Ejercicios de teoría microeconómica

Carlos M. Urzúa

EL COLEGIO DE MÉXICO

EJERCICIOS DE TEORÍA MICROECONÓMICA

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

EJERCICIOS DE TEORÍA MICROECONÓMICA

Carlos M. Urzúa

EL COLEGIO DE MÉXICO

330.107
U83e

Urzúa, Carlos M., 1955-
Ejercicios de teoría microeconómica / Carlos M. Urzúa. - - México : El Colegio de México, Centro de Estudios Económicos, 2002.
156 p. ; 22 cm.

ISBN 968-12-1044-1

1. Microeconomía - - Estudio y enseñanza.

Portada de Irma Eugenia Alva Valencia

Primera edición, 2002

ISBN 968-12-1044-1

Impreso en México

ÍNDICE

PREFACIO

Este libro presenta un centenar de problemas, con sus respectivas respuestas, sobre los fundamentos básicos de la teoría microeconómica. Esto es, el libro sirve para apuntalar la teoría que típicamente se cubre en un curso introductorio a nivel posgrado o, dependiendo de la universidad, en el último año de la licenciatura en economía. También presenta, en su primer y último capítulos, un breve repaso de conceptos matemáticos que pueden ser útiles para una mejor comprensión de la materia.

Ahora bien, existiendo tantos libros que se ocupan de la microeconomía, quizás se preguntará el lector acerca de la finalidad del nuestro. Ciertamente no tratamos de competir con varios textos excelentes ya disponibles, como, por ejemplo, Kreps (1990), Mas-Colell, Whinston y Green (1995), y Varian (1992). Al contrario, pretendemos solamente ofrecer un libro complementario a los anteriores. Un libro donde el estudiante pueda adquirir más soltura mediante la resolución de un buen número de problemas no muy fáciles, aunque tampoco muy difíciles, con la ventaja extra de que cada uno de ellos está también resuelto paso por paso. Si de algo estoy convencido respecto al aprendizaje de la microeconomía, tras quince años de dictar cursos sobre ella, es que la única manera de dominarla es practicando, y luego volviendo a practicar.

Hay, por supuesto, varios libros de ejercicios de microeconomía en el mercado. Aún así, nos atrevemos a afirmar que éste llena un hueco importante. Los libros de Dixon, Bowles y Kendrick (1980) y de De Meza y Osborne (1980) son demasiado básicos y un tanto anticuados. El libro de Yohe (1993) es más bien una extensión del de Varian (1992), antes que una fuente de ejercicios sobre los fundamentos de la microeconomía. El que más se acerca al nuestro en su propósito es el bello texto de Champsaur y Milleron (1983), aun cuando ese libro contiene mucho más teoría, y mucho menos ejercicios, que el nuestro. Mención aparte merece un libro reciente de Hara, Segal y Tadelis (1997), del que nos enteramos cuando ya el nuestro estaba básicamente concluido, el cual presenta soluciones detalladas a los ejercicios propuestos en Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

Respecto a la estructura del libro, ésta es como sigue. El primer capítulo presenta unos breves apuntes, y veinte ejercicios, sobre optimización. Los conceptos matemáticos que se repasan allí son fundamentales para la comprensión del resto del libro. Una vez hecho ese repaso tan necesario, los siguientes seis capítulos presentan ejercicios sobre los temas clásicos cubiertos en un primer curso de teoría microeconómica: la teoría del consumo, la elección bajo incertidumbre, la teoría de la producción, la organización industrial, el equilibrio general y el bienestar social. Los siete capítulos siguientes presentan una solución detallada a los ejercicios propuestos con anterioridad. Por último, el capítulo final contiene unos breves apuntes, creo que novedosos en un texto básico de microeconomía, sobre el importante tema de la computación de los modelos de equilibrio y desequilibrio.

Agradezco la ayuda que me brindaron muchos antiguos estudiantes de El Colegio de México al leer varios borradores del libro. El respaldo técnico más importante lo recibí, sin embargo, de Ángeles Chávez y Fanny Jasso, quienes fueron lo suficientemente valientes para, a lo largo de casi una década, formar el manuscrito en Ventura. Aún recuerdo también a mis maestros de antaño en la Universidad de Wisconsin-Madison, quienes me enseñaron economía o me dieron la oportunidad de ser su asistente en sus cursos de posgrado. Especialmente a los dos que más me influyeron, William A. Brock y Arthur S. Goldberger, pero también a Yves Balcer, Dan Kovenoc, Mukul Majumdar, Michael Rothschild, John Rust y Charles Wilson. Finalmente, dedico este libro a mi esposa Laura como una pequeña retribución por todas las horas que tuve que sustraerme del ambiente familiar por estar embarcado en este y tantos otros proyectos.

I. APUNTES Y EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN

La mayoría de los modelos que constituyen los fundamentos de la microeconomía no son, en el fondo, más que modelos de optimización estática o dinámica aderezados con algunas suposiciones económicas (algunas plausibles y otras simplemente audaces). Es por ello que iniciamos este libro con ejercicios que ilustran algunos conceptos básicos de esa área de las matemáticas. Dado el carácter introductorio del texto, restringiremos sin embargo nuestra atención al tema de optimización estática.

Vale la pena señalar que, al contrario de casi todo el resto del libro donde sólo se presentan ejercicios, en este primer capítulo, así como en el último, añadimos también unos breves apuntes teóricos. Sobra decir que éstos no pretenden ofrecer más que un breve compendio de herramientas matemáticas muy básicas que pueden ser útiles para los ejercicios posteriores. En particular, por propósitos de concisión, los resultados matemáticos relevantes son presentados aquí sin sus demostraciones. Los lectores interesados en ellas pueden acudir a cualquiera de los tantos libros de matemáticas para economistas ya existentes, entre ellos: Chiang (1984), Dixit (1990), Intriligator (1971), Silberberg (1978), Sydsæter y Hammond (1995) y Takayama (1985). Mención especial merece el libro de Simon y Blume (1994), el cual constituye, a nuestro juicio, el mejor texto básico sobre el tema.

La estructura del capítulo es como sigue: en la primera sección se introducen algunas definiciones básicas sobre funciones y sus derivadas (presuponiendo que el lector tiene alguna familiaridad con el cálculo diferencial y el álgebra matricial). En la segunda sección se presentan algunos resultados clásicos sobre cómo optimizar cuando no hay restricciones. En la tercera se introducen algunos conceptos matemáticos importantes para economía; poniendo énfasis, en particular, sobre las nociones de concavidad y cuasiconcavidad de funciones. La cuarta sección presenta algunos resultados sobre optimización con restricciones. Finalmente, la quinta y última sección presenta los ejercicios (cuyas soluciones aparecen en el capítulo octavo). La dificultad de estos últimos se incrementa, *grosso modo*, a medida que se avanza en la numeración.

I.1. Funciones y sus derivadas

En este libro haremos uso especialmente de funciones reales y escalares; es decir, funciones valuadas en el conjunto de los reales y definidas en algún subconjunto D no vacío del producto cartesiano de los reales $\Re^n$, el cual es llamado el dominio de la función. En particular, una buena parte de las funciones de interés en economía tienen como dominio el ortante positivo de $\Re^n$:

$$\Re^n_+ \equiv \left\{ \boldsymbol{x} \in \Re^n \mid x_i \geq 0 \,,\; i = 1, \ldots, n \right\},$$

donde, de aquí en adelante, la $\boldsymbol{x}$ denota el vector $(x_1, \ldots, x_n)$. A lo largo de todo este libro, una letra en negrilla siempre significará un vector. Los vectores serán utilizados para denotar, típicamente, una canasta de bienes de consumo, un haz de insumos, un haz de productos o un vector de precios.

A manera de ejemplo de una función escalar, considere la que se conoce en economía como de Cobb-Douglas:

$$f(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

la cual está definida sobre el ortante positivo y cuyos parámetros α_i son estrictamente positivos. Esta función podría representar, por ejemplo, un proceso de producción, una vez que se interpreta $f(x_1, \ldots, x_n)$ como el nivel de producción y cada x_i como el nivel de uso del i-ésimo factor productivo (digamos un cierto capital o un cierto trabajo).

Un segundo ejemplo sería la función lineal

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$$

la cual podría representar, digamos, el costo incurrido en la producción de cierto bien. En este caso, x_i es la demanda por el i-ésimo factor y p_i es su precio (salario en el caso del factor trabajo).

En este libro supondremos las más de las veces que cualquier función f es dos veces continuamente diferenciable; simbólicamente, $f \in C^2$. Con ello queremos decir que las segundas derivadas de f existen y son continuas en su dominio. En dicho caso definimos el *gradiente* de f en un punto $\boldsymbol{x}^0$, simbólicamente $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ o $Df(\boldsymbol{x}^0)$, como el vector renglón cuyas coordenadas son las derivadas parciales de f evaluadas en $\boldsymbol{x}^0$:

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right).$$

El gradiente siempre señala la dirección de máximo incremento y es además perpendicular a la curva de nivel que pasa a través de $\boldsymbol{x}^0$. Para ejemplificar esto, considere la siguiente función de Cobb-Douglas, interpretada ahora como una función de utilidad:

$$u(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2},$$

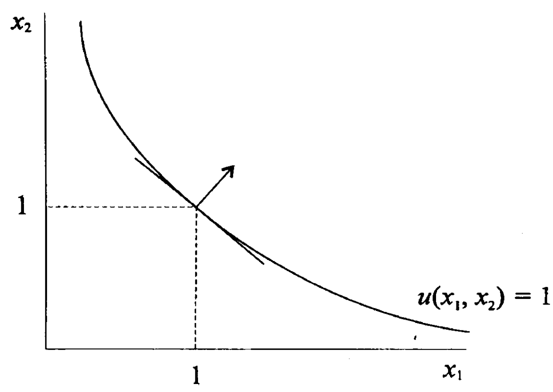
donde cada x_i representa el monto del i-ésimo bien que es consumido. Como las utilidades marginales correspondientes son iguales a

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/2} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/2},$$

entonces el gradiente evaluado en el punto $(x_1, x_2) = (1, 1)$ está dado por el vector (0.5, 0.5).

Para esta función, dicho sea de paso, las curvas de nivel (o más precisamente de indiferencia) pueden encontrarse igualando $x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ a la constante que representa el nivel deseado. En nuestro ejemplo, para cada constante la curva de indiferencia correspondiente es descrita por una hipérbola (¿por qué?).

La gráfica I.1 presenta, en el ortante positivo del plano, la curva de indiferencia que pasa por el punto (1, 1) junto con el gradiente evaluado en el punto. El gradiente es perpendicular a la curva de nivel e indica que si



Gráfica I.1. Gradiente.

tenemos un pequeño monto ε para ser asignado entre x_1 y x_2, entonces el mayor incremento en utilidad puede ser obtenido al brincar del punto (1, 1) al punto $(1 + \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$, en lugar de a cualquier otro punto.

El concepto de gradiente puede ser generalizado para el caso de funciones vectoriales m-dimensionales que van de $D \subset \Re^n$ a $\Re^m$. Esto es, para funciones f es una función que a cada vector n-dimensional $x \in D \subset \Re^n$ le asigna el vector m-dimensional $(f^1(x), \ldots, f^m(x))$. En este caso definimos la matriz *jacobiana* (o el *jacobiano*) de f en el punto x^0 (simbólicamente $\nabla f(x^0)$ o $Df(x^0)$) como:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1(x^0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f^1(x^0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f^1(x^0)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f^2(x^0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f^2(x^0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f^2(x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m(x^0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f^m(x^0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f^m(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Regresando al caso de las funciones escalares, podemos definir la *matriz hessiana* (o el *hessiano*) de f en x^0 (simbólicamente $\nabla^2 f(x^0)$ o $D^2 f(x^0)$) como la matriz de las segundas derivadas parciales evaluadas en el punto:

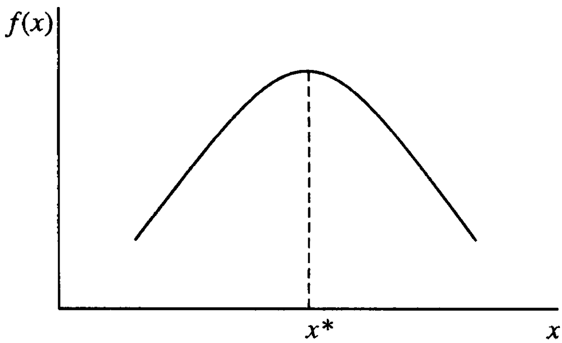
$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} f_{11}(x^0) & f_{12}(x^0) & \cdots & f_{1n}(x^0) \\ f_{21}(x^0) & f_{22}(x^0) & \cdots & f_{2n}(x^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x^0) & f_{n2}(x^0) & \cdots & f_{nn}(x^0) \end{pmatrix},$$

donde $f_{ij}(x^0) = \partial^2 f(x^0)/\partial x_i \partial x_j$. Si f es dos veces continuamente diferenciable, el hessiano es simétrico, ya que entonces puede demostrarse que $f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$.

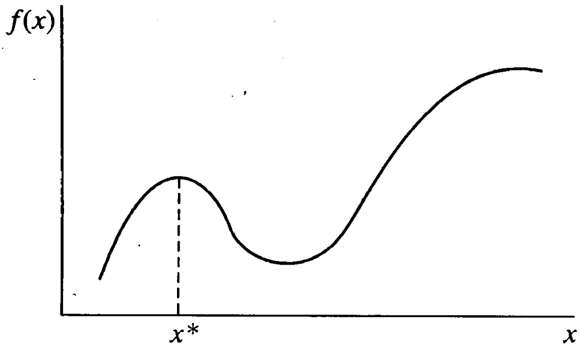
I.2. Optimización sin restricciones

Antes de entrar de lleno a establecer resultados sobre la optimización de funciones, requerimos varios conceptos que a continuación repasamos. En lo que sigue la función f denota, a no ser que se diga lo contrario, a una función escalar con dominio $D \subset \Re^n$.

Se dice que x^* es un máximo (mínimo) local de f si existe una vecindad $V(x^*)$ alrededor de x^* tal que $f(x^*) \geq f(x)$ $[f(x^*) \leq f(x)]$ para todo $x \in V(x^*)$. Mientras que x^* es un máximo (mínimo) global si $f(x^*) > f(x)$ $[f(x^*) < f(x)]$ para todo x en D. Todo máximo global es por supuesto un máximo local, pero lo contrario no es verdad (véanse las gráficas I.2 y I.3).



Gráfica I.2. x^* es un máximo global.



Gráfica I.3. x^* es un máximo local.

Las otras definiciones que necesitamos repasar se refieren a ciertas clases de matrices. Diremos que una matriz B real simétrica de orden $n \times n$ es *negativa semidefinida* si $x'Bx \leq 0$ para todo vector columna $x \in \Re^n$ (nótese que x' denota la transpuesta de x). Si la desigualdad es estricta, entonces la matriz es *negativa definida*.

De una manera análoga, diremos que una matriz B simétrica de orden $n \times n$ es *positiva semidefinida* si $x'Bx \geq 0$ para todo $x \in \Re^n$. Si la desigualdad es estricta, entonces la matriz es *positiva definida*.

Habiendo definido lo anterior, ya estamos preparados para establecer los resultados básicos de la optimización sin restricciones. La siguiente proposición establece condiciones necesarias para máximos y mínimos locales:

***Proposición* I.1**

Si f es una función escalar con dominio en $\Re^n$ y es dos veces continuamente diferenciable, entonces:

a) Si x^* es un máximo local, entonces $\nabla f(x^*) = 0$ y la matriz $\nabla^2 f(x^*)$ es negativa semidefinida.

b) Si x^* es un mínimo local, entonces $\nabla f(x^*) = 0$ y la matriz $\nabla^2 f(x^*)$ es positiva semidefinida.

En el caso univariado, los resultados anteriores se transforman en la aseveración familiar a todos nosotros: si x^* es un máximo (mínimo) local, entonces $f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) \leq 0$ (≥ 0). Es muy importante notar, por otro lado, que la proposición provee condiciones que son necesarias pero no suficientes para máximos y mínimos locales. Para poder tener suficiencia necesitamos condiciones más estrictas (continuamos suponiendo que $f \in C^2$):

***Proposición* I.2**

a) Si $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ es negativa definida, entonces x^* es un máximo local.

b) Si $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ es positiva definida, entonces x^* es un mínimo local.

Los resultados I.1 y I.2 requieren la comprobación del signo de $x' \nabla^2 f(x^*) x$ antes de poder usarlos. Aun cuando es posible hacer esto de una manera expedita en ciertos casos, este procedimiento es en general problemático. Existen, por fortuna, algunos resultados útiles que pueden ayudarnos en la tarea, los cuales establecemos ahora. En lo que sigue considere la siguiente matriz real y simétrica:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

El primer resultado caracteriza el signo de la matriz mediante los menores principales:

***Proposición* I.3**

a) La matriz B es negativa definida si y sólo si:

1) $|B_1| = b_{11} < 0$; 2) $|B_2| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots$; n) $|B|$ tiene el signo de $(-1)^n$.

Para las matrices negativas semidefinidas, la condición necesaria y suficiente es la misma, excepto que algunos menores principales pueden ser cero.

b) La matriz B es positiva definida si y sólo si:

1) $|B_1| = b_{11} > 0$; 2) $|B_2| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots$; n) $|B| > 0$.

Para las matrices positivas semidefinidas la condición necesaria y suficiente es la misma, excepto que algunos menores principales pueden ser cero.

Las caracterizaciones anteriores pueden ser cambiadas por condiciones necesarias en términos de los valores propios (también llamados característicos o autovalores) de la matriz:

***Proposición* I.4**

a) Si la matriz B es negativa definida (semidefinida) entonces cada uno de sus valores propios es menor (o igual) que cero.

b) Si la matriz B es positiva definida (semidefinida) entonces cada uno de sus valores propios es mayor (o igual) que cero.

Dado que, como se recordará, el determinante de una matriz puede ser calculado como el producto de los valores propios de ella, entonces un corolario del resultado anterior es que las matrices positivas o negativas definidas son invertibles.

I.3. FUNCIONES CÓNCAVAS Y CUASICÓNCAVAS

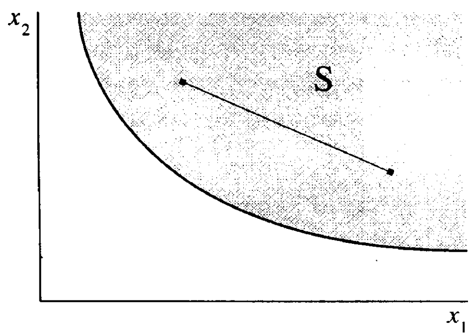
Sean x^0 y x^1 un par de elementos de D, el cual es, como antes, un subconjunto de $\Re^n$. Definimos el *segmento lineal* que une a ambos vectores como el conjunto:

$$\left\{ x \mid x = \lambda x^0 + (1-\lambda)x^1 ,\ \lambda \in [0,1] \right\}.$$

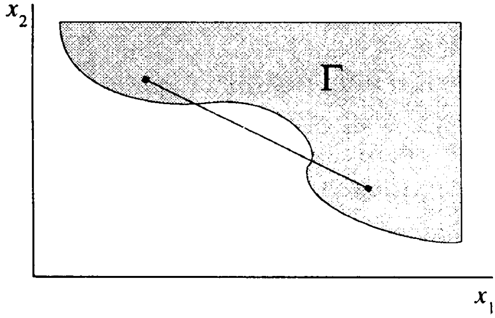
Se dice que un subconjunto S de $\Re^n$ es *convexo* si el segmento lineal que une *cualquier* par de puntos en S está contenido completamente en él. Esto es:

$$\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1 \in S \text{ donde } x^0, x^1 \in S,\ \lambda \in [0,1].$$

Las gráficas I.4 y I.5 presentan dos ejemplos al respecto.



Gráfica I.4. S es un conjunto convexo.

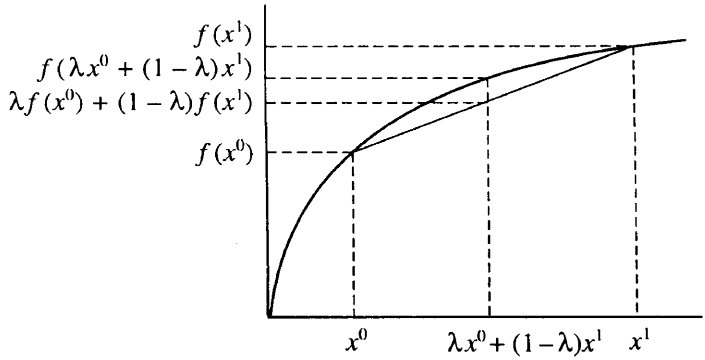


Gráfica I.5. Γ no es un conjunto convexo.

Mediante el concepto de convexidad de conjuntos podemos ahora establecer las siguientes definiciones importantes: f es una función *cóncava* si

$$f(\lambda \boldsymbol{x}^0 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^1) \geq \lambda f(\boldsymbol{x}^0) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^1)$$

para todo $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \Re^n, \lambda \in [0, 1]$. La gráfica I.6 ilustra este concepto.

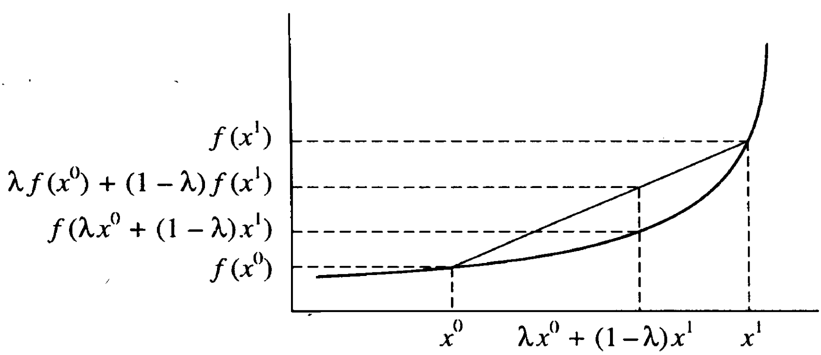


Gráfica I.6. f es cóncava.

Por otro lado, f es una función *convexa* si:

$$f(\lambda \boldsymbol{x}^0 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^1) \leq \lambda f(\boldsymbol{x}^0) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^1)$$

para todo $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \Re^n, \lambda \in [0, 1]$. Véase la gráfica I.7.



Gráfica I.7. f es convexa.

Mediante las definiciones anteriores de concavidad y convexidad puede fácilmente verificarse que si f y g son funciones con el mismo dominio cóncavas (convexas) y a y b son escalares no negativos, entonces la función $af + bg$ es cóncava (convexa). Más aún, si f es cóncava (convexa) entonces $-f$ es convexa (cóncava).

Cualquier función f que va de $\Re^n$ a los reales puede ser completamente descrita por su *grafo*:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Re^n, f(x) \in \Re\} \subset \Re^{n+1}.$$

Relacionado con este conjunto se encuentran otros dos: el *hipógrafo*, el cual es el conjunto de puntos abajo del grafo:

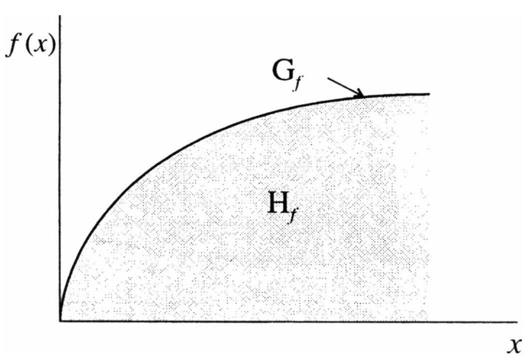
$$H_f = \{(x, y) \mid x \in \Re^n, y \in \Re, f(x) \geq y\} \subset \Re^{n+1},$$

y el *epígrafo*, el cual es el conjunto de puntos arriba del grafo:

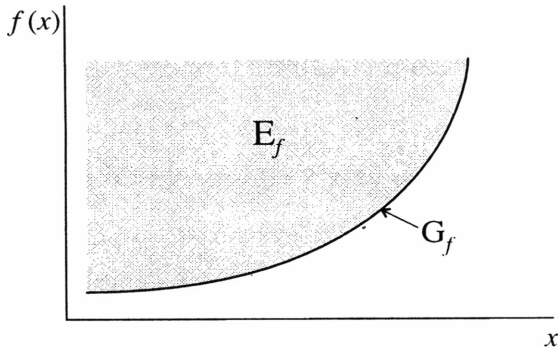
$$E_f = \{(x, y) \mid x \in \Re^n, y \in \Re, f(x) \leq y\} \subset \Re^{n+1}.$$

Las gráficas I.8. y I.9. muestran dos funciones univariadas (y, por tanto, con grafos en $\Re^2$). Observe que, si tanto H_f como E_f son convexos, G_f es un hiperplano (en $\Re^2$ una línea recta).

Como puede apreciarse en las gráficas, los conjuntos definidos en la sección anterior pueden emplearse para proveer condiciones necesarias y suficientes para concavidad y convexidad.



Gráfica I.8. H_f es un conjunto convexo y f es cóncava.



Gráfica I.9. E_f es un conjunto convexo y f es convexa.

***Proposición* I.5**

a) f es cóncava si y sólo si su hipógrafo es un conjunto convexo.

b) f es convexa si y sólo si su epígrafo es un conjunto convexo.

También se pueden proveer condiciones necesarias y suficientes utilizando el gradiente en el caso de funciones diferenciables:

***Proposición* I.6**

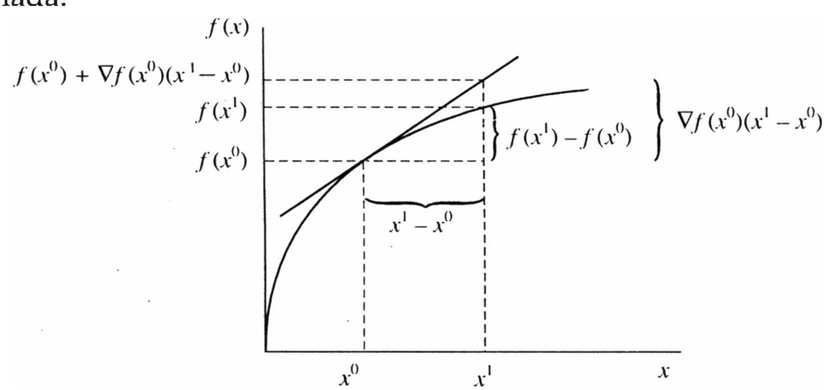
a) f es cóncava si y sólo si:

$f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) \leq \nabla f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)$ para todo $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}^1 \in \Re^n$.

b) f es convexa si y sólo si:

$f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) \geq \nabla f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)$ para todo $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}^1 \in \Re^n$.

La gráfica I.10 ejemplifica lo anterior para el caso de una función cóncava univariada.



Gráfica I.10.

Como un resultado de las proposiciones anteriores, ya podemos proveer condiciones suficientes para un máximo (mínimo) global:

***Proposición* I.7**

Si f es cóncava (convexa) y $\nabla f(x^0) = 0$, entonces x^0 es un máximo (mínimo) global de f.

Las proposiciones I.6 y I.7 caracterizan concavidad y convexidad mediante atributos que son difíciles de verificar. Es por ello que el siguiente resultado es muy útil.

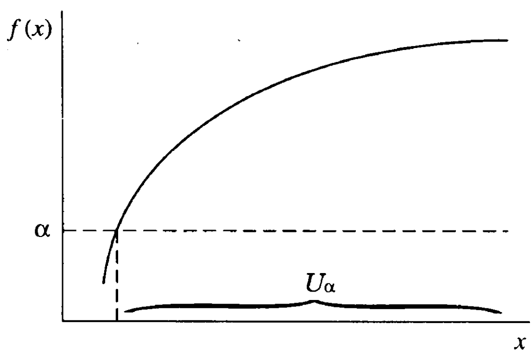
***Proposición* I.8**

a) Una función definida sobre $D \subset \Re^n$ y valuada en los reales es cóncava si y sólo si $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ es negativa semidefinida para todo $\boldsymbol{x}$ en D.

b) Una función definida sobre $D \subset \Re^n$ y valuada en los reales es convexa si y sólo si $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ es positiva semidefinida para todo $\boldsymbol{x}$ en D.

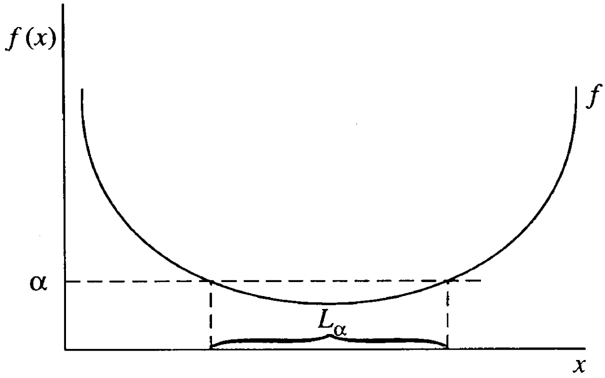
En particular, usando el ejercicio (1.1) *infra* y los resultados anteriores, si f es cóncava (convexa) entonces $f_{ii} \leq 0$ ($f_{ii} \geq 0$) para toda i.

Una implicación de la concavidad (convexidad) de una función es que si f es cóncava entonces el conjunto $U_\alpha \equiv \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo para cada α en $\Re$. Este conjunto usualmente se denomina el *conjunto de contorno superior* de f. La gráfica I.11 ilustra el concepto para el caso univariado.



Gráfica I.11. Como f es cóncava U_α es convexo para todo α.

Por otro lado, si f es convexa entonces el conjunto $L_\alpha \equiv \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo para cada α en $\Re$. Este conjunto usualmente se denomina el *conjunto de contorno inferior* de f. Véase la gráfica I.12.



Gráfica I.12. Como f es convexa L_α es convexo para todo α.

Los grafos están en $\Re^{n+1}$, mientras que los conjuntos de contorno inferior y superior están en $\Re^n$. Ahora vamos a examinar otro tipo de funciones que poseen una propiedad más general que concavidad o convexidad. Se dice que f es una función *cuasicóncava* si:

$$f(x^1) \geq f(x^0) \Rightarrow f(\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1) \geq f(x^0),$$

para todo $x^0, x^1 \in D \subset \Re^n$, $\lambda \in [0, 1]$. Por otro lado, se dice que f es una función *cuasiconvexa* si:

$$f(x^1) \leq f(x^0) \Rightarrow f(\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1) \leq f(x^0),$$

para todo $x^0, x^1 \in D \subset \Re^n$, $\lambda \in [0, 1]$.

El siguiente resultado es fundamental en economía. En él se establece una relación uno a uno entre el concepto de cuasiconcavidad (cuasiconvexidad) y el de la convexidad de los conjuntos de contorno:

***Proposición* I.9**

a) f es cuasicóncava si y sólo si U_α es convexo para todo α.
b) f es cuasiconvexa si y sólo si L_α es convexo para todo α.

Vale la pena verificar estas condiciones en el caso de las gráficas I.11 y I.12.

Otro resultado importante es que si f es cóncava entonces f es cuasicóncava, y si f es convexa entonces f es cuasiconvexa. Sin embargo, en ninguno de los dos casos es necesariamente cierto lo contrario. Para ejemplificar lo anterior, considere las siguientes tres funciones de producción: $f(x) = x_1^{1/3}x_2^{1/3}, f(x) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}, f(x) = x_1^{2/3}x_2^{2/3}$. Estas funciones se dice que exhiben rendimientos a escala que son, respectivamente, decrecientes, constantes y crecientes. Como es fácil comprobar, las tres funciones tienen curvas de nivel convexas al origen. Así, las tres tienen conjuntos de contorno superior convexos y, por lo tanto, las tres son cuasicóncavas. Pero sólo la primera es estrictamente cóncava, la segunda es cóncava aunque no estrictamente, mientras que la tercera no lo es en absoluto. Para poder apreciar en plenitud las afirmaciones anteriores, le sugerimos al lector que grafique las funciones anteriores en tres dimensiones usando un programa como *Mathematica* o GAUSS.

Ahora bien, ¿cómo podemos caracterizar de una manera más sencilla las propiedades de cuasiconcavidad y cuasiconvexidad? Considere la siguiente matriz, la cual es llamada el *hessiano orlado* de f:

$$H^o = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

Se llama "orlado" porque al hessiano normal se le agrega una orla constituida por el gradiente. Nótese que, de manera indistinta, esa orla también puede situarse abajo y a la derecha del hessiano, en lugar de arriba y a la izquierda como hacemos nosotros. Haciendo referencia a tal matriz, establecemos ahora condiciones suficientes para cuasiconcavidad y cuasiconvexidad en el caso de funciones dos veces diferenciables.

***Proposición* I.10**

a) f es una función cuasicóncava si y sólo si, para cualquier x en $\Re^n$,

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} < 0; \quad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0; \ldots; \text{n)}\ |H^o| \text{ tiene el signo de } (-1)^n.$$

b) f es una función cuasiconvexa si y sólo si, para cualquier x en $\Re^n$,

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} < 0;\quad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} < 0; \ldots;\ n)\ |\boldsymbol{H}^o| < 0.$$

I.4. Optimización con restricciones

Continuemos suponiendo que f es una función escalar con dominio en un subconjunto $D \subset \Re^n$ y consideremos el siguiente problema:

$$\operatorname*{Max}_{x} f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{s. a:}\ \ g(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

donde la abreviatura "s. a" significará de aquí en adelante "sujeto a", y donde $g : D \subset \Re^n \to \Re^m$. La primera restricción es pues de la forma

$$g(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{pmatrix} g^1(\boldsymbol{x}) \\ g^2(\boldsymbol{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g^m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b^m \end{pmatrix}.$$

El subconjunto de $\Re^m$ generado por $g(\boldsymbol{x})$ es llamado la *región factible*.

Para poder resolver este problema definimos la *función lagrangeana* (o el *lagrangeano*) como: $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda'(g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b})$, donde $\lambda \in \Re^m$ es el vector columna de multiplicadores de Lagrange ($\lambda \geq \boldsymbol{0}$).

Los siguientes resultados pueden entonces establecerse:

a) La solución $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ del problema anterior es un *punto de silla* en $\Re^{n+m}$. Esto es, en el óptimo la función lagrangeana es maximizada en relación a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ y minimizada con respecto a $\lambda \geq \boldsymbol{0}$:

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda^*) \leq L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) \leq L(\boldsymbol{x}^*, \lambda)$$

para toda $\boldsymbol{x} \in \Re^n_+$ y $\lambda \in \Re^m_+$.

b) El problema anterior incluye el caso en el que las restricciones se cumplen bajo igualdad estricta, pues éstas pueden escribirse como un par de desigualdades (por ejemplo $g^k(x) = b^k$ puede ser escrita como el par de restricciones siguiente: $g^k(x) \leq b^k$, $-g^k(x) \leq -b^k$).

c) Un problema de minimización es convertible a uno de maximización al multiplicar tanto la función objetivo como las restricciones por – 1, cambiando el sentido de éstas.

