

Estimación de la Función de Densidad
Neutral al Riesgo por medio del Precio de
Opciones

Nadia Muñoz Barbosa
El Colegio de México

Asesor: Eneas Caldiño G.

Resumen

En el presente trabajo se estima la *Función de Densidad Neutral al Riesgo* a través del precio de opciones sobre el tipo de cambio peso-dólar. Esta función indicará las expectativas que tiene el mercado acerca del tipo de cambio. La densidad se estima obteniendo la volatilidad implícita de opciones sobre este subyacente por métodos no paramétricos. Una vez obtenida se introduce en la función Black-Scholes para finalmente obtener la función de densidad.

Agradecimientos

A mi Familia y a El Colegio de México

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	II
1. Base Teórica	1
1.1. FDNR y el Precio de las Opciones	1
1.2. Aproximación Discreta	2
1.3. Revisión de la Literatura	3
1.4. Metodología	4
1.4.1. Regresión no Paramétrica	4
1.4.2. Obtención de la FDNR a través de la Regresión no Paramétrica	5
2. Estimación	9
2.1. Datos	9
2.2. Resultados	11
2.2.1. Aplicación	16
3. Conclusiones	18

Introducción

Los derivados¹ han tenido un gran auge en los últimos años gracias, en parte, a que los mercados están cada vez más expuestos a riesgos antes no existentes que pueden ser disminuidos al utilizar este tipo de productos.

Los productos derivados también pueden proveer de información valiosa acerca de las expectativas que tienen los agentes sobre el valor futuro del subyacente. Específicamente el precio de las opciones² puede ser utilizado para recuperar estas expectativas, las cuales pueden ayudar a tomar decisiones de inversión.

¿Pero esto cómo es que se da? ¿Cómo es que se puede obtener las expectativas del mercado?

Bajo el principio de valuación neutral al riesgo el precio de una opción es el valor presente de los rendimientos esperados. El precio que se asigne a una opción representará la percepción que tenga el mercado sobre la posibilidad de que el subyacente tome un valor dado en el futuro.

Utilizando estos dos hechos es posible recuperar una función de densidad a través del precio de las opciones que represente las expectativas que tiene el mercado sobre el subyacente. Esta función es conocida como **Función de Densidad Neutral al Riesgo (FDNR)**.

El objetivo del presente trabajo es estimar la FDNR por medio del precio de opciones sobre el tipo de cambio peso-dólar para conocer que expectativas tiene un agente que compra una opción sobre este subyacente.

Para obtener la función de densidad se utiliza la regresión no paramétrica *Kernel*.

¹Derivado: Instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otra variable llamada subyacente.

²Una Opción es un derivado que le da al tenedor el derecho de comprar(vender) el activo subyacente en una fecha fija a un precio determinado.

Aunque existen numerosos métodos para la obtención de la FDNR se optó por esta técnica dado que no asume dinámica alguna entre variables ni parametrización alguna de la función de densidad.

En el primer capítulo se habla de la relación existente entre el precio de las opciones y la FDNR. Se habla también de técnicas utilizadas en la literatura para estimar la densidad. Por último se hace una descripción de lo que es la estimación no paramétrica.

En el segundo capítulo se describe la estimación realizada y los datos que fueron utilizados. Se presenta la FDNR y una aplicación en base a ésta.

En el tercer capítulo se muestran las conclusiones.

Capítulo 1

Base Teórica

1.1. FDNR y el Precio de las Opciones

De acuerdo al principio de valuación neutral al riesgo el precio de una opción *call* europea³ c en el tiempo t con período de maduración τ ⁴ es el valor esperado de la misma descontado a la tasa de interés libre de riesgo r

$$c_t = e^{-r\tau} E_t [\text{máx}(S_T - K, 0)]$$

lo cual es equivalente a

$$c_t = e^{-r\tau} \int_0^{\infty} \text{máx}(S_T - K, 0) f_t^*(S_T) dS_T \quad (1.1)$$

donde $f_t^*(S_T)$ es la FDNR en el día t sobre la expectativa del valor del subyacente en el día T .

