una matriz semipositiva y $|L^*\rangle$ un vector semipositivo. En este caso la situación se vuelve enteramente diferente: como veremos a continuación, esas dos caracteristicas son suficientes para garantizar la existencia de una solución de la ecuación general de precios (161) que resulta admisible económicamente.

En efecto, cuando $A^* \geq 0$ podemos acudir nuevamente al Teorema A.2 del Apèndice, consecuencia del de Perron-Frobenius, y del que ya hemos hecho uso en el Capitulo 5. Este Teorema afirma que cuando A^* es semipositiva la matriz resolvente $(I - rA^*)^{-1}$ existe y es semipositiva en el intervalo $0 \leq r < 1/a^*$, siendo a^* el autovalor dominante de A^*. Como $a^* = 1/R$, según acabamos de ver, este intervalo es $0 \leq r < R$.

Puesto que $|L^*\rangle$ debe ser también semipositivo en un sistema eficiente, vemos de (161) que el vector $|p\rangle/w$ resulta ser semipositivo en el intervalo indicado. Podremos entonces tener un sistema de precios $(|p\rangle, w)$ semipositivo siempre que $0 \leq r < R$.

Nótese que para $r = R$ la matriz $(I - rA^*)^{-1}$ se vuelve singular, por lo que $|p(R)\rangle$ no podrá calcularse con (161). Sin embargo, en ese caso la ecuación de precios se transforma en (152), cuyo vector de precios es $|P\rangle \geq |0\rangle$ (y su salario $W = 0$), de acuerdo con el Teorema 7. Así pues, $|p(R)\rangle = |P\rangle$ y $w(R) = 0$, lo que permite extender el intervalo de r de modo que incluya al extremo $r = R$.

De todo lo anterior, resulta el siguiente teorema:

<u>Teorema 8</u>: Si un sistema económico utiliza eficientemente sus insumos en el sentido de que:

$$\text{i) } A^* \geq 0$$
$$\text{ii) } |L^*\rangle \geq |0\rangle$$

entonces la ecuación de precios de producción:

$$G|p\rangle = rC|p\rangle$$

tiene siempre solución con $|p\rangle \geq |0\rangle$ y $w > 0$ en el intervalo:

$$0 \leq r \leq R$$

ocurriendo $w = 0$ sólo para $r = R$.

Cabe señalar en relación al sistema de precios de producción que, como es conocido, para $r = 0$ se obtiene de (161) que:

$$|p(0)\rangle = w(0)|L^*\rangle \qquad (162)$$

es decir, los precios de producción son proporcionales a los valores.

Por otra parte, vemos que la restricción de que r se encuentre en el intervalo $0 \leq r \leq R$ justifica matemáticamente llamar a R la tasa máxima de beneficio, cosa que económicamente es evidente, ya que corresponde al caso en que todo el producto neto es ganancia.

Debe observarse que el Teorema 8 proporciona una condición suficiente para que un sistema económico tenga asociado un sistema de precios aceptable económicamente; esa condición es que el sistema sea eficiente. Sin embargo, tal requisito no es necesario: pueden tenerse sistemas económicos ineficientes que, no obstante, tengan sistemas de precios semipositivos. Esto es natural, ya que si las ineficiencias del sistema no son demasiado considerables, los precios pueden funcionar de manera aparentemente normal. Desde luego, si el sistema es ineficiente no se puede garantizar que los precios resulten semipositivos; de hecho, puede decirse que es difícil establecer criterios matemáticos acerca del grado de ineficiencia que puede ser tolerado en un sistema económico antes de que los precios den cuenta de ello.

Recordemos ahora la consideración de que en la Economía Política las mercancías son vistas como tales sólo cuando constituyen productos del trabajo. Esta caracterización es importante, ya que, como veremos en seguida, garantizará que el vector de precios $|p\rangle$ sea estrictamente positivo en el intervalo normal $0 \leq r < R$.

Para demostrarlo, recordemos que el requerimiento de que las mercancías sean productos del trabajo sólo se cumple cuando $|L^*\rangle > |0\rangle$, como vimos en el capítulo anterior. En esta situación, según (161), el vector $|p\rangle/w$ resulta ser estrictamente positivo, puesto que es el producto (aparte de un factor numérico positivo) del vector positivo $|L^*\rangle$ por la matriz semipositiva $(I - rA^*)^{-1}$; como esta última es claramente invertible debe tener rango pleno y por tanto ningún renglón puede ser nulo, lo que garantiza que al multiplicarla por $|L^*\rangle > |0\rangle$ todo elemento del vector resultante sea diferente de cero.