La siguiente proposición presenta las famosas condiciones necesarias para un óptimo establecidas, independientemente, por Karush en 1939 y por Kuhn y Tucker en 1951:

***Proposición* I.11**

Si f y g son diferenciables y x^* es un máximo local del problema que nos ocupa, entonces las siguientes condiciones, llamadas de aquí en adelante como las *condiciones de Kuhn-Tucker*, se cumplen:

a) $\dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} = \nabla f(x^*) - \lambda' \nabla g(x^*) \leq \mathbf{0}$

b) $\dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} x^* = [\nabla f(x^*) - \lambda' \nabla g(x^*)] x^* = 0$

c) $\dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = b - g(x^*) \geq \mathbf{0}$

d) $\lambda'(b - g(x^*)) = 0$

e) $x \geq \mathbf{0}$

f) $\lambda \geq \mathbf{0}$.

Las condiciones anteriores son necesarias, mas no suficientes. Siguiendo un resultado de Arrow y Enthoven, establecido en 1961, presentamos ahora algunas circunstancias bajo las cuales el problema de maximización con el que inicia esta sección tiene una solución óptima.

***Proposición* I.12**

Sea f una función cuasicóncava, valuada en los reales y con dominio en el ortante positivo de $\Re^n$. Sea $g : \Re^n \to \Re^m$ una función vectorial cuasiconvexa sobre $\Re^n$. Si f y g son diferenciables sobre $\Re^n_+$, entonces x^* es un valor óptimo si cumple las condiciones de Kuhn-Tucker, así como *alguna* de las siguientes alternativas:

a) f es cóncava sobre $\Re^n_+$;

b) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} < 0$ para al menos una i;

c) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{x=x^*} > 0$ para alguna j tal que $x_j^* > 0$;

d) $\nabla f(x^*) \neq 0$ y f es dos veces diferenciable en una vecindad de x^*.

Las condiciones anteriores son típicamente satisfechas por la mayoría de los problemas de optimización que uno encuentra en economía. No obstante, existen condiciones menos restrictivas que también aseguran la existencia de un óptimo (véase, por ejemplo, Urzúa, 2000).

I.5. Ejercicios de optimización

Ejercicio 1.1. Muestre que los elementos en la diagonal principal de una matriz negativa semidefinida no pueden ser positivos.

Ejercicio 1.2. Dé un ejemplo que muestre que las condiciones dadas en el ejercicio anterior no son suficientes.

Ejercicio 1.3. Muestre que si B es una matriz positiva definida, entonces tanto su traza como su determinante son mayores que cero.

Ejercicio 1.4. Sean A y B dos conjuntos convexos en $\Re^n$. Muestre que los siguientes conjuntos también son convexos:
a) $A \cap B = \{z \in \Re^n \mid z \in A \,,\, z \in B\}$.
b) $A + B = \{z \in \Re^n \mid z = x + y \,,\, x \in A \,,\, y \in B\}$.

Ejercicio 1.5. Muestre que para $p_1, p_2, p_3, m \geq 0$ el conjunto

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \leq m \;;\; x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

es convexo. P es llamado el *conjunto presupuestario* pues contiene todas las posibles combinaciones de los tres bienes 1, 2 y 3 que pueden comprarse con el ingreso m dados los precios p_1, p_2 y p_3 .

Ejercicio 1.6. Demuestre que si f y g son funciones cóncavas (convexas) entonces $f + g$ es también una función cóncava (convexa).

Ejercicio 1.7. Considere la función de producción $y = f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{\alpha}$, donde y es el producto, x_1 el factor capital y x_2 el factor trabajo. ¿Para qué valores de α es la función de producción cóncava?

Ejercicio 1.8. Establezca si las siguientes funciones son cóncavas o convexas:

a) $f(x) = x_1 x_2$.

b) $f(x) = (x_1 x_2)^{1/2}$.

c) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Emplee para ello las definiciones originales dadas en el texto.

Ejercicio 1.9. Verifique la concavidad o convexidad de las funciones de la pregunta anterior con base en los signos de los menores de sus hessianos.

Ejercicio 1.10. Pruebe que $f(x) = x^2$ (con $x \geq 0$) es tanto cuasicóncava como cuasiconvexa.

Ejercicio 1.11. Demuestre que concavidad implica cuasiconcavidad.

Ejercicio 1.12. Verifique la cuasiconcavidad o cuasiconvexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ donde $x_1, x_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\beta < 1$,

b) $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$,

c) $f(x) = x_1 - \ln x_2$.

Ejercicio 1.13. Se dice que una función f es *homogénea de grado k* si y sólo si: $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$, $\lambda > 0$. Pruebe que si f es homogénea de grado k entonces sus primeras derivadas parciales son homogéneas de grado $k - 1$.

Ejercicio 1.14. Pruebe que si f es homogénea de grado k entonces

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf(x).$$

Este resultado es conocido como el *Teorema de Euler* para funciones homogéneas.

Ejercicio 1.15. Muestre que la función de producción

$$f(x) = \min \{(x_1 + x_2)^{\beta}, x_3\}$$

es homogénea de grado 1 si $\beta = 1$.

Ejercicio 1.16. Vuelva a considerar la función de producción del ejercicio 1.7. ¿Para qué valores de α exhibe rendimientos constantes a escala (es decir, homogeneidad de grado 1) esta función de producción?

Ejercicio 1.17. Demuestre que la función de producción con elasticidad de sustitución constante (CES por sus siglas en inglés):

$$y = (a_1 x_1^{\rho} + a_2 x_2^{\rho})^{1/\rho}$$

es cuasicóncava. [Sugerencia: para evaluar los signos del hessiano orlado haga uso del teorema de Euler].

Ejercicio 1.18. Encuentre la solución del siguiente problema. Incluya en su respuesta los valores de los multiplicadores de Lagrange en el óptimo.

$$\text{Max} \quad f(x) = x_1 x_2$$

$$\text{s. a:} \quad x_1 + 8x_2 \geq 4, \; x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

Ejercicio 1.19. Considere una función escalar h que es creciente y diferenciable. ¿Cómo difiere la solución del problema

$$\text{Max} \; u(x),$$

$$\text{s. a:} \; g(x) \leq b$$

respecto a la solución de

$$\text{Max} \; h(u(x)),$$

$$\text{s. a:} \; g(x) \leq b \;?$$

¿Cuál es la relación entre los precios sombra en cada caso?

Ejercicio 1.20. Resuelva el problema

$$\text{Max} \; f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s. a:} \; x_1 + x_2 \leq 1, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

II. TEORÍA DEL CONSUMO

Los ejercicios contenidos en este capítulo se ocupan de algunos temas básicos de la teoría del consumo óptimo bajo certidumbre. Esta área de la microeconomía es cubierta particularmente bien en, por ejemplo, los libros de Mas-Colell *et al.* (1995) y Varian (1992). No obstante, nuestro preferido es el tratado de Deaton y Muellbauer (1980), el cual se ocupa exclusivamente de la teoría del consumo.

Los temas tocados por los ejercicios son los siguientes. Los primeros diez problemas se dedican a examinar varios sistemas de demanda, muchos de ellos clásicos. Los cinco siguientes, 2.11-2.15, cubren otros temas básicos; mientras que los tres últimos, 2.16-2.18, presentan simples variantes del modelo de selección óptima del consumo. Una última nota: en casi todos los ejercicios debe presuponerse, a no ser que expresamente se establezca lo contrario, que los consumidores enfrentan la típica restricción presupuestaria que es lineal en los precios y el ingreso.

Ejercicio 2.1. Suponga que un consumidor tiene una función de utilidad Cobb-Douglas definida sobre n bienes de consumo:

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_i}$$

donde $0 < \theta_i < 1$ y $\sum_i \theta_i = 1$. Si el consumidor tiene un ingreso m y enfrenta un vector de precios $\boldsymbol{p}$, ¿cuáles son sus demandas ordinarias (marshallianas) en el óptimo? ¿Cuál es su función de utilidad indirecta $v(\boldsymbol{p}, m)$?

Ejercicio 2.2. Siga considerando el enunciado del ejercicio 2.1. Encuentre ahora la función de gasto $e(\boldsymbol{p}, u)$ y las demandas compensadas (hicksianas).

Ejercicio 2.3. Continúe considerando el enunciado del ejercicio 2.1. Ejemplifique la identidad de Roy:

$$x(\boldsymbol{p}, m) = -\frac{\partial v(\boldsymbol{p}, m)/\partial \boldsymbol{p}}{\partial v(\boldsymbol{p}, m)/\partial m}\,.$$

Ejercicio 2.4. Encuentre las demandas ordinarias, las demandas compensadas (hicksianas) y la función de gasto en el caso de una función de utilidad del tipo Leontief:

$$u(x_1, x_2) = \text{Min}\left\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\right\}.$$

Ejercicio 2.5. Considere la siguiente función de utilidad:

$$u(x) = x_1 + x_1 x_2.$$

a) Derive las demandas ordinarias correspondientes.

b) ¿Cuál es el bien suntuario (con elasticidad ingreso mayor que uno) y cuál el necesario (con elasticidad menor que uno)?

Ejercicio 2.6. Considere la familia de funciones de utilidad con elasticidad de sustitución constante (conocida en inglés por la abreviación CES):

$$u(x) = \begin{cases} (a_1 x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2 x_2)^{1-1/\sigma} & \text{para } \sigma > 1 \\ a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 & \text{para } \sigma = 1 \\ [(a_1 x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2 x_2)^{1-1/\sigma}]^{-1} & \text{para } \sigma < 1 \end{cases}$$

donde "log" significa logaritmo natural. Encuentre las demandas ordinarias y compensadas, así como la función de gasto, para cada una de las funciones de utilidad en esta clase.

Ejercicio 2.7. El llamado sistema de gasto lineal, también conocido como el sistema de Stone-Geary, es resultado de la siguiente función de utilidad:

$$u(x) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_k)^{\theta_k} \quad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{n} \theta_k = 1$$

donde cada $\bar{x}_k$ es interpretada como la cantidad mínima de consumo de ese bien. Suponga asimismo que el consumidor tiene un ingreso lo suficientemente alto como para poder comprar al menos la canasta de supervivencia.

a) Derive las demandas ordinarias correspondientes, así como la función de utilidad indirecta.

b) Encuentre las demandas hicksianas y la función de gasto.

Ejercicio 2.8. Un consumidor tiene la función de utilidad

$$u(x) = 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2}.$$

a) Encuentre las demandas ordinarias asociadas, así como la función de utilidad indirecta.

b) Encuentre las demandas compensadas.

c) Demuestre que, como la teoría lo predice, el efecto propio de sustitución para ambas mercancías es negativo y que los efectos de sustitución entre las dos mercancías son simétricos.

d) Verifique la siguiente ecuación de Slutsky:

$$\frac{\partial x_1(p, m)}{\partial p_2} = \frac{\partial h_1(p, v(p, m))}{\partial p_2} - \frac{\partial x_1(p, m)}{\partial m} x_2(p, m).$$

Ejercicio 2.9. La siguiente función de utilidad indirecta fue sugerida originalmente por Houthakker:

$$v(p, m) = \sum_k \frac{\alpha_k}{\beta_k}\left(\frac{m}{p_k}\right)^{\beta_k}, \quad \beta_k > 0 .$$

Encuentre las demandas marshallianas respectivas, así como sus elasticidades respecto al ingreso.

Ejercicio 2.10. Las preferencias de un individuo están representadas por:

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - 1)\,(x_2 - 2)^{-2}, \; x_1 > 1\,, \; x_2 \leq 1.6$$

a) Encuentre las demandas ordinarias correspondientes.

b) Suponga que $p_1 + p_2 \leq m \leq 1.8p_2 + p_1$. Verifique que en ese rango el primer bien es inferior.

c) Para $m = 1$, $p_1 = 1/2$ y $p_2 = 1/3$, muestre que el primer bien se comporta como de Giffen.

Ejercicio 2.11. Dada la demanda ordinaria de cualquier bien, $x_i(p, m)$, su elasticidad respecto al ingreso, su elasticidad respecto a un precio y la proporción del gasto total que es dedicada a su consumo están dadas, respectivamente, por

$$\eta_i \equiv \frac{m}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial m}, \quad \eta_{ij} \equiv \frac{p_j}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_j}, \quad w_i \equiv \frac{p_i x_i}{m}.$$

a) Verifique el agregado de Engel:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \eta_i = 1.$$

b) Verifique el agregado de Cournot:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \eta_{ik} + w_k = 0.$$

c) Demuestre la validez de la siguiente relación entre las elasticidades de precios y la de ingreso:

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_{ik} + \eta_i = 0.$$

Ejercicio 2.12. Verifique que la proporción del gasto total asignada al consumo de un bien puede obtenerse mediante la función de gasto y la función de utilidad indirecta como sigue:

$$\frac{\partial \log e(p, u)}{\partial \log p_i} = w_i = \frac{\partial \log v(p, m)/\partial \log p_i}{\sum_k \partial \log v(p, m)/\partial \log p_k} = w_i.$$

Ejercicio 2.13. Los bienes i y j ($\neq i$) son complementos netos si

$$\frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} < 0.$$

Demuestre que no es posible, para cualquier sistema de demanda, que todos los otros bienes sean complementos netos del bien i. ¿Qué puede decir en particular acerca del sistema presentado en el Ejercicio 2.4?

Ejercicio 2.14. Como fue verificado en el Ejercicio 2.1, las demandas ordinarias implicadas por una función de utilidad Cobb-Douglas son de la forma:

$$x_i(p, m) = \frac{\theta_i m}{p_i} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Suponga, sin embargo, que no sabe de dónde proviene tal sistema. ¿Cómo encontraría entonces la función de gasto subyacente?

Ejercicio 2.15. Todos los niños de la escuela Patito consumen como almuerzo malteadas (M) y tortas (T). Diariamente los padres de Rubicunda le dan para su refrigerio $(M, T) = (18, 6)$, aunque después ella intercambia con otros niños su dotación para adquirir una combinación más apetecible. Los términos del intercambio varían día con día, dependiendo de la disponibilidad agregada de M y T, así como de otros factores. Suponga que en los últimos tres días Rubicunda acabó consumiendo las siguientes canastas (M, T): en el primer día (15, 7), en el segundo día (8, 16) y en el tercer día (12, 18). Suponiendo además que Rubicunda es racional, ¿qué puede inferirse acerca de sus niveles de felicidad en esos tres días?

Ejercicio 2.16. Un autoempleado, Sócrates, puede ganar w pesos por cada hora que elija trabajar. Si Sócrates valora sus horas de descanso (x) y su nivel de ingreso (y) conforme a la siguiente función de utilidad:

$$u(x, y) = (x - 12)^{1/4}(y - 100)^{3/4},$$

¿cuál es su oferta de trabajo?

Ejercicio 2.17. Juanito Cervecero tiene la siguiente función de utilidad:

$$u(c, x) = c^{\alpha}x^{1-\alpha},$$

donde c es la cantidad de latas de cerveza consumidas, x son las horas de ocio y α está entre 0 y 1. Suponga que Juanito requiere p pesos y t horas para poder consumir una lata de cerveza, y que también requiere una hora de tiempo y una hamaca para "consumir" una hora de ocio. Añada a lo anterior el hecho que una hamaca puede ser rentada por r pesos la hora. Finalmente, suponga que Juanito puede ganar w pesos por hora de trabajo. El resto de su tiempo lo dedica a beber cerveza o al simple ocio (note que él no contabiliza el tiempo que dedica a consumir cerveza como ocio).

a) Encuentre los valores óptimos de c y x en términos de los parámetros descritos. ¿Cuántas horas trabajará Juanito?

b) Suponga que se aprueba una ley que añade un depósito de d pesos al precio de cada lata de cerveza. El depósito puede ser recuperado al regresar la lata vacía a la tienda. Si a Juanito le toman g horas regresar una lata de cerveza, ¿de cuánto debe ser el depósito para que Juanito prefiera regresar las latas en lugar de desecharlas? ¿Cómo afectará la imposición de dicho depósito a la cantidad de tiempo que trabaja Juanito?

Ejercicio 2.18. Considere una sociedad compuesta por individuos idénticos que sólo viven dos periodos. Su función de utilidad es de la forma

$$u(c_1, c_2) = c_1^{3/4} c_2^{1/4},$$

cuyos argumentos son el nivel de consumo de bienes perecederos en cada periodo. Suponga que cada persona obtiene ingresos m en el primer periodo y nada en el segundo periodo, al mismo tiempo que enfrenta precios p_1 y p_2 por consumir en los periodos respectivos.

Por otro lado, la tasa de interés, exógenamente determinada en el mercado de capital, es r. Más aún, suponga que existe un seguro social que transfiere a cada persona una cantidad b durante su último periodo de vida. Esta pensión es financiada mediante un impuesto, con tasa τ, al ingreso del primer periodo, y la recaudación así obtenida es invertida posteriormente por el gobierno en el mercado de capital. Finalmente, la pensión que se recibe en el segundo periodo es igual al gravamen inicial más las ganancias de capital de éste.

a) Derive las demandas de consumo para los dos periodos y señale si el programa de seguridad social afecta o no a tales decisiones.

b) Ahora suponga que el gobierno prohíbe legalmente pedir préstamos sobre las pensiones futuras. ¿Cómo cambiaría entonces el perfil de consumo de cada individuo?

III. ELECCIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

Los ejercicios de este capítulo giran alrededor de uno de los temas de la teoría del consumidor más difíciles de modelar: el comportamiento de los agentes económicos en un ambiente incierto. Aquí eludiremos ese reto suponiendo, sin más, que la teoría de la utilidad esperada es razonable. No obstante, vale la pena comentar que dicha teoría, ya bosquejada por David Bernoulli en el siglo XVIII y establecida formalmente por John von Neumann y Oskar Morgenstern a mediados del siglo XX, enfrenta a más de un detractor (véanse, por ejemplo, las teorías alternativas repasadas en Hey y Lambert, 1989).

Algunos de los libros de texto que cubren particularmente bien la teoría de la utilidad esperada son: Kreps (1990), Mas-Colell *et al.* (1995) y Varian (1992). Además, el libro de Diamond y Rothschild (1989) contiene un buen número de lecturas y ejercicios (sin respuesta) sobre la elección óptima bajo incertidumbre. Finalmente, respecto a los ejercicios que siguen, éstos pueden ser agrupados de la siguiente manera: los tres primeros exploran algunas implicaciones básicas de la teoría de la utilidad esperada. Los cinco siguientes, 3.4-3.8, se ocupan de algunos aspectos del problema clásico del aseguramiento óptimo. Los dos ejercicios posteriores, 3.9-3.10, ilustran de una manera sencilla el problema del riesgo moral y de la selección adversa, mientras que los tres últimos, 3.11-3.13, se ocupan de modelos financieros.

Ejercicio 3.1. Considere la famosa paradoja de San Petersburgo propuesta originalmente por Bernoulli: se lanza una moneda, no cargada, tantas veces como sea necesario hasta que salga por primera vez una cruz, y la recompensa del juego es $\$2^n$ si la cruz se obtiene en la n–ésima tirada; por ejemplo, si al jugar aparecen sucesivamente una cara, una cara y una cruz entonces la recompensa es $\$2^3 = \$8$. Para este ejercicio primero se le pide mostrar que el valor esperado de tal juego es infinito. Ahora bien, la paradoja reside en que nadie en sus cinco sentidos estaría dispuesto a pagar esa cantidad, aún si fuese físicamente posible hacerlo, para participar en ese juego. Para resolverla, Bernoulli propuso el principio de que el placer de ganar un peso extra disminuye a medida que se ganan más pesos. Ilustre el punto de Bernoulli. Finalmente, muestre que, como fue señalado por primera vez por Menger en

1934, al ser modificado el juego de una manera acorde, la paradoja seguiría en pie. ¿Qué conclusión puede obtener uno de la discusión anterior?

Ejercicio 3.2. Suponga que Procopio tiene una función de utilidad $u(W)$, cuyo argumento es la riqueza y cuya primera derivada es continua. Procopio, quien siempre maximiza su utilidad esperada en casos inciertos, puede apostar en un juego de azar la cantidad T para poder ganar, con probabilidad p, la cantidad V (ya descontada su apuesta inicial). Por otro lado, él puede perder con probabilidad $1 - p$ su apuesta T. Demuestre que si $pV > (1 - p)T$ (es decir, el juego es más que justo), y si los montos T y V son lo suficientemente pequeños, entonces Procopio siempre hará dicha apuesta.

Ejercicio 3.3. Dos analistas financieras, Malena y Marilú, siempre maximizan su utilidad esperada cuando enfrentan un ambiente incierto. Hoy se encuentran discutiendo acerca de la posibilidad de que la economía del país tenga pronto una crisis. Demuestre que Malena y Marilú no apostarán entre sí sobre la ocurrencia de una recesión económica si es que están de acuerdo acerca de la probabilidad de que ésta se dé en efecto, mientras que sí lo harán en caso de que discrepen.

Ejercicio 3.4. Considere un individuo que tiene aversión al riesgo y que maximiza su utilidad esperada. Su riqueza inicial es W, pero puede enfrentar una pérdida financiera L ($< W$) con una probabilidad p conocida.

a) ¿Cuál es la cantidad máxima que la persona estaría dispuesta a pagar por una póliza que lo indemnizara con L si es que incurre en una pérdida financiera?

b) Defina la función $R(p, L)$, llamada la función de Pratt, como la resta de la cantidad encontrada en el inciso anterior menos el valor esperado de la pérdida. Ilústrela mediante una gráfica. Pruebe además que la función de Pratt es cóncava en p y creciente en L.

Ejercicio 3.5. Un individuo conserva su riqueza actual W con una probabilidad $(1 - p)$, pero también puede sufrir una pérdida L con probabilidad p, finalizando así con $W - L$. Para cubrir esta posible pérdida, la persona, quien maximiza su utilidad esperada, piensa comprar una póliza que le asegure un beneficio B ($\leq L$) si la pérdida ocurre. Ahora bien, la cantidad que cobra el asegurador por dicha póliza, independientemente de que la pérdida ocurra o no, es rB. Esta cantidad es llamada la prima del seguro, donde r (< 1) es la tasa de cotización. Desarrolle las condiciones de primer y segundo orden que determinan la cantidad óptima a asegurar. Muestre que si el individuo tiene aversión al riesgo y si la tasa de cotización es $r = p$, el individuo se asegurará totalmente contra la posible pérdida.

Ejercicio 3.6. Continúe considerando el enunciado del problema 3.5. Muestre que si la tasa de cotización r excede la probabilidad de pérdida p, haciendo la póliza actuarialmente injusta para el individuo, éste nunca se asegurará completamente contra la posible pérdida L.

Ejercicio 3.7. Bajo los supuestos del ejercicio 3.5, encuentre e interprete la condición bajo la cual el individuo se asegurará al menos por alguna cantidad pequeña.

Ejercicio 3.8. Continúe considerando el enunciado del problema 3.5. La aversión absoluta al riesgo está definida como $R_a(W) \equiv -u''(W)/u'(W)$. Demuestre que para dicha persona la póliza es un bien normal ($dB/dW > 0$) si y sólo si su aversión absoluta al riesgo es creciente sobre el rango relevante.

Ejercicio 3.9. El señor Porsi Acaso seguirá teniendo una riqueza W si su casa no es robada. Por otro lado, su riqueza se reducirá a $W - L$ si un ladrón visita su casa. La probabilidad de que esto último ocurra es $P(A)$, la cual es una función decreciente (y diferenciable) de la cantidad A que Porsi gaste en equipos antirrobo. Derive una condición suficiente para que Porsi gaste al menos algo en tales aparatos.

Ejercicio 3.10. En el país Parejo la distribución de la edad de los adultos está uniformemente distribuida entre 20 y 90. Todos ellos tienen aversión al riesgo y además enfrentan una probabilidad de enfermar igual a $e/100$, donde e es la edad. Si ocurre esa desgracia, cada uno tiene que pagar un gasto médico que es siempre igual a c. Suponga que hay una industria competitiva de aseguradoras en Parejo, las cuales sólo pueden ofrecer pólizas con cobertura total y son indiferentes hacia el riesgo. Suponga además que las aseguradoras no incurren en costos administrativos.

a) ¿Cuál deberá ser la prima cargada a una persona con e años de edad?

b) Suponga que el gobierno ofrece una póliza alternativa que no permite la discriminación por edades. Sin embargo, el gobierno requiere que la prima sea ajustada de tal forma que no haya déficit o superávit fiscales. ¿A qué adultos atraerá esta póliza y qué prima se cargará?

Ejercicio 3.11. La señorita Precavida tiene la siguiente función de utilidad cuadrática

$$u(W) = aW^2 + bW\ ,$$

donde W es su riqueza. Precavida siempre maximiza su utilidad esperada y además, como su nombre lo indica, tiene aversión al riesgo.

a) ¿Qué restricciones deben imponerse sobre los parámetros a y b para que u sea una función de utilidad apropiada? ¿Sobre qué intervalo de W se mantiene esto?

b) Calcule las medidas de aversión absoluta y relativa al riesgo. ¿Son constantes o cambian con el nivel de riqueza?

Ejercicio 3.12. Continúe considerando el enunciado del problema 3.11. Además sabemos que Precavida desea invertir su riqueza W en dos activos, uno sin riesgo con rendimiento bruto r y el otro riesgoso con un rendimiento bruto incierto $\rho = r + \theta$, donde θ es una variable aleatoria continua con densidad f, media μ y varianza σ^2. Estos dos últimos parámetros se supone que son, por supuesto, estrictamente positivos.

a) Establezca el problema que ella tiene que resolver para decidir de una manera óptima qué fracción α de su riqueza invertir en el activo con riesgo, con la otra fracción $(1 - \alpha)$ invertida en el activo sin riesgo.

b) Encuentre la fracción óptima α^* de inversión en el activo riesgoso.

c) ¿Cómo cambia α^* si hay un aumento en la media μ, manteniendo la varianza σ^2 constante? ¿Y si hay un aumento en la varianza manteniendo la media constante? Explique sus resultados.

Ejercicio 3.13. A la manera del modelo clásico de Markowitz, aunque no con tanta generalidad, considere el siguiente problema. Un inversionista puede destinar un monto de dinero W para hacerse de una cartera de inversión compuesta por n acciones. El activo i tiene un rendimiento bruto esperado μ_i y una varianza $\sigma_i^2 > 0$. Suponga además que los rendimientos de las acciones no están mutuamente correlacionados.

a) Si el inversionista desea que el rendimiento esperado de su cartera sea al menos μ, ¿cómo debería él asignar su dinero con el objeto de minimizar la varianza (el riesgo) del portafolio? Sugerencia: para resolver el problema de una manera nítida suponga, sin mucha pérdida de generalidad, que la solución existe y es interior (es decir, que la cantidad óptima a asignar para cada acción es positiva).

b) Suponga que el inversionista desea un 1% de rendimiento extra sobre el portafolio, ¿qué tanto riesgo adicional le acarreará ese extra?

IV. TEORÍA DE LA PRODUCCIÓN

Los catorce ejercicios de este capítulo versan sobre puntos básicos de la teoría de la producción. Muchos libros tratan este tema, pero nuestros favoritos en este caso, y quizás sólo en este caso, son Varian (1992) y Dixon, Bowles y Kendrick (1980). Vale la pena también señalar que los problemas que siguen son, en general, menos intrincados en términos algebraicos que los que versan sobre la teoría del consumo en el Capítulo II. La razón de este hecho es que, tras haber derivado allá la función de gasto $e(p, u)$ para varias funciones de utilidad clásicas, bien puede uno entonces inferir la función de costos $c(w, y)$ para las funciones de producción que son análogas a las de utilidad. Basta para ello sustituir la letra e por la letra c, el vector p por el vector w y la letra u por la letra y.

Ejercicio 4.1. Una empresa puede elaborar un producto mediante el empleo de los factores x_1 y x_2. La función de producción es del tipo Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \quad \alpha > 0 .$$

Además, la empresa puede contratar esos factores pagando precios unitarios w_1 y w_2.

a) Encuentre las demandas condicionadas de los factores. Es decir, encuentre las demandas que minimizan el costo de obtener un nivel dado de producción.

b) ¿Cuál es el costo marginal de producir una unidad adicional a ese nivel de producción?

c) Obtenga la función de costos $c(w, y)$ de esta empresa.

d) Pruebe que las demandas condicionadas de los insumos son homogéneas de grado cero en precios, mientras que la función de costos es homogénea de grado uno.

e) Verifique el lema de Shepard para este modelo.

Ejercicio 4.2. Una empresa vende su producto a un precio dado p, tras emplear en su producción dos factores cuyo vector de precios w también es paramétrico a ella (es decir, la empresa no tiene poder monopólico o monopsónico alguno). Suponga que su función de producción es de la forma:

$$y = f(x) = 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}.$$

a) Encuentre las demandas de los insumos y la oferta del producto en el óptimo, así como la función de beneficios $\pi(p, w)$.

b) Verifique el lema de Hotelling para este modelo.

Ejercicio 4.3. Obtenga la función de producción asociada a la siguiente función de costos:

$$c(w, y) = (w_1 + w_2)y^k.$$

Ejercicio 4.4. Suponga que las demandas condicionadas de una empresa están dadas por las siguientes funciones:

$$x_1(w, y) = a_{11}y + a_{12}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)y$$

$$x_2(w, y) = a_{21}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)y + a_{22}y$$

a) Señale las condiciones que deben imponerse sobre los a_{ij} para que estas funciones sean consistentes con la minimización de costos.

b) Para tales valores de los parámetros, obtenga la función de costos y la función de producción subyacentes.

Ejercicio 4.5. Muestre que para cualquier función de producción bien comportada las demandas condicionadas satisfacen:

$$\sum_j w_j \frac{\partial x_i}{\partial w_j} = 0.$$

Ejercicio 4.6. La elasticidad de sustitución de Allen-Uzawa está definida por la siguiente expresión:

$$\sigma(y, w) = \frac{c(y, w)\, c_{ij}(y, w)}{c_i(y, w)\, c_j(y, w)}.$$

Demuestre que ésta puede expresarse como $\varepsilon_{ij}/\alpha_j$, donde el numerador es la elasticidad-precio cruzada de la demanda de los factores y el denominador es la participación del j-ésimo insumo en el costo total.

Ejercicio 4.7. Considere la siguiente función de beneficios en el corto plazo:

$$\pi(p, w; k) = \frac{p^2}{4w_1} + pk^{1/2} - w_2 k,$$

donde k es el nivel fijo del segundo insumo.

a) Obtenga la función de producción subyacente.

b) Verifique el principio de Le Chatelier, el cual establece que la elasticidad-precio de la oferta en el corto plazo es menor que la elasticidad de la oferta en el largo plazo.

Ejercicio 4.8. Una empresa tiene la siguiente función de producción:

$$y = x_1 + \text{Min}\,\{x_2, x_3\}.$$

a) ¿Cuál es la demanda condicionada del segundo factor?

b) ¿Cuál es la función de costos de la empresa?

Ejercicio 4.9. Derive las funciones de costo correspondientes a las siguientes funciones de producción:

a) $y = \text{Min}\,\{(x_1 + x_2)^2, x_3\}$.

b) $y = \text{Max}\,\{x_1 + x_2 - 1, 0\}$.

Ejercicio 4.10. Una empresa obtiene un producto usando tres factores. ¿Cuáles de las siguientes aseveraciones sobre las demandas condicionadas son consistentes con la minimización de costos y cuáles no?

a) $\partial x_2/\partial w_1 < 0,\ \partial x_3/\partial w_1 < 0$.

b) $\partial x_1/\partial y = 0$.

c) $\partial x_1/\partial y < 0,\ \partial x_2/\partial y < 0,\ \partial x_3/\partial y < 0$.

d) $\partial(x_2/x_3)/\partial w_1 = 0$.

Ejercicio 4.11. Considere una economía en la cual existen sólo dos mercancías: la primera es m, mantequilla (medida en kilos), y la segunda es c, cemento (medido en toneladas). A la manera del modelo insumo-producto de Leontief, suponemos las siguientes tecnologías con coeficientes fijos:

$$m = \text{Min}\,\{m/0.1, c/0.2\}$$

$$c = \text{Min}\{m / 0.3, c / 0.4\}.$$

a) Represente esas funciones de producción mediante una matriz insumo-producto A, donde a_{ij} representa la cantidad del insumo i requerido para producir una unidad del producto j.

b) Suponga que $x = (x_m, x_c)'$ representa el vector columna de la producción total y que $y = (y_m, y_c)'$ representa el vector columna del consumo final. Demuestre que $y = (I - A)x$, donde I es la matriz identidad de dimensión dos.

c) ¿Cuánto cemento y mantequilla deberán ser producidos para obtener finalmente un kilo de mantequilla y una tonelada de cemento como el vector de consumo final?

Ejercicio 4.12. Continúe considerando el enunciado del Ejercicio 4.11, pero ahora considere un proceso de producción más complicado. Además de los dos insumos anteriores, para el proceso de producción se requiere también el factor trabajo L. Suponga en particular que se necesitan 0.3 días-hombre para producir un kilo de mantequilla y 0.4 días-hombre para producir una tonelada de cemento.

a) ¿Cuánto trabajo se requiere para producir un kilo de mantequilla y una tonelada de cemento?

b) Si en la economía hay disponible tres días-hombre, ¿qué combinaciones de mantequilla y cemento pueden ser empleadas para el consumo final?

Ejercicio 4.13. Este problema constituye un ejemplo muy simple del clásico "problema de la dieta", introducido por Stigler en 1945. Suponga que un granjero quiere determinar el costo mínimo de subsistencia para uno de sus animales. El veterinario ha determinado que el animal requiere consumir al menos 20 unidades de un primer nutriente y 15 unidades de un segundo. Para obtener los nutrientes se disponen de tres diferentes alimentos, los cuales cuestan, por unidad, 2, 1 y 10 pesos. El primer alimento provee, por unidad, 2 dosis del primer nutriente y 4 del segundo. El segundo alimento provee 2 dosis del primer nutriente y 1 del segundo. Finalmente, el tercer alimento provee 20 dosis del primer nutriente y nada del segundo.

a) Determine el problema de programación lineal que enfrenta el granjero.

b) Establezca el problema dual e interprételo.

Ejercicio 4.14. Continúe considerando el enunciado del Ejercicio 4.13.

a) ¿Puede resolverse el problema anterior mediante el método de Kuhn-Tucker?

b) Resuelva el problema mediante su dual.

V. ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Los ejercicios siguientes constituyen ejemplos de los modelos clásicos de organización industrial, los cuales son presentados en cualquier libro de microeconomía. Estamos hablando de los modelos de competencia perfecta, monopolio, oligopolio y competencia monopolística. Vale la pena subrayar que, como ya fue anotado en el prefacio, nos hemos limitado a presentar los modelos oligopolísticos con un mínimo de estructura de teoría de juegos; lo único que requieren algunos ejercicios es un entendimiento rudimentario del concepto de equilibrio de Nash (en estrategias puras). La razón de tal simplificación es que, comúnmente, la teoría de juegos no es empleada de manera significativa en los cursos básicos de microeconomía.

Ejercicio 5.1. Considere una industria en competencia perfecta y en la cual todas las empresas tienen una función de costos de la forma: $c(y) = y^2 + 1$. Suponga que la demanda inversa del mercado es $p(Y) = 10 - Y$, donde Y denota la producción total de la industria. ¿Cuál será el precio de equilibrio marshalliano en el largo plazo? ¿Cuántas empresas sobrevivirán para entonces?

Ejercicio 5.2. Suponga que la demanda que enfrenta un monopolista está dada por $p = d(y)$, donde $d'(y) < 0$. Por otro lado, la función de costos es $c(y)$, con $c'(y) > 0$. Finalmente, suponga que la empresa paga un impuesto t por cada unidad producida.

a) Escriba las condiciones de primer y segundo orden para la maximización de los beneficios. ¿Requiere la condición de segundo orden más suposiciones sobre la demanda y la función de costos que las dadas en el párrafo anterior?

b) Suponga de aquí en adelante que la mencionada condición de segundo orden se cumple. Demuestre que un incremento en la tasa del impuesto provoca una caída en la producción, así como una caída en los beneficios del monopolio.

Ejercicio 5.3. Un monopolista produce artefactos a un costo que es esencialmente igual a cero. Dado que existen restricciones a la importación, puede venderlos a diferentes precios tanto en el mercado interno como en el mercado externo. La función (inversa) de la demanda interna es: $p_i = 200 - y_i$, mientras que la de la demanda externa es $p_e = 100 - 0.5y_e$.

a) Con el fin de maximizar sus beneficios, ¿qué precios cargaría el monopolista en los dos mercados? ¿Cuántas utilidades obtendría?

b) Si las restricciones a la importación son removidas de manera que la discriminación de precios ya no es posible, ¿a qué precio daría los artefactos?, ¿cuántas utilidades obtendría ahora?

Ejercicio 5.4. Suponga que una empresa, en competencia perfecta, enfrenta de manera efectiva una restricción en sus ventas: éstas no pueden exceder un nivel fijo y_0. Muestre que la solución a su problema de maximización de beneficios es un tanto análogo al que obtendría si fuera un monopolio.

Ejercicio 5.5. La expresión

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^2,$$

donde s_i es la participación de la i-ésima empresa en el producto de toda la industria, es conocida como el índice de concentración de Herfindahl. Calcule su valor para los casos de competencia perfecta y de monopolio.

Ejercicio 5.6. Para cualquier empresa, la relación $(p - c'(y))/p$ es conocida como el índice de poder monopólico de Lerner. Demuestre que éste puede ser expresado como $(sV)/\varepsilon$, donde s se define como en el ejercicio anterior, V es la variación conjetural y ε es la elasticidad-precio, en valor absoluto, de la demanda de la industria.

Ejercicio 5.7. Un monopolio vende un producto cuya calidad puede variar de acuerdo con su propio interés. Suponga que tal calidad es mensurable y puede ser representada por la variable q. Suponga además que la utilidad (el excedente) de los consumidores, cuando compran y unidades del producto, puede ser representada por la función $B(y, q) = 2y(3 - 0.5y)q$. Finalmente, suponga que la función de costos del monopolista es de la forma $c(y, q) = yq^2$.

a) ¿Qué cantidades de y y q maximizarían los beneficios del monopolista? ¿Qué precio cargaría en ese caso?

b) Suponga ahora que una agencia reguladora establece que el poder del monopolio es inaceptable. ¿Qué combinación de y y q maximizaría el bienestar social (el excedente de los consumidores menos el costo de producción)? ¿A qué precio se vería forzado el monopolio a vender entonces su producto?

Ejercicio 5.8. Suponga que existen sólo dos oferentes en una industria y que ambos tienen una estructura de costos similar: $c_i(y_i) = 5y_i$. Suponga además que la demanda inversa del mercado está dada por: $p(Y) = 10 - 2Y$, donde $Y = y_1 + y_2$.

a) Para cada empresa, calcule las cantidades y los beneficios que resultarían en el equilibrio de Cournot (o, más formalmente, en el equilibrio de Cournot-Nash).

b) Repita el inciso anterior suponiendo ahora que la primera empresa es líder, en el sentido de Stackelberg.

c) ¿Cuáles serían los resultados en el caso de que las dos empresas se coludieran para maximizar beneficios?

Ejercicio 5.9. Considere una industria con n empresas, donde cada una de las cuales tiene una función de costos $c_i(y_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Por otro lado, la función inversa de la demanda del mercado está dada por

$$p(Y) = 5 - \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

a) ¿Podría existir un equilibrio de Cournot tal que $y_i \neq y_j$ para alguna i y alguna j?

b) Encuentre el precio de equilibrio de Cournot. ¿Hacia dónde converge tal precio a medida que el número de empresas se va a infinito?

c) Suponga ahora que las empresas compiten por la vía de los precios, en lugar de las cantidades de producción. Encuentre el precio de equilibrio de Bertrand (o, más formalmente, el ε–equilibrio de Bertrand).

Ejercicio 5.10. En un cierto pueblo todos gastan una cantidad constante de dinero en chucherías, sea cual sea su precio. Las chucherías son producidas a un costo medio constante a por n empresas iguales. Demuestre que si $a > 0$ entonces existe un equilibrio de Cournot, pero que si $a = 0$ entonces no existe tal equilibrio (determinístico).

Ejercicio 5.11. Suponga que un individuo representativo del mercado tiene una función de utilidad cuasilineal de la forma:

$$u(y_1, y_2, x) \equiv v(y_1, y_2) + x = \alpha(y_1 + y_2) - \gamma y_1 y_2 - \beta(y_1^2 + y_2^2) + x,$$

donde x es el ingreso discrecional y y_1 y y_2 representan las cantidades a consumir de dos bienes heterogéneos manufacturados por dos empresas diferentes. Suponga además que todos los parámetros que aparecen del lado derecho son estrictamente positivos. Finalmente, suponga que los costos medios de cada una de las empresas son siempre igual a una constante k.

a) Encuentre las funciones de demanda de los dos bienes.

b) Suponiendo que los duopolios compiten en cantidades, encuentre el resultante equilibrio de Cournot-Nash.

c) ¿Que pasaría si compiten en términos de precios?

Ejercicio 5.12. A la manera de Hotelling, suponga que unos consumidores se encuentran distribuidos uniformemente, con una densidad de uno por unidad de distancia, a lo largo de una línea infinita. El costo fijo para establecer una tienda en cualquier punto de la línea es F y el costo marginal del único producto vendido por las tiendas es cero. Los consumidores incurren en un costo c por unidad de distancia recorrida. Suponga además que cada consumidor compra exactamente una unidad de producto, que hay libre competencia entre las tiendas y que cada consumidor compra en aquélla que le provee el producto con un menor costo para él (el precio de venta más su costo de transporte). Demuestre que en equilibrio la distancia entre cada par de tiendas acabará siendo $d = \sqrt{F/2c}$ (unidades de distancia).

Ejercicio 5.13. Considere un mercado en competencia monopolística, en el sentido de Chamberlin y Robinson. En el corto plazo hay 101 empresas y todas enfrentan la misma forma funcional de la demanda inversa:

$$p_k(y_k) = 150 - y_k - 0.02\sum_{i \neq k} y_i;$$

así como la misma función de costos:

$$c_k(y_k) = 0.5y_k^3 - 20y_k^2 + 270y_k,$$

donde $k = 1, 2, \ldots, 101$.

a) Determine los beneficios máximos que podría obtener cada empresa en el corto plazo.

b) Obtenga el nivel de producción de cada empresa en el largo plazo.

VI. EQUILIBRIO GENERAL

Los ejercicios de este capítulo son eminentemente aplicados. Mediante la resolución de pequeños modelos de equilibrio general se espera que el estudiante se familiarice con los conceptos básicos del tema, tales como el equilibrio competitivo, la curva de oferta y la curva de contrato. Una referencia clásica sobre equilibrio general es Arrow y Hahn (1971), mientras que una más reciente, e igualmente notable, es Mas-Colell *et al.* (1995). Vale la pena también señalar que en el último capítulo del presente libro se podrá encontrar una breve introducción al cálculo numérico del equilibrio general.

Ejercicio 6.1. Considere una economía de mero intercambio (sin producción) compuesta por dos individuos y dos mercancías. El primer individuo tiene la función de utilidad $u_1(x, y) = xy$, mientras que el segundo $u_2(x, y) = xy^2$.

a) Describa analíticamente el conjunto de asignaciones óptimas según Pareto (es decir, la curva de contrato), suponiendo que solamente hay una unidad de cada bien para ser repartida entre los dos consumidores.

b) Ahora suponga que cada agente tiene una dotación inicial de media unidad de cada bien. Describa analíticamente el equilibrio competitivo.

Ejercicio 6.2. Considere una economía de intercambio con dos bienes y dos individuos, donde éstos últimos tienen las siguientes funciones de utilidad: $u_1(x, y) = x + y$, $u_2(x, y) = xy$. La dotación inicial del primer individuo es de dos unidades de x y ninguna de y, mientras que la del segundo es de dos unidades de y y nada de x.

a) Encuentre la curva de oferta para cada agente.

b) Encuentre el equilibrio competitivo.

c) Encuentre el núcleo de esta economía.

Ejercicio 6.3. Siga considerando el enunciado del ejercicio 6.2.

a) Suponga ahora que el primer agente tiene el poder de fijar a su antojo los precios relativos tomando en cuenta la demanda del segundo agente. ¿Qué resultado se obtendría en esta situación monopólica?

c) Suponga finalmente que la economía se abre al mercado internacional y que el precio relativo mundial está dado por $p_x/p_y = 1/2$. ¿Cuál sería ahora el resultado?

Ejercicio 6.4. Considere una economía compuesta por dos bienes y dos personas cuyas preferencias están dadas por: $u_1(x, y) = x + y/2$, $u_2(x, y) = x + y$. En esta economía sin producción las dotaciones iniciales de los dos individuos son: $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0, 2)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (2, 1)$.

a) Describa el conjunto de asignaciones óptimas según Pareto.

b) Encuentre al menos un equilibrio competitivo.

Ejercicio 6.5. Se dice que una asignación es "justa" si todos los individuos prefieren su propia canasta de consumo a las del resto. Describa el conjunto de las asignaciones justas en el caso del ejercicio 6.4.

Ejercicio 6.6. Considere una economía de intercambio con dos mercancías y dos individuos cuyas funciones de utilidad están dadas por $u_1(x, y) = xy$, $u_2(x, y) = y - x$. Suponiendo además que solamente hay una unidad de cada bien para ser repartida entre los dos consumidores, describa la curva de contrato resultante.

Ejercicio 6.7. Considere un modelo de equilibrio walrasiano con un número indeterminado de consumidores y, por otro lado, tres bienes. Suponga que el primero de ellos puede ser empleado como el bien numerario y suponga además que las correspondientes funciones de exceso de demanda de los otros dos bienes son de la forma:

$$z_2(1, p_2, p_3) = 2p_2^2 + 22p_2 - 13p_2p_3 - 64p_3 + 20p_3^2 + 48$$

$$z_3(1, p_2, p_3) = p_2 - 2p_3 + 2.$$

Encuentre el o los vectores de precios bajo los cuales existiría un equilibrio competitivo.

Ejercicio 6.8. Considere una economía donde se producen dos bienes (x, y) mediante dos factores de producción (K, L) y tecnologías de Leontief: por un lado, se requieren dos unidades de K y una de L para producir una de x y, por el otro, una unidad de K y una de L para producir una de y. La función de utilidad del único individuo en esta economía está dada por $u(x, y) = 3\log x + 2\log y$. Finalmente, Robinson Crusoe, pues así se llama el susodicho, cuenta con un total de 150 unidades de K y 100 unidades de L para la producción de los dos bienes de consumo.

a) Encuentre las asignaciones de producción y de consumo que son óptimas según Pareto.

b) Establezca los precios de los insumos y los productos que llevarían, en una economía competitiva, al resultado del inciso anterior.

Ejercicio 6.9. Considere una economía de intercambio competitivo con dos consumidores, dos periodos y un solo bien. La primera persona tiene una riqueza inicial de seis unidades de consumo presente, una función de utilidad $u_1(p,f) = pf$, donde p es el consumo presente y f es el consumo futuro, y además posee la habilidad de convertir una unidad de consumo presente en dos unidades de consumo futuro. Por otro lado, el segundo individuo tiene una riqueza inicial de doce unidades de consumo presente, una función de utilidad $u_2(p,f) = p^{2/3}f^{1/3}$ y la habilidad de convertir c unidades de consumo presente en $2\sqrt{c}$ unidades de consumo futuro.

a) Encuentre para cada uno de los individuos las demandas óptimas de consumo en el presente y en el futuro.

b) ¿A qué tasa de interés habría un equilibrio en esta economía?

Ejercicio 6.10. Considere una economía de intercambio con dos individuos, dos periodos, dos bienes y dos estados inciertos de la naturaleza en el segundo periodo. Esta incertidumbre sólo se manifiesta de la siguiente manera: los individuos participantes en la economía reciben en el segundo periodo dotaciones que dependen de cuál de los dos posibles estados de la naturaleza termina por ocurrir.

a) Señale cómo esta economía puede ser considerada como una economía de intercambio tradicional con seis bienes.

b) Suponga que la utilidad bajo certidumbre de cada persona $u_i(\cdot)$ es estrictamente cóncava, y suponga además que sus preferencias bajo incertidumbre se adecúan a la teoría de la utilidad esperada. Demuestre entonces que existe un equilibrio competitivo en esta economía.

VII. BIENESTAR SOCIAL

Un buen número de los ejercicios contenidos en este capítulo giran alrededor de un gran tema: las fallas de mercado que requieren una intervención gubernamental (aquí comúnmente de tipo impositivo). Puede consultarse al respecto cualquier libro cuyo tema principal sean las finanzas públicas.

Ejercicio 7.1. Una población de veinte pescadores depende de dos lagos para subsistir. La captura semanal de truchas en cada lago, F_1 y F_2, depende del número de personas que pesquen allí de la manera siguiente:

$$F_1(L_1) = 12L_1 - L_1^2$$

$$F_2(L_2) = 6L_2 \, .$$

Por otro lado, la costumbre dicta que todo lo pescado en los lagos tiene que ser dividido por partes iguales entre aquellos que pescaron allí.

a) ¿Cuántos pescadores irán típicamente a cada lago y cuántas truchas pescarán?

b) Demuestre que tal asignación de los recursos no es óptima.

Ejercicio 7.2. Siga considerando el enunciado del problema 7.1. Diseñe un esquema tributario que, respetando las costumbres comunitarias, llevaría al óptimo.

Ejercicio 7.3. Un fabricante de papel tiene una función de beneficios

$$\pi_1(y_1) = 6y_1 - y_1^2/2,$$

donde y_1 es el nivel de producción. Desafortunadamente su fábrica, que se encuentra a la orilla de un río, contamina el agua usada por una cervecería corriente abajo. Esta externalidad negativa entra en la función de beneficios de la segunda empresa como sigue:

$$\pi_2(y_2) = 6y_2 - y_2^2/2 - y_1y_2/2$$

donde y_2 es la cantidad producida de cerveza.

a) Para cada empresa encuentre el nivel competitivo de producción y los beneficios resultantes.

b) ¿Aumentarían los beneficios totales si se integraran las dos empresas bajo una sola administración?

Ejercicio 7.4. Describa un esquema tributario que pudiera conducir al mismo resultado obtenido en el último inciso del problema anterior.

Ejercicio 7.5. Una isla está habitada tan solo por dos personas, quienes consumen el bien privado x y el bien público s. La curva de posibilidades de producción de dichos bienes está dada por $x = 120 - s$, mientras que las funciones de utilidad de los individuos son de la forma

$$u_1(x, s) = \text{Min}\{x, 2s\}$$

$$u_2(x, s) = \text{Min}\{x, s\}.$$

a) Encuentre la curva de posibilidades de utilidad.

b) Encuentre el óptimo social de producción y consumo cuando la función de bienestar social es de la forma $B(u_1, u_2) = u_1 + u_2$, siguiendo a Bergson.

Ejercicio 7.6. Un monopolista enfrenta una curva de demanda de la forma $p(q) = q^{-1/2}$ y un costo unitario de producción igual a una constante c. Demuestre que el monopolista siempre producirá menos de lo que es socialmente óptimo.

Ejercicio 7.7. Suponga que en un campamento se encuentran vacacionando n excursionistas y que el beneficio, medido en dinero, que el campista i obtiene por pasar y_i días en el campamento depende de la estancia promedio de los otros $n - 1$ campistas. Más formalmente, tras definir el tiempo promedio que pasarán en el campamento el resto de los excursionistas como

$$x_i \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} y_j,$$

suponga que la función de beneficio para cada campista es de la forma

$$B(y_i, x_i) = (2 - y_i)y_i - x_i y_i.$$

a) Si cada excursionista decide pasar el mismo tiempo en el campamento que el resto, ¿cuál es el periodo de estancia que maximiza la suma de los beneficios de todos los campistas?

b) Dado un x_i fijo, ¿cuánto tiempo pasaría el excursionista i en el campamento si le cobran un precio p por día? Derive la función de demanda agregada de días a pasar en el campamento.

Ejercicio 7.8. Siga considerando el ejercicio anterior. Si la compañía que renta el campamento tiene poder monopólico, y un costo marginal igual a cero, ¿cuál sería el precio diario que cargaría a los excursionistas? Por otro lado, ¿a qué precio se maximizaría la utilidad total de los excursionistas?

Ejercicio 7.9. Considere una economía de intercambio con dos bienes (x, y) y dos consumidores con idénticas dotaciones iniciales $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Las funciones de utilidad respectivas son de la forma

$$u_1(x_1, y_1) = x_1^{1/2} y_1^{1/2},$$

$$u_2(x_2, y_2, y_1) = x_2^{1/2} y_2^{1/2} y_1^{1/2}.$$

a) Si cada agente maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, ¿cuál sería el equilibrio competitivo (es decir, la solución de mercado)?

b) Describa el conjunto de asignaciones óptimas según Pareto.

Ejercicio 7.10. Siga considerando el enunciado del problema 7.9. Suponga ahora que, dada la externalidad positiva que causa a la otra, se subsidia a la primera persona en su consumo del bien y con una tasa s. Suponga además que dicho subsidio es financiado con un impuesto de suma fija sobre la persona misma.

a) Dada la tasa s, derive el precio de equilibrio competitivo y las demandas correspondientes.

b) ¿Para cuál tasa s se obtiene un óptimo de Pareto?

VIII. RESPUESTAS AL CAPÍTULO I

1.1. Considere el vector $x = (1, 0, \ldots, 0)$ y cualquier matriz B negativa semidefinida. Multiplicando puede verificarse que $x'Bx = b_{11}$, por lo cual $b_{11} \leq 0$. Lo mismo puede hacerse para el resto de los elementos de la diagonal.

1.2. Considere por ejemplo la función $f(x) = x^3$. En $x^* = 0$, $f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) = 0$, y sin embargo x^* no es ni máximo ni mínimo local (es un punto de inflexión).

1.3. Por la proposición I.4, como la matriz B es positiva definida (semidefinida) entonces cada uno de sus valores propios (λ_i) es mayor (o igual) que cero. Además utilizando resultados del álgebra matricial, $|B| = \prod \lambda_i$ y $\text{tr}(B) = \sum \lambda_i$. Entonces, por el supuesto de la pregunta, los valores propios cumplen $\lambda_i > 0$ (para toda i). De aquí que $|B| > 0$ y $\text{tr}(B) > 0$.

1.4. *a)* Sean $x_1, x_2 \in A \cap B$. Dado que A y B son conjuntos convexos se cumple que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$ y $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in B$, donde $\lambda \in [0, 1]$. De aquí que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A \cap B$.

b) Sean $x_1, x_2 \in A$ y $y_1, y_2 \in B$. Sabemos que $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in A$, y $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in B$. Por tanto, $\lambda(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)(x_2 + y_2) \in A + B$ lo que implica que $\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 \in A + B$, donde $z_1 \equiv x_1 + y_1$, $z_2 \equiv x_2 + y_2$.

1.5. *a)* Sea $p \equiv (p_1, p_2, p_3)$ y supongamos que los vectores $w_1 \equiv (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ y $w_2 \equiv (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ están en el conjunto presupuestario P. Necesitamos mostrar que $\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 \in P$ para cualquier λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$.

Puesto que w_1 y w_2 son elementos de P, tenemos que $p \cdot w_i \leq m$ ($i = 1, 2$). Entonces:

$$p \cdot [\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2] = \lambda p \cdot w_1 + (1 - \lambda)p \cdot w_2 \leq \lambda m + (1 - \lambda)m = m$$

finalmente, puesto que $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $\lambda w_1 + (1 - \lambda) w_2 \geq 0$, así que $\lambda w_1 + (1 - \lambda) w_2 \in P$.

1.6. Si f y g son funciones cóncavas, entonces:

$$\lambda f(x^0) + (1-\lambda)f(x^1) \leq f(\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1)$$

$$\lambda g(x^0) + (1-\lambda)g(x^1) \leq g(\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1)$$

Sumando ambas desigualdades obtenemos el resultado:

$$\lambda[f(x^0) + g(x^0)] + (1-\lambda)[f(x^1) + g(x^1)] \leq (f+g)(\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1).$$

La demostración para la suma de funciones convexas es similar.

1.7. Sabemos que una función de producción es cóncava si los menores de la matriz hessiana cumplen las condiciones $|H_1| \leq 0$ y $|H_2| \geq 0$; es decir, si $f_{11} \leq 0$ y $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geq 0$. En nuestro caso:

$$f_{11} = \alpha(\alpha-1)(x_1+x_2)^{\alpha-2},\ f_{22} = \alpha(\alpha-1)(x_1+x_2)^{\alpha-2},\ f_{12} = \alpha(\alpha-1)(x_1+x_2)^{\alpha-2}$$

por lo tanto $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$ independientemente del valor de α. Pero, por otro lado, $f_{11} = \alpha(\alpha-1)(x_1+x_2)^{\alpha-2} \leq 0$ si y sólo si $0 \leq \alpha \leq 1$.

1.8. *a)* Defina $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, y note que:

$$\lambda f(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{v}) = \lambda u_1 u_2 + (1-\lambda)v_1 v_2$$

$$f(\lambda \boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) = \lambda^2 u_1 u_2 + \lambda(1-\lambda)(u_1 v_2 + u_2 v_1) + (1-\lambda)^2 v_1 v_2 .$$

Ahora bien, para que una función sea convexa (cóncava) requerimos que

$$\lambda f(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{v}) - f(\lambda \boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) \geq (\leq)\ 0 .$$

Sin embargo, para la función que nos ocupa:

$$\lambda f(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{v}) - f(\lambda \boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) = \lambda(1-\lambda)(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)$$

cuyo signo está indefinido. Por lo tanto la función no es cóncava ni convexa.

b) En este segundo caso,

$$\lambda f(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{v}) = \lambda(u_1 u_2)^{1/2} + (1-\lambda)(v_1 v_2)^{1/2}$$

$$f(\lambda \boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) = \left[\lambda^2 u_1 u_2 + \lambda(1-\lambda)(u_1 v_2 + u_2 v_1) + (1-\lambda)^2 v_1 v_2\right]^{1/2}$$

En consecuencia, para verificar concavidad requerimos que

$$\lambda(u_1u_2)^{1/2} + (1-\lambda)(v_1v_2)^{1/2} < \left[\lambda^2 u_1u_2 + \lambda(1-\lambda)(u_1v_2 + u_2v_1) + (1-\lambda)^2 v_1v_2\right]^{1/2}$$

(la desigualdad sería al revés en caso de que la función fuera convexa). Elevando al cuadrado en ambos lados de la última expresión obtenemos:

$$u_1v_2 + u_2v_1 > 2\,(u_1v_2u_2v_1)^{1/2} \Leftrightarrow [(u_1v_2)^{1/2} - (u_2v_1)^{1/2}]^2 > 0,$$

lo cual siempre se cumple. Por tanto, la función es cóncava.

c) Para esta función,

$$\lambda f(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{v}) = \lambda(u_1^2 + u_2^2) + (1-\lambda)(v_1^2 + v_2^2)$$

$$f(\lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) = [\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1]^2 + [\lambda u_2 + (1-\lambda)v_2]^2$$

Restando las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$\lambda f(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{v}) - f(\lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) = \lambda(1-\lambda)[(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2] > 0.$$

Es decir, $\lambda f(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{v}) > f(\lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v})$ por lo que la función es convexa.

1.9. *a)* Como el determinante del hessiano es igual a -1, la función no es cóncava ni convexa.

b) $f_{11} = -\frac{1}{4}x_1^{-3/2}x_2^{1/2}$, $f_{22} = -\frac{1}{4}x_1^{1/2}x_2^{-3/2}$, $f_{12} = f_{21} = \frac{1}{4}(x_1x_2)^{-1/2}$. Como $f_{11} < 0$ y $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$ la función es cóncava.

c) $f_{11} = 2$, $f_{22} = 2$, $f_{12} = f_{21} = 0$. Dado que $f_{11} > 0$, $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 4 > 0$, la función es convexa.

1.10. Notemos primero que:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda^2x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2x_2^2.$$

Ahora bien, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_2 \geq x_1$. Entonces, $x_2^2 \geq x_1^2$ y

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1)^2 = x_1^2,$$

por lo que $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq f(x_1)$. Así pues, la función es cuasicóncava. Siguiendo el mismo razonamiento, pero ahora empleando x_2, obtenemos:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq f(x_2).$$

En suma, la función es cuasicóncava y cuasiconvexa simultáneamente.

1.11. Como f es cóncava,

$$\lambda f(\boldsymbol{x}^0) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^1) \leq f(\lambda \boldsymbol{x}^0 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^1).$$

Supongamos ahora que $f(\boldsymbol{x}^1) \geq f(\boldsymbol{x}^0)$, entonces

$$\lambda f(\boldsymbol{x}^0) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^1) \geq f(\boldsymbol{x}^0).$$

Combinando finalmente ambos resultados obtenemos:

$$f(\lambda \boldsymbol{x}^0 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^1) \geq f(\boldsymbol{x}^0),$$

la cual es la definición de cuasiconcavidad.

1.12. *a)* $|\boldsymbol{H}_2^o| = -(\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta})^2 < 0$ y $|\boldsymbol{H}_3^o| = x_1^{3\alpha-2} x_2^{3\beta-2}(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta) > 0$, por tanto la función es cuasicóncava.

b) La función es cóncava, pues $f_{11} = -2$, $f_{22} = -2$, $f_{12} = 0$, lo que implica $|\boldsymbol{H}_2| = 4 > 0$. Empleando ahora el ejercicio 1.11, la función es cuasicóncava.

c) Como $f_1 = 1$, $f_2 = -x_2^{-1}$, $f_{11} = 0$, $f_{22} = x_2^{-2}$ y $f_{12} = 0$, entonces

$$|\boldsymbol{H}^o| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -x_2^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \\ -x_2^{-1} & 0 & x_2^{-2} \end{vmatrix}.$$

Ahora bien, $|\boldsymbol{H}_2^o| = -1 < 0$ y $|\boldsymbol{H}_3^o| = -x_2^{-2} < 0$, por lo que la función no es cuasicóncava.

1.13. Como f es homogénea de grado k, $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^k f(\boldsymbol{x})$. Derivando ambos lados de tal ecuación con respecto a x_i obtenemos la solución:

$$\frac{\partial f(\lambda \boldsymbol{x})}{\partial \lambda x_i} \frac{\partial (\lambda x_i)}{\partial x_i} = \lambda^k \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f(\lambda \boldsymbol{x})}{\partial \lambda x_i} = \lambda^{k-1} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}.$$

1.14. Puesto que f es homogénea de grado k,

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Por lo que, derivando respecto a λ en ambos lados de la igualdad, se tiene que

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n = k\lambda^{k-1} f(x);$$

y finalmente, evaluando esta última expresión en $\lambda = 1$ se obtiene el resultado.

1.15. Si $\beta = 1$ entonces $f(x) = \text{Min}\{x_1 + x_2, x_3\}$, y nótese que

$$f(\lambda x) = \text{Min}\{\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_3\} = \lambda \,\text{Min}\{x_1 + x_2, x_3\}.$$

1.16. Como $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 + \lambda x_2)^\alpha = [\lambda(x_1 + x_2)]^\alpha = \lambda^\alpha (x_1 + x_2)^\alpha$, la función de producción es homogénea de grado α. Por lo tanto, para que exhiba rendimientos constantes a escala es necesario que $\alpha = 1$.

1.17. Las derivadas parciales son:

$$f_1 = \frac{1}{\rho}\left(a_1 x_1^\rho + a_2 x_2^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \rho a_1 x_1^{\rho-1} = a_1 \left(\frac{y}{x_1}\right)^{1-\rho} > 0,$$

$$f_2 = \frac{1}{\rho}\left(a_1 x_1^\rho + a_2 x_2^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \rho a_2 x_2^{\rho-1} = a_2 \left(\frac{y}{x_2}\right)^{1-\rho} > 0,$$

$$f_{11} = a_1(1-\rho)\left(\frac{y}{x_1}\right)^{-\rho} \frac{x_1 f_1 - y}{x_1^2},$$

$$f_{22} = a_2(1-\rho)\left(\frac{y}{x_2}\right)^{-\rho} \frac{x_2 f_2 - y}{x_2^2},$$

$$f_{12} = a_2(1-\rho)\left(\frac{y}{x_2}\right)^{-\rho} \frac{x_2 f_1}{x_2^2} > 0.$$

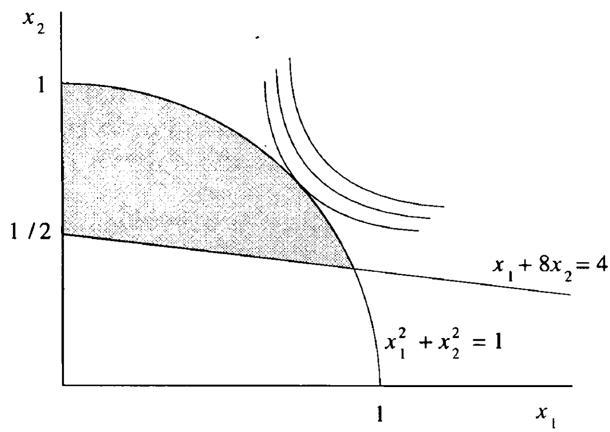
Se afirma ahora que, como la función es homogénea de grado uno, f_{11} y f_{22} son negativas. Por ejemplo, la primera expresión es negativa pues, por el teorema de Euler, $y = f_1 x_1 + f_2 x_2$; de aquí que $f_1 x_1 - y = -f_2 x_2 < 0$.

Por consiguiente, $|H^o|$ es de la forma:

$$\begin{vmatrix} 0 & + & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \Rightarrow |H_2^o| < 0, \quad |H_3^o| > 0,$$

lo que implica a su vez que la función es cuasicóncava.

1.18. Como muestra la Gráfica VIII.1, la región factible es un conjunto convexo. De hecho, $g_1(x) = 4 - x_1 - 8x_2$ y $g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ son ambas funciones convexas (y por tanto cuasiconvexas). Más aún, por el ejercicio 1.8a, la función $f(x)$ es cuasicóncava. Por tanto, al menos la primera parte de la Proposición I.12 es satisfecha.



Gráfica VIII.1

Por otro lado, para que un punto satisfaga las condiciones de Kuhn-Tucker se requiere que, dado el lagrangeano

$$L(x, \lambda) = x_1 x_2 - \lambda_1[4 - x_1 - 8x_2] - \lambda_2[x_1^2 + x_2^2 - 1],$$

las siguientes condiciones se cumplan:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 x_1 \leq 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 = 0 \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 8\lambda_1 - 2\lambda_2 x_2 \leq 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 = 0 \tag{8.2}$$

$$x_1 + 8x_2 - 4 \geq 0; \qquad (x_1 + 8x_2 - 4)\,\lambda_1 = 0 \tag{8.3}$$

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0; \qquad (1 - x_1^2 - x_2^2)\,\lambda_2 = 0 \tag{8.4}$$

Tras observar la gráfica, esperaríamos que en el óptimo $x_1^*, x_2^*, \lambda_2^* > 0$, mientras que $\lambda_1^* = 0$ (pues su restricción correspondiente no es efectiva en el óptimo). Verifiquemos tal conjetura. En este caso (8.1), (8.2) y (8.4) se convierten en igualdad y, así,

$$\left.\begin{array}{r} x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ x_1 + 8\lambda_1 - 2\lambda_2 x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{x_2}{2x_1} = \frac{x_1}{2x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

Ahora bien, empleando (8.4) y la igualdad $x_1 = x_2$, tenemos $2x_1^2 = 1$. Por tanto, $x_1^* = x_2^* = 1/\sqrt{2}$, $\lambda_2^* = 1/2$ y $f(x_1^*, x_2^*) = 1/2$.

1.19. El lagrangeano correspondiente al primer problema es de la forma

$$L(x, \lambda) = u(\boldsymbol{x}) - \lambda_u[g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}],$$

por lo que cualquier solución óptima $\boldsymbol{x}^*$, $\lambda_u^* \geq 0$ debe satisfacer:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*) - \lambda_u^* \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \tag{8.5}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*) - \lambda_u^* \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*)\right]\boldsymbol{x}^* = 0 \tag{8.6}$$

$$g(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{b} \leq 0 \tag{8.7}$$

$$[\boldsymbol{b} - g(\boldsymbol{x}^*)]\lambda_u^* = 0 \tag{8.8}$$

Por otro lado, el lagrangeano del segundo problema es de la forma

$$L_h(\boldsymbol{x}, \lambda) = h(u(\boldsymbol{x})) - \lambda_h[g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}].$$

Afirmamos ahora que la misma x^*, así como $\lambda_h^* \equiv h'(u(x^*))\lambda_u^*$, satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker para el nuevo problema. Para probar esto primero observe que, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{\partial h(u(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{dh}{du}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

También observe que $h'(\cdot) \geq 0$ puesto que h es una función monótona creciente. De aquí que $\lambda_h^* = h'(u(x^*))\lambda_u^* \geq 0$ si y sólo si $\lambda_u^* = 0$, lo cual es verdadero por hipótesis.