Ya se cuenta con una expresión que relaciona el precio de una opción *call* con la FDNR. Sólo falta determinar como extraer la función de esta relación.

Bredeen y Litzenberger (1978) establecieron que la FDNR es la segunda derivada normalizada por el término $e^{r\tau}$ de la función de precios de una opción *call* con respecto al precio de ejercicio.

³Las opciones europeas son aquellas que sólo se pueden ejercer hasta que madure la opción.

⁴El periodo de maduración se define como $\tau = T - t$.

Para observar lo anterior se deriva la expresión 1.1 con respecto al precio de ejercicio

$$\frac{\partial c_t}{\partial K} = -e^{-r\tau} \int_{S_T=K}^{\infty} f_t^*(S_T) dS_T$$

al obtener la segunda derivada se tiene lo siguiente

$$\frac{\partial^2 c_t}{\partial K^2} = e^{-r\tau} f_t^*(S_T)$$

lo cual muestra que la FDNR se obtiene de la siguiente manera

$$f_t^*(S_T) = e^{r\tau} \frac{\partial^2 c_t}{\partial K^2}$$

1.2. Aproximación Discreta

Existe una aproximación discreta de la FDNR.⁵

Suponga que H_1 , H_2 y H_3 son precios de opciones europeas *call* con maduración τ y precios de ejercicio $k - \delta$, k , y $k + \delta$ respectivamente.

La aproximación de la FDNR se obtiene de la siguiente manera

$$f_t^*(S_T) \approx e^{r_{t,\tau}\tau} \frac{H_1 + H_3 - 2H_2}{\delta^2} \quad (1.2)$$

donde $r_{t,\tau}$ es la tasa de interés libre de riesgo del día t para poner precio a una opción con maduración τ

Mas adelante se obtendrá esta función discreta. Esta aproximación ayudará a dar una idea de como es la FDNR.

⁵Ver Breeden y Litzenberger (1978)

1.3. Revisión de la Literatura

En esta sección se hace un pequeño recuento de los trabajos que se han realizado sobre la FDNR. Se hace énfasis en los métodos que se utilizaron para obtener la densidad.

Existen trabajos que obtienen la densidad por medio de suponer que la FDNR tiene una forma paramétrica particular. Melick y Thomas (1997) asumen esto. Tratan de recuperar los parámetros de la función minimizando la distancia entre los precios observados de las opciones y aquellos generados por la forma paramétrica asumida. Bahra (1997) supone que la función de densidad del subyacente es una mezcla de lognormales. Esto le permite obtener la FDNR.

Otros trabajos asumen que la volatilidad implícita es una función cuadrática del precio de ejercicio. Es decir imponen una forma funcional a la *curva smile*⁶. Este método se conoce como *Interpolación de la curva Smile*. Después la función Black-Scholes es utilizada para generar los precios de las opciones. Malz (1997) obtiene la FDNR sobre el tipo de cambio en Estados Unidos a través de esta técnica. Áron Gereben (2002) también utiliza este procedimiento para obtener la FDNR por medio de las opciones sobre el dólar de Nueva Zelanda.

Ait-Sahalia y Lo (1998) obtienen la FDNR de forma no paramétrica, es decir no asumen algún tipo de proceso del subyacente ni tampoco usan alguna forma paramétrica para la FDNR. Realizan la estimación a través de una regresión *Kernel*. Aunque la técnica que utilizan requiere tener muchas observaciones para obtener una estimación precisa, tiene la ventaja de no asumir ningún tipo de forma funcional sobre la FDNR.

Diaz de León y Casanova (2004) generan la FDNR aplicando la interpolación de la curva smile y la mezcla de funciones de densidad lognormales en el mercado cambiario y petrolero en México respectivamente.

Carlson, Craig y Melick (2005) obtienen la FDNR por medio de las opciones sobre futuros de la tasa de interés de los fondos federales a través de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

⁶Curva Smile: gráfico de la volatilidad implícita de una opción en función de su precio de ejercicio.

1.4. Metodología

En esta sección se va a describir brevemente cual es la técnica que se va a utilizar para obtener la FDNR.