Todo ésto ocurre cuando r se encuentra en el intervalo $0 \leq r < R$. Sin embargo, para $r = R$ puede suceder que $|p\rangle$ se haga semipositivo, ya que en ese caso, conforme al Teorema 7, $|p\rangle$ queda determinado sólo por A^*, sin que intervenga $|L^*\rangle$.

El interés de la situación anterior justifica establecer los resultados obtenidos en un teorema separado:

Teorema 9: Si un sistema económico productor de mercancías utiliza eficientemente sus insumos, en el sentido de que:

$$\text{i)} \quad A^* \geq 0$$

$$\text{ii)} \quad |L^*\rangle > |0\rangle$$

entonces la ecuación de precios de producción:

$$G|p\rangle = rC|p\rangle$$

tiene siempre solución con $|p\rangle > |0\rangle$ y $w > 0$ en el intervalo:

$$0 \leq r < R$$

Si $r = R$ existe solución, con $|p\rangle \geq |0\rangle$ y $w = 0$.

Hemos visto que las mercancías no se intercambian en el mercado según su valor, sino de acuerdo con su precio. Puede ocurrir entonces que, en un sistema ineficiente, el bien j tenga asociado un L^*_j negativo y sin embargo, bajo ciertas circunstancias, tener un precio p_j positivo; ello daría a ese bien la apariencia de ser una mercancía, puesto que podría intercambiarse en el mercado como si fuera una mercancía auténtica. Sin embargo, tal situación sólo podría darse de manera temporal y parcial: en efecto, como vimos en (162), cuando la tasa de beneficio r de un sistema económico es igual a cero el vector de precios $|p\rangle$ se vuelve proporcional al vector $|L^*\rangle$. Por tal razón, si L^*_j es negativo entonces habrá una vecindad de $r = 0$ en la que p_j será negativo, revelando el hecho de que en realidad el bien j no era una mercancía.

Para concluir este capítulo, notemos que la ecuación (161) expresa a $|p\rangle$ en términos sólo de cantidades técnicas, así como de las variables de distribución. Pero si conocemos a $\langle s|$ y por tanto a S en (158), entonces la distribución está dada, de manera que podremos determinar una de las variables de distribución. En efecto, si multiplicamos ambos miembros de (161) por $\langle s|$ obtenemos, tras cancelar $w = \langle s|p\rangle$ en los dos lados:

$$1 = (1 + r)\langle s|(I - rA^*)^{-1}|L^*\rangle \qquad (163)$$

que constituye una ecuación para r. Esta ecuación puede ser empleada para determinar la tasa de beneficio del sistema[19].

---

(19) La ecuación respectiva en la teoria de Sraffa es:

$$1 = \langle s|(I - rA^*)^{-1}|L^*\rangle$$

Capitulo 11

TASA DE BENEFICIO Y EXPLOTACION.

Revisaremos ahora la relación entre los beneficios y la explotación en un sistema económico. Hemos visto desde el Capitulo 9 que la distribución del producto neto N se da sobre las dos grandes clases sociales en la forma de un salario S para los trabajadores y un plusproducto G para los capitalistas, y que el valor de este último representa un trabajo no retribuido realizado por los trabajadores, del cual se apropian los capitalistas; en este sentido, se dice que hay explotación de los primeros por los segundos.

Sin embargo, para que esta plusvalia se realice es necesario que las mercancias se vendan en el mercado. Puesto que del producto de su venta una parte debe destinarse a reponer el capital utilizado (medios de producción y salarios), que aparece como el costo de las mercancias, el remanente constituye el beneficio del capitalista. En esta forma, vemos que el beneficio está formado por las mercancias que integran el plusproducto G, ya que éste es el excedente que queda una vez descontados del producto B los medios de producción A y los salarios S.

Resulta asi que en la matriz G figuran las mercancias que constituyen el beneficio de los capitalistas, pero que simultâneamente contienen la plusvalia de la cual se apropian, como dijimos arriba. Es decir, la obtención de beneficios por los capitalistas implica la extracción de plusvalia a los trabajadores.