Más aún:

$$\frac{\partial L_h}{\partial x} = h'(u(x^*))\,\frac{\partial u}{\partial x}(x^*) - \lambda_h^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) = h'(u(x^*))\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x^*) - \lambda_u^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\right] \leq 0$$

La última desigualdad se debe a que el primer factor es positivo y el segundo es menor o igual que cero. Entonces es obvio que, por (8.6),

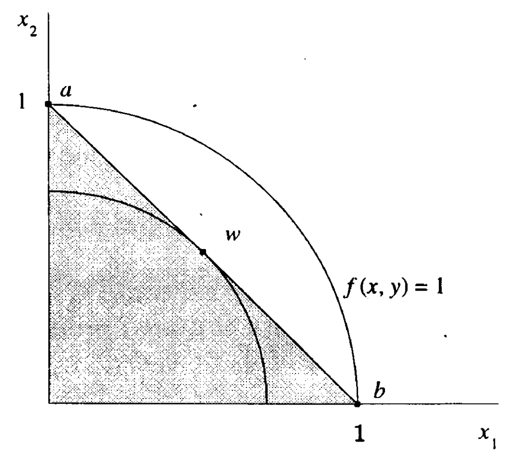
$$\frac{\partial L_h}{\partial x}\,x^* = h'(u(x^*))\,\frac{\partial L}{\partial x}(x^*) = 0.$$

También es evidente que $b - g(x^*) \leq 0$, puesto que esta ecuación es la misma que (8.7). Finalmente, por (8.8), $[b - g(x^*)]\lambda_u^* = [b - g(x^*)]\lambda_h^* h'(u(x^*)) = 0$.

1.20. Notemos que, aun cuando la región factible es un conjunto convexo, las condiciones de Kuhn-Tucker no son suficientes, puesto que la función objetivo es convexa:

$$f_{11} = 2 > 0, \quad |H| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0\,.$$

Mediante la gráfica VIII.2 es claro que los puntos óptimos son $a = (0, 1)$ y $b = (1, 0)$. Si no hubiésemos descubierto que las condiciones de Kuhn-Tucker no eran suficientes, entonces hubiésemos pensado, erróneamente, que el punto $w = (1/2, 1/2)$ era el óptimo.



Gráfica VIII.2

IX. RESPUESTAS AL CAPÍTULO II

2.1. Como la función Cobb-Douglas exhibe cuasiconcavidad estricta y no saciamiento, sabemos que todos los bienes serán consumidos (la solución será interior). Por tanto, dado el lagrangeano

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_i} - \lambda(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n - m),$$

las condiciones de optimalidad son de la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \theta_i \prod_{j \neq i} x_j^{\theta_j} x_i^{\theta_i - 1} - \lambda p_i = 0 .$$

Ahora bien, esta última ecuación puede reescribirse como

$$\lambda = \frac{\theta_i \prod_{j \neq i} x_j^{\theta_j} x_i^{\theta_i - 1}}{p_i} = \frac{\theta_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\theta_j}}{p_i x_i} \quad ;$$

por tanto, para cualquier par de bienes i y k,

$$\frac{\theta_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\theta_j}}{p_i x_i} = \frac{\theta_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{\theta_j}}{p_k x_k} \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{\theta_k p_i x_i}{\theta_i p_k} .$$

Sustituyendo la última ecuación en la restricción presupuestal,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\theta_k p_i x_i}{\theta_i p_k} = \frac{p_i x_i}{\theta_i} \sum_{k=1}^{n} \theta_k = m .$$

La última igualdad y el hecho que $\sum \theta_i = 1$ nos llevan directamente a la demanda óptima del bien i:

$$x_i(p, m) = \frac{\theta_i m}{p_i} .$$

Finalmente, la función indirecta de utilidad puede ser encontrada sustituyendo las demandas marshallianas anteriores en la función de utilidad:

$$v(\boldsymbol{p}, m) = u(x(\boldsymbol{p}, m)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_i^{\theta_i} m^{\theta_i}}{p_i^{\theta_i}} = m \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta_i}{p_i} \right)^{\theta_i} .$$

2.2. Para contestar la pregunta puede resolverse el siguiente problema:

$$e\,(\boldsymbol{p}, u) = \text{Min} \quad \sum_i p_i x_i$$
$$\text{s. a: } \prod_i x_i^{\theta_i} \geq u .$$

Pero es preferible tomar un atajo: como en el óptimo $m = e(\boldsymbol{p}, u)$ y $v(\boldsymbol{p}, m) = u$, entonces podemos usar la solución del ejercicio 2.1 para obtener la función de gasto:

$$e(\boldsymbol{p}, u) \prod_i \left(\frac{\theta_i}{p_i} \right)^{\theta_i} = u \quad \Rightarrow \quad e(\boldsymbol{p}, u) = u \prod_i \left(\frac{p_i}{\theta_i} \right)^{\theta_i} .$$

Las demandas compensadas pueden ahora derivarse usando el lema de Shepard:

$$h_i(\boldsymbol{p}, u) = \frac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_i} = u \frac{\theta_i p_i^{\theta_i - 1} \prod_{j \neq i} p_j^{\theta_j}}{\prod_j \theta_j^{\theta_j}} = u \frac{\theta_i}{p_i} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{\theta_j} \right)^{\theta_j} .$$

2.3. Usando la función de utilidad indirecta encontrada en el ejercicio 2.1,

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \theta_j^{\theta_j}}{\prod_{j=1}^{n} p_j^{\theta_j}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{m \prod_{j=1}^{n} \theta_j^{\theta_j} p_i^{-\theta_i}}{\prod_{j \neq i} p_j^{\theta_j}} = \frac{-\theta_i m \prod_{j=1}^{n} \theta_j^{\theta_j}}{p_i \prod_{j=1}^{n} p_j^{\theta_j}} .$$

El negativo del cociente de esas dos derivadas lleva a la identidad de Roy para cualquier bien i:

$$\frac{-\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial m} = \frac{\theta_i m}{p_i} = x_i(\boldsymbol{p}, m) .$$

2.4. Cualquier canasta (x_1, x_2) que maximice esa función de utilidad debe encontrarse sobre la recta $x_2 = \alpha_1 x_1/\alpha_2$. Esto es porque las curvas de indiferencia correspondientes tienen forma de escuadra (¡grafíquelas!). Empleando ahora la ecuación anterior y la restricción presupuestaria,

$$p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) x_1 = m$$

obtenemos entonces la demanda de la primera mercancía y también, volviendo a emplear la expresión de la recta, la demanda de la segunda:

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha_2 m}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2}, \quad x_2(p, m) = \frac{\alpha_1 m}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2}.$$

Por otro lado, las demandas hicksianas y la función de gasto se calculan resolviendo el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ &\text{s.a:} \quad \text{Min}\left\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\right\} = u. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Como esta última restricción implica que

$$x_1 \geq \frac{u}{\alpha_1} \text{ y } x_2 \geq \frac{u}{\alpha_2},$$

de allí se sigue que, para minimizar el gasto necesario para obtener u, las demandas hicksianas son de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(p, u) = \frac{u}{\alpha_1} \\ x_2 &= h_2(p, u) = \frac{u}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en (9.1) obtenemos finalmente la función de gasto:

$$e(p, u) = \left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \frac{p_2}{\alpha_2} \right) u .$$

2.5. *a)* Como la función de utilidad es cuasicóncava (compruébelo), el problema está bien definido y el lagrangeano

$$L(x, \lambda) = x_1(1 + x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

nos lleva a la siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + x_2 - \lambda p_1 \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } x_1 > 0) \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } x_2 > 0) \,. \tag{9.3}$$

Suponiendo primero que $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, y empleando (9.2) y (9.3), obtenemos:

$$\frac{1 + x_2}{p_1} = \frac{x_1}{p_2} \Rightarrow x_1 = \frac{p_2(1 + x_2)}{p_1} \,.$$

Por tanto, usando la restricción presupuestaria,

$$p_1\left(\frac{p_2(1 + x_2)}{p_1}\right) + p_2x_2 = m \Rightarrow x_2 = \frac{m - p_2}{2p_2} \text{ y } x_1 = \frac{m + p_2}{2p_1}.$$

Ahora exploremos las otras posibilidades. Suponiendo que $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ entonces, por (9.3), $\lambda = 0$ y así, por (9.2), $1 + x_2 \leq 0$ lo cual es imposible. La otra posibilidad es que $x_1 > 0$, $x_2 = 0$. En este caso, por (9.2), $1 - \lambda p_1 = 0$, lo cual a su vez implica que $\lambda = 1/p_1 > 0$. Dado que esto es válido, puede emplearse ahora la restricción presupuestaria para encontrar que $x_1 = m/p_1$. Es importante notar que, usando (9.3), $x_1 - \lambda p_2 = m/p_1 - p_2/p_1 \leq 0$ siempre y cuando $m \leq p_2$.

En resumen:

$$x_1 = \begin{cases} \dfrac{m + p_2}{2p_1} & \text{si } \; m > p_2 \\ \dfrac{m}{p_1} & \text{de otra manera} \end{cases} \qquad x_2 = \begin{cases} \dfrac{m - p_2}{2p_2} & \text{si } \; m > p_2 \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

b) Supongamos primero que $m > p_2$. Entonces la elasticidad ingreso del primer bien es

$$\eta_1 = \frac{m}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial m} = \frac{m}{x_1}\frac{1}{2p_1} = \frac{m(2p_1)}{(m + p_2)}\frac{1}{(2p_1)} = \frac{m}{m + p_2} < 1$$

y la de la otra mercancía es

$$\eta_2 = \frac{m}{x_2}\frac{\partial x_2}{\partial m} = \frac{m}{x_2}\frac{1}{2p_2} = \frac{m(2p_2)}{(m-p_2)}\frac{1}{(2p_2)} = \frac{m}{m-p_2} > 1 .$$

En suma, si $m > p_2$, el primer bien es necesario y el otro suntuoso.

Por otro lado, si $m \leq p_2$, entonces

$$\eta_1 = \frac{m}{x_1}\frac{1}{p_1} = 1 \ , \ \eta_2 = 0,$$

por lo que, ahora, ¡el primer bien es suntuario y el otro necesario!

2.6. Supongamos primero que $\sigma = 1$. Entonces la función correspondiente es del tipo Cobb-Douglas (tras una transformación logarítmica), por lo que las respuestas son similares a las dadas en el Ejercicio 2.1, haciendo $n = 2$.

Ahora consideremos el caso cuando $\sigma > 1$. Como la función correspondiente es cuasicóncava (compruébese esta afirmación), el problema está bien definido y podemos resolverlo a través del lagrangeano

$$L(x, \lambda) = (a_1x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2x_2)^{1-1/\sigma} - \lambda\left(p_1x_1 + p_2x_2 - m\right).$$

Más aún, como la solución es interior (¿por qué?), las condiciones de primer orden pueden escribirse con igualdad:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = a_1^{1-1/\sigma}\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)x_1^{-1/\sigma} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = a_2^{1-1/\sigma}\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)x_2^{-1/\sigma} - \lambda p_2 = 0$$

Ahora bien, despejando la λ de las dos últimas ecuaciones y expresando la demanda de un bien en términos del otro obtenemos:

$$\frac{a_1^{1-1/\sigma}\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)x_1^{-1/\sigma}}{p_1} = \lambda = \frac{a_2^{1-1/\sigma}\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)x_2^{-1/\sigma}}{p_2}$$

$$\Rightarrow \ x_2 = (a_1/a_2)^{1-\sigma}(p_2/p_1)^{-\sigma}x_1 , \tag{9.4}$$

por lo que la restricción presupuestaria puede ahora escribirse como

$$m = x_1[p_1 + (a_1/a_2)^{1-\sigma}p_2(p_2/p_1)^{-\sigma}]$$

y, por consiguiente,

$$x_1(p, m) = \frac{p_1^{-\sigma} a_2^{1-\sigma} m}{(a_2 p_1)^{1-\sigma} + (a_1 p_2)^{1-\sigma}}. \tag{9.5}$$

Finalmente, por simetría puede obtenerse la demanda del otro bien:

$$x_2(p, m) = \frac{p_2^{-\sigma} a_1^{1-\sigma} m}{(a_2 p_1)^{1-\sigma} + (a_1 p_2)^{1-\sigma}}. \tag{9.6}$$

Ahora encontremos las demandas compensadas y la función de gasto. Requerimos para ello resolver el problema:

$$\text{Min } p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$\text{s. a: } (a_1 x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2 x_2)^{1-1/\sigma} = u. \tag{9.7}$$

Pero no es necesario establecer el correspondiente lagrangeano para encontrar la solución, pues bien podemos tomar un atajo. Dado que la relación entre las demandas de los dos bienes debe ser la misma tanto en el problema original como en el dual (¿por qué?), entonces podemos hacer de nueva cuenta uso de la ecuación (9.4), la cual, junto con la restricción (9.7) nos lleva a la siguiente expresión:

$$\left[a_1^{1-1/\sigma} + a_2^{1-1/\sigma} \left[(a_1/a_2)^{1-\sigma} (p_2/p_1)^{-\sigma} \right]^{1-1/\sigma} \right] x_1^{1-1/\sigma} = u.$$

Despejando ahora la demanda hicksiana del primer bien se obtiene, tras un poco de álgebra,

$$h_1(p, u) = \frac{a_1^{\sigma-1} p_2^{\sigma} u^{\sigma/(\sigma-1)}}{\left[(a_1 p_2)^{\sigma-1} + (a_2 p_1)^{\sigma-1} \right]^{\sigma/(\sigma-1)}} \tag{9.8}$$

y, por simetría,

$$h_2(p, u) = \frac{a_2^{\sigma-1} p_1^{\sigma} u^{\sigma/(\sigma-1)}}{\left[(a_1 p_2)^{\sigma-1} + (a_2 p_1)^{\sigma-1} \right]^{\sigma/(\sigma-1)}}. \tag{9.9}$$

En consecuencia, la función de gasto está dada por

$$e(p, u) = \frac{(a_1^{\sigma-1} p_2^{\sigma} p_1 + a_2^{\sigma-1} p_1^{\sigma} p_2)\, u^{\sigma/(\sigma-1)}}{[(a_1p_2)^{\sigma-1} + (a_2p_1)^{\sigma-1}]^{\sigma/(\sigma-1)}},$$

la cual se puede simplicar para encontrar finalmente que:

$$e(p, u) = \frac{p_1p_2u^{\sigma/(\sigma-1)}}{[(a_1p_2)^{\sigma-1} + (a_2p_1)^{\sigma-1}]^{1/(\sigma-1)}}. \tag{9.10}$$

Pero el problema aún no termina. Nos queda resolverlo para el caso cuando $\sigma < 1$, aunque, como pronto se verá, la solución casi se sigue de la encontrada para el caso $\sigma > 1$. Para empezar, como la función es también cuasicóncava (¡compruébelo!), el problema está bien definido y el lagrangeano es de la forma:

$$L(x, \lambda) = \left[(a_1x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2x_2)^{1-1/\sigma}\right]^{-1} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m).$$

Las condiciones de primer orden están dadas entonces por

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{-(1-1/\sigma)\, a_1^{1-1/\sigma}\, x_1^{-1/\sigma}}{[(a_1x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2x_2)^{1-1/\sigma}]^2} - \lambda p_1 = 0 \text{ y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{-(1-1/\sigma)\, a_2^{1-1/\sigma}\, x_2^{-1/\sigma}}{[(a_1x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2x_2)^{1-1/\sigma}]^2} - \lambda p_2 = 0.$$

Note sin embargo que, tras despejar λ de las dos ecuaciones anteriores obtenemos la relación

$$x_2 = (a_1/a_2)^{1-\sigma}\,(p_2/p_1)^{-\sigma}\, x_1,$$

la cual es idéntica a la ecuación (9.4). Por consiguiente, las demandas marshallianas para este último caso coinciden con las dadas en (9.5) y (9.6).

Por otro lado, para encontrar las demandas hicksianas y la función de gasto tendríamos teóricamente que resolver el problema:

$$\text{Min} \quad p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\text{s. a:} \quad [(a_1x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2x_2)^{1-1/\sigma}]^{-1} = u.$$

No obstante, esta última restricción es la misma que

$$(a_1x_1)^{1-1/\sigma} + (a_2x_2)^{1-1/\sigma} = u^{-1}.$$

Por lo tanto, la solución a este problema es exactamente la misma que para la del caso $\sigma > 1$, una vez que se reemplaza en las ecuaciones (9.8)-(9.10) la u por u^{-1}.

2.7. *a)* Para encontrar las demandas marshallianas no necesitamos resolver el problema de maximización, sino solamente hacer uso de la solución al Ejercicio 2.1, tras una traslación del origen. En efecto, la demanda del j-ésimo bien debe ser de la forma:

$$x_j(p, m) = (m - \sum_k p_k\bar{x}_k)\frac{\theta_j}{p_j} + \bar{x}_j. \tag{9.11}$$

El último sumando en la expresión anterior deriva del hecho que, para poder sobrevivir, el individuo tiene que consumir al menos $\bar{x}_j$ de cada uno de los bienes. Empleando ahora los resultados del Ejercicio 2.1, y notando que $m - \sum p_k \bar{x}_k$ es el ingreso discrecional (el cual se supone no-negativo) que le queda a la persona una vez que ha comprado la canasta de supervivencia, se justifica el resto de (9.11).

Finalmente, sustituyendo esta última ecuación en la función de útilidad obtenemos la función indirecta de utilidad:

$$v(p, m) = (m - \sum_k p_k\bar{x}_k)\prod_j (\theta_j/p_j)^{\theta_j}.$$

b) Para determinar las demandas hicksianas, y posteriormente la función de gasto, puede uno resolver el siguiente problema:

$$\text{Min} \sum_i p_ix_i$$

$$\text{s.a:} \prod_i (x_i - \bar{x}_i)^{\theta_i} = u.$$

Pero no es necesario, pues la solución correspondiente al caso del sistema Cobb-Douglas fue derivado en el Ejercicio 2.2, con la salvedad de que ahora el consumidor debe comprar su canasta de supervivencia antes que nada. Así pues, las demandas hicksianas y la función de gasto son de la forma:

$$h_i(p, u) = u\,\frac{\theta_i}{p_i}\prod_j \left(\frac{p_j}{\theta_j}\right)^{\theta_j} + \bar{x}_i$$

$$e(p, u) = u\prod_i \left(\frac{p_i}{\theta_i}\right)^{\theta_i} + \sum_j p_j \bar{x}_j.$$

2.8. *a)* Observe que $u(\boldsymbol{x})$ es cóncava (compruébelo). Por tanto el problema está bien definido y podemos resolverlo usando el lagrangeano:

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m).$$

Aparte de la restricción presupuestaria, las otras condiciones de primer orden son (en el interior, pues la utilidad marginal de cualquiera de los dos bienes se iría a infinito en el caso de que no hubiera consumo):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1^{-1/2} - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2^{-1/2} - \lambda p_2 = 0.$$

Igualando a cero las dos ecuaciones anteriores y despejando λ se sigue que

$$\frac{x_1^{-1/2}}{p_1} = \frac{2x_2^{-1/2}}{p_2} \Rightarrow x_1 = \frac{p_2^2\,x_2}{4p_1^2}. \tag{9.12}$$

Sustituyendo ahora esta última ecuación en la restricción presupuestaria,

$$m = p_1\left(\frac{p_2^2\,x_2}{4p_1^2}\right) + p_2\,x_2\,.$$

De allí puede uno despejar la demanda marshalliana del segundo bien para luego también obtener, empleando (9.12), la del primero:

$$x_2(p, m) = \frac{4p_1m}{p_2(p_2 + 4p_1)} \quad \text{y} \quad x_1(p, m) = \frac{p_2m}{p_1(p_2 + 4p_1)}\,. \tag{9.13}$$

Para encontrar la utilidad indirecta sustituimos ahora las soluciones anteriores en la función objetivo y, tras un poco de álgebra, obtenemos:

$$v(p, m) = 2\sqrt{m}\,\sqrt{p_2 + 4p_1}/\sqrt{p_1 p_2}\,. \tag{9.14}$$

b) Las demandas hicksianas resuelven el problema:

$$e\,(p, u) = \text{Min } \; p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$\text{s. a: } \; 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2} \geq u\,.$$

No es necesario, sin embargo, establecer el lagrangeano y derivar las condiciones de primer orden, pues es claro que acabaríamos por obtener la misma relación dada en (9.12). Empleando entonces tal ecuación en la nueva restricción, obtenemos la solución para el segundo bien y, consecuentemente, para el primero:

$$\frac{p_2}{p_1} x_2^{1/2} + 4x_2^{1/2} = u \;\Rightarrow\; h_2(p, u) = \frac{u^2 p_1^2}{(p_2 + 4p_1)^2}\,,\; h_1(p, u) = \frac{u^2 p_2^2}{4(p_2 + 4p_1)^2}\,.$$

c) Derivando las dos últimas expresiones del párrafo anterior obtenemos:

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = -\,\frac{2u^2 p_2^2}{(p_2 + 4p_1)^3} < 0\,,\quad \frac{\partial h_2}{\partial p_2} = -\,\frac{2u^2 p_1^2}{(p_2 + 4p_1)^3} < 0\,.$$

Mientras que los efectos cruzados son simétricos, pues

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} = \frac{8u^2 p_2 (p_2 + 4p_1)^2 - 8u^2 p_2^2 (p_2 + 4p_1)}{16\,(p_2 + 4p_1)^4} = \frac{2u^2 p_1 p_2}{(p_2 + 4p_1)^3}\,, \tag{9.15}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_1} = \frac{2u^2 p_1 (p_2 + 4p_1)^2 - 8u^2 p_1^2 (p_2 + 4p_1)}{(p_2 + 4p_1)^4} = \frac{2u^2 p_1 p_2}{(p_2 + 4p_1)^3}\,.$$

d) El lado izquierdo de tal ecuación de Slutsky puede calcularse derivando la demanda del primer bien, dada en (9.13), respecto al precio del segundo:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{m p_1 (p_2 + 4p_1) - p_1 p_2 m}{p_1^2\,(p_2 + 4p_1)^2} = \frac{4m}{(p_2 + 4p_1)^2}\,.$$

Así mismo, el lado derecho de dicha ecuación se puede reexpresar, empleando (9.15) y derivando (9.13) ahora respecto al ingreso, como:

$$\frac{2v(p,m)^2 p_1 p_2}{(p_2+4p_1)^3} - \frac{p_2}{p_1(p_2+4p_1)} x_2(p,m).$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones para $v(p, m)$ y $x_2(p, m)$ obtenidas en (9.14) y (9.13), obtenemos la igualdad:

$$\frac{8m}{(p_2+4p_1)^2} - \frac{4m}{(p_2+4p_1)^2} = \frac{4m}{(p_2+4p_1)^2}.$$

2.9. Diferenciando la utilidad indirecta obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i}{p_i}\left(\frac{m}{p_i}\right)^{\beta_i},$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \sum_k \frac{\alpha_k}{p_k}\left(\frac{m}{p_k}\right)^{\beta_k - 1}.$$

Así pues, por la identidad de Roy, la demanda ordinaria de la i-ésima mercancía está dada por:

$$x_i(p,m) = \frac{\alpha_i\, m^{\beta_i}\, p_i^{-(\beta_i+1)}}{\sum_k \alpha_k\, m^{\beta_k - 1}\, p_k^{-\beta_k}}. \tag{9.16}$$

Para obtener su elasticidad respecto al ingreso, η_i, uno puede derivar directamente la ecuación anterior. Esto, sin embargo, es muy tedioso. Mejor tomemos un atajo. Para empezar, por (9.16), la razón entre las demandas de dos bienes cualesquiera es:

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{\alpha_i\, m^{\beta_i}\, p_i^{-(\beta_i+1)}}{\alpha_j\, m^{\beta_j}\, p_j^{-(\beta_j+1)}}.$$

Tomando ahora logaritmos naturales en ambos lados de la ecuación anterior y derivando esta nueva expresión respecto al logaritmo del ingreso obtenemos:

$$\eta_i - \eta_j \equiv \frac{\partial\,(\log x_i - \log x_j)}{\partial \log m} = \beta_i - \beta_j. \tag{9.17}$$

Ahora bien, la propiedad de agregación de Engel, véase el Ejercicio 2.11, establece que

$$\sum_k w_k \eta_k = 1 \,,$$

donde w_k denota la proporción del gasto que es empleado en el consumo del bien k. Restando a ambos lados de la ecuación anterior η_i, y recordando que la suma de las proporciones debe ser igual a uno, obtenemos que

$$\sum_k w_k (\eta_k - \eta_i) = 1 - \eta_i \,.$$

Insertando ahora en la ecuación anterior el resultado obtenido en (9.17) llegamos finalmente al resultado:

$$\eta_i = 1 + \beta_i - \sum_k w_k \beta_k.$$

2.10. *a)* Notemos primero que ambas utilidades marginales son mayores que cero cuando $x_1 > 1$ y $x_2 \leq 1.6$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{(x_2 - 2)^2} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{2(x_1 - 1)}{(x_2 - 2)^3} > 0 \,.$$

Más aún, se pide al lector que verifique que la función es cuasicóncava sobre ese rango. Por tanto, la función de utilidad que nos ocupa es de buena ley y, siendo así, podemos resolver el problema mediante el lagrangeano

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 1)(x_2 - 2)^{-2} - \lambda_1(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) - \lambda_2(x_2 - 1.6) \,,$$

donde, como la restricción $x_1 > 1$ nunca puede ser efectiva, no necesitamos un multiplicador para ella (aunque, por supuesto, al final necesitaremos verificar dicha restricción). Las condiciones de optimalidad correspondientes son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{(x_2 - 2)^2} - p_1 \lambda_1 = 0 \tag{9.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{2(x_1 - 1)}{(x_2 - 2)^3} - p_2 \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } x_2 > 0) \tag{9.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_2 - 1.6 \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } \lambda_2 > 0). \tag{9.20}$$

A las condiciones anteriores debemos agregar la restricción presupuestaria (la cual es siempre efectiva dado que no hay saciamiento). Note además que (9.18) se puede reescribir como

$$\lambda_1 = \frac{1}{p_1(x_2 - 2)^2} \tag{9.21}$$

y que esta expresión es siempre positiva.

Procedamos ahora a obtener las demandas óptimas. Una primera posibilidad es que $x_2 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ (x_1 es siempre mayor que cero, lo mismo que λ_1). Siendo así, por la ecuación (9.20), $x_2 = 1.6$ y, por consiguiente $x_1 = (m - 1.6p_2)/p_1$. Usando estas demandas, así como (9.19) y (9.21), encontramos entonces que

$$\lambda_2 = \frac{2\,(m - 1.6p_2 - p_1)}{0.064p_1} - \frac{p_2}{0.16p_1},$$

donde esta última expresión es mayor o igual a cero siempre y cuando $m \geq 1.8\,p_2 + p_1$ (observe que entonces $m > 1.6p_2 + p_1$, por lo que, en efecto, $x_1 > 1$).

Una segunda posibilidad es que $0 < x_2 < 1.6$. En este caso $\lambda_2 = 0$ y, mediante (9.18) y (9.19), obtenemos que:

$$\frac{1}{p_1(x_2 - 2)^2} = -\frac{2(x_1 - 1)}{p_2(x_2 - 2)^3}.$$

La ecuación anterior implica a su vez que $x_2 = 2(1 + p_1/p_2) - 2(p_1/p_2)x_1$. Usando esta expresión y la restricción presupuestaria, podemos encontrar entonces la demanda del primer bien,

$$x_1 = \frac{2(p_1 + p_2) - m}{p_1},$$

y después encontrar la demanda del segundo,

$$x_2 = \frac{2(m - p_1 - p_2)}{p_2},$$

Nótese que $x_2 < 1.6$ siempre que $m < 1.8p_2 + p_1$, mientras que es mayor que cero si $m > p_1 + p_2$. Y también que, bajo ese rango, $x_1 > 1$.

La última posibilidad a considerar es que $x_2 = 0$. En este caso $\lambda_2 = 0$, $x_1 = m/p_1$ y $\lambda_1 = 1/4p_1$. Empleando estas tres últimas ecuaciones se sigue que la condición establecida en (9.19) se cumpliría si y sólo si

$$\frac{(m - p_1)}{4p_1} - \frac{p_2}{4p_1} \leq 0 \iff m \leq p_1 + p_2.$$

Pero si esta última restricción se cumpliese, entonces x_1 no podría ser mayor que la unidad. Por tanto esta última alternativa considerada no es factible.

En suma, la solución del problema es:

$$x_1(p, m) = \begin{cases} \dfrac{m - 1.6p_2}{p_1} & \text{si } m \geq 1.8p_2 + p_1 \\[2ex] \dfrac{2(p_1 + p_2) - m}{p_1} & \text{si } p_1 + p_2 \leq m \leq 1.8p_2 + p_1 \end{cases}$$

$$x_2(p, m) = \begin{cases} 1.6 & \text{si } m \geq 1.8p_2 + p_1 \\[2ex] \dfrac{2(m - p_1 - p_2)}{p_2} & \text{si } p_1 + p_2 \leq m \leq 1.8p_2 + p_1. \end{cases}$$

b) Por el inciso anterior, $x_1 = (2(p_1 + p_2) - m)/p_1$ bajo ese rango de ingreso. Por tanto, $\partial x_1/\partial m = -1/p_1 < 0$.

c) Si $m = 1$, $p_1 = 1/2$ y $p_2 = 1/3$, entonces $p_1 + p_2 \leq m \leq 1.8p_2 + p_1$. Por tanto, la derivada parcial correspondiente sería:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{m - 2p_2}{p_1^2},$$

la cual toma el valor de 4/3 en ese punto. Es decir, el primer bien es Giffen bajo ese vector de precios e ingreso.

2.11. *a)* Derivando la restricción presupuestaria respecto al ingreso obtenemos:

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial m} = 1,$$

y allí se sigue de inmediato la relación de Engel.

b) Derivando ahora la restricción presupuestaria respecto a un precio obtenemos:

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + x_k = 0.$$

Multiplicando por p_k/m en ambos lados de esa ecuación podemos establecer entonces la relación de Cournot.

c) Sabemos que $x_i(\boldsymbol{p}, m)$ es una función homogénea de grado cero. Por tanto, mediante el teorema de Euler (véase el ejercicio 1.14), la siguiente igualdad es cierta:

$$\sum_k p_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + m \frac{\partial x_i}{\partial m} = 0$$

Multiplicando ahora por $1/x_i$ en ambos lados de esa ecuación se llega a dicha relación.

2.12. Por el lema de Shephard $\partial e(\boldsymbol{p})/\partial p_i = h_i(\boldsymbol{p}, u)$, por lo que entonces

$$\frac{\partial \log e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial \log p_i} = \frac{p_i}{e(\boldsymbol{p}, u)} \frac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_i} = \frac{p_i h_i(\boldsymbol{p}, u)}{e(\boldsymbol{p}, u)}.$$

Pero, $e(\boldsymbol{p}, u) = m$ y $h_i(\boldsymbol{p}, u) = x_i(\boldsymbol{p}, m)$ en el óptimo. Por tanto, la primera igualdad a verificar es cierta.

Para establecer la otra igualdad notemos primero que, derivando el logaritmo y cancelando en el numerador y el denominador $v(\boldsymbol{p}, m)$,

$$\frac{\partial \log v(\boldsymbol{p}, m)/\partial \log p_i}{\sum_k \partial \log v(\boldsymbol{p}, m)/\partial \log p_k} = \frac{p_i\, \partial v(\boldsymbol{p}, m)/\partial p_i}{\sum_k p_k\, \partial v(\boldsymbol{p}, m)/\partial p_k}. \tag{9.22}$$

Ahora bien, por la identidad de Roy, la derivada parcial $\partial v/\partial p_i$ puede reemplazarse en la ecuación anterior por $-x_i \partial v/\partial m$. Haciendo esto, el lado derecho de (9.22) puede reescribirse como

$$\frac{p_i x_i(\boldsymbol{p}, m)}{\sum_k p_k g_k(\boldsymbol{p}, m)} = \frac{p_i x_i(\boldsymbol{p}, m)}{m} = w_i.$$

2.13. Supongamos, por el contrario, que todos los bienes j son complementos del bien i. Dado que $h_i(\boldsymbol{p}, u)$ es homogénea de grado cero en los precios, entonces, por el teorema de Euler, la siguiente ecuación debe cumplirse:

$$p_1 \frac{\partial h_i(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial h_i(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_n} = 0 . \tag{9.23}$$

Pero como el efecto propio de sustitución, $\partial h_i/\partial p_i$, es siempre no-negativo, entonces (9.23) impide que las otras derivadas parciales que aparecen en (9.23) sean todas negativas.

Finalmente, en el caso de preferencias tipo Leontief, examinadas en el Ejercicio 2.4, los bienes no son complementos o sustitutos netos. Es decir, $\partial h_i/\partial p_j = 0$, para toda j. Esto, sin embargo, no contradice (9.23).

2.14. Sabemos que $x_i(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, u)) = h_i(\boldsymbol{p}, u)$. Por tanto, podemos establecer, vía el lema de Shepard, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_i} = \frac{\theta_i e(\boldsymbol{p}, u)}{p_i} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9.24}$$

El objetivo es encontrar una función $e(\boldsymbol{p}, u)$ que resuelva el sistema dado en (9.24). Dado que cada una de esas ecuaciones implica que la función de gasto es "isoelástica" en cada precio (¿por qué), entonces es natural conjeturar que su forma es multiplicativa en los precios:

$$e(\boldsymbol{p}, u) = f(u) \prod_k p_k^{\theta_k} ,$$

donde $f(u)$ es cualquier función monotónica de u.