Primero se habla de la regresión no paramétrica *Kernel*; qué es, en qué consiste, etc.

Después se describe cómo esta técnica va a ser utilizada para obtener la FDNR.

1.4.1. Regresión no Paramétrica

La regresión no paramétrica es una técnica estadística que encuentra una relación entre variables sin asumir algún tipo de relación ni forma funcional. Por medio de los datos muestra calcula valores promedio de la variable dependiente o de la que queremos explicar para algunos valores de la variable(s) independiente(s) o explicativa(s) en un intervalo determinado. Estos valores promedio son después suavizados de tal manera que se obtiene una curva. Esta curva representa una relación funcional entre la variable dependiente y la(s) variable(s) independiente(s). (Estas últimas son también llamadas regresores no paramétricos).

Por ejemplo supongamos se quiere estimar una relación entre dos variables X y Y que satisfacen lo siguiente

$$Y = f(X) + \epsilon$$

donde $f(\cdot)$ es una función desconocida y ϵ es ruido blanco. En particular si se quiere el valor de la función $f(\cdot)$ en un punto dado $X = x_0$ una forma natural de obtener esto sería promediar las observaciones disponibles de f_0 (es decir valores que se obtuvieron a través del punto x_0). Dado que es difícil tener muchas observaciones generadas por x_0 lo anterior no es posible.

La regresión no paramétrica *Kernel* asume que $f(\cdot)$ es suave lo cual permite estimar la función tomando un promedio ponderado de los valores de la función generados por valores de X que estén cercanos a x_0 .

La forma en que se ponderan las observaciones es por medio de un *Kernel* el cual cumple con la definición de densidad. Esta función es de muchos tipos. Lo que determina que tipo de *Kernel* se empleará es el número de

observaciones con que se cuente, el número de regresores no paramétricos y el número de derivadas parciales que se estima tenga la verdadera función $f(\cdot)$.

En particular existen *Kernels* de alto orden cuya propiedad principal es que permiten una convergencia más rápida a la verdadera función $f(\cdot)$ conforme la muestra aumenta. También permiten que el sesgo de la estimación disminuya. La elección del *Kernel* tiene poca influencia en el resultado final.

Para determinar que valores de X están cercanos a x_0 se necesita establecer un intervalo alrededor de este último valor. El tamaño del intervalo es llamado *ventana* denotado como h . La forma en que se determina la ventana es muy importante para la estimación. Si se escoge una ventana muy pequeña existirán demasiados brincos en la función. Si la ventana es muy grande la función será demasiado suave y por lo tanto no captará partes de la función donde existan saltos.

Hay que tomar en cuenta que es difícil obtener un estimador preciso de la función cuando el número de regresores no paramétricos es grande⁷.

1.4.2. Obtención de la FDNR a través de la Regresión no Paramétrica

De acuerdo a lo visto en el capítulo uno se necesita una función de precios doblemente diferenciable para obtener la FDNR. Se podría obtener la función de precios de forma no paramétrica dado que se cuenta con los precios de las opciones y características que la determinaron. Es decir se puede asumir que la función de precios $H(\cdot)$ está en función del precio de ejercicio X , el precio del subyacente S_T , la tasa de interés nacional r , la tasa de interés internacional δ y del período de maduración τ .

$$H(S_t, X, \tau, r, \delta)$$

Existe un problema si se trata de estimar la función de densidad de esta manera. Dado que son cinco las variables que determinan los precios la estimación puede no ser tan precisa.

⁷Esto es llamado el problema de dimensionalidad.

Se puede enfrentar el problema de dimensionalidad asumiendo que la función no depende del precio del subyacente, de la tasa de interés nacional e internacional de forma separada, sino de:

$$F_{t,\tau} = S_t e^{(r-\delta)\tau} \quad (1.3)$$

de tal manera que en vez de tener cinco regresores ahora se tienen cuatro

$$H(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta) = H(F_{t,\tau}, X, \tau, r_{t,\tau})$$

Otra manera de reducir la dimensionalidad consiste en suponer que la función de precios $H(\cdot)$ está dada por la función Black-Scholes $H_{BS}(\cdot)$ excepto que la volatilidad implícita $\sigma(F_{t,\tau}, X, \tau)$ está en función de $F_{t,\tau}$ y es una función no paramétrica

$$H(F_{t,\tau}, X, \tau, r_{t,\tau}) = H_{BS}(F_{t,\tau}, X, \tau, r_{t,\tau}; \sigma(F_{t,\tau}, X, \tau))$$

De esta manera se tendría que estimar la volatilidad implícita en función sólo de tres variables.