Los capitalistas miden sus beneficios a travès de la tasa de beneficio r; en consecuencia, la existencia de una tasa de beneficio positiva debe corresponderse con una extracción de plusvalia. Esta afirmación, que resulta plausible intuitivamente y puede ser demostrada matemàticamente cuando los sistemas econòmicos analizados son "normales", constituyendo el llamado "Teorema de la Explotación", presenta sin embargo problemas cuando en producción conjunta aparecen "valores" negativos, es decir, cuando $|L^*\rangle$ contiene elementos negativos. La razón se encuentra en la posibilidad de que aparezcan "plusvalias" negativas que, como vimos en el Capitulo 9, invertirian el sentido de la extracción de plusvalia, pasando los capitalistas a ser los explotados[20]. Por tal motivo la proposición anterior, aunque aplicable a producción conjunta eficiente de mercancias -como veremos en seguida-, no puede ser extendida en general a situaciones de sistemas ineficientes con insumos que presenten comportamientos destructivos.

Consideremos, pues, un sistema econòmico <u>eficiente</u>, productor de mercancias. Esto implica que $|V\rangle = |L^*\rangle$ es un vector estrictamente positivo, indicando que el sistema uti-

---

(20) Vèase el Capitulo 9, pp. 111-113.

liza productivamente el trabajo y que en consecuencia las mercancías son productos del trabajo y por tanto valores; implica además que los medios de producción también son utilizados eficientemente, es decir, que A* es una matriz semipositiva.

Una forma simple de demostrar el teorema mencionado consiste en acudir a la relación (163), que permite obtener la tasa de beneficio r. Si para un vector fijo de bienes-salario $\langle s|$ definimos una función f(r) utilizando el segundo miembro de (163):

$$f(r) = (1 + r)\langle s|(I - rA^*)^{-1}|L^*\rangle \qquad (164)$$

entonces (163) podrá escribirse en la forma:

$$f(r) = 1 \qquad (165)$$

Pero como hemos supuesto que $A^* \geq 0$ y $|L^*\rangle > |0\rangle$ entonces, según el Teorema A.2 del Apéndice, la matriz $(I - rA^*)^{-1}$ resultará semipositiva y será una función matricial continua no decreciente de r en el intervalo $0 \leq r < R$ que además no tendrá ningún renglón nulo (ya que es invertible y por consiguiente de rango pleno), de manera que el producto $(I - rA^*)^{-1}|L^*\rangle$ resultará ser un vector columna positivo que depende en forma continua y no decreciente de r. Si adicionalmente suponemos que $\langle s|$ es un vector semipositivo, entonces el producto $\langle s|(I - rA^*)^{-1}|L^*\rangle$ será una función positiva continua no decreciente de r, de modo que al tomar en cuenta el factor creciente (1 + r) vemos que la función $f(r)$ definida por (164) deberá ser continua y creciente en el intervalo considerado. En consecuencia $f(0) \leq f(r) = 1$, de manera que si ocurre que la solución r de (165) es estrictamente positiva, deberemos tener:

$$f(0) < f(r) = 1 \qquad (166)$$

Por otra parte, según (164) tenemos:

$$f(0) = \langle s|L^*\rangle \qquad (167)$$

Pero $\langle s|L^*\rangle$ es el valor de los bienes-salario $\langle s|$ pagados a los trabajadores por unidad de trabajo desarrollado, por lo que debe igualar al valor de la masa total de salarios $\langle y|S|V\rangle$, dividida entre el trabajo total utilizado por el sistema, que según (141) es $l = \langle y|L\rangle$:

$$\langle s|L^*\rangle = \frac{\langle y|S|V\rangle}{l} =$$

$$= \frac{\langle y|V_{ft}\rangle}{l} =$$

$$= \frac{v_{ft}}{l} \qquad (168)$$

de conformidad con (135) y (142), siendo v_{ft} el valor total de la fuerza de trabajo. Así pues, según (167) $f(0) = v_{ft}/l$, por lo que la desigualdad (166) expresará que:

$$v_{ft} < l \qquad (169)$$

indicando que cuando se cumplen las hipòtesis planteadas, entonces si $r > 0$ hay explotaciòn de los trabajadores, en el sentido de que $v_{ft} < 1$, es decir, los trabajadores reciben un salario cuyo valor es menor que el trabajo aportado por ellos. Esto mismo puede ser expresado en tèrminos de la plusvalia total del sistema, p_v, ya que como $1 = v_{ft} + p_v$ segùn (144), vemos que $v_{ft} < v_{ft} + p_v$, es decir:

$$p_v > 0 \tag{170}$$

indicando que hay una extracciòn de plusvalia de los trabajadores del sistema.