Tal conjetura resulta ser válida, pues, derivando respecto a cada precio obtenemos (9.24):

$$\frac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_i} = \frac{\theta_i}{p_i} f(u) \prod_k p_k^{\theta_k} = \frac{\theta_i e(\boldsymbol{p}, u)}{p_i} .$$

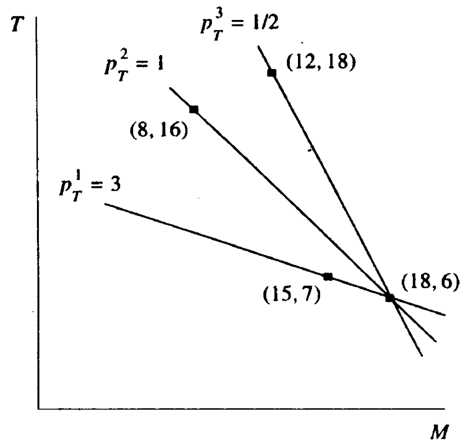
2.15. La dotación inicial diaria de Rubicunda es $(M, T) = (18, 6)$. Sean p_M y p_T los precios que determinaron los términos de intercambio en cada día (note que estos pudieron haber variado de un día a otro). Además fijemos $p_M = 1$, de tal manera que p_T es el precio de cada torta en término de un cierto número de malteadas. Los siguientes precios relativos prevalecieron entonces en cada uno de los tres días:

$$15 + 7p_T = 18 + 6p_T \;\Rightarrow\; p_T = 3$$

$$8 + 16p_T = 18 + 6p_T \;\Rightarrow\; p_T = 1$$

$$12 + 18p_T = 18 + 6p_T \quad \Rightarrow \quad p_T = 0.5.$$

A partir de esos precios relativos podemos dibujar la gráfica IX.1.



Gráfica IX.1.

Como es aparente en la gráfica, en el tercer día Rubicunda pudo haber adquirido la canasta (15, 7) o la canasta (8, 16), pero no lo hizo. Por tanto, es revelado que la canasta (12, 18) es preferida a las otras dos. Análogamente, en el segundo día Rubicunda pudo haber comprado (15, 7) pero eligió en su lugar (8, 16). Por ende, podemos afirmar que la rolliza niña fue más feliz en el tercer día y menos en el primero.

2.16. El problema que tiene que resolver Sócrates es:

$$\text{Max} \quad (x - 12)^{1/4}(y - 100)^{3/4}$$

$$\text{s. a:} \quad wx + y = 24w,$$

ya que el costo de oportunidad por no trabajar una hora es w. Las demandas óptimas son entonces (véase el Ejercicio 2.7):

$$x(w) = 15 - \frac{25}{w}, \quad y(w) = 9w + 25.$$

Así pues, su oferta de trabajo es $l(w) = 24 - x = 9 + 25/w$. Sin embargo, notemos que esta función sólo está definida cuando w es mayor o igual que $25/3$ (¿por qué?).

2.17. *a)* Observemos para empezar que el precio real de cada cerveza es $p_c = p + tw$, mientras que el precio real de una hora de ocio es $p_x = w + r$. Así pues, el problema que tiene que resolver Juanito es:

$$\text{Max} \quad u(c, x) = c^{\alpha}x^{1-\alpha}$$

$$\text{s. a:} \quad p_c c + p_x x = 24w .$$

Ahora bien, puesto que la función de utilidad de Juanito es del tipo Cobb-Douglas, y ésta fue examinada en el Ejercicio 2.1, sabemos que en el óptimo

$$c^*(p, r, w, t) = \frac{24w\alpha}{p + tw}, \quad x^*(p, r, w, t) = \frac{24w(1-\alpha)}{w + r}.$$

Por tanto, la oferta de trabajo de Juanito es

$$l^*(p, r, w, t) = 24 - tc^* - x^* = 24 - 24w\left[\frac{t\alpha}{p + tw} - \frac{(1-\alpha)}{w + r}\right]. \tag{9.25}$$

b) Si Juanito regresara cada lata, el precio real de la cerveza se transformaría en $p_r = p + (t + g)w$, y si no la regresara el precio sería $p_{nr} = p + d + tw$. Por tanto, Juanito regresará la lata si $p_r < p_{nr}$. Es decir, si $gw < d$.

¿Cómo afecta esto su oferta laboral? Si es el caso que $gw < d$, entonces podemos modelar este cambio como si la oferta laboral de Juanito, dada en (9.25), hubiera sufrido un incremento en t (de hecho, t se incrementa a $t + g$). Pero entonces sólo necesitamos derivar l con respecto a t para obtener:

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{24w\alpha p}{(wt + p)^2} < 0.$$

Es decir, si el depósito no es muy alto, Juanito regresa las latas y la cantidad de tiempo que trabaja decrece. Por otro lado, cuando $d < gw$ tenemos de manera similar que $\partial l/\partial p > 0$. Así pues, si el depósito es alto, Juanito no regresa las latas y sus horas de trabajo se incrementan.

2.18. *a)* El problema que enfrenta cada individuo es:

$$\text{Max} \quad u(c_1, c_2) = c_1^{3/4}c_2^{1/4} \tag{9.26}$$

$$\text{s. a.:} \quad p_1c_1 = (1-\tau)m - a$$

$$p_2c_2^{\cdot} = b + (1 + r)a,$$

donde a denota el ahorro (o desahorro) en el primer periodo. Nótese que como u es una función Cobb-Douglas, sabemos que no hay saciamiento y que la solución es interior.

Ahora bien, en lugar de resolver el problema en esa forma, bien vale la pena reescribir las dos condiciones presupuestarias que aparecen en (9.26) en una sola como sigue:

$$p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{(1+r)} \leq m. \tag{9.27}$$

Para obtener la ecuación anterior, sume las dos condiciones presupuestarias iniciales y emplee el hecho que, como el gobierno es justo, $b = (1 + r)\tau m$.

Así pues, el problema inicial ha sido transformado en uno donde la restricción presupuestaria es la famosa condición de Fisher. Empleando ahora los resultados obtenidos en el Ejercicio 2.1, y usando (9.27), llegamos a los consumos óptimos:

$$c_1(p, m, r) = \frac{3m}{4p_1} \text{ y } c_2(p, m, r) = \frac{(1+r)m}{4p_2}. \tag{9.28}$$

Finalmente, es claro que la intervención del gobierno no afecta las decisiones de los individuos. Esto es por dos razones: porque la pensión es la justa y porque, llegado el caso de impuestos muy altos, los individuos pueden pedir prestado en prenda de su pensión futura.

b) Antes de contestar la pregunta notemos que el ahorro óptimo, que está implícito en (9.26) y (9.28), es de la forma:

$$a(m, \tau) = \frac{(1-4\tau)m}{4}.$$

Así pues, si la tasa de gravamen, τ, es menor o igual que 25%, entonces la prohibición del gobierno es irrelevante para los individuos y la solución sigue siendo la dada en (9.28).

Sin embargo, ¿que sucedería si dicha tasa excede al 25%? Entonces los individuos tendrían que conformarse con consumir el ingreso corriente que tienen en cada periodo. Es decir, empleando las restricciones en (9.26),

$$c_1(p, m, \tau) = \frac{(1-\tau)m}{p_1} \text{ y } c_2(p, m, \tau) = \frac{(1+r)\tau m}{p_2}.$$

X. RESPUESTAS AL CAPÍTULO III

3.1. El valor esperado del juego es infinito, puesto que:

$$2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+\ldots+2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots \quad \to \infty .$$

Para tratar de resolver la paradoja, Bernoulli comienza por postular que la utilidad de obtener con certeza una cantidad W es cóncava, $u''(W)<0$, de tal manera que la utilidad marginal de un peso extra disminuye con la riqueza. Como un ejemplo del argumento de Bernoulli, suponga que una persona tiene una función de utilidad $u(W)=W^{1/2}$ y que por el momento carece de dinero. Por tanto, su utilidad esperada si es que participa en el juego puede obtenerse como:

$$Eu=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2},$$

donde esta última suma geométrica es aproximadamente igual a $2.414. A su vez, este nivel de utilidad esperada corresponde a la misma utilidad que el individuo tendría recibiendo con certeza alrededor de $5.827, lo cual parecería razonable.

No obstante, como Menger notó hace años, aun si el individuo calculase el valor subjetivo del juego a través de la utilidad esperada, la paradoja, tras una modificiación de su enunciado, persistiría. En efecto, siguiendo con la misma función de utilidad del caso anterior, considere ahora un juego en el que si la cruz se obtiene en la n–ésima tirada, entonces la recompensa del juego es $\$2^{2n}$. Se pide al lector que verifique que en este caso la utilidad esperada también se va a infinito.

¿Qué podemos aprender de lo anterior? O que la teoría de la utilidad esperada no es plausible, como han argüído mostrando ésta y otras paradojas economistas tan importantes como Allais, o que la utilidad debe ser por necesidad una función acotada (de tal manera que no pueda incrementarse de manera arbitaria en ningún juego).

3.2. Necesitamos mostrar que, bajo esas circunstancias, la utilidad esperada de Procopio si es que apuesta sería más alta que la utilidad de tener con certeza su riqueza inicial W:

$$(1-p)u(W-T)+pu(W+V)>u(W)\,. \tag{10.1}$$

Ahora bien, puesto que V y T son pequeños, podemos aproximar $u(W-T)$ y $u(W+V)$ mediante sus expansiones de Taylor de primer orden como sigue:

$$u(W-T)\approx u(W)-Tu'(W)\,,\ u(W+V)\approx u(W)+Vu'(W)\,.$$

De estas dos últimas expresiones se sigue que:

$$(1-p)u(W-T)+pu(W+V)\approx u(W)+u'(W)\,[pV-(1-p)T]\,.$$

En consecuencia, la desigualdad establecida en (10.1) se cumple en el margen si y sólo si $u'(W)[pV-(1-p)T]>0$. Pero, dado que la utilidad marginal es positiva, esto equivale a pedir que $pV-(1-p)T>0$. Así pues, Procopio siempre aceptará la apuesta cuando el juego es más que justo (y los montos V y T son lo suficientemente pequeños).

3.3. Sea p la probabilidad de que ocurra una crisis de acuerdo con Malena y q la probabilidad de que esto ocurra de acuerdo con Marilú. Para que pueda concretarse una apuesta, ellas tendrían que llegar a un acuerdo acerca de los momios bajo los cuales se regiría la apuesta: γ. Es decir, Malena ganaría \$1 si acierta y pagaría \$$\gamma$ si se equivoca, por cada peso apostado, y viceversa para Marilú.

Consideremos primero el problema que debe resolver Malena para decidir su apuesta óptima. Para que ella esté dispuesta a apostar una cantidad $X>0$ es necesario que su utilidad esperada satisfaga la siguiente condición:

$$pu(W+X)+(1-p)u(W-\gamma X)>u(W)\,, \tag{10.2}$$

donde W denota su riqueza inicial.

Haciendo ahora una expansión de Taylor de primer orden en el lado izquierdo de (10.2) obtenemos que tal condición se puede reescribir, en el margen, como:

$$p[u(W)+Xu'(W)]+(1-p)[u(W)-\gamma Xu'(W)]>u(W).$$

Pero, como puede verificar el lector, esta última desigualdad se cumpliría si y sólo si

$$pX + (1 - p)(-\gamma X) > 0\,,$$

lo cual a su vez requiere que

$$p/(1 - p) > \gamma\,. \tag{10.3}$$

Se pide al lector que replique los pasos anteriores para obtener que en el caso de Marilú la condición equivalente sería:

$$q/(1 - q) < \gamma\,. \tag{10.4}$$

Ahora bien, supongamos primero que ambas analistas coinciden en su apreciación acerca de la probabilidad de una crisis: $p = q$. Bajo esa eventualidad es claro que las desigualdades (10.3) y (10.4) no pueden satisfacerse de manera simultánea. Por tanto, Malena y Marilú no apostarían entre sí.

Por otro lado, si hay una discrepancia acerca de dichas probabilidades, entonces sí apostarían. Si, por ejemplo, $p > q$, entonces siempre podrían encontrar unos momios γ (de hecho un continuo de ellos) que satisfacerían las dos desigualdades de manera simultánea:

$$p/(1 - p) > \gamma > q/(1 - q)\,.$$

Así pues, la apuesta siempre se concretaría: Malena apostaría a que la crisis económica se presenta y Marilú a que no.

3.4. *a)* Sea rL la cantidad máxima que el consumidor estaría dispuesto a pagar por tal póliza (donde r es la proporción a pagar si se asegura por un monto L). Por definición, esta es la cantidad para la cual él estaría indiferente entre asegurarse o arriesgarse sin seguro:

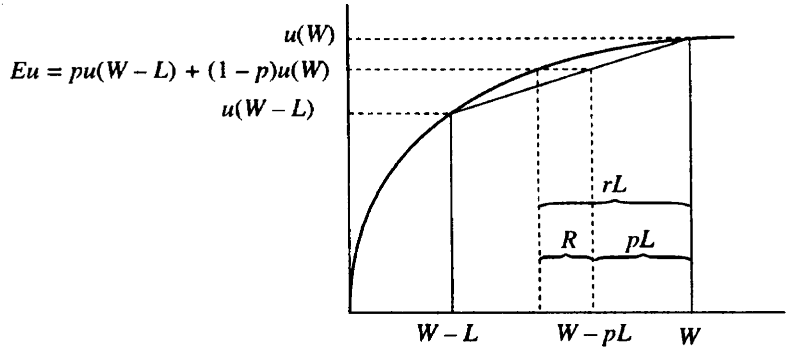
$$pu(W - L) + (1 - p)u(W) = pu(W - L + L - rL) + (1 - p)u(W - rL).$$

El lado derecho de esta ecuación puede simplificarse, para obtener

$$pu(W - L) + (1 - p)u(W) = u(W - rL). \tag{10.5}$$

El valor buscado, rL está implícito en la ecuación anterior.

b) Como $p(W-L)+(1-p)W = W-pL$, entonces el valor implícito en (10.5) puede ser ilustrado como aparece en la gráfica X.1.



Gráfica X.1.

De allí es claro que $R(p, L) = rL - pL$, como también se señala en la gráfica. Observemos además que (10.5) puede reescribirse para definir implícitamente la función de Pratt como aquella que resuelve:

$$pu(W-L)+(1-p)u(W) = u(W-pL-R(p, L)) . \tag{10.6}$$

Ahora bien, para probar la concavidad de R en p podemos derivar dos veces con respecto a esta última variable, en ambos lados de (10.6), para obtener:

$$0 = u''(W-pL-R(p,L))\left(L+\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 - \frac{\partial^2 R}{\partial p^2}u'(W-pL-R(p,L)).$$

Así pues,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \frac{u''(W-pL-R(p,L))\left(L+\dfrac{\partial R}{\partial p}\right)^2}{u'(W-pL-R(p,L))}.$$

Esta expresión es negativa pues la función de utilidad es estrictamente cóncava (debido a la aversión al riesgo) y la utilidad marginal es siempre positiva. Por ende, R es cóncava en p.

Para probar que la función de Pratt crece con el monto de la pérdida, derivemos ahora con respecto a L la ecuación (10.6):

$$-pu'(W-L)=u'(W-pL-R(p,L))\left(-p-\frac{\partial R}{\partial L}\right).$$

Consecuentemente,

$$\frac{\partial R}{\partial L}=\frac{p\,[u'(W-L)-u'(W-pL-R(p,L))]}{u'(W-pL-R(p,L))}.$$

Nótese que el signo de $\partial R/\partial L$ está determinado por el signo del numerador en el lado derecho de la ecuación. Ahora bien, dado que $pL+R(p,L)<L$ (véase la gráfica X.1), entonces

$$W-L<W-pL-R(p,L).$$

Por tanto, $u'(W-L)>u'(W-pL-R(p,L))$, ya que u es cóncava. Con lo cual podemos concluir que R es creciente en L.

3.5. La utilidad esperada, como función de la variable B, es:

$$Eu(B)=(1-p)u(W-rB)+pu(W-L+(1-r)B),$$

la cual tiene como derivada

$$Eu'(B)=-r(1-p)u'(W-rB)+p(1-r)u'(W-L+(1-r)B). \qquad (10.7)$$

Igualando a cero esta expresión y reagrupando términos se obtiene:

$$\frac{u'(W-L+(1-r)B)}{u'(W-rB)}=\left(\frac{r}{1-r}\right)\left(\frac{1-p}{p}\right). \qquad (10.8)$$

Sea B^* la (única) solución de dicha ecuación, la cual, afirmamos, tiene que ser por necesidad un máximo. Para comprobar esta última aseveración derivemos de nueva cuenta (10.7) para obtener la ecuación

$$r^2(1-p)\,u''(W-rB^*)+p(1-r)^2\,u''(W-L+(1-r)B^*),$$

la cual es negativa pues $0<p<1$, $0<r<1$ y u es estrictamente cóncava.

Suponga ahora que la póliza de seguro es actuarialmente justa, de tal manera que $r=p$. Entonces la condición (10.8) se convierte en

$$\frac{u'(W-L+(1-r)B)}{u'(W-rB)}=1,$$

lo cual implica que $u'(W - L + (1 - r)B^*) = u'(W - rB^*)$. Pero entonces, como u es creciente, $W - L + (1 - r)B^* = W - rB^*$. Así pues, $B^* = L$. Es decir, bajo una póliza actuarialmente justa, el individuo siempre se asegurará completamente (independientemente de su grado de aversión al riesgo, siempre que haya alguno).

3.6. La persona nunca se asegurará completamente contra el riesgo si es que la ecuación (10.7) evaluada en $B = L$ resulta ser negativa. Pues, siendo así, su utilidad esperada se incrementaría al reducir un poco el monto del seguro. Así pues, el individuo no se asegurará en su totalidad si

$$- r(1 - p)u'(W - rL) + p(1 - r)u'(W - L + (1 - r)L) < 0$$

o, de manera equivalente, si

$$\frac{u'(W - L + (1 - r)L)}{u'(W - rL)} = 1 < \left(\frac{r}{1 - r}\right)\left(\frac{1 - p}{p}\right).$$

Pero esta última desigualdad equivale a pedir que $r > p$. Por lo tanto, si la tasa de cotización no es actuarialmente justa, la persona nunca se asegurará totalmente contra el riesgo (independientemente de su grado de aversión a él).

3.7. La persona se asegurará al menos un poco si es que la ecuación (10.7) evaluada en $B = 0$ es positiva. Es decir, si

$$- r(1 - p)u'(W) + p(1 - r)u'(W - L) > 0,$$

lo cual equivale a pedir que

$$\frac{u'(W - L)}{u'(W)} > \frac{(1 - p)/p}{(1 - r)/r}.$$

Esto a su vez significa que la persona comprará algún seguro si la razón entre el beneficio marginal y el costo marginal de asegurarse es mayor que la razón entre los momios subjetivos del individuo de que no habrá pérdida y los momios dados por el mercado. Nótese, por cierto, que podría ser benéfico asegurarse aun si la tasa de cotización no es actuarialmente justa.

3.8. La condición (10.7) evaluada en el óptimo puede ser reescrita como:

$$\Phi(B^*, W) \equiv p(1 - r)u'(W - L + (1 - r)B^*) - r(1 - p)u'(W - rB^*) = 0.$$

¿Bajo qué condiciones es $dB^*/dW > 0$? Por el teorema de la función implícita,

$$\frac{dB^*}{dW} = -\frac{\partial\Phi/\partial W}{\partial\Phi/\partial B^*}.$$

Pero, como se comprobó en la respuesta al Ejercicio 3.5, el denominador del lado derecho de esta última igualdad es negativo. Por tanto, el signo de dB^*/dW es el mismo que el signo del numerador. Es decir, el seguro es un bien normal si y sólo si

$$p(1-r)u''(W-L+(1-r)B^*) - r(1-p)u''(W-rB^*) > 0\,.$$

A su vez esta desigualdad se cumple si y sólo si

$$\frac{u''(W-L+(1-r)B^*)}{u''(W-rB^*)} < \frac{r(1-p)}{p(1-r)} = \frac{u'(W-L+\ (1-r)B^*)}{u'(W-rB^*)}, \qquad (10.9)$$

donde hemos revertido la desigualdad, ya que dividimos por $u''(W-rB^*)$, y hemos usado para la igualdad la condición en el óptimo dada en (10.8).

Ahora bien, empleando la definición $R_a(W) \equiv -u''(W)/u'(W)$, la desigualdad en (10.9) puede reescribirse tras un poco de álgebra como:

$$R_a(W-L+(1-r)B^*) < R_a(W-rB^*). \qquad (10.10)$$

Tal es la condición para que el bien sea normal. Por otro lado, sabemos que $B^* \leq L$, y por tanto que

$$W-L+(1-r)B^* \leq W-rB^*\,. \qquad (10.11)$$

Así pues, por (10.10) y (10.11), la suposición de que la aversión absoluta al riesgo es creciente equivale a decir que la póliza es un bien normal.

3.9. La utilidad esperada de Porsi Acaso, como función de la cantidad gastada en tales equipos, es:

$$Eu(A) = P(A)u(W-L-A) + (1-P(A))u(W-A). \qquad (10.12)$$

Ahora bien, la condición $Eu(0) > 0$ es suficiente para que el nivel óptimo de gasto sea positivo. Es decir, tras derivar (10.12) y evaluar el resultado en $A = 0$, requerimos que

$$P'(0)[u(W-L) - u(W)] - P(0)u'(W-L) - (1-P(0))u'(W) > 0.$$

Pero esta desigualdad se cumple si y sólo si

$$-P'(0)[u(W)-u(W-L)] > P(0)u'(W-L)+(1-P(0))u'(W).$$

Nótese que ambos lados de la desigualdad son positivos, pues $P'(0) < 0$. Esta condición significa que, para que convenga gastar en equipos antirrobo, el aumento esperado en "útiles" al afectar en el margen el estado de la naturaleza debe ser mayor al incremento de la utilidad marginal esperada por tener más riqueza al no gastarla en aparatos antirrobo.

3.10. *a)* Como la industria es competitiva e indiferente hacia el riesgo, la prima π^e cargada a un individuo de e años de edad tiene que satisfacer:

$$\frac{e}{100}(\pi^e - c) + (1 - \frac{e}{100})\,\pi^e = 0.$$

Es decir, $\pi^e = (ec/100)$.

b) Recuerde que cualquier individuo tiene la opción de elegir entre el seguro del gobierno o el seguro privado. Es por tanto claro que el programa gubernamental no atraerá a los más jóvenes. Sea e^* la edad mínima en el grupo que se asegura con el gobierno (es decir, un individuo con esa edad sería indiferente entre contratar el seguro privado o el público).

Ahora bien, como el programa tiene que pagarse solo, el gobierno tiene que fijar su prima a partir de la edad promedio de su grupo asegurado. Dado que la distribución de la edad de la población es uniforme, éste promedio está dado por $(90 + e^*)/2$. Es decir, la prima general cargada por el gobierno tiene que ser:

$$\pi^g = \frac{(90+e^*)c}{200}.$$

Así pues, usando esta última ecuación y la respuesta al inciso anterior, para una persona con edad e^* que fuese indiferente entre ambas pólizas tiene que cumplirse que:

$$\frac{(90+e^*)c}{200} = \frac{e^*c}{100}.$$

Pero entonces $e^* = 90$. Esto demuestra que la póliza del gobierno podría sólo atraer a las personas de 90 años (los cuales son de hecho indiferentes a los dos tipos de seguros).

3.11. *a)* Para que la función de utilidad sea válida necesitamos requerir de entrada que la utilidad marginal sea positiva: $u'(W) = 2aW + b > 0$. Más aún, para que haya aversión al riesgo se requiere concavidad estricta: $u''(W) = 2a < 0$. Por tanto, requerimos que $a < 0$. Pero entonces también debemos requerir que $b > 0$, pues de otra manera no habría W que satisfaciera la desigualdad $0 < W < -b/2a$.

b) La medida de aversión absoluta al riesgo está dada por

$$R_a(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = -\frac{2a}{2aW+b},$$

la cual es creciente en W pues

$$R_a'(W) \equiv \frac{4a^2}{(2aW+b)^2} > 0.$$

Por otro lado, la medida de aversión relativa al riesgo es

$$R_r(W) \equiv -\frac{Wu''(W)}{u'(W)} = -\frac{2aW}{2aW+b},$$

la cual es también creciente en W ya que

$$R_r'(W) = -\frac{2ab}{(2aW+b)^2} > 0.$$

Sobra añadir que no es muy plausible el pensar que la aversión al riesgo se incremente con la riqueza.

3.12. *a)* La riqueza terminal (aleatoria) de Precavida, una vez distribuidos los huevos en las dos canastas, está dada por:

$$r(1-\alpha)W + \rho\alpha W = W(r + \alpha\theta).$$

Así pues, ella tiene que maximizar respecto a α la utilidad esperada

$$Eu(\alpha) = \int [aW^2(r+\alpha\theta)^2 + bW(r+\alpha\theta)]\, f(\theta)\, d\theta,$$

donde la integral está definida sobre cualquiera que sea el soporte de la densidad.

Desarrollando los términos dentro de la integral anterior, y recordando que

$$\int \theta f(\theta)\, d\theta = \mu \;\text{ y }\; \int \theta^2 f(\theta)\, d\theta = \sigma^2 + \mu^2,$$

obtenemos entonces la función objetivo a maximizar:

$$Eu(\alpha) = aW^2[r^2 + 2\alpha r\mu + \alpha^2(\sigma^2 + \mu^2)] + bW(r + \alpha\mu). \tag{10.13}$$

b) Derivando con respecto a α la ecuación (10.13) e igualando a cero obtenemos la condición de primer orden (suponiendo que la solución es interior):

$$Eu'(\alpha) = aW^2[2r\mu + 2\alpha(\sigma^2 + \mu^2)] + bW\mu = 0, \tag{10.14}$$

la cual nos lleva directamente a:

$$\alpha^* = -\frac{\mu(2aWr + b)}{2aW(\sigma^2 + \mu^2)}. \tag{10.15}$$

Supondremos de aquí en adelante que los parámetros del problema son tales que α^* es mayor que cero. Esto es muy probable, pero no siempre es cierto. Para verlo note que el denominador en (10.15) es negativo puesto que $a < 0$ (véase el ejercicio anterior). Hasta ahí vamos bien, pues este signo negativo cancela al otro que está antes del cociente. No obstante, el hecho que $u'(W) = 2aW + b > 0$ no implica necesariamente que el numerador en (10.15) sea positivo: si el rendimiento bruto del activo sin riesgo, r, es suficientemente mayor a 1, entonces el numerador se volvería negativo (y en ese caso la decisión óptima sería el invertir solamente en el activo sin riesgo).

Nótese finalmente que la solución encontrada en (10.15) es un máximo, pues la segunda derivada de la función objetivo (10.13) es

$$Eu''(\alpha) = 2aW^2(\sigma^2 + \mu^2),$$

la cual es negativa.

c) Para encontrar el impacto de un cambio en la media puede uno encontrar la correspondiente derivada parcial usando (10.15). Pero es más limpio el siguiente procedimiento: la condición (10.14) puede ser vista como una relación que establece que $Eu'(\alpha, \mu, \sigma^2) = 0$. Por tanto, por el teorema de la función implícita:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = -\frac{\partial Eu'(\alpha, \mu, \sigma^2)/\partial\mu}{\partial Eu'(\alpha, \mu, \sigma^2)/\partial\alpha}. \tag{10.16}$$

Ahora bien, en el inciso anterior mostramos que el denominador que aparece en (10.16) es negativo (pues es la condición de segundo orden). De allí se sigue que el signo de $\partial\alpha/\partial\mu$ es el mismo que el signo de:

$$\frac{\partial Eu'(\alpha, \mu, \sigma^2)}{\partial\mu} = W(2aWr + b) + 4\alpha^* aW\mu.$$

El primer término del lado derecho de esta última ecuación es positivo, ya que $u'(W) = 2aW + b > 0$, pero el segundo término es negativo (ya que $a < 0$). Por lo tanto el signo de $\partial\alpha/\partial\mu$ está indeterminado (depende de los valores precisos de los parámetros y del nivel de la riqueza).

A primera vista tal indeterminación parecería paradójica. Pero esto es sólo consecuencia del resultado obtenido en el problema anterior de que, bajo una función de utilidad cuadrática, la aversión (absoluta y relativa) al riesgo es creciente con la riqueza. Así pues, aun cuando un incremento en la media del activo riesgoso es por sí mismo siempre bienvenido, Precavida puede acabar con una riqueza terminal más grande, lo cual la haría tener simultáneamente una mayor aversión al riesgo.

Ahora examinemos el caso cuando la varianza cambia. Siguiendo el mismo argumento que en los párrafos anteriores, uno puede encontrar que el signo de $\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma^2}$ es el mismo que el signo de

$$\frac{\partial Eu'(\alpha, \mu, \sigma^{2})}{\partial\sigma^2} = 2aW^2\alpha^* < 0.$$

Por tanto, y como uno esperaría, un incremento en la varianza conduce a una disminución en la cantidad a ser invertida en el activo riesgoso.

3.13. *a)* Sea α_i la cantidad a invertir en el activo i. Si denotamos por P al rendimiento bruto de la cartera de inversión así diseñada, entonces la esperanza de esta variable aleatoria es igual a

$$E(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i ;$$

mientras que su varianza está dada por

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2,$$

puesto que no hay covariancias entre las acciones. Por tanto, el problema que enfrenta el inversionista puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 \\ \text{s. a:} \quad & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq W \\ & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \geq \mu, \end{aligned}$$

donde cada α_i es, por hipótesis, positiva.

Ahora bien, como la función objetivo es estrictamente convexa, el lagrangeano para ese problema de minimización (no de maximización) es:

$$L(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 - \lambda_1 \left(W - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i - \mu \right).$$

Entre las condiciones de primer orden, suponiendo que la solución es interior, se encuentran las siguientes:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \sigma_i^2 + \lambda_1 - \lambda_2 \mu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n;$$

y de allí se sigue que, en el óptimo,

$$\alpha_i = \frac{\lambda_2 \mu_i - \lambda_1}{2\sigma_i^2}. \tag{10.17}$$

Puesto que las restricciones del problema tienen que ser también satisfechas, usando la ecuación anterior podemos escribir las siguientes dos ecuaciones lineales en λ_1 y λ_2:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_2 \mu_i - \lambda_1}{2\sigma_i^2} \right) = \lambda_1 \left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2} \right] + \lambda_2 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{2\sigma_i^2} \right]$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i = \lambda_1 \left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{2\sigma_i^2} \right] + \lambda_2 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} \right].$$

Este sistema lineal puede ser resuelto mediante la regla de Cramer de la manera siguiente. Si b_{ij} denota el coeficiente en la i-ésima ecuación de λ_j, entonces

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = -\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2} \right] \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} \right] + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{2\sigma_i^2} \right]^2.$$

Consecuentemente, los valores óptimos de los precios sombra están dados por:

$$\lambda_1^* = \frac{\begin{vmatrix} W & b_{12} \\ \mu & b_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{W\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} - \mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{2\sigma_i^2}}{\Delta}$$

$$\lambda_2^* = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & W \\ b_{21} & \mu \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma_i^2} + W\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{2\sigma_i^2}}{\Delta}.$$

Y así, usando además (10.17), la cantidad óptima a invertir en el activo i está dado por:

$$\alpha_i^* = \frac{\lambda_2^*\mu_i - \lambda_1^*}{2\sigma_i^2}.$$

Vale la pena destacar, como punto final, que la suposición de que la solución existe y es interior implica que: *i)* para todos los activos, $\mu_i \geq 1$ (pues nunca se invertiría en un activo si su rendimiento bruto esperado fuese menor que uno); *ii)* $\mu > W$ (de otra forma para qué invertir); y *iii)* para cualquier par de activos i y j, debe ser el caso que si $\mu_i \leq \mu_j$ entonces $\sigma_i^2 \leq \sigma_j^2$ (de otra manera un activo dominaría al otro).

b) El 1% extra en el rendimiento esperado acarrearía, aproximadamente, un aumento en el riesgo del orden de λ_2^*.

XI. RESPUESTAS AL CAPÍTULO IV

4.1. *a)* El problema a resolver es:

$$c(w, y) = \text{Min} \ \ w_1x_1 + w_2x_2$$

$$\text{s. a: } x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \geq y .$$

Ahora bien, como la Cobb-Douglas es cuasicóncava y la productivad marginal de un factor es infinita cuando no se utiliza, sabemos que el problema está bien definido y la solución es interior. Por tanto, dado el lagrangeano

$$L(w, \lambda) = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} - y),$$

las condiciones de primer orden correspondientes están dadas por:

$$w_1 - \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} = 0$$

$$w_2 - \lambda(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} = 0 \tag{11.1}$$

y a las cuales hay que agregar la restricción con igualdad que aparece en el problema de minimización.

Eliminando λ en las dos últimas ecuaciones obtenemos que

$$x_2 = \frac{(1-\alpha)w_1x_1}{\alpha w_2},$$

la cual puede sustituirse en (11.1) para obtener la demanda condicionada del primer insumo

$$x_1(w, y) = \left(\frac{\alpha w_2}{(1-\alpha)w_1}\right)^{1-\alpha} y, \tag{11.2a}$$

y posteriormente la del segundo

$$x_2(w, y) = \left(\frac{(1-\alpha)w_1}{\alpha w_2}\right)^{\alpha} y. \tag{11.2b}$$

b) El costo marginal está dado por el precio sombra de la restricción, el cual, por (11.1), (11.2a) y (11.2b), es:

$$\lambda^* = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

c) La función de costos se obtiene evaluando en el óptimo la función objetivo:

$$c(w, y) = w_1x_1(w, y) + w_2x_2(w, y) = yw_1^{\alpha}\, w_2^{1-\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right].$$

Esta expresión puede a su vez reescribirse finalmente como:

$$c(w, y) = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}w_1^{\alpha}\, w_2^{1-\alpha}y. \tag{11.3}$$

Vale la pena observar que la función de costos anterior es también, como función de los precios de los insumos, de la forma Cobb-Douglas (es una función dual de la de producción). Además, la función de costos es lineal en y, lo cual es consecuencia de que, dados los valores de los parámetros, la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala. En efecto, como para duplicar la producción se requiere duplicar exactamente el empleo de cada uno de los factores, entonces los costos también deben duplicarse.

d) Comencemos mostrando que la primera demanda es homogénea de grado cero. Sea t cualquier factor de escala, entonces se verifica de inmediato que:

$$x_1(tw, y) = \left(\frac{t\alpha w_2}{t(1-\alpha)w_1}\right)^{1-\alpha} y = x_1(w, y).$$

Algo similar resultaría en el caso de la demanda condicionada del segundo factor. Y, por tanto, la función de costos es en turno homogénea de grado 1:

$$c(tw, y) = tw_1x_1(tw, y) + tw_2x_2(tw, y) = tc(w, y).$$

e) Veriquemos el lema de Shepard para la primera demanda condicionada. Derivando (11.3) obtenemos:

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = \alpha\, \alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{1-\alpha} y = \left(\frac{\alpha w_2}{(1-\alpha) w_1} \right)^{1-\alpha} y,$$

expresión que coincide con la dada en (11.2a).