Dado lo anterior se estimará la volatilidad implícita de forma no paramétrica y se asumirá que la función de precios está dada por la función Black-Scholes.

Una vez reconocido y reducido el problema de la dimensionalidad se tiene que definir que tipo de estimador se utilizará para obtener la volatilidad implícita.

En este trabajo se hará uso del estimador *Nadaraya Watson* con el cual se va a estimar la volatilidad con características $F_{t,\tau}, X, \tau$.

$$\hat{\sigma}(F_{t,\tau}, X, \tau) = \frac{\sum K_F \left[\frac{F_{t,\tau} - F_{t_i, \tau_i}}{h_F} \right] K_X \left[\frac{X - X_i}{h_x} \right] K_\tau \left[\frac{\tau - \tau_i}{h_\tau} \right] \sigma_i}{\sum K_F \left[\frac{F_{t,\tau} - F_{t_i, \tau_i}}{h_F} \right] K_X \left[\frac{X - X_i}{h_x} \right] K_\tau \left[\frac{\tau - \tau_i}{h_\tau} \right]}$$

donde σ_i es la volatilidad implícita del precio H_i observado con características F_{t_i, τ_i}, X_i y τ_i (i denota la observación i ésima), K es la función *Kernel* y h

es la ventana que se determinará más adelante. K y h varían de acuerdo al regresor.

La volatilidad implícita que se obtendrá con el estimador será el promedio ponderado de las volatilidades observadas σ_i , dándole mayor peso a las volatilidades cuyas características $F_{t_i, \tau_i}, X_i, \tau_i$ estén más cercanas a las características de la volatilidad $F_{t, \tau}, X, \tau$.

Ahora falta determinar tanto el tipo de *Kernel* como la ventana a utilizar.

De acuerdo a lo que se dijo en la sección 1.4.1 se emplearán *Kernels* de alto orden. En particular se usarán los de orden dos y cuatro.

$$k_{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$k_{(4)}(z) = \frac{3}{\sqrt{8\pi}} \left(1 - \frac{z^2}{3}\right) e^{-\frac{z^2}{2}}$$

donde $k_{(l)}$ es el *kernel* de orden l .

El primero es llamado *Kernel Gaussiano* debido a que se define como la función de densidad normal estandar. No se recomienda utilizar *Kernels* de más alto orden dado que presentan características que no son deseables en la estimación.

Para cada uno de los regresores se estableció la siguiente relación para determinar el valor de la ventana h ⁸

$$h_j = c_j \sigma_j n^{\frac{-1}{d+2p}}$$

donde σ_j es la desviación estandar del regresor j , n es el número de observaciones, d es el número de regresores, p es el número de derivadas de la función a estimar y c_j es una constante que se determina para cada regresor j a través de la relación $c_j = \frac{c_{j0}}{\ln(n)}$.

La determinación de la ventana de esta forma permite que se equilibre el sesgo y la varianza del estimador, es por esto que es llamada la *ventana óptima*.

⁸Ver Pagan y Ullah (1999)

El utilizar *Kernels* de alto orden y la *ventana óptima* permite que el estimador tenga una convergencia al verdadero valor de la función a una tasa óptima.

Una vez definido el estimador, los *Kernels* y la ventana a usar se va a estimar la volatilidad implícita $\hat{\sigma}(F_{t,\tau}, X, \tau)$.