Obtenemos asi el llamado "Teorema de la Explotaciòn":

Teorema 10: Sea un sistema econòmico productor de mercancias que utiliza eficientemente sus insumos, en el sentido de que:

$$\text{i)}\quad A^* \geq 0$$
$$\text{ii)}\quad |L^*\rangle > |0\rangle$$

y cuyo vector de bienes-salario por unidad de trabajo es $\langle s| \geq \langle 0|$.

Entonces, si $r > 0$ se tendrà $p_v > 0$, es decir, habrà explotaciòn de los trabajadores.

Obsèrvese que la hipòtesis de que el sistema econòmico sea eficiente resulta esencial en el teorema anterior. En efecto, si el sistema fuera ineficiente por ejemplo en los medios de producciòn, A* contendrìa elementos negativos, de modo que no podrìa afirmarse que la funciòn f(r) definida por (164) tuviera las propiedades arriba estipuladas que permitieron establecer el Teorema 10. Similarmente, si las ineficiencias afectaran al trabajo dando como resultado "valores" negativos, podrìan tenerse "plusvalìas" negativas y en consecuencia ausencia de explotaciòn de los trabajadores, como se mencionò antes. Màs aùn, podrìa ocurrir que un sistema de ese tipo diera lugar a un sistema de precios positivos (aunque en un intervalo de r menor al normal, como se vio en el capìtulo anterior), teniѐndose entonces "plusvalìas" negativas asociadas a tasas de beneficio positivas y vectores de precios positivos[21]; ello indicarìa que los capitalistas han absorbido las ineficiencias en el uso del trabajo sin que el sistema de precios diera cuenta del hecho.

Igualmente, es necesaria la hipòtesis de que el sistema sea productor de mercancìas y de que por tanto |L*> sea positivo. Si |L*> fuera sòlo semipositivo y tuviera algùn elemento igual a cero, ello significarìa que el bien correspondiente tendrìa un valor nulo. Cabrìa entonces la posibilidad, por ejemplo, de que ese bien fuera el ùnico que apareciera como plusproducto; en ese caso se tendrìa una plusvalìa igual a cero, que indicarìa ausencia de explotaciòn. Asì pues, si |L*> no es estrictamente positivo es posible que el Teorema 10 no se cumpla.

---

(21) Steedman, op. cit., Cap. 11.

También en este sentido nos parece inadecuado que se trate de establecer la validez del Teorema de la Explotación para _cualquier_ sistema de producción conjunta que sólo cumpla la condición de productividad (1), tal como hace Morishima[22]. En concordancia con su posición acerca de los "valores" negativos y su sustitución por "valores óptimos", lo que este autor hace es ocultar la ineficiencia del sistema y su repercusión en la esfera de la distribución. Pretender que el Teorema de la Explotación sea válido en sistemas ineficientes conduce por tanto a ocultar el cambio de sentido en el flujo de plusvalia, haciendo parecer que no ha ocurrido nada anormal; ésto, a nuestro juicio, es una alteración de los hechos que oscurece lo que realmente sucede.

---

(22) Morishima, M.: "Marx in the Light of Modern Economic Theory", _ECONOMETRICA_, 1974; Morishima y Catephores, op. cit., Cap. 2.

APENDICE.

Enunciaremos sólo dos teoremas clásicos en la teoría de las matrices positivas, en las versiones que se utilizan en este trabajo. Su demostración puede encontrarse, por ejemplo, en el Apéndice Matemático de Pasinetti, L.L.: LESSONS IN THE THEORY OF PRODUCTION, 1976, pp. 267-277, y en la bibliografía ahí citada.