4.2. *a)* Es muy importante notar de entrada que la función de producción es estrictamente cóncava. Debido a ello, el problema de maximización de beneficios está bien definido (no lo estaría si la función fuese tan solo cuasicóncava). El problema a resolver es de la forma:

$$\pi(p, w) = \text{Max } py - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

$$\text{s. a: } y = 4 x_1^{1/4} x_2^{1/4}. \tag{11.4}$$

Sustituyendo la restricción en (11.4) en la función objetivo y derivando ésta respecto a los dos factores obtenemos que, en el óptimo,

$$p x_1^{-3/4} x_2^{1/4} = w_1 \text{ y } p x_1^{1/4} x_2^{-3/4} = w_2;$$

es decir, el valor de las productividades marginales debe ser igual, en el óptimo, al costo marginal de los factores. De las dos últimas ecuaciones se obtienen de inmediato las demandas de los factores en términos de los precios:

$$x_1(p, w) = p^2 w_1^{-3/2} w_2^{-1/2} \text{ y } x_2(p, w) = p^2 w_1^{-1/2} w_2^{-3/2}. \tag{11.5}$$

La función de oferta puede ser ahora escrita, empleando (11.4) y (11.5), como

$$y(p, w) = 4p (w_1 w_2)^{-1/2};$$

mientras que la función de beneficios es de la forma

$$\pi(p, w) = py(p, w) - w_1 x_1(p, w) - w_2 x_2(p, w) = 2p^2 (w_1 w_2)^{-1/2}. \tag{11.6}$$

b) Tras derivar de manera acorde (11.6) podemos verificar el lema de Hotelling para el caso de la oferta, así como para, digamos, la demanda del primer insumo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = 4p(w_1 w_2)^{-1/2} = y(p, w)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w_i} = -p^2 w_1^{-3/2} w_2^{-1/2} = -x_1(p, w).$$

4.3. Por el lema de Shephard, las demandas de los insumos son, en el óptimo, $x_1 = y^k$ y $x_2 = y^k$. Por tanto, la función de producción es de la forma:

$$y = \text{Min}\left\{x_1^{1/k}, x_2^{1/k}\right\}.$$

4.4. *a)* Por el lema de Shepard y el llamado teorema de Young, requerimos de entrada que

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_2} = \frac{\partial x_2}{\partial w_1};$$

es decir que, para cualquier vector de precios,

$$\frac{a_{12}y}{w_1} = \frac{a_{21}y}{w_2} \quad \Rightarrow \quad a_{12} = a_{21} = 0.$$

Y así, por vacuidad, la función de costos subyacente sería cóncava en los precios de los factores. Además requerimos que los costos sean crecientes en el nivel de producción, por lo que $a_{ii} > 0$.

b) Por el inciso anterior, $x_1(w, y) = a_{11}y$ y $x_2(w, y) = a_{22}y$. En consecuencia, la función de costos es de la forma:

$$c(w, y) = (a_{11}w_1 + a_{22}w_2)y,$$

y la función de producción es

$$y = \text{Min}\left\{\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{22}}\right\}.$$

4.5. Sabemos que la función de costos es homogénea de grado uno en w. Por tanto, por el Ejercicio 1.13, sus primeras derivadas parciales son homogéneas de grado cero. Así pues, por el lema de Shepard, las demandas condicionadas son homogéneas de grado cero. Aplicando finalmente el teorema de Euler (véase el Ejercicio 1.14), obtenemos la solución.

4.6. Por el lema de Shepard, tal elasticidad puede reexpresarse como:

$$\sigma(w, y) = \frac{c(y, w)\, \partial x_i/\partial w_j}{x_i\, x_j} = \frac{(\partial x_i/\partial w_j)\,(w_j/x_i)}{x_j\, w_j/c(y, w)} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\alpha_j}.$$

4.7. *a)* Necesitamos encontrar la función de beneficios en el largo plazo para derivar, a partir de ella, la función de producción. ¿Cómo podemos hallarla? La clave radica en el llamado teorema de la envolvente el cual establece, en nuestro contexto, que el máximo de la función de beneficios en el largo plazo coincide con el máximo de la de corto plazo. Pero este nivel óptimo del factor fijo puede ser obtenido fácilmente:

$$\frac{\partial \pi(p, w; k)}{\partial k} = \frac{1}{2} p k^{-1/2} - w_2 = 0 \;\Rightarrow\; k^* = \frac{p^2}{4w_2^2}.$$

Así pues, la función de beneficios en el largo plazo puede ser encontrada tras reemplazar el nivel óptimo anterior en la función de corto plazo:

$$\pi(p, w) = \frac{p^2}{4}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right). \tag{11.7}$$

Empleando (11.7), así como el lema de Hotelling, podemos derivar entonces la oferta y las demandas que maximizan los beneficios en el largo plazo:

$$y(p, w) = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right),\; x_1(p, w) = \frac{p^2}{4w_1^2} \;\text{ y }\; x_2(p, w) = \frac{p^2}{4w_2^2}. \tag{11.8}$$

Ahora bien, despejando los precios de los factores que aparecen en las dos demandas,

$$w_1 = \frac{p}{2} x_1^{-1/2} \;\text{ y }\; w_2 = \frac{p}{2} x_2^{-1/2},$$

por lo que, finalmente, la función de producción puede ser encontrada insertando estas dos últimas ecuaciones en la ecuación de la oferta que aparece también en (11.8):

$$y = f(x_1, x_2) = \frac{p}{2}\left(\frac{2x_1^{1/2}}{p} + \frac{2x_2^{1/2}}{p}\right) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2}.$$

b) En (11.8) aparece la oferta en el largo plazo, mientras que la oferta en el corto plazo puede ser derivada por el lema de Hotelling como:

$$y(p, w; k) = \frac{\partial \pi(p, w; k)}{\partial p} = \frac{p}{2w_1} + k^{1/2}. \tag{11.9}$$

Así pues, empleando (11.9) y (11.8), podemos encontrar que las elasticidades en el corto y largo plazos están dadas por:

$$\varepsilon^{CP} = \frac{\partial y(p, w; k)}{\partial p}\frac{p}{y} = \frac{p}{p + 2w_1 k^{1/2}},$$

$$\varepsilon^{LP} = \frac{\partial y(p, w)}{\partial p}\frac{p}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)\frac{p}{y} = 1.$$

Ahora bien, como $(p + 2w_1 k^{1/2}) > p$, entonces $\varepsilon^{CP} < \varepsilon^{LP}$, y el principio de Le Chatelier es confirmado.

4.8. *a)* Si $w_2 + w_3 > w_1$ la demanda es cero. Si $w_2 + w_3 < w_1$, entonces $x_2(w, y) = y$. Si $w_2 + w_3 = w_1$ la empresa podría demandar cualquier x_2 tal que $0 \leq x_2 \leq y$.

b) Sea $z \equiv \text{Min}\{x_2, x_3\}$. Es claro que la función de producción lineal $y = x_1 + z$ tiene asociada una función de costos de la forma $c(w, y) = \text{Min}\{w_1, w_z\}y$, donde w_z, el precio implícito del factor compuesto z, es igual a $w_2 + w_3$. Así pues,

$$c(w, y) = \text{Min}\ \{w_1, w_2 + w_3\}y.$$

4.9. *a)* Reemplazando $z \equiv x_1 + x_2$ en la función de producción encontramos que, en el óptimo del problema de minimización de costos, $z^2 = x_3 = y$. Por tanto,

$$c(w, y) = w_z y^{1/2} + w_3 y = \text{Min}\{w_1, w_2\}\, y^{1/2} + w_3 y.$$

b) Entre los dos factores de producción se elegirá aquél cuyo precio sea el menor (si cuestan igual, cualquier combinación entre ellos es óptima). Por tanto, para $y > 0$,

$$c(w, y) = \text{Min}\ \{w_1, w_2\}(y + 1)$$

(si no hay producción, la función de costos es cero).

4.10. *a)* Inconsistente. Por el lema de Shepard y la concavidad de la función de costos, $\partial x_1/\partial w_1 < 0$. Así pues, al menos una de las siguientes condiciones tiene que cumplirse: $\partial x_2/\partial w_1 \geq 0$ ó $\partial x_3/\partial w_1 \geq 0$. Uno no podría reducir el empleo de todos los insumos y mantener el mismo nivel de producción.

b) Consistente. Suponga $y = x_1 + x_2 + x_3$ y $w_1 > w_3$.

c) Inconsistente. Esto implicaría que la empresa no estaba de entrada minimizando sus costos.

d) Consistente. Considere por ejemplo el caso del Ejercicio 4.8.

4.11. *a)* Como $a_{11} = 0.1$, $a_{12} = 0.3$, $a_{21} = 0.2$ y $a_{22} = 0.4$,

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

b) Note primero que la industria de la mantequilla debe producir una cantidad total x_m que cubra las necesidades de insumos de ambas industrias, así como la demanda de consumo final:

$$x_m = a_{11}x_m + a_{12}x_c + y_m.$$

Recuerde que en este modelo la mantequilla es *necesaria* para producir cemento, de allí el segundo término en el lado derecho de la ecuación. De manera similar, la cantidad total de cemento x_c debe satisfacer:

$$x_c = a_{21}x_m + a_{22}x_c + y_c.$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden representar ahora en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_m \\ x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ x_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_m \\ y_c \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},$$

o de manera equivalente como

$$\boldsymbol{y} = (I - A)\boldsymbol{x}.$$

c) Para empezar,

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \Rightarrow (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/4 & 5/8 \\ 5/12 & 15/8 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, como $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y}$, entonces la solución es:

$$\begin{pmatrix} x_m \\ x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 5/8 \\ 5/12 & 15/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/8 \\ 55/24 \end{pmatrix}. \tag{11.10}$$

4.12. *a)* Para poder obtener el vector de producción encontrado en (11.10) requerimos

$$L = 0.3\,(15/8) + 0.4\,(55/24) \cong 1.48 \text{ días-hombre.}$$

b) Puesto que $L = 3$, entonces $0.3x_m + 0.4x_c = 3$. Esta restricción puede simbolizarse en términos vectoriales como $(0.3\ \ 0.4)\boldsymbol{x} = 3$. Por otro lado, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - A)^{-1}\,\boldsymbol{y}$, así que la economía está constreñida a satisfacer la ecuación:

$$(0.3\ \ 0.4)\,(\boldsymbol{I} - A)^{-1}\,\boldsymbol{y} = 3. \tag{11.11}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación anterior los valores de A, y recordando que $\boldsymbol{y} = (y_m, y_c)'$, obtenemos, tras un poco de álgebra, que la restricción (11.11) puede reescribirse como:

$$\frac{6.5}{12}\,y_m + \frac{7.5}{8}\,y_c = 3.$$

Esta es la condición que cualquier vector de consumo final debe satisfacer.

4.13. *a)* Sea x_i la cantidad a determinar del i-ésimo alimento que debe dársele al animal. El problema de programación lineal es entonces:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 2x_1 + x_2 + 10x_3 \\ \text{s. a:} \quad & 2x_1 + 2_2 + 20x_3 \geq 20 \\ & 4x_1 + x_2 \geq 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{11.12}$$

b) El problema dual es de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 20y_1 + 15y_2 \\ \text{s. a:} \quad & 2y_1 + 4y_2 \leq 2 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 1 \\ & 20y_1 \leq 10 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{11.13}$$

Las variables duales nos dan el precio sombra de las restricciones en el problema original. En nuestro contexto, cada y_i podría pensarse como el precio que tendría una píldora del nutriente *i* sin necesidad de dárselo al animal a través de los alimentos. Así, el problema dual podría interpretarse como aquel que resolvería una empresa que pudiera vender esas píldoras para maximizar sus beneficios, pero sujeta al hecho de que si da muy caras las píldoras entonces el granjero preferiría los alimentos como fuentes nutricionales para su animal.

4.14. *a)* El problema anterior sí puede resolverse mediante el método de Kuhn-Tucker. Sin embargo, tal ruta sería muy tediosa, pues tendríamos que verificar cada una de las posibles intersecciones de las restricciones listadas en (11.12). En general, los problemas de programación lineal pueden resolverse más fácilmente mediante el algoritmo llamado "Simplex" (o alguno de sus descendientes mejorados).

b) Para nuestro caso particular, la solución puede encontrarse fácilmente a través del dual. Observemos primero que la tercera restricción que aparece en (11.13) no será efectiva en el óptimo (una gráfica puede ayudarlo aquí). Por tanto, el precio sombra asociado a ella, justo x_3, vale cero en el óptimo. Las otras dos restricciones sí son efectivas en el óptimo; de hecho, como puede verificarse fácilmente, la solución del dual es $y_1^* = y_2^* = 1/3$. Como ya sabemos que las dos restricciones en (11.12) serán efectivas en el óptimo y que $x_3^* = 0$, entonces se sigue de inmediato que $x_1^* = 5/3$ y $x_2^* = 25/3$, con un costo final de 35/3.

XII. RESPUESTAS AL CAPÍTULO V

5.1. Para cada empresa el precio p es paramétrico. Por tanto, la oferta individual satisface en el óptimo: $p = c'(y) = 2y$. Así pues, la oferta de cada empresa en el largo plazo es de la forma $y(p) = p/2$, siempre y cuando ésta produzca al menos en su punto de equilibrio. Este se encuentra a su vez en el mínimo de sus costos medios (unitarios), los cuales están dados por:

$$CMe(y) = y + 1/y.$$

Derivando e igualando a cero esta última expresión encontramos que $y^* = 1$, donde el precio consistente con tal producción es $p^* = 2$. Este es el precio de equilibrio, pues, de acuerdo con el modelo de Marshall, no hay costos de entrada ni de salida: si el precio en un determinado momento fuese mayor (menor) que 2, entonces pronto habría más (menos) empresas vendiendo el producto, lo cual reduciría (aumentaría) el precio. Finalmente, dado que a ese precio la demanda del mercado sería 8, entonces en el largo plazo sólo sobrevivirían 8 empresas.

5.2. *a)* Dado que el problema de maximización que enfrenta el monopolista es

$$\text{Max } \pi(y) = yd(y) - c(y) - ty,$$

las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden son

$$\pi'(y) = d(y) + yd'(y) - c'(y) - t = 0 \qquad (12.1)$$

$$\pi''(y) = yd''(y) + 2d'(y) - c''(y) < 0.$$

Sin embargo, esta última condición no puede garantizarse con los supuestos del problema.

b) Si representamos la condición (12.1) como $\Phi(y^*, t) = 0$, entonces, por el teorema de la función implícita,

$$\frac{\partial y^*}{\partial t} = -\frac{\Phi_t}{\Phi_y} = \frac{1}{\pi''(y^*)} < 0$$

(suponiendo que la condición de segundo orden se cumple).

Finalmente, los beneficios monopólicos pueden expresarse como

$$\pi(y^*(t)) = y^*(t)d(y^*(t)) - c(y^*(t)) - ty^*(t),$$

de modo que, derivando con respecto t y empleando (12.1),

$$\frac{d\pi}{dt} = [d(y^*(t)) + y^*(t)d'(y^*(t)) - c'(y^*(t)) - t]\; y^{*\prime}(t) - y^*(t) = -\,y^*(t) < 0.$$

5.3. *a)* El problema que enfrenta el monopolista es:

$$\text{Max}\;\; (200 - y_i)y_i + (100 - 0.5y_e)y_e\,.$$

Derivando la función objetivo respecto a cada una de las variables e igualando las expresiones a cero obtenemos fácilmente la solución:

$$y_i^* = 100,\;\; y_e^* = 100,\;\; p_i{*} = 200,\;\; p_e^* = 50,\;\; \pi_i^* + \pi_e^* = 15\,000.$$

Observe cómo el monopolista carga un precio mayor en el mercado con demanda más inelástica.

b) Como el monopolista no puede discriminar, $p_i = p_d$, por lo que el problema que enfrenta se transforma en:

$$\text{Max}\;\; (200 - y_i)y_i + (100 - 0.5y_e)y_e$$

$$\text{s. a:}\;\; 200 - y_i = 100 - 0.5y_e\,.$$

Sustituyendo en la función objetivo la restricción, y derivando de manera ordinaria, obtenemos la nueva solución:

$$y_i^* = \frac{400}{3},\;\; y_e^* = \frac{200}{3},\;\; p_i^* = p_e^* = \frac{200}{3},\;\; \pi_i^* + \pi_e^* \approx 13\,333.$$

5.4. La empresa resuelve el siguiente problema:

$$\text{Max}\quad py - c(y)$$

$$\text{s. a:}\quad y \le y_0.$$

Tras escribir el lagrangeano correspondiente, las condiciones de Kuhn Tucker resultan ser de la forma:

$$y^* \frac{\partial L(y^*, \lambda^*)}{\partial y} = 0 \ , \ \lambda^* \frac{\partial L(y^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0$$

donde

$$\frac{\partial L(y^*, \lambda^*)}{\partial y} = p - c'(y^*) - \lambda^*, \quad \frac{\partial L(y^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = y_0 - y^*.$$

Por tanto, si $y^* = y^0$, entonces $\lambda^* > 0$ y $p = c'(y^*) + \lambda^*$. Es decir, como en el caso del monopolista, en su nivel óptimo de producción $c'(y^*) < p$.

5.5. En un monopolio $n = 1$ y $s = 1$, por lo que el índice de Herfindahl es igual a uno. Por otro lado, hay competencia perfecta si $s_i = s_k$ para toda i, k. Por tanto, si hay n empresas competitivas, el valor del índice es

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

(el cual tiende a cero a medida que el número de empresas tiende a infinito).

5.6. Sea Y la producción total de la industria. El problema de maximización de beneficios de la empresa es de la forma

$$\text{Max } \ p(Y)y - c(y),$$

para el cual, en el óptimo,

$$p + y\frac{dp}{dY}\frac{dY}{dy} - c'(y) = 0.$$

Pero entonces

$$1 - \frac{c'(y)}{p} = -\frac{y}{p}\frac{dp}{dY}\frac{dY}{dy} = \frac{y}{Y}\frac{dY}{dy}\left(-\frac{Y}{p}\frac{dp}{dY}\right) = \frac{sV}{\varepsilon}.$$

5.7. *a)* Notemos para empezar que $B(y, q)$ es la integral de la demanda inversa $p(y, q)$, suponiendo que q permanece constante. Así pues, dicha demanda del mercado puede recobrarse de la siguiente manera:

$$p(y, q) = \partial B/\partial y = (6 - 2y)q. \tag{12.2}$$

Por consiguiente, dada la ecuación (12.2), el problema de optimización para el monopolio es:

$$\text{Max } p(y, q)y - yq^2.$$

Derivando parcialmente la función objetivo respecto a las dos variables e igualando los resultados a cero obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$6q - 4yq - q^2 = 0,$$

$$6y - 2y^2 - 2yq = 0.$$

La única solución del sistema anterior que resulta ser un máximo es $y^* = 1$, $q^* = 2$ y, por consiguiente, $p^* = 8$. (Las otras soluciones resultan ser puntos silla, como puede verificarlo usted mismo).

b) El problema a resolver por la agencia regulatoria es:

$$\text{Max } (6 - y)qy - yq^2.$$

Tras derivar parcialmente esa función objetivo e igualar a cero el resultado se obtiene que, en el óptimo,

$$6q - 2yq - q^2 = 0,$$

$$6y - y^2 - 2yq = 0.$$

La única solución del sistema anterior que resulta ser un máximo es $y^* = 2$, $q^* = 2$ y, empleando (12.2), $p^* = 4$. Es decir, la agencia regulatoria obligará a mantener la calidad pero incrementar la producción hasta que el precio se reduzca a la mitad.

5.8. *a)* El problema de maximización que enfrenta la primera empresa es:

$$\text{Max } (10 - 2y_1 - 2y_2)y_1 - 5y_1,$$

dado cualquier nivel de producción de la otra empresa. Mediante la condición de primer orden correspondiente podemos obtener entonces la curva de reacción de la primera empresa:

$$y_1(y_2) = \frac{5 - 2y_2}{4}; \tag{12.3}$$

y, por simetría, la curva de reacción de la segunda empresa es entonces

$$y_2(y_1) = \frac{5 - 2y_1}{4}. \tag{12.4}$$

La solución simultánea de las ecuaciones (12.3) y (12.4) nos da los niveles óptimos de producción de las empresas, el llamado equilibrio de Cournot (también conocido como el equilibrio de Cournot-Nash); una vez obtenido éstos, puede uno fácilmente calcular el precio que regirá en el mercado y los beneficios finales de las empresas. Los valores específicos son:

$$y_1^C = y_2^C = \frac{5}{6},\ p^C = \frac{20}{3},\ \pi_1^C = \pi_2^C = \frac{25}{18}.$$

b) Como la primera empresa es la líder, entonces incorpora la función de reacción de la empresa seguidora, dada en (12.4), en su problema de maximización:

$$\text{Max}\ [10 - 2y_1 - 2y_2(y_1)]y_1 - 5y_1 .$$

El nivel de producción óptimo de la empresa líder se obtiene directamente resolviendo el problema anterior. Una vez hecho esto, puede emplearse (12.4) para encontrar el nivel óptimo para la empresa seguidora. Los valores finales son:

$$y_1^S = \frac{5}{4},\ y_2^S = \frac{5}{8},\ p^S = \frac{25}{4},\ \pi_1^S = \frac{25}{16},\ \pi_2^S = \frac{25}{32}.$$

Como era de esperarse, en el equilibrio de Stackelberg la empresa líder incrementa sus utilidades a costa de la empresa seguidora.

c) Las empresas actuarán ahora como un monopolista que enfrenta el problema

$$\text{Max}\ (10 - 2Y)Y - 5Y,$$

por lo que, en el óptimo,

$$Y^M = \frac{5}{4},\ p^M = \frac{30}{4},\ \pi^M = \frac{25}{8}.$$

La producción y las ganancias pueden entonces repartirse en partes iguales, logrando así mayores beneficios que en cualquier otra situación.

5.9. *a)* La condición de primer orden para cada empresa es de la forma:

$$-y_i + 5 - Y = 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12.5}$$

Así pues, es evidente que no puede existir un equilibrio de Cournot tal que $y_i \neq y_j$, pues ambas empresas tendrían que satisfacer simultáneamente (12.5). Nótese, sin embargo, que una suposición clave para esta conclusión es que las empresas no tengan costos fijos. Si los hubiese, entonces bien podría ser el caso que algunas de ellas tuvieran que salir del mercado para poder existir un equilibrio.

b) Por el inciso anterior, podemos ahora reescribir (12.5) como:

$$-y_i^C + 5 - ny_i^C = 1.$$

Resolviendo esta última ecuación, y empleando la ecuación de la demanda, obtenemos entonces que:

$$y_i^C = \frac{4}{1+n} \quad (i = 1, \ldots, n)\,, \quad Y^C = \frac{4n}{(1+n)}\,, \quad p^C = \frac{5+n}{1+n}.$$

Finalmente, haciendo crecer el número de empresas hasta el infinito encontramos que el precio tendería a ser 1, justo el costo marginal de cada empresa. Por consiguiente, el precio de equilibrio de Cournot convergería al precio de equilibrio que prevalecería en una industria plenamente competitiva.

c) Notemos para empezar que, mediante un razonamiento análogo al utilizado en el inciso *a)*, si existiera un equilibrio de Bertrand, entonces éste tendría que ser simétrico (los precios de los productos de todas las empresas deberían ser iguales).

Afirmamos ahora que no es posible que tal precio de equilibrio exceda los costos marginales (y medios) de cada empresa; es decir, se afirma que no es posible que $p_i = \bar{p} > 1$ para toda i. Suponga, por contradicción, que ése es el caso. Suponiendo además, sin perder la generalidad, que todos participan equitativamente del mercado, entonces cada empresa obtendría en tal caso unos beneficios iguales a

$$\pi_i = \frac{\bar{p}\,(5 - \bar{p})}{n}.$$

Ahora bien, tarde o temprano una empresa, digamos la primera, se dará cuenta de que si cambiara su precio a $p_1 = \bar{p} - \varepsilon > 1$, con ε un número positivo y suficientemente pequeño, entonces capturaría todo el mercado y obtendría beneficios

$$\pi_1 = (\bar{p} - \varepsilon)(5 - \bar{p} + \varepsilon) > \frac{\bar{p}\,(5 - \bar{p})}{n}.$$

Así pues, resulta que la antigua solución no era un equilibrio; por consiguiente, el único posible es el que no admita una reducción en el precio. Es decir, el único precio de equilibrio posible sería $\bar{p}^B = 1$.

5.10. Observe primero que la demanda del mercado es tal que $pY = k$, donde k es una constante, p es el precio del bien y Y es la producción total de la industria. Por lo tanto, la demanda inversa es:

$$p(Y) = \frac{k}{Y}.$$

Ahora bien, como el problema que enfrenta cada empresa es de la forma

$$\text{Max } p(Y)y_i - ay_i,$$

la condición de optimalidad está dada entonces por

$$-\frac{k}{Y^2}y_i + \frac{k}{Y} - a = -\frac{ky_i}{(ny_i)^2} + \frac{k}{ny_i} - a = 0, \qquad (12.6)$$

donde en la segunda ecuación, por razones análogas a las dadas en el ejercicio anterior, hemos empleado el hecho de que, en equilibrio, $y_i = y_j$ para toda i, j.

Supongamos primero que $a > 0$. Resolviendo (12.6) y usando la ecuación de la demanda, encontramos que en el equilibrio de Cournot,

$$y_i^C = \frac{k(n-1)}{an^2},\quad Y^C = \frac{k(n-1)}{an},\quad p^C = \frac{an}{n-1}.$$

¿Qué sucedería si $a = 0$? Entonces, si empleásemos la ecuación (12.6), obtendríamos una contradicción, pues la única manera en que se cumpliría la igualdad sería si todas las empresas produjeran un número infinito de unidades. Pero esto llevaría entonces a un precio igual a cero y todas las empresas incurrirían en pérdidas. Por tanto, no existe un equilibrio de Cournot.

5.11. *a)* El problema del consumidor representativo es maximizar su utilidad sujeto a su restricción presupuestal,

$$p_1y_1 + p_2y_2 + x = m,$$

donde m es su ingreso total. Para que esté bien definido ese problema requerimos que $v(y_1, y_2)$ sea una función estrictamente cóncava. Esto puede asegurarse si $4\beta^2 - \gamma^2 > 0$ (verifique este aserto encontrando el hessiano de la función).

Estableciendo ahora el lagrangeano

$$L(y_1, y_2, x, \lambda) = \alpha(y_1 + y_2) - \gamma y_1 y_2 - \beta(y_1^2 + y_2^2) + x - \lambda(p_1 y_1 + p_2 y_2 + x - m)$$

y suponiendo que la condición es interior, encontramos las siguientes condiciones de primer orden (aparte de la restricción presupuestaria):

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \alpha - \gamma y_2 - 2\beta y_1 - \lambda p_1 = 0 \tag{12.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = \alpha - \gamma y_1 - 2\beta y_2 - \lambda p_2 = 0 \tag{12.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda = 0\,. \tag{12.9}$$

Ahora bien, sustituyendo (12.9) en (12.7) y (12.8) encontramos que:

$$p_1 = \alpha - \gamma y_2 - 2\beta y_1 \tag{12.10}$$

$$p_2 = \alpha - \gamma y_1 - 2\beta y_2. \tag{12.11}$$

Las dos últimas ecuaciones establecen las demandas inversas. Para encontrar las demandas, simplemente tenemos que reexpresar esas dos ecuaciones en términos de las cantidades, no de los precios. Tras un poco de simple álgebra las demandas ordinarias acaban siendo:

$$y_1 = a - bp_1 + cp_2 \tag{12.12}$$

$$y_2 = a - bp_2 + cp_1, \tag{12.13}$$

donde

$$a \equiv \frac{\alpha}{2\beta + \gamma},\quad b \equiv \frac{2\beta}{4\beta^2 - \gamma^2},\quad c \equiv \frac{\gamma}{4\beta^2 - \gamma^2}.$$

Observe que los parámetros a, b y c son estrictamente positivos, ya que $4\beta^2 - \gamma^2 > 0$ por hipótesis. Esto implica en particular que los dos productos son considerados como sustitutos por el consumidor.

b) La primera empresa maximiza sus beneficios a través de su nivel de producción, y tomando como dada la producción de su contrincante. Empleando la demanda inversa (12.10), el problema de maximización a resolver es entonces:

$$\text{Max } (\alpha - \gamma y_2 - 2\beta y_1)y_1 - ky_1 .$$

A partir de allí, por un procedimiento análogo al empleado en el Ejercicio 5.8, puede derivarse la curva de reacción de la empresa:

$$y_1(y_2) = \frac{\alpha - k - \gamma y_2}{4\beta};$$

y, de manera simétrica, la curva de reacción de la segunda empresa es:

$$y_2(y_1) = \frac{\alpha - k - \gamma y_1}{4\beta}.$$

Así pues, tras resolver estas dos últimas ecuaciones simultáneas, encontramos que las cantidades a producir por cada empresa en el equilibrio de Cournot-Nash están dadas por:

$$\bar{y}_1^C = \bar{y}_1^C = \frac{\alpha - c}{4\beta + \gamma}.$$

c) Ahora cada empresa maximiza sus beneficios tomando los precios de la otra empresa como dados. Por consiguiente, empleando la ecuación (12.12), el problema que enfrenta, por ejemplo, la primera empresa es de la forma:

$$\text{Max } p_1(a - bp_1 + cp_2) - k(a - bp_1 + dp_2) .$$

La condición de primer orden correspondiente nos lleva de inmediato a la curva de reacción (de precios) de la primera empresa y, por simetría, también a la de la segunda empresa:

$$p_1(p_2) = \frac{a + bc + dp_2}{2b}$$

$$p_2(p_1) = \frac{a + bc + dp_1}{2b}.$$

Por tanto, resolviendo estas dos últimas ecuaciones, llegamos a los precios que prevalecerían en un equilibrio de Bertrand-Nash;

$$p_1^B = p_2^B = \frac{a + bc}{2b - d}.$$

Nótese, por cierto, que con el fin de tener precios positivos requerimos que $2b > d$. Sin embargo, esto es muy plausible ya que es natural el pensar que $b > d$ (¿por qué?).

Finalmente, aunque no es un requerimiento del ejercicio, bien puede uno también preguntarse en cuál juego las empresas tienen mayores beneficios, así como en cuál el consumidor obtiene una mayor utilidad. Los lectores que aún no se hayan cansado del álgebra pueden verificar que los beneficios de las empresas son mayores cuando la competencia es en cantidades, mientras que, si $\beta > \gamma$ (lo cual es natural), la utilidad del consumidor es mayor cuando la competencia es en precios.

5.12. Consideremos cualquier par de tiendas adyacentes que están separadas, en equilibrio, por una distancia d (la cantidad a determinar). Supongamos que la primera carga el précio p_1 y la segunda carga, sin pérdida de generalidad, el precio de equilibrio $\overline{p}$.

¿Cómo podemos encontrar la demanda que enfrenta la primera empresa? De acuerdo a como se plantea el problema, la cantidad $p_1 + 2cz_1$ es el costo total que tendría que pagar el consumidor que se encuentra z_1 unidades lejos de la primera tienda, si es que comprase su mercancía allí. Pero, por otro lado, si él prefiriese comprar en la segunda tienda, el costo total sería $\overline{p} + 2c(d - z_1)$. Así pues, el consumidor que sería indiferente entre comprar en una tienda u otra es aquel para el cual

$$p_1 + 2cz_1 = \overline{p} + 2c(d - z_1);$$

es decir, tal consumidor se halla a una distancia

$$z_1 = \frac{\overline{p} - p_1}{4c} + \frac{d}{2} \tag{12.14}$$

de la primer tienda.

Ahora bien, todos los consumidores que se encuentran entre ese consumidor indiferente y la primer tienda habrán de comprar en ella por necesidad (¿por qué?). Más aún, como cada consumidor compra una unidad del producto y hay un consumidor por unidad de distancia, entonces el valor de z_1 dado en (12.4) representa la cantidad comprada por los residentes en el lado, digamos, derecho de la primera empresa. Pero entonces, como algo semejante ocurre en el lado izquierdo de la tienda, la demanda total que ésta enfrenta es de la forma:

$$x(p_1) = 2z_1 = \frac{\bar{p} - p_1}{2c} + d.$$

Así pues, si la empresa quiere maximizar sus beneficios tiene que resolver, tomando el precio de equilibrio de las demás tiendas como dado, el siguiente problema:

$$\text{Max } \pi_1 = p_1 x(p_1) - F = \left(\frac{\bar{p} - p_1}{2c}\right) p_1 + dp_1 - F.$$

Derivando e igualando a cero la función objetivo, y suponiendo que la solución es interior, encontramos que su precio óptimo es:

$$p_1 = \frac{\bar{p} + 2dc}{2}.$$

Pero, por la simetría del problema, en equilibrio $p_1 = \bar{p}$, por lo que $\bar{p} = 2dc$. Y, finalmente, como hay libre entrada de las tiendas, en equilibrio $\pi = 0$ para cada empresa; es decir:

$$\pi = x(\bar{p})\bar{p} - F = 2cd^2 - F = 0 \Rightarrow d = \sqrt{F/2c}.$$

5.13. *a)* El problema que enfrenta cada empresa en el corto plazo es:

$$\text{Max } (150 - y_k - 0.02 \sum_{i \neq k} y_i) y_k - 0.5y_k^3 + 20y_k^2 - 270y_k.$$

Tomando el nivel de producción de las otras empresas como dado e igualando a cero la derivada de la función objetivo obtenemos que, en el óptimo,

$$150 - 2y_k - 0.02 \sum_{i \neq k} y_i - 1.5y_k^2 + 40y_k - 270 = 0. \qquad (12.15)$$

Ahora bien, como esta condición es la misma para todas las otras 100 empresas, entonces podemos sustituir, en equilibrio, $y_i = y_k$ en la anterior ecuación para encontrar que:

$$1.5y_k^2 - 36y_k + 120 = 0.$$

Esta última ecuación tiene dos soluciones, $y_k = 4$ y $y_k = 20$. Pero, como puede verificarse derivando (12.15), la primera de ellas corresponde a un mínimo no a un máximo. En conclusión, en el equilibrio de corto plazo la solución para todas las empresas es:

$$y_k^{CP} = 20,\ p_k^{CP} = 90,\ \pi_k^{CP} = 400.$$

b) En el equilibrio de largo plazo los beneficios son cero y el número de empresas se determina endógenamente. Es decir, deben cumplirse simultáneamente la ecuación (12.15) y la condición de que el precio final iguale al costo medio. Algebraicamente, el siguiente par de ecuaciones debe satisfacerse:

$$1.5y_k^2 - [38 - 0.02(n - 1)]y_k + 120 = 0$$

$$0.5y_k^2 - [19 - 0.02(n - 1)]y_k + 120 = 0$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos que $y_k^{LP} = 19$ y $n^{LP} = 160.21$, y esto a su vez implica que $p_k^{LP} = 70.5$. La solución anterior tiene el defecto de que el número de empresas no es entero. Para ser realistas, el número de empresas tiene que ser 160 y cada una de ellas tendrá beneficios mínimos, aunque mayores que cero, en equilibrio (invitamos al lector a calcular estos, empleando (12.15) y las funciones de demanda y de costos).