Ésta después será introducida en la segunda derivada de la función Black-Scholes

$$\frac{\partial^2 \hat{H}(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta)}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 H_{BS}(F_{t,\tau}, X, \tau, r; \hat{\sigma}(F_{t,\tau}, X, \tau))}{\partial X^2}$$

Obtenida la segunda derivada se podrá generar la *Función de Densidad Neutral al Riesgo*

$$f_t^* = e^{r_t, \tau \tau} \left[\frac{\partial^2 \hat{H}(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta)}{\partial X^2} \right]_{|X=S_T}$$

Capítulo 2

Estimación

En este apartado se realiza la estimación de la función de densidad. Los datos con los cuales se hizo la estimación son descritos y se mencionan algunas modificaciones que se hicieron a estos. Por último se presenta la FDNR que se encuentra implícita en los precios de las opciones sobre el tipo de cambio peso-dólar junto con una aplicación.

2.1. Datos

Se estima la función de densidad apartir de 16,982 opciones *call* europeas del tipo de cambio peso-dólar obtenidas en el periodo del 28 de Julio de 2006 al 30 de Abril de 2007. El conjunto de datos incluye tanto la volatilidad implícita como las características que la determinan. Los datos fueron proporcionadas por el Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER). MEXDER establece contratos de Opción con fechas de vencimiento en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre, lo cual permite tener un gran número de observaciones en cada día.

Existen algunos problemas con los datos que hay que tomar en cuenta. Primero, es difícil saber el precio exacto del subyacente justo en el momento en que el precio de la opción fue resgistrado. Segundo, para obtener el precio futuro del subyacente se necesita conocer la tasa de interés libre de riesgo internacional. Por desgracia ésta es desconocida.

Para enfrentar estos dos problemas se hizo lo siguiente. Dado que se sabe que los precios de las opciones se fijan en un mismo día y en un mismo

momento es posible suponer que se utilizó un sólo precio del subyacente.

Para enfrentar el segundo problema en vez de obtener el precio futuro de las opciones de acuerdo a la ecuación 1.3 se utiliza la paridad *put call*.

$$H(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) + Xe^{-r_{t,\tau}\tau} = G(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) + F_{t,\tau}e^{-r_{t,\tau}\tau}$$

Esta paridad establece que el precio de una opción *call* $H(\cdot)$ más el valor presente del precio de ejercicio $Xe^{-r_{t,\tau}\tau}$ debe ser igual al precio de una opción *put* $G(\cdot)$ más $F_{t,\tau}e^{-r_{t,\tau}\tau}$ si no existe oportunidad alguna de arbitraje⁹.

De esta relación se va a despejar el precio futuro del tipo de cambio utilizando el precio de opciones *call* y *put* que tengan las mismas características y estén más cercanos al precio de opciones *at the money*¹⁰.

En la tabla 2.1 se muestra un resumen de las estadísticas de los datos

Tabla 2.1

Estadísticas de las opciones sobre el tipo de cambio peso-dólar.

Variable	Media	Desv. Estd.	Mínimo	Máximo
Precio de Ejercicio X (\$)	11,21920	0.44279	10.50	12.00
Volatilidad implícita σ (%)	8.088	0.4940	5.30	9.10
Precio del tipo de cambio S_t (\$)	10.95104	0.1086	10.72	11.21
Período de Maduración τ (años)	0.52566	0.2753	0.0027	0.994
Tasa de Interés libre de riesgo r (%)	7.6249	0.1850	7.21	8.090
Precio futuro del subyacente F (\$)	11.06679	0.1293	10.751	11.453
Precio de la opción H (\$)	0.233976	0.19665	0.001	0.946

Dado que se sabe que MEXDER ofrece opciones con precio de ejercicio a partir de \$10.50 hasta \$12.00 pesos con un intervalo entre precios de 5 centavos existe un amplio número de precios de ejercicio. El precio del tipo

⁹Oportunidad de Arbitraje: Obtener una ganancia segura por medio de transacciones simultáneas en dos o mas mercados.

¹⁰Opciones *at the money*: son aquellas que se comercian con un precio de ejercicio igual al precio del subyacente. Generalmente son las comerciadas.

de cambio no ha variado mucho y en promedio, en el período que se hizo la estimación, ha tenido un valor alrededor de \$11.00 pesos por dólar. El período de maduración de las opciones es amplio, desde un día hasta casi un año. La tasa de interés ha variado poco y tiene un valor medio de 7.62%. El precio de las opciones varía considerablemente desde casi cero pesos hasta un peso.