Teorema A.1 (Perron-Frobenius): Si A es una matriz semipositiva, entonces A tiene siempre un autovalor $a \geq 0$ con un autovector asociado $|a\rangle \geq |0\rangle$. El autovalor a, llamado autovalor dominante de A, es mayor o igual al módulo de cualquier otro autovalor de A.

Teorema A.2: Si A es una matriz semipositiva con autovalor dominante a y x es un número real tal que

$$0 \leq x < 1/a$$

entonces:

$$(I - xA)^{-1} \geq 0$$

En adición, $(I - xA)^{-1}$ es una función matricial continua no decreciente de x en el intervalo $0 \leq x < 1/a$.

BIBLIOGRAFIA.

1. Abraham-Frois, G., y Berrebi, E.: THEORY OF VALUE, PRICES AND ACCUMULATION, Cambridge University Press, 1979.

2. Benetti, C.: VALEUR ET REPARTITION, Presses Universitaires de Grenoble and Maspero, 1973.

3. Brody, A.: PROPORTIONS, PRICES AND PLANNING, North Holland, 1970.

4. Desai, M.: MARXIAN ECONOMICS, Basil Blackwell Pub., 1979.

5. Dorfman, R., Samuelson, P.A. y Solow, R.M.: LINEAR PROGRAMMING AND ECONOMIC ANALYSIS, McGraw-Hill, 1958.

6. Gale, D.: THE THEORY OF LINEAR ECONOMIC MODELS, McGraw-Hill, 1960.

7. Gantmacher, F.R.: THE THEORY OF MATRICES (2 Vols.), Chelsea, Bronx, 1960.

8. Hadley, G.: LINEAR ALGEBRA, Addison-Wesley Pub. Co., 1961.

9. Itoh, M.: "Joint Production: The Issues After Steedman", en Steedman, I., Sweezy, P. y otros: THE VALUE CONTROVERSY, Verso Editions and NLB, 1981.

10. Koopmans, T.C.: "Efficient Allocation of Resources", ECONOMETRICA, Vol. 19, Oct. 1951.

11. Koopmans, T.C.: "Maximization and Substitution in Linear Models of Production", 1953, en SCIENTIFIC PAPERS OF TJALLING KOOPMANS, Springer-Verlag, 1970.

12. Lange, O.: INTRODUCTION TO ECONOMETRICS, Pergamon, 1959.

13. Manara, C.F.: "Sraffa's Model for the Joint Production of Commodities by Means of Commodities", 1968,

en Pasinetti, L.L., ESSAYS IN THE THEORY OF JOINT PRODUCTION, Macmillan, 1977.

14. Marx, C.: EL CAPITAL (3 Vols.), Fondo de Cultura Econòmica, 1959.

15. Morisnima, M.: MARX'S ECONOMICS, Cambridge University Press, 1973.

16. Morishima, M.: "Marx in the Light of Modern Economic Theory", ECONOMETRICA, Vol. 42, Jul. 1974.

17. Morishima, M., y Catephores, G.: VALUE, EXPLOITATION AND GROWTH, McGraw-Hill, 1978.

18. Pasinetti, L.L.: LESSONS IN THE THEORY OF PRODUCTION, Macmillan. 1976.

19. Pasinetti, L.L.: "The Notion of Vertical Integration in Economic Analysis", 1973, en Pasinetti, L.L. (ed.), ESSAYS ON THE THEORY OF JOINT PRODUCTION, Macmillan, 1977.

20. Samuelson, P.A.: "Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models", en Koopmans, T.C. (ed.), ACTIVITY ANALYSIS OF PRODUCTION AND ALLOCATION, John Wiley and Sons, 1951.

21. Sraffa, P.: PRODUCTION OF COMMODITIES BY MEANS OF COMMODITIES, Cambridge University Press, 1960.

22. Stamatis, G.: "On Negative Labor Values", REVIEW OF RADICAL POLITICAL ECONOMICS, Vol. 15, No. 4, 1983.

23. Steedman, I.: "Positive Profits with Negative Surplus-Values", ECONOMIC JOURNAL, Vol. 85, Mar. 1975.

24. Steedman, I.: MARX AFTER SRAFFA, New Left Books, 1977.

25. Wolfstetter, E.: "Positive Profits with Negative Surplus-Value: A Comment", ECONOMIC JOURNAL, Vol. 86, Dic. 1976.