XIII. RESPUESTAS AL CAPÍTULO VI

6.1. *a)* Dado que las dos funciones de utilidad se comportan bien, la tasa marginal de sustitución puede ser fácilmente encontrada, para cada individuo, formando el cociente de las utilidades marginales correspondientes:

$$TMS^1_{xy} = \frac{y_1}{x_1}, \; TMS^2_{xy} = \frac{y_2^2}{2x_2y_2} = \frac{y_2}{2x_2}.$$

Igualando ahora ambas tasas y usando el hecho de que en el agregado hay una unidad de cada bien, se obtiene la ecuación que describe la curva de contrato (usando las coordenadas de la primera persona):

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{1 - y_1}{2(1 - x_1)} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{x_1}{2 - x_1}.$$

b) El problema de maximización del primer individuo está dado por:

$$\text{Max} \quad u_1(x, y) = xy$$

$$\text{s. a:} \quad px + y = \frac{p}{2} + \frac{1}{2}$$

donde $p \equiv p_x/p_y$ (es decir, consideramos a y como el bien numerario). Dado que la función de utilidad es una Cobb-Douglas, podemos usar el ejercicio 2.1 para obtener entonces las demandas óptimas para el primer individuo:

$$x_1(p) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4p}, \quad y_1(p) = \frac{p}{4} + \frac{1}{4}.$$

De manera similar, las demandas óptimas del segundo agente son:

$$x_2(p) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6p}, \quad y_2(p) = \frac{p}{3} + \frac{1}{3}.$$

Imponiendo ahora la condición de equilibrio sobre uno de los dos mercados de bienes (recuérdese que por la ley de Walras sólo es necesario verificar uno de ellos), obtenemos la razón de precios que da validez al equilibrio competitivo:

$$1 = x_1(p) + x_2(p) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4p} + \frac{1}{6p} \Rightarrow p^c = \frac{5}{7}.$$

Reemplazando el precio de equilibrio en todas las funciones de demanda, encontramos finalmente las asignaciones competitivas:

$$(x_1^c, y_1^c) = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{7}\right) \text{ y } (x_2^c, y_2^c) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{7}\right).$$

6.2. *a)* Sea $p = p_x/p_y$, de tal manera que la segunda mercancía se tomará como el bien numerario. En el caso del primer consumidor, dado el caracter lineal de sus curvas de indiferencia, las demandas óptimas se encontrarán típicamente en una "esquina" de la restricción presupuestal $px + y = 2p$.

Más específicamente, si $p < 1$ entonces $(x_1, y_1) = (2, 0)$; si $p = 1$, entonces cualquier punto sobre la recta $x_1 + y_1 = 2$ es óptimo; y, finalmente, si $p > 1$ entonces $(x_1, y_1) = (0, 2p)$. Ésta última alternativa es en realidad irrelevante para nuestro caso, ya que entonces $y_1 > 2$, lo cual no sería factible. Así pues, la curva de oferta del primer individuo está descrita simplemente por la ecuación

$$x_1 + y_1 = 2, \tag{13.1}$$

la cual incluye en particular a la canasta $x_1 = 2, y_1 = 0$ (demandada cuando $p < 1$).

Por otro lado, el segundo consumidor maximiza una función de utilidad Cobb-Douglas sujeto a la restricción presupuestal $px + y = 2/p$, por lo que, de manera similar al ejercicio 2.1, sus demandas óptimas están dadas por:

$$x_2 = \frac{1}{p}, \; y_2 = 1.$$

Notemos, sin embargo, que en el caso límite de $p_y = 0$ *(es decir, si $p \to \infty$) la demanda y_2 puede tomar cualquier valor entre cero y dos. Por tanto, la curva* de oferta del segundo individuo está dada por la línea

$$y_2 = 1 \tag{13.2}$$

cuando $0 < x_2 \leq 2$, y por cualquier y_2 factible cuando $x_2 = 0$.

b) La intersección de las dos curvas de oferta encontradas en el inciso anterior, dadas en (13.1) y (13.2), nos lleva a las asignaciones que resultarían en el equilibrio competitivo: $x_1^c = y_1^c = x_2^c = y_2^c = 1$. Este resultado se obtiene bajo el precio relativo de equilibrio $p^c = 1$.

c) Para empezar, el núcleo es un segmento de la curva de contrato (pues la coalición formada por los dos individuos así lo dispondría). En nuestro caso la curva de contrato, que se obtiene al igualar las tasas marginales de sustitución de los dos individuos, está dada por:

$$TMS^1_{xy} = \frac{y_1}{x_1} = 1 = TMS^2_{xy} \;\;\Rightarrow\;\; y_1 = x_1;$$

es decir, la curva de contrato es una diagonal que une los dos orígenes en la caja de Edgeworth (¡dibújela!). Ahora bien, cualquier elemento del núcleo tiene que satisfacer además las restricciones $u_1(x, y) \geq 2$ y $u_2(x, y) \geq 0$, pues éstos eran los niveles de utilidad que disfrutaban los individuos antes del intercambio. Por tanto, el núcleo está dado tan solo por la mitad superior de tal diagonal.

6.3. *a)* El primer agente tratará de fijar p de tal manera que pueda incrementar al máximo su propia utilidad (a costas de la del segundo). Por tanto, al monopolista le conviene fijar $p \equiv p_x/p_y$ tan grande como sea posible, ya que a medida que $p_y \to 0$ resulta que $x_2 \to 0$, lo cual a su vez conlleva un incremento continuo en la utilidad del monopolista (pues los dos bienes son para él sustitutos perfectos) y una reducción continua en la utilidad del otro agente. Así pues, el resultado final será $x_2 = 0$, $y_2 = 1$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

b) En este caso la solución puede encontrarse directamente sustituyendo en las ecuaciones (13.1) y (13.2) el precio internacional. Haciendo esto se obtiene que $x_1 = 2$, $y_1 = 0$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

6.4. *a)* Nótese que cualquier punto en la caja de Edgeworth que sea interior no puede ser paretiano. La razón es que todo punto en el interior representaría, por necesidad, un cruce de curvas de indiferencia de ambos agentes y, por tanto, al sureste de tal intersección siempre habría un cono de asignaciones que dominaría a dicho punto. En definitiva, los únicos puntos que no pueden ser Pareto-dominados son aquellos que están en los bordes situados en el sur o el este de la caja de Edgeworth (¡dibuje ésta y verifique las aseveraciones anteriores!).

b) Hay un continuo de precios que podrían sostener un equilibrio: cualquier p_x/p_y tal que $1 \leq p_x/p_y \leq 2$. Las asignaciones correspondientes serían soluciones de esquina (sobre el borde situado en el sur de la caja).

6.5. La asignación (x_1, y_1, x_2, y_2) sería en nuestro caso justa si las dos condiciones siguientes se cumplen:

$$u_1(x_1, y_1) > u_1(x_2, y_2) \;\;\Rightarrow\;\; x_1 + \frac{y_1}{2} > x_2 + \frac{y_2}{2}$$

$$u_2(x_2, y_2) > u_2(x_1, y_1) \Rightarrow x_2 + y_2 > x_1 + y_1 .$$

Pero, por factibilidad, $x_2 = 4 - x_1$ y $y_2 = 6 - y_1$. Así pues, las dos condiciones anteriores se convierten en:

$$x_1 + \frac{y_1}{2} > 4 - x_1 + \frac{6 - y_1}{2} \Rightarrow 2x_1 + y_1 > 7$$

$$4 - x_1 + 6 - y_1 > x_1 + y_1 \Rightarrow 2x_1 + 2y_1 < 10 .$$

El conjunto de asignaciones justas está definido por estas dos últimas desigualdades, así como por las condiciones de factibilidad $0 \leq x_1 \leq 4$, $0 \leq y_1 \leq 6$.

6.6. Dado que la mercancía x es un "mal" para el segundo individuo mientras que es un bien para el primero, toda asignación paretiana debe ser tal que la mercancía x es consumida sólo por este último. Así pues, la curva de contrato, usando las coordenadas de la primera persona, puede ser descrita por el siguiente conjunto:

$$\{(x_1, y_1) \mid x_1 = 1, 0 \leq y_1 \leq 1\}.$$

Le pedimos ahora al lector curioso que explore, variando las dotaciones iniciales de los dos individuos, la existencia de equilibrios competitivos en esta economía tan especial.

6.7. Igualando a cero las dos funciones de exceso de demanda se obtiene que

$$2p_2^2 + 22p_2 - 13p_2p_3 - 64p_3 + 20p_3^2 + 48 = 0$$

$$p_2 - 2p_3 + 2 = 0 .$$

Pero estas dos ecuaciones se cumplen si y sólo si

$$2(2p_3 - 2)^2 + 22(2p_3 - 2) - 13(2p_3 - 2)\, p_3 - 64p_3 + 20p_3^2 + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(p_3^2 - 2p_3 + 1) + 44(p_3 - 1) - 26p_3^2 + 26p_3 - 64p_3 + 20p_3^2 + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p_3 - 2)(p_3 - 3) = 0 .$$

Por consiguiente, bajo los dos vectores de precios $(1, p_2^*, p_3^c) = (1, 2, 2)$ ó $(1, 4, 3)$ no hay exceso de demanda en los mercados del segundo y el tercer bien. Pero como en ambos casos el haz de precios es estrictamente positivo, entonces podemos acudir a la ley de Walras para asegurar que tampoco habría un exceso de demanda del primer bien. Así pues, cualquiera de esos dos vectores de precios representa un equilibrio competitivo.

6.8. *a)* Dado que para cada unidad producida de x se requieren dos unidades de K y para cada unidad de y se necesita una de K, entonces una de las restricciones que enfrenta Robinson Crusoe es:

$$2x + y \leq 150. \tag{13.3}$$

De manera similar, si por cada unidad producida de x o y se requiere una unidad de L entonces

$$x + y \leq 100. \tag{13.4}$$

Las desigualdades (13.3) y (13.4), junto con $x, y \geq 0$, determinan el llamado conjunto de posibilidades de producción, cuya frontera está constituida por la llamada curva de transformación (¡grafíquela!).

Así pues, el óptimo paretiano es la solución del siguiente problema de Kuhn-Tucker:

$$\text{Max} \quad u(x, y) = 3 \log x + 2 \log y,$$

sujeto al conjunto de posibilidades de producción ya señalado. Ahora bien, como la función de utilidad es cuasicóncava, el conjunto factible es convexo y la utilidad marginal es infinita cuando no hay consumo, el problema anterior está bien definido y puede ser fácilmente resuelto mediante el empleo de la función lagrangeana asociada. Se pide al lector hacer esto para verificar que la solución está dada por: $x^c = 50$ y $y^c = 50$. Esto a su vez implica que los insumos serán distribuidos como sigue: $K_x^c = 100$, $K_y^c = 50$, $L_x^c = L_y^c = 50$.

b) Sea, por ejemplo, y el bien numerario. Dado un vector de precios, el consumidor iguala en el óptimo las tasas marginales de sustitución con los precios relativos:

$$TMS_{xy} = \frac{3y}{2x}\bigg|_{(x=50,\, y=50)} = \frac{3}{2} = p_x^c$$

(pues podemos fijar arbitrariamente $p_y^c = 1$).

Por otro lado, la empresa maximiza sus beneficios tomando todos los precios como dados. Pero nótese que si $1 < p_x < 2$ entonces la compañía producirá $x = 50$ y $y = 50$; en particular, si $p_x^c = 3/2$ entonces la oferta sería igual a la demanda. Finalmente, dado que la tecnología exhibe rendimientos constantes a escala, las utilidades de la empresa tienen que ser iguales a cero en equilibrio. Esto a su vez requiere que

$$p_x^c = 2p_K^c + p_L^c \text{ y } p_y^c = p_K^c + p_L^c.$$

Es decir que

$$\frac{3}{2} = 2p_K + p_L \text{ y } 1 = p_K + p_L \Rightarrow p_K^c = \frac{1}{2},\ p_L^c = \frac{1}{2}.$$

6.9. *a)* Lo que hace a este problema interesante es el hecho de que los individuos pueden pedir prestado o prestar, dependiendo del valor de la tasa de interés real r que es exógena para ambos. De manera más precisa, sabemos por el teorema de separación que a cada uno de ellos le conviene determinar primero el punto óptimo de su producción para después determinar su consumo óptimo.

Consideremos el caso de la primera persona. Por un lado, si $1 + r < 2$ entonces como productor le conviene convertir, usando su propia tecnología, sus seis unidades presentes de consumo en doce en el futuro (pues el mercado sólo le podría dar $6[1 + r]$ unidades a cambio). Esa sería su oferta como productor. Nótese que en ese caso su restricción presupuestaria, ya como consumidor, estaría dada en valor presente por la ecuación:

$$p_1 + \frac{f_1}{1+r} = \frac{12}{1+r}.$$

Y viceversa: si $1 + r \geq 2$, entonces a él no le conviene usar su tecnología sino dejar al otro individuo que la use, prestándole incluso algunas de sus unidades presentes.

En resumen, el problema general que enfrenta la primera persona es:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad p_1 f_1 \\ &\text{s. a:} \quad p_1 + \frac{f_1}{1+r} = \frac{12}{1+r} \quad \text{si } 1 + r \leq 2 \\ &\quad \text{y} \quad p_1 + \frac{f_1}{1+r} = 6 \qquad \text{si } 1 + r \geq 2 \end{aligned}$$

Dado que la función objetivo es del tipo Cobb-Douglas, entonces, de manera similar al Ejercicio 2.1, las demandas óptimas del primer individuo están dadas por:

$$p_1^d(r) = \frac{6}{1+r}\,,\ f_1^d(r) = 6 \quad \text{si } 1+r \leq 2 \tag{13.5}$$

$$p_1^d(r) = 3\,,\ f_1^d(r) = 3(1+r) \ \text{ si } 1+r \geq 2\,. \tag{13.6}$$

¿Qué hay del segundo individuo? De nueva cuenta, de acuerdo con el teorema de separación, éste elige primero su producción óptima para luego encontrar su consumo óptimo. Ahora bien, dado que la productividad marginal de su tecnología se va a infinito cuando deja de producir (¡verifique este aserto!), la segunda persona siempre empleará su tecnología, independientemente del nivel de la tasa de interés del mercado.

Más precisamente, como la segunda persona cuenta con doce unidades iniciales, la ecuación $f_2 = 2\sqrt{12-p_2}$ representa su curva de posibilidades de producción. En el óptimo, la pendiente de esta curva debe ser igual, en valor absoluto, a la tasa bruta dictada por el mercado:

$$\frac{1}{\sqrt{12-p_2}} = (1+r)\,,$$

por lo que su oferta en el primer periodo es

$$p_2^s(r) = 12 - \frac{1}{(1+r)^2}\,, \tag{13.7}$$

mientras que en el segundo periodo ofrecerá

$$f_2^s(r) = 2\sqrt{12-p_2^s} = \frac{2}{1+r}\,. \tag{13.8}$$

Dadas esas ofertas, ¿cuál es la restricción presupuestal que enfrenta el segundo individuo en su problema de consumo? Esta es tal que, en valor presente,

$$p_2 + \frac{f_2}{1+r} = p_2^s + \frac{f_2^s}{1+r}\,,$$

por lo que, sustituyendo en esta última expresión las ecuaciones (13.7) y (13.8), se concluye que

$$p_2 + \frac{f_2}{1+r} = 12 + \frac{1}{(1+r)^2}\,. \tag{13.9}$$

Finalmente, dado que la segunda función de utilidad es también una Cobb-Douglas, uno puede fácilmente verificar que su maximización, sujeta a (13.9), da como resultado las siguientes demandas óptimas:

$$p_1^d(r) = 8 + \frac{2}{3(1+r)^2} \tag{13.10}$$

$$f_1^d(r) = 4(1+r) + \frac{1}{3(1+r)}. \tag{13.11}$$

b) En el equilibrio competitivo, la oferta agregada debe igualar a la demanda agregada tanto en el presente como en el futuro. Ahora bien, por la ley de Walras sólo es necesario verificar tal igualdad en uno de los dos tiempos, digamos el presente.

Supongamos ahora que la tasa de interés en el equilibrio competitivo es tal que $1 + r^c \leq 2$ (dejamos al lector probar que si tal desigualdad se revirtiera no habría equilibrio alguno). En ese caso, como notamos en el inciso anterior, $p_1^s = 0$ (pues $f_1^s = 12$). Así pues, la única oferta de consumo presente sería la del segundo individuo. Sumando ahora las demandas dadas en (13.5) y (13.10) e igualando el resultado a la expresión dada en (13.7), obtenemos la condición que debe ser satisfecha en equilibrio:

$$\frac{6}{1+r} + 8 + \frac{2}{3(1+r)^2} = 12 - \frac{1}{(1+r)^2}.$$

Como el lector puede verificar, la tasa de interés (positiva) que resuelve esta última ecuación es $r^c \approx 0.74$.

6.10. *a)* En este modelo se tienen desde un punto de vista formal seis mercancías: el bien 1 en el periodo inicial (periodo 0); el bien 2 en el periodo inicial (periodo 0); el bien 1 si es que ocurre el estado 1 en el periodo 1; el bien 2 si es que ocurre el estado 1 en el periodo 1; el bien 1 si es que ocurre el estado 2 en el periodo 1; y el bien 2 si es que ocurre el estado 2 en el periodo 1.

Más formalmente, sea w_{j0}^i la dotación del bien j recibida por el individuo i en el periodo 0, y sea w_{js}^i la dotación del bien j que recibiría el individuo i si es que ocurriese el estado de la naturaleza s. Entonces, el vector de dotaciones del individuo i es de la forma

$$w^i = (w_{10}^i, w_{20}^i, w_{11}^i, w_{21}^i, w_{12}^i, w_{22}^i).$$

De manera paralela, el vector de consumo de la persona está dado por

$$x^i = (x_{10}^i, x_{20}^i, x_{11}^i, x_{21}^i, x_{12}^i, x_{22}^i), \tag{13.12}$$

o, de una manera más simplificada,

$$x^i = (x_0^i, x_1^i, x_2^i), \text{ donde } x_0^i = (x_{10}^i, x_{20}^i),\ x_1^i = (x_{11}^i, x_{21}^i),\ x_2^i = (x_{12}^i, x_{22}^i).$$

La estructura de un modelo clásico de intercambio requiere finalmente el supuesto de que los mercados son completos. Es decir, existe desde el inicio un mercado a futuro para cada una de las mercancías contingentes. Siendo así, desde el inicio se puede hablar de un vector de precios de la forma $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ para la canasta descrita en (13.12).

b) Dados los supuestos del inciso, la función de utilidad intertemporal de cada persona es de la forma

$$v_i(x^i) = u_i(x_0^i) + \beta^i \left[\pi_1^i u_i(x_1^i) + \pi_2^i u_i(x_2^i) \right],$$

donde hemos añadido un factor subjetivo de descuento (que bien puede ser igual a uno) y donde las probabilidades subjetivas son tales que $\pi_1^i + \pi_2^i = 1$.

Ahora bien, si $u_i(\cdot)$ es una función estrictamente cóncava entonces $v_i(\cdot)$ también lo es (esto se puede probar de manera similar al ejercicio 1.16). También es claro que, como las preferencias son estrictamente convexas, el exceso de demanda agregada está bien definido y es continuo. Así pues, aplicando el teorema de Brower [de manera similar a Mas-Colell *et al.* (1995, p. 588) o Varian (1992, p. 321)], existe un equilibrio competitivo en esta economía.

XIV. RESPUESTAS AL CAPÍTULO VII

7.1. *a)* La costumbre de la comunidad implica que los pescadores buscarán distribuirse de tal manera que todos reciban al final el mismo número de truchas (pues si en algún lago se reciben más, entonces habría incentivos para que al menos alguien dejara el otro lago y se trasladase a éste). Puesto en términos técnicos, el equilibrio comunitario requiere que la productividad promedio sea la misma en ambos lagos:

$$\frac{12L_1 - L_1^2}{L_1} = \frac{6L_2}{L_2}.$$

De aquí que $L_1^e = 6$ y $L_2^e = 14$. Por tanto, cada pescador recibe durante la semana 6 truchas y la pesca total asciende a 120 truchas.

b) Para optimizar la producción se requiere que las productividades marginales, no las productividades promedio, sean iguales. Esto es porque del problema:

$$\text{Max } F_1(L_1) + F_2(20 - L_1)$$

se sigue que, en el óptimo,

$$\frac{dF_1}{dL_1} - \frac{dF_2}{dL_2} = 0.$$

Así pues, en el óptimo, $12 - 2L_1 = 6$, por lo que $L_1^c = 3$ y $L_2^c = 17$. En este caso se pescarían 27 truchas en el primer lago y 102 en el segundo, con lo cual se elevaría la producción hasta 129 truchas. No obstante, esta solución no puede ser como tal un equilibrio comunitario, pues entonces los tres individuos que pesquen en el primer lago recibirían en recompensa más truchas que el resto.

7.2. Lo que puede hacerse es imponer un derecho a cada persona que desee pescar en el primer lago, digamos t truchas. Entonces, en equilibrio,

$$\frac{12L_1 - L_1^2 - tL_1}{L_1} = \frac{6L_2}{L_2} \Rightarrow L_1 = 6 - t$$

Por tanto, si se establece $t = 3$, se forzaría a la comunidad a que sólo tres de sus miembros pescaran en el primer lago y el resto en el segundo. Siendo así, cada pescador seguiría recibiendo de entrada 6 truchas, como en el primer inciso del problema anterior, y el producto de los derechos, 9 truchas, podría ser repartido de manera extra entre todos.

7.3. *a)* En el caso de la productora de papel, la maximización de beneficios lleva a la condición de primer orden $6 - y_1 = 0$, la cual da como resultado que $y_1^c = 6$ y $\pi_1^c = 18$. En el caso de la cervecería, ésta toma como dado tal nivel de producción de la primera empresa y maximiza sus beneficios. La condición de optimalidad correspondiente es entonces $6 - y_2 - 3 = 0$, por lo que $y_2^c = 3$ y $\pi_2^c = 4.5$. Observe de paso que los beneficios globales son $\pi^c \equiv \pi_1^c + \pi_2^c = 22.5$.

b) Sí aumentarían, pues la externalidad causada por la primera empresa sobre la segunda sería ahora internalizada, con lo que se elevarían los beneficios globales hasta su nivel socialmente óptimo. Para comprobar esta aseveración note que el problema de maximización

$$\text{Max } \pi(y_1, y_2) = 6y_1 - y_1^2/2 + 6y_2 - y_2^2/2 - y_1 y_2/2$$

da como resultado:

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_1} = 6 - y_1 - y_2/2 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial y_2} = 6 - y_2 - y_1/2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1^s = y_2^s = 4, \ \ \pi^s = 24.$$

(el lector puede verificar que las condiciones de segundo orden también se cumplen).

7.4. Tras contrastar los resultados obtenidos en los dos incisos del problema anterior, queda claro que es necesario reducir y_1 de 6 a 4 para alcanzar el óptimo social. Con tal fin, suponga que el gobierno grava a la empresa papelera con un impuesto t por cada unidad que produzca. Entonces el problema de maximización al que se enfrenta ahora la compañía es:

$$\text{Max } \pi_1(y_1) = 6y_1 - y_1^2/2 - ty_1,$$

el cual tiene como condición de primer orden: $6 - y_1 - t = 0$. Así pues, imponiendo $t = 2$ puede llegarse al resultado socialmente óptimo. Vale la pena señalar, finalmente, que la suma recaudada por el gobierno puede ser regresada a la empresa papelera como un subsidio fijo.

7.5. *a)* Como las funciones de utilidad son del tipo Leontieff, dados niveles de utilidad constantes las siguientes desigualdades son ciertas:

$$u_1 \leq x_1, \; u_1 \leq 2s, \; u_2 \leq x_2 \text{ y } u_2 \leq s. \tag{14.1}$$

De la curva de posibilidades de producción, y la primera y la tercera de las desigualdades anteriores, se sigue entonces que

$$u_1 + u_2 \leq x_1 + x_2 = x = 120 - s. \tag{14.2}$$

Ahora bien, empleando (14.2) y la segunda desigualdad en (14.1) puede concluirse que

$$u_1 + u_2 \leq 120 - s \leq 120 - 1/2u_1 \;\Rightarrow\; u_1 + 2/3u_2 \leq 80. \tag{14.3}$$

Por otro lado, usando (14.2) y la cuarta desigualdad en (14.1),

$$u_1 + u_2 \leq 120 - s \leq 120 - u_2 \;\Rightarrow\; u_1 + 2u_2 \leq 120. \tag{14.4}$$

La curva de posibilidades de utilidad está dada, consecuentemente, por la frontera del área descrita por (14.3) y (14.4) en el cuadrante positivo.

b) Dada la naturaleza lineal de las curvas de nivel de la función de bienestar bergsoniana, así como la naturaleza lineal de las desigualdades (14.3) y (14.4), no es difícil mostrar que el óptimo se encuentra en la intersección de ambas restricciones; es decir, cuando $u_1^* = 60$ y $u_2^* = 30$. Por consiguiente, en el óptimo, $x_1^* = 60$, $x_2^* = 30$ y $s^* = 30$.

7.6. Por un lado, dado que el problema de maximización que enfrenta el monopolista es de la forma

$$\text{Max } (q^{-1/2} - c)q,$$

el óptimo de producción desde una óptica privada es $q^m = 1/4c^2$.

Por otro lado, como el problema de maximización del beneficio social puede ser especificado en nuestro contexto como

$$\text{Max} \quad \int_0^q z^{-1/2}\, dz - cq,$$

el óptimo social satisface la siguiente condición de primer orden:

$$\frac{d}{dq}\left[\int_0^q z^{-1/2}\, dz - cq\right] \equiv q^{-1/2} - c = 0\,.$$

Por tanto, el nivel de producción socialmente deseable es $q^s = c^{-2}$. Es decir, el monopolio produciría cuatro veces menos de lo que es socialmente óptimo.

7.7. *a)* Dado que por hipótesis $y_i = y_j$ para toda i y j, entonces $x_i = y_i$. Así pues, el problema de maximización del bienestar conjunto puede simplificarse como

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} B(y_i, x_i) \equiv 2n\,(y_i - y_i^2),$$

el cual tiene la solución $y_i^c = 1/2$.

b) Dado que el problema de cada excursionista es de la forma

$$\text{Max} \quad (2 - y_i)y_i - x_i y_i - p y_i\,,$$

el tiempo de estancia que demandaría cada individuo es de la forma

$$y_i(p, x_i) = 1 - \frac{(x_i + p)}{2}\,. \tag{14.5}$$

Así pues, la función de demanda agregada puede ser establecida de manera inicial como sigue:

$$Y(p) \equiv \sum_{i=1}^{n} y_i(p, x_i) = n - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2} - \frac{np}{2}$$

donde se ha hecho uso de (14.5). Pero, tras sustituir el valor de cada estancia promedio, la expresión anterior puede ser simplificada aún más:

$$Y(p) = n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} y_j\right] - \frac{np}{2}$$

$$= n - \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n}[Y(p) - y_i] - \frac{np}{2}$$

$$= n - \frac{1}{2(n-1)}[nY(p) - Y(p)] - \frac{np}{2}.$$

Por tanto, la demanda agregada es de la forma

$$Y(p) = \frac{n(2-p)}{3}. \tag{14.6}$$

7.8. Maximizando con respecto a p la función resultante de multiplicar por p la ecuación (14.6), se obtiene de inmediato que el monopolista cargaría el precio $p^m = 1$.

Por otro lado, sabemos, por el primer inciso del ejercicio 7.7, que la maximización de los beneficios totales se obtiene cuando $y_i^c = 1/2$. Ahora bien, como, empleando (14.6), $y_i(p) = (2-p)/3$, entonces el precio competitivo debe ser $p^c = 1/2$.

7.9. *a)* De manera similar al ejercicio 2.1, las funciones de demanda del primer consumidor pueden ser fácilmente encontradas:

$$x_1(p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{y} \quad y_1(p) = \frac{p+1}{2}, \tag{14.7}$$

donde se ha empleado el precio relativo $p \equiv p_x/p_y$. ¿Cuáles son, por otro lado, las funciones de demanda del segundo consumidor? Son similares a las del primero:

$$x_2(p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{y} \quad y_2(p) = \frac{p+1}{2}, \tag{14.8}$$

pues aunque su función de utilidad contiene el término $y_1^{1/2}$, tal término está fuera de su control y puede considerarse como una simple constante.

Ahora bien, usando (14.7) y (14.8), sabemos que en equilibrio la demanda agregada del primer bien debe ser satisfecha por la oferta agregada, por lo que

$$1 + \frac{1}{p} = 2 \quad \Rightarrow \quad p^c = 1.$$

Y, por tanto, $x_1^c = x_2^c = y_1^c = y_2^c = 1$ en el equilibrio de mercado.

b) El problema de maximización del bienestar social puede ser planteado como:

$$\text{Max } x_1^{1/2} y_1^{1/2}$$
$$\text{s. a: } x_2^{1/2} y_2^{1/2} y_1^{1/2} \geq \bar{u}$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$y_1 + y_2 \leq 2.$$

Una vez formado el lagrangeano correspondiente, y habiéndolo derivado con respecto a cada una de las cuatro variables, no es difícil mostrar que cualquier solución debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_1}. \tag{14.9}$$

Esta condición establece que para que haya un óptimo paretiano, dada la externalidad positiva de y_1, la tasa marginal de sustitución entre y_2 y x_2 no debe igualarse solamente a la tasa marginal de sustitución entre y_1 y x_1, sino que a ésta última debe añadírsele la tasa marginal de sustitución entre y_1 y x_2 (¿por qué?).

Insertando ahora en la ecuación (14.9) las dos restricciones de factibilidad, puede entonces describirse la curva del óptimo de Pareto, desde la óptica del primer individuo, como:

$$(2 - x_1)y_1 = 2(2 - y_1) \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{4(y_1 - 1)}{y_1}. \tag{14.10}$$

7.10. *a)* Ahora el primer consumidor enfrenta el siguiente problema:

$$\text{Max } x_1^{1/2} y_1^{1/2}$$
$$\text{s. a: } px_1 + (1 - s)y_1 \leq p + 1 - T,$$

donde T es el impuesto de suma fija paramétrico al consumidor, y donde, usando el mismo bien numerario del problema anterior, $p_x = p$ y $p_y = 1$.

En el óptimo las demandas están dadas por

$$x_1(p, s, T) = \frac{p + 1 - T}{2p} \tag{14.11}$$

$$y_1(p, s, T) = \frac{p + 1 - T}{2(1 - s)}. \tag{14.12}$$

Sin embargo, para que el subsidio sea autofinanciable es necesario que $T = sy_1$. Así pues, tras sustituir esta igualdad en la ecuación (14.12) y despejar en su totalidad y_1 obtenemos que

$$y_1(p, s) = \frac{p + 1}{2 - s} \tag{14.13}$$

Por otro lado, como el problema del segundo consumidor no ha cambiado, la demanda y_2 sigue siendo la misma que la dada en (14.8). Por tanto, para que haya un equilibrio competitivo es necesario que

$$\frac{p + 1}{2 - s} + \frac{p + 1}{2} = 2.$$

De allí se sigue que, dada una tasa de subsidio s, el precio competitivo debe ser:

$$p^*(s) = \frac{(4 - 3s)}{(4 - s)}. \tag{14.14}$$

Sustituyendo tal precio en (14.13) se obtiene entonces que, en equilibrio,

$$y_1^*(s) = \frac{4}{4 - s}. \tag{14.15}$$

De manera similar, usando (14.14) y (14.15) y recordando que $T = sy_1$, la demanda dada en (14.11) puede reexpresarse en equilibrio como:

$$x_1^*(s) = \frac{4(1 - s)}{4 - 3s}. \tag{14.16}$$

Por último, usando (14.8) y (14.14) podemos encontrar las demandas del segundo consumidor:

$$x_2^*(s) = \frac{2(2 - s)}{4 - 3s}$$

$$y_2^*(s) = \frac{2(2 - s)}{4 - s}.$$

b) Para alcanzar cualquier óptimo de Pareto necesitamos satisfacer la ecuación (14.10). Así pues, sustituyendo en dicha ecuación los resultados obtenidos en (14.15) y (14.16) llegamos a que el subsidio debe ser tal que

$$\frac{4(1-s)}{4-3s} = s \quad \Rightarrow \quad s^* = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = 2 \text{ ó } 2/3$$

Ambos valores nos llevan a una asignación óptima de Pareto. Si $s^* = 2$ entonces $x_1^* = 2$, $y_1^* = 2$, $x_2^* = 0$ y $y_2^* = 0$. Es decir, el óptimo paretiano se sitúa en la esquina superior izquierda de la caja de Edgeworth. Mientras que si, de una manera más justa, $s^* = 2/3$, entonces $x_1^* = 2/3$, $y_1^* = 6/5$, $x_2^* = 1/3$ y $y_2^* = 4/5$.

XV. COMPUTACIÓN DE EQUILIBRIOS Y DESEQUILIBRIOS

A medida que pasa el tiempo, un mayor número de textos de microeconomía tienden a ocuparse, con diferentes grados de profundidad, de las condiciones matemáticas que aseguran la existencia de soluciones a los modelos de equilibrio general. No obstante, y a pesar del reciente despegue de lo que se ha dado en llamar la economía computacional, poca mención es hecha acerca de *cómo* pueden calcularse realmente tales equilibrios en la práctica. Para subsanar un poco esta omisión, concluimos este libro con un breve capítulo que presenta, entresacando partes de uno de nuestros trabajos anteriores (Urzúa, 1994), un algoritmo en *GAUSS* que puede ser usado para calcular la solución de modelos estáticos de equilibrio general aplicado, así como para resolver algunos modelos de desequilibrio, con precios fijos *à la* Barro, Grossman y Malinvaud.

La primera sección del capítulo presenta el llamado problema de complementariedad lineal, el cual es fundamental en el área de las matemáticas aplicadas, así como un algoritmo para resolverlo. La segunda sección presenta el correspondiente problema de complementariedad no-lineal, tanto en su versión ordinaria como en una versión generalizada, así como un algoritmo para su solución numérica. La tercera sección muestra entonces cómo replantear los modelos de equilibrio general aplicado en una estructura de complementariedad no lineal, y además presenta un ejemplo específico. La última sección hace lo mismo para el caso de un modelo con rigideces en los precios. Por último, el apéndice del capítulo reproduce el código computacional del programa *RESUELVE*, en caso de que el lector quiera resolver los dos ejercicios sugeridos al final del capítulo.

XV.1. EL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDAD LINEAL

En esta sección presentamos una descripción del problema de complementariedad lineal (PCL), así como el algoritmo sugerido por Lemke (1965) para su solución. El problema es el siguiente:

(PCL) Dado un vector q con dimensión $n \times 1$ y una matriz $M_{n \times n}$, encuentre dos vectores $w \geq 0$ y $z \geq 0$ con dimensión $n \times 1$, y tales que $w = Mz + q$ y $w'z = 0$.

El nombre dado a este problema deriva de su estructura lineal y en el hecho de que los componentes de w y z tienen que ser complementarios en el sentido que $w_i z_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dado que la estructura anterior encapsula problemas de optimización tan diversos como los de programación lineal, programación cuadrática y juegos de suma no-cero entre dos personas, a (PCL) se le conoce como el "problema fundamental" (véase Urzúa, 1994, y las referencias citadas allí).

Existen varios algoritmos que pueden ser utilizados para resolver (PCL). Nuestro programa *RESUELVE*, presentado en el apéndice del capítulo, lo hace a partir de un algoritmo de solución originalmente propuesto por Lemke (1965). Brevemente, y utilizando la terminología empleada en el bien conocido algoritmo "Simplex" de programación lineal, los pasos computacionales que constituyen el método de Lemke pueden ser descritos como siguen. Sea e el vector $n \times 1$ conformado por unos, y considere el siguiente problema relacionado (PR),

(PR) $\quad w - Mz - ez_0 = q,\ w \geq \mathbf{0},\ z \geq \mathbf{0},\ z_0 \geq 0,\ w'z = 0,$

donde z_0 es una nueva variable (escalar) añadida al problema. Nótese que cualquier solución de (PR) con $z_0 = 0$ es también una solución para (PCL). Fije ahora $z = \mathbf{0}$ en (PR). Si $q \geq \mathbf{0}$, la solución es obviamente $w = q$; en caso contrario, sea q_r el menor componente negativo de q y sea $z_0 = -q_r$. La base inicial está ahora compuesta de z_0 y todas las entradas del correspondiente $w \geq \mathbf{0}$ a excepción de w_r (el cual es cero). Denotando por B la matriz de base, el resto del algoritmo puede ser descrito como sigue:

(1) Si w_r (respectivamente z_r) ya no es básico, entonces z_r (respectivamente w_r) entra a la base.
(2) Si el candidato a ser un elemento básico es w_r, sea $a = B^{-1}e$. Y si es z_r, sea $a = -B^{-1}m_r$ donde m_r es la errésima columna de M.
(3) Si $\beta_p / \alpha_p = \text{Min}\{\beta_i / \alpha_i$, para $\alpha_i > 0$ y $i = 1, \ldots, n\}$, donde $\beta = B^{-1}q$, entonces la pe-ésima entrada en la base actual ya no es básica.
(4) Pare si z_0 ya no es básica o si $z_0 < \delta$, para una pequeña $\delta > 0$. En cualquier otro caso renueve B^{-1} y vuelva al paso (1).

Hemos elegido escribir en *GAUSS* el algoritmo de Lemke, llamado precisamente así en el apéndice, siguiendo la versión en *FORTRAN* de Ravindran

(1972). Vale la pena también advertir que el procedimiento de Lemke no garantiza que se encuentre una solución para todas las matrices M. No obstante, siempre encuentra la solución en el caso de una matriz copositiva (esto es, $x'Mx \geq 0$ para todo $x \geq \mathbf{0}$), así como para otros casos comunes.

XV.2. EL PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDAD NO-LINEAL

El componente principal del programa *RESUELVE* es el procedimiento que encuentra la solución a una versión generalizada del problema de complementariedad no-lineal. Pero antes de hablar del caso general, primero conviene considerar el particular:

(PCN-L) Dada una función vectorial diferenciable $G : \Re^n \rightarrow \Re^n$, encuentre un vector z, $z \geq \mathbf{0}$, tal que $G(z)'z = 0$ y $G(z) \geq \mathbf{0}$.

Uno puede encontrar aplicaciones de este problema de complementariedad no-lineal en varias ciencias. En economía, por ejemplo, Mathiesen (1985) fue el primero en notar que los modelos computables de equilibrio general pueden ser estructurados así. De hecho, el método de Mathiesen es actualmente uno de los más populares entre los empleados para resolver dichos modelos (Scarf, 1985, describe otros algoritmos alternativos).

Una vez que se tiene un procedimiento para resolver (PCL), como el descrito en la sección anterior, no es difícil diseñar un algoritmo que permita resolver (PCN-L). La clave radica en transformar el problema, usando por ejemplo el método de Newton, a una sucesión de problemas de complementariedad lineal. Dicho algoritmo es como sigue:

(1) Haga $k = 0$ y asigne algún $z = z^0$.
(2) Haga $k = k + 1$ y linealice $G(z)$ alrededor de z^{k-1}: $L(G, z^{k-1}) \equiv q^k + M^k z$, donde M^k es la matriz jacobiana de G evaluada en z^{k-1}, y $q^k = G(z^{k-1}) - M^k z^{k-1}$.
(3) Usando el método de Lemke, encuentre la z^k y la w que resuelven $w = M^k z^k + q^k$, $w' z^k = 0$, $w \geq \mathbf{0}$, y $z^k \geq \mathbf{0}$.
(4) Pare si $| z^k - z^{k-1} | < \delta$, para alguna pequeña $\delta > 0$. En cualquier otro caso regrese a (2).

La siguiente sección muestra cómo los modelos de equilibrio general pueden ser estructurados de esta manera. Nuestro programa va, sin embargo, más allá, pues una versión generalizada de (PCN-L) puede ser usada no solamente para resolver modelos walrasianos, sino también no-walrasianos.

Este problema generalizado de complementariedad no-lineal (PGCN-L) puede ser descrito así:

(PGCN-L) Dada una función vectorial diferenciable $F: \Re^n \times \Re^n \rightarrow \Re^n$, encuentre los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{w}$ con dimensión $n \times 1$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$, tales que $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{w} = 0$.

Siguiendo a Lensberg (1983), para resolver este problema basta con transformarlo en una sucesión de problemas de complementariedad lineal. Con el fin de mostrar tal algoritmo es necesario introducir un poco más de notación. Sea $N \equiv \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y defina $v \in \Re^n \times \Re^n$ como $v_i = x_i$ y $v_{i+n} = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. Para todo $\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{w} = 0$, sea $I(v)$el conjunto de n índices $i \in N$ para los cuales $v_i > 0$ (si ambos x_i y w_i son cero, entonces digamos que i está en $I(v)$). Así pues, $I(v)$ contiene los índices de las variables básicas, mientras que $N \setminus I(v)$ contiene los índices de las no-básicas. Los pasos del algoritmo para resolver (PGCN-L) pueden ser ahora descritos como sigue:

(1*) Haga $k = 0$ y asigne algún $v = v^0$ (tal que los correspondientes $\boldsymbol{x}^0$ y w^0 son ortogonales).

(2*) Haga $k = k + 1$ y linealice $F(v)$ alrededor de v^{k-1}: $L(F, v^{k-1}) \equiv \boldsymbol{c} + \boldsymbol{Mv}$, donde $\boldsymbol{M}$ es la matriz jacobiana de F evaluada en v^{k-1} y donde $c = F(v^{k-1}) - \boldsymbol{M}v^{k-1}$.

(3*) Obtenga las particiones $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{M}_I, \boldsymbol{M}_{NI})$ y $\boldsymbol{v} = (v_I, v_{NI})$ mediante el conjunto de índices $I(v^{k-1})$.

(4*) Evalúe $L^k(F, v^{k-1}) \equiv \boldsymbol{M}_I^1 L(F, v^{k-1}) = c^k + v_I + \boldsymbol{M}^k v_{NI}$, donde $c^k = \boldsymbol{M}_I^1 \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{M}^k = \boldsymbol{M}_I^1 \boldsymbol{M}_{NI}$.

(5*) Usando el método de Lemke, encuentre la v^k que resuelve: $v_I = -\boldsymbol{M}^k v_{NI} - c^k$, $v_I' v_{NI} = 0$ y $\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$.

(6*) Pare si $\sum_{i=1}^{n} |F^i(v^k)| < \delta$, para alguna delta pequeña $\delta > 0$. De otra manera regrese a (2*).

El algoritmo anterior constituye la parte central del procedimiento RESUELVE dado en el apéndice. Como se ejemplificará en las siguientes secciones, éste es ya lo suficientemente general para ser capaz de resolver indistintamente modelos walrasianos y no-walrasianos.

XV.3. RESOLUCIÓN DE MODELOS DE EQUILIBRIO GENERAL

En esta sección mostraremos cómo pueden resolverse los modelos computables de equilibrio general mediante nuestro programa. Siguiendo a Mathiesen (1985), tales modelos pueden ser reescritos como problemas de complementariedad no-lineal mediante una estructura de análisis de actividades *à la* Scarf. Más precisamente, considere una economía en la cual hay m actividades y n bienes, y sean:

$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)'$ el vector de niveles de actividad,
$\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)'$ el vector de precios de las mercancías,
$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)'$ el vector de dotaciones iniciales,
$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}) = (d_1(\boldsymbol{p}), \ldots, d_n(\boldsymbol{p}))'$ el vector de demandas de las mercancías, y
$A(\boldsymbol{p}) = [a_{ij}(\boldsymbol{p})]$ la matriz insumo-producto con dimensión $m \times n$.

Note que las entradas de la matriz insumo-producto dependen en general de los precios, excepto para las tecnologías de Leontieff. Así mismo, las entradas positivas en la matriz denotan insumos, mientras que las negativas denotan productos (salidas).

Bajo esta estructura, un equilibrio competitivo está compuesto por un vector de precios $\boldsymbol{p}^*$ y un vector de niveles de actividad $\boldsymbol{y}^*$ tales que:

i) $-A(\boldsymbol{p}^*)\boldsymbol{p}^* \geq 0$, ninguna actividad logra beneficios positivos;
ii) $\boldsymbol{b} + A(\boldsymbol{p}^*)'\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}^*) \geq \boldsymbol{0}$, ninguna mercancía es demandada en exceso;
iii) $\boldsymbol{p}^* \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{0}$, ningún precio o nivel de actividad es negativo;
iv) $[-A(\boldsymbol{p}^*)\boldsymbol{p}^*]'\boldsymbol{y}^* = 0$, no hay actividad si los correspondientes beneficios son negativos;
v) $[\boldsymbol{b} + A(\boldsymbol{p}^*)'\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}^*)]'\boldsymbol{p}^* = 0$, el valor de la oferta en exceso es cero.

Si se define el vector $z = (y_1, \ldots, y_m, p_1, \ldots, p_n)$, y la función vectorial $G(z)$ como $(G^y(z)', G^p(z)')'$, donde

$$G^y(z) = -A(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}$$

$$G^p(z) = \boldsymbol{b} + A(\boldsymbol{p})'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}),$$

entonces es claro que las condiciones para que exista un equilibrio competitivo pueden ser reescritas como: el vector $z^* = (\boldsymbol{y}^{*\prime}, \boldsymbol{p}^{*\prime})'$ resuelve el problema de complementariedad no-lineal

$$G(z)'z = 0 \quad \text{con} \quad z \geq \boldsymbol{0} \quad \text{y} \quad G(z) \geq \boldsymbol{0}.$$

Es importante subrayar que como los precios relativos son los únicos que importan en los modelos de equilibrio general (¿por qué?), uno debe elegir un bien numerario y eliminar una ecuación antes de intentar resolver el modelo.

Como una alternativa a la estructura anterior, podemos ahora transformar el modelo anterior de equilibrio general en términos de un problema generalizado de complementariedad no-lineal. Sea w el vector $(w_1', w_1')'$, donde w_1 y w_2 son dos vectores no-negativos de dimensión $m \times 1$ y $n \times 1$ respectivamente. Sea, por otro lado, x el vector $(y', p')'$. Por último, defina la función vectorial $F(x, w)$ como $(F^1(x, w)', F^2(x, w)')'$, donde:

$$F^1(x, w) = w_1 + A(p)p,$$

$$F^2(x, z) = w_2 - b - A(p)'y + d(p).$$

De lo anterior se sigue que cualquier vector de equilibrio competitivo x^* debe ser una solución del siguiente (PGCN-L):

$$F(x, w) = 0, \text{ con } x \geq \mathbf{0}, w \geq \mathbf{0}, \text{ y } x'w = 0.$$

Antes de finalizar esta sección, bien conviene ilustrar los anteriores resultados teóricos mediante un modelo muy simple considerado por Shoven y Whalley (1984). Por el lado de la producción, su modelo considera dos bienes finales (1 y 2), producidos a través de dos factores, capital y trabajo (K y L), y mediante el empleo de dos funciones de producción. Sea, pues, $y = (y_1, y_2)'$ el vector de niveles de actividad, $p = (p_1, p_2, p_L, p_K)'$ el vector de precios, y $L_i(p, y_i)$ y $K_i(p, y_i)$ las demandas condicionadas de los factores en el sector i, dado el nivel de actividad y_i. En consecuencia, la correspondiente matriz insumo-producto $A(p)$ puede ser expresada como:

$$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -L_1(p, 1) & -K_1(p, 1) \\ 0 & 1 & -L_2(p, 1) & -K_2(p, 1) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, el modelo de Shoven y Whalley tiene dos consumidores, 1 y 2, cuyas funciones de utilidad sólo dependen de los dos bienes finales. El primer consumidor, el "rico", posee todo el capital, mientras que el otro, el "pobre", dispone de toda la oferta laboral en la economía. Dado que las funciones de utilidad y las funciones de producción son todas del tipo CES, no es difícil encontrar las demandas correspondientes para también insertarlas en nuestra estructura. El Ejercicio 15.1, al final del capítulo, pide al lector hacer justo eso, para después calcular el equilibrio competitivo mediante el programa en el Apéndice.

XV.4. Resolución de modelos de desequilibrio

En esta última sección nos ocuparemos de los modelos con precios rígidos. El primer punto a notar es que, al menos comúnmente, un modelo de desequilibrio puede ser formulado en términos de su dual mediante los precios sombra asociados con las restricciones (como fue notado inicialmente por Hahn, 1978). Por ejemplo, si hay racionamiento en un mercado debido a que el precio de una mercancía es fijo, entonces existen implícitamente dos precios sobre la restricción: el precio sombra del comprador p_d y el precio sombra del vendedor p_s. Ahora bien, dado que a lo sumo uno de los dos individiduos está racionado, entonces p_d y p_s son complementarios: $p_d\, p_s = 0$. Si ahora denotamos por $\overline{p}$ el precio rígido que prevalece en el mercado, entonces el precio virtual que haría desaparecer todo exceso de demanda por parte del comprador (o del vendedor) estaría dado por $\overline{p} + p_d$ (o $\overline{p} - p_s$). Algo semejante puede establecerse en el caso de modelos que tienen precios que no son totalmente rígidos, pero sí "pegajosos" hacia abajo (o hacia arriba).

Para ilustrar lo anterior, y también como un ejemplo de cómo un modelo de desequilibrio puede establecerse en una estructura (PGCN-L), considere un modelo muy simple con precios rígidos, a la manera de Barro y Grossman (1971) y Malinvaud (1977). El primer sector del modelo involucra una empresa representativa que emplea trabajo para proveer una mercancía (y_s). Se ofrecen a la empresa $\overline{L}$ unidades de trabajo de manera totalmente inelástica. Más aún, la función de producción se supone que es de la forma

$$y_s = L_d^a,$$

donde L_d denota la demanda de trabajo y a es un coeficiente positivo y menor que uno.

En este modelo hay un salario rígido, $\overline{w}$, así como un precio fijo sobre el bien final, $\overline{p}$. Así pues, la empresa podría en principio estar constreñida en el mercado de trabajo o en el mercado de su producto (es decir, podría estar produciendo o vendiendo de menos). No obstante, si w_d y p_s denotan los precios sombra de las restricciones que eventualmente enfrenta la empresa, entonces, como se notó con anterioridad, los precios virtuales $\overline{p} - p_s$ y $\overline{w} + w_d$ pueden ser usados para encontrar la demanda de trabajo y la oferta del producto que prevalecerían en general, sin precios rígidos, si es que la empresa maximiza sus beneficios. En tal caso, el lector puede verificar que:

$$L_d = [a(\overline{p} - p_s)\,/\,(\overline{w} + w_d)]^{1/(1-a)},$$

$$y_s = [a(\overline{p} - p_s)\,/\,(\overline{w} + w_d)]^{a/(1-a)}.$$

El otro sector del modelo lo compone un consumidor representativo que ofrece trabajo de manera inelástica. Además éste demanda el producto, y_d, así como dinero, M_d. En lo que sigue supondremos que el mercado de dinero está siempre en equilibrio, por lo que bien podemos deshacernos del subíndice que aparece en M. La función de utilidad del consumidor se supone que es de la forma:

$$U(y_d, M/\overline{p}) = r\log(y_d) + (1-r)\log(M/\overline{p}),$$

donde el parámetro r es positivo y menor que uno. Dado su saldo monetario inicial M_0, la restricción presupuestaria que enfrenta el individuo está dada entonces por

$$\overline{p}y_d + M \leq \overline{p}y_s + M_0.$$

Como en el caso de la empresa, el individuo podría acabar siendo racionado (esta vez en la demanda del producto). Si p_d denota el precio sombra de la restricción de racionamiento que eventualmente enfrenta el individuo, entonces el precio virtual del producto está dado por $\overline{p}+p_d$. A través de este precio se puede construir a su vez el ingreso virtual de la persona, I. Así pues, como se pide al lector que verifique, las demandas óptimas del producto y de los saldos monetarios son:

$$y_d = rI/(\overline{p}+p_d),$$

$$M = (1-r)I$$

Procedamos ahora a determinar las cantidades que resultarían en un equilibrio no-walrasiano, así como los precios sombra asociados con cada eventual racionamiento, trasladando el modelo anterior a una estructura (PGCN-L). Para empezar, sea ES la variable que designa el exceso de oferta del producto

$$ES \equiv y_s - y_d = [a(\overline{p}-p_s)/(\overline{w}+w_d)]^{a/(1-a)} - rI/(\overline{p}+p_d),$$

la cual debe ser cero si es evaluada bajo los precios virtuales en equilibrio.

Sea además u el número de unidades de tiempo durante los cuales la persona se encontraría eventualmente desempleada. Entonces la expresión

$$ED \equiv L_d + u - \overline{L} = [a(\overline{p}-p_s)/(\overline{w}+w_d)]^{1/(1-a)} + u - \overline{L}$$

es siempre, por definición, igual a cero; más aún, u y w_d son complementarios (si la persona no trabaja de tiempo completo, entonces la empresa no está racionada en el mercado laboral y, por tanto, el precio sombra de esa restricción que no es efectiva debe ser cero).

Por último, sea EI la variable que denota el ingreso virtual del individuo que acaba por no ser usado:

$$EI \equiv \bar{p}y_s + M_0 - \bar{p}y_d - M + s = \bar{p}(y_s - y_d) + M_0 - (1-r)I + s$$

el cual debe ser cero en el óptimo. Nótese que hemos añadido la variable de holgura s, la cual es también cero en el óptimo, para tener una variable complementaria a I.

Dados los parámetros $\bar{p}, \bar{w}, a, r, \bar{L}$ y M_0, un equilibrio con precios fijos (p_s, w_d, I, p_d, u, s) es obtenido cuando, primero, las últimas tres ecuaciones evaluadas en este punto son iguales a cero, y, segundo, las siguientes condiciones de complementariedad son satisfechas:

$$p_s p_d = 0\,,$$

$$w_d u = 0,$$

$$sI = 0,$$

$$p_s, w_d, I, p_d, u, s \geq 0.$$

En el Ejercicio 15.2 se le pide al lector que encuentre dicho equilibrio no-walrasiano para ciertos valores específicos de los parámetros.

XV.5. Ejercicios

Los siguientes dos problemas presuponen un conocimiento básico de GAUSS, así como su disponibilidad.

Ejercicio 15.1. Establezca de manera completa el modelo de Shoven y Whalley (1984) como un problema generalizado de complementariedad no-lineal, usando los valores de los parámetros tal como aparecen en el Cuadro 1 de esos autores. Posteriormente, mediante el empleo del programa RESUELVE, y tomando como bien numerario el trabajo, replique los resultados que presentan Shoven y Whalley en su Cuadro 2. (El código en GAUSS que resuelve este problema se encuentra al final del Apéndice).

Ejercicio 15.2. Dados los parámetros $\overline{p} = 2$, $\overline{w} = 1$, $a = 0.45$, $r = 0.8$, $\overline{L} = 1$ y $M_0 = 0.5$, emplee el programa *RESUELVE* para mostrar que la solución al problema de desequilibrio presentado en la Sección XV.4 es: $p_s = 0$, $w_d = 0$, $I = 2.50$, $p_d = 0.18$, $u = 0.17$ y $s = 0$. (El código en *GAUSS* que resuelve este problema se encuentra al final del Apéndice).

APÉNDICE. EL PROGRAMA *RESUELVE*

El componente principal del siguiente programa escrito en *GAUSS* es el procedimiento *RESUELVE*, el cual invoca a su vez al procedimiento *LEMKE*, también incluido aquí. Éste último puede ser usado de manera independiente en el caso de problemas de complementariedad lineal. El procedimiento *RESUELVE* requiere un valor inicial para el vector "v", una base inicial ("basis"), un número máximo de iteraciones a ser permitidas ("imax"), así como un procedimiento que defina a la función vectorial correspondiente ("f"). Por otro lado, el procedimiento *LEMKE* sólo requiere la matriz "m", el vector "q", y el "imax" correspondiente.

```
proc resuelve(v,basis,imax);
    local d,g,gb,gbinv,gnb,i,k,m,n,nbasis,q,vb,vnb;
    n = rows(basis);
    i = 0;
    do while i < imax;
    i = i+1;
    print; print "Iteración";; format /rd 3,0; i;
    format /rd 8,2; print "v' =";; v'; print "F(v)' =";; f(v)';

/* Linealice el problema no-lineal y llame a LEMKE */
    g = gradp(&f,v);
    gb = submat(g,0,basis);
    d = basis . > n*ones(n,1);
    nbasis = substute(basis+n*ones(n,1),d,basis-n*ones(n,1));
    gnb = submat(g,0,nbasis);
    gbinv = inv(gb);
    m = -gbinv*gnb;
    q = -gbinv*(f(v)-g*v);
    print "LEMKE es llamado... ";;
    {vnb,vb} = lemke(m,q,imax);
    k = 0;
    do while k < n;
        k = k+1;
```

```
        if vnb[k] > 0;
            v[nbasis[k]] = vnb[k];
            basis[k] = nbasis[k];
        else;
            v[basis[k]] = vb[k];
            endif;
        endo;
        if sumc(abs(f(v))) <= 1E-10;
            print; print "Solución del PCN-L:";
            format /rd 8,2; print "v' =";; v'; print "F(v)' =";; f(v)';
            retp(v);
        endif;
    endo;
    print; print "No hay solución tras";; format /rd 3,0; imax;;
    print "iteraciones";
endp;

proc (2) = lemke(m,q,imax);
    local alpha,b,basic,d,in,j,k,n,out,r,r0,w,z,z0;
    n = rows(m);
/* Introduce the new variable z0 and get the basis */
    z0 = -minc(q);
    r = minindc(q);
    z = zeros(n,1);
    if z0 < 0;
        w = q;
        print "Solución trivial al PCL: w = q, z = 0";
        retp(z,w);
        endif;
        q = q+z0;
        q[r] = z0;
        b = eye(n);
        b[.,r] = - ones(n,1);
        basic = ones(n,1) | seqa(1,1,n);
        basic[r] = 0;
        basic[r+n] = 0;
        r0 = r;
        w = q;
        w[r] = 0;
        out = 1 | r;
        j = 1;
```

```
/* Encuentre la nueva base para proseguir la búsqueda */
d1: if out[1] = = 1;
        in = 2 | out[2];
        alpha = -b*m[.,in[2]];
    elseif out[1] == 2;
        in = 1 | out[2];
        alpha = b[.,in[2]];
    else;
d2:     print "Solución al PCL (tras";; format /rd 3,0; j;;
        print "iteraciones):";
        d = q . <= 1E-10*ones(n,1);
        q = substute(q,d,0);
        w = zeros(n,1);
        z = zeros(n,1);
        k = 0;
        do while k < n;
            k = k+1;
            if basic[k] == 1;
                                w[basic[k+n]] = q[k];
            elseif basic[k] == 2;
                                z[basic[k+n]] = q[k];
            endif;
    endo;
    format /rd 8,2; print "z' =";; z'; print "w' =";; w';
    retp(z,w);
endif;

/* Encuentre el renglón pivote para la siguiente iteración */
if q[r0] <= 1E-10;
    goto d2;
endif;
if alpha <= zeros(n,1);
    print "El PCL no tiene solución";
    end;
else;
    r = maxindc(alpha);
endif;
k = 0;
do while k < n;
    k = k+1;
    if alpha[k] <= 0;
```

```
            continue;
        elseif q[k]/alpha[k] < q[r]/alpha[r];
            r = k;
        endif;
    endo;

    /* Haga una operación de pivote y renueve la base y q */
        b[r,.] = b[r,.]/alpha[r];
        q[r] = q[r]/alpha[r];
        k = 0;
        do while k < n;
            k = k+1;
            if k /= r;
                q[k] = q[k]-q[r]*alpha[k];
                b[k,.] = b[k,.]-b[r,.]*alpha[k];
            endif;
        endo;
        out[1] = basic[r];
        out[2] = basic[r+n];
        basic[r] = in[1];
        basic[r+n] = in[2];
        if j < imax;
            j = j+1;
            goto d1;
        else;
            print "No hubo solución del PCL tras";; format /rd 3,0; imax;;
            print "iteraciones";
            end;
        endif;
    endp;
```

El programa anterior se utilizó para resolver los dos ejercicios propuestos al final de este capítulo. Para resolver el Ejercicio 15.1, se encontraron primero las expresiones para las demandas y ofertas implícitas en el modelo de Shoven y Whalley (1984). Después se eligió el trabajo como el bien numerario y, por la ley de Walras, se eliminó la ecuación correspondiente al exceso de oferta de trabajo. Para transformar el ejercicio a un problema generalizado de complementariedad no-lineal, se definió entonces el vector $v' = (x', w')$, donde $x' = (y_1, y_2, p_1, p_2, p_K)$. El vector w' representa, como se explica en la sección XV.3, a las variables artificiales que se requieren para transformar el problema a una estructura (PGCN-L). Como base inicial se tomaron todas las variables no artificiales, y, de manera arbitraria, se conjeturaron los valores iniciales para ellas. El programa resultante es el siguiente:

```
new;
    let v = {10,10,1,1,1,0,0,0,0,0};
    let basis = {1,2,3,4,5};
    imax = 100;
    call resuelve(v,basis,imax);
end;
proc f(v);
    local fv,k1,k2,l1,l2,x11,x12,x21,x22;
    fv = zeros(5,1);
    k1 = 1/(1.5*(.9*v[5]+.4)^2);
    k2 = .15+(.0525/v[5])^.5;
    l1 = .24*v[5]^2/(.36*v[5]+.16)^2;
    l2 = .35+(.0525*v[5])^.5;
    x11 = 25*v[5]/(v[3]+(v[3]^1.5)/(v[4]^.5));
    x12 = 18/(.3*v[3]+.7*(v[3]^.75)*(v[4]^.25));
    x21 = 25*v[5]/(v[4]+(v[4]^1.5)/(v[3]^.5));
    x22 = 42/(.7*v[4]+.3*(v[4]^.75)*(v[3]^.25));
    fv[1] = v[6]+v[3]-l1-v[5]*k1;
    fv[2] = v[7]+v[4]-l2-v[5]*k2;
    fv[3] = v[8]-v[1]+x11+x12;
    fv[4] = v[9]-v[2]+x21+x22;
    fv[5] = v[10]-25+v[1]*k1+v[2]*k2;
    retp(fv);
endp;
```

Para el Ejercicio 15.2 se definió $v' = (p_s, w_d, I, p_d, u, s)$. Por consiguiente, la función vectorial asociada es de la forma $F(v) = (ES(v), ED(v), EI(v))$. De manera arbitraria se seleccionó la base y sus valores iniciales. El programa resultante es el siguiente:

```
new;
    let v = {0,0,2,0,0,0};
    let basis = {1,3,5};
    imax = 100;
    call resuelve(v,basis,imax);
end;
proc f(v);
    local a,fv,ld,ls,m0,pf,r,ys,yd,wf;
```

```
    fv = zeros(3,1);
    pf = 2;
    wf = 1;
    a = 0.45;
    r = 0.8;
    ls = 1;
    m0 = 0.5;
    ld = (a*(pf-v[1])/(wf+v[2]))^(1/(1-a));
    ys = ld^a;
    yd = r*v[3]/(pf+v[4]);
    fv[1] = ys-yd;
    fv[2] = ld+v[5]-ls;
    fv[3] = pf*ys+m0-pf*yd-(1-r)*v[3]+v[6];
    retp(fv);
endp;
```

BIBLIOGRAFÍA

Arrow, K. J. y F. H. Hahn (1971), *General Competitive Analysis*, San Francisco: Holden Day. Traducción al español: *Análisis general competitivo*, México: Fondo de Cultura Económica, 1976.

Barro, R. J. y H. I. Grossman (1971), "A General Disequilibrium Model of Income and Employment", *American Economic Review*, 1971, 61, 82-93.

Champsaur, P. y J. C. Milleron (1983), *Advanced Exercises in Microeconomics*, Cambridge: Harvard University Press.

Chiang, A. C. (1984), *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3ª ed., Nueva York: Mc Graw-Hill. Traducción al español: *Métodos fundamentales de economía matemática*, México: McGrawHill, 1992.

Deaton, A. y J. Muellbauer (1980), *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge: Cambridge University Press.

Diamond, P. A. y M. Rothschild (1989), *Uncertainty in Economics*, ed. revisada, San Diego: Academic Press.

Dixon, P. B., S. Bowles y D. Kendrick (1980), *Notes and Problems in Microeconomic Theory*, Amsterdam: North-Holland.

Dixit, A. K. (1990), *Optimization in Economic Theory*, 2ª ed., Nueva York: Oxford University Press.

Hahn, F. H. (1978). "On Non-Walrasian Equilibria", *Review of Economic Studies*, 45, 1-18.

Hara, C., I. Segal y S. Tadelis (1997), *Solutions Manual for Microeconomic Theory*, Nueva York: Oxford University Press.

Hey, J. D. y P. J. Lambert (1989), *Surveys in the Economics of Uncertainty*, Nueva York: Basil Blackwell.

Intriligator, M. D. (1971), *Mathematical Optimization and Economic Theory*, New Jersey: Prentice-Hall. Traducción al español: *Optimización matemática y teoría económica*, Madrid: Prentice-Hall International, 1973.

Jones, A. J. (1980), *Game Theory: Mathematical Models of Conflict*, Chichester, Inglaterra: Ellis Horwood.

Kreps, D. M. (1990), *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton: Princeton University Press.

Lemke, C. E. (1965), "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", *Management Science*, 11, 681-689.

Lensberg, T. (1983), "A Dual Route to Computable Fix-Price Equilibria", Discussion Paper 0583, Norwegian School of Economics and Business Administration, Bergen, Noruega.

Malinvaud, E. (1977), *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Oxford: Basil Blackwell.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Nueva York: Oxford University Press.

Mathiesen, L. (1985), "Computation of Economic Equilibria by a Sequence of Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming Study*, 23, 144-162.

de Meza, D. y M. Osborne (1980), *Problems in Price Theory*, Chicago: University of Chicago Press.

Ravindran, A. (1970), "A Computer Routine for Quadratic and Linear Programming Problems", *Communications of the* ACM, 15, 818-820.

Scarf, H. (1985), "The Computation of Equilibrium Prices", en K. Arrow and M. Intriligator, comps., *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 2, Nueva York: North Holland.

Shoven, J. B., y J. Whalley (1984), "Applied General Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey", *Journal of Economic Literature*, 22, 1007-1051.

Silberberg, E. (1978), *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, Nueva York: McGraw-Hill.

Simon, C.P. y L. Blume (1994), *Mathematics for Economists*, Nueva York: W.W. Norton.

Sydsæter, K. y P. J. Hammond (1995), *Mathematics for Economic Analysis*, Nueva Jersey: Prentice Hall.

Takayama, A. (1985), *Mathematical Economics*, 2ª ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Urzúa, C. M. (1994), "RESUELVE: A GAUSS program for Solving Computable General Equilibrium and Disequilibrium Models", *Estudios Económicos*, 9, 273-294.

Urzúa, C. M. (2000), "The Optimal Tax Problem Revisited", manuscrito, El Colegio de México, México.

Varian, H. R. (1992), *Microeconomic Analysis*, 3ª ed., Nueva York: W. W. Norton. Traducción al español: *Análisis microeconómico*, 3ª ed., Barcelona: Bosch, 1993.

Yohe, G. W. (1993), *Exercises and Applications for Microeconomic Analysis*, 3ª ed., Nueva York: W. W. Norton.

Ejercicios de teoría microeconómica
se terminó de imprimir en febrero de 2002
en los talleres de Impresores Aldina, S.A.
Obrero Mundial 201, col. del Valle
03100 México, D.F. Se imprimieron 1 000 ejemplares
más sobrantes para reposición.
La edición estuvo al cuidado de la Dirección de
Publicaciones de El Colegio de México.

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

Este libro presenta un centenar de problemas, con sus respectivas respuestas, sobre los fundamentos básicos de la teoría microeconómica. Así pues, el libro puede emplearse para apuntalar la teoría dada en el último año de la licenciatura en economía o en el primer año del posgrado.

El primer capítulo contiene unos breves apuntes, y veinte ejercicios, sobre optimización clásica. Los seis capítulos siguientes presentan ejercicios sobre los temas más comunes en un primer curso de teoría microeconómica: la teoría del consumo, la elección bajo incertidumbre, la teoría de la producción, la organización industrial, el equilibrio general y el bienestar social. Los siete capítulos siguientes presentan una solución detallada a los ejercicios propuestos con anterioridad. Por último, el capítulo final contiene unos breves apuntes sobre el importante tema de la computación de equilibrios.

ISBN 968-12-1044-1

EL COLEGIO DE MÉXICO