Para realizar la estimación, como se dijo anteriormente, se necesita establecer el tipo de *Kernel* y el valor de la ventana para cada regresor. En la tabla 2.2 se muestran los *Kernels* utilizados y el valor de las ventanas.

Tabla 2.2

Kernels y valor de las ventanas utilizadas.

<i>kernel</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	c_j	σ_j	h_j
$k_F = k_{(4)}$	4	3	2.0059	0.1293	0.1070
$k_X = k_{(2)}$	4	3	1.2389	0.4427	0.2263
$k_\tau = k_{(4)}$	4	3	0.0993	0.2753	0.0112

Donde p es el número de derivadas de la función a estimar, d es el número de regresores, c_j es una constante determinada para cada regresor de acuerdo al tipo de *Kernel* y al número de observaciones, σ_j es la desviación estandar del regresor j , y h_j es el valor de la ventana para el regresor j .

Como se observa en el cuadro se utiliza el *Kernel* de orden dos para el precio de ejercicio. Para los otros dos regresores el *Kernel* a utilizar es de orden cuatro.

2.2. Resultados

Antes de presentar la FDNR se presentará la aproximación discreta dada por la ecuación 1.2.

Para generar esta función discreta se necesitan los precios de las opciones *call*. Estos precios fueron obtenidos sustituyendo la volatilidad implícita estimada en la función Black-Scholes.

$$\widehat{H}(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta) = H_{BS}(F_{t,\tau}, X, \tau, r_{t,\tau}; \widehat{\sigma}(F_{t,\tau}, X, \tau))$$

Para poder obtener una representación gráfica de la FDNR con respecto al precio del tipo de cambio al momento de madurar la opción se fijaron el precio futuro del tipo de cambio, y la tasa de interés en sus valores medios.

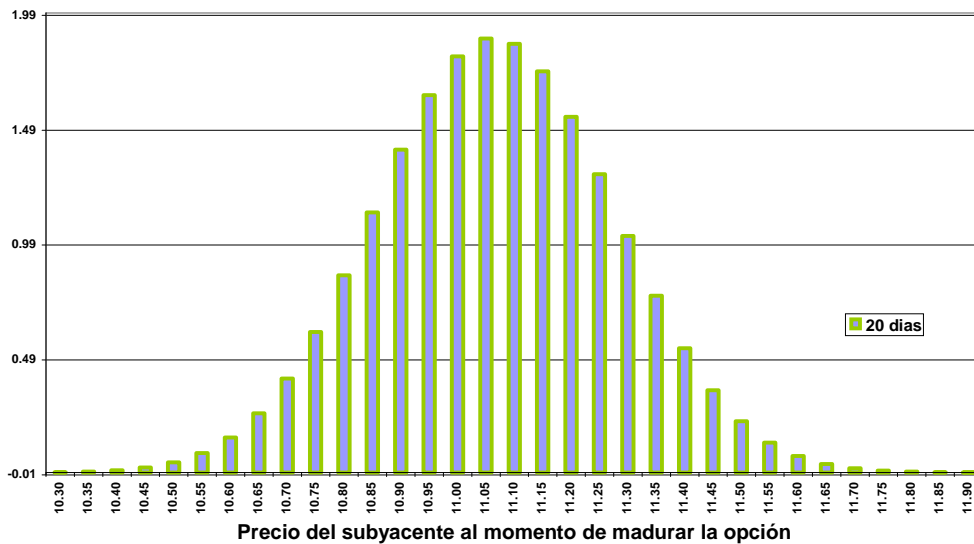
Se obtuvieron distintas funciones discretas variando la madurez de la opción.

En las gráficas 2.1 y 2.2 es mostrada la función discreta que se aproxima a la FDNR. Estas funciones fueron obtenidas con precios de opciones que maduraban en 20 y 90 días.

Se muestran sólo estas dos funciones porque las obtenidas con precios de opciones que maduraban en un período intermedio presentan un comportamiento similar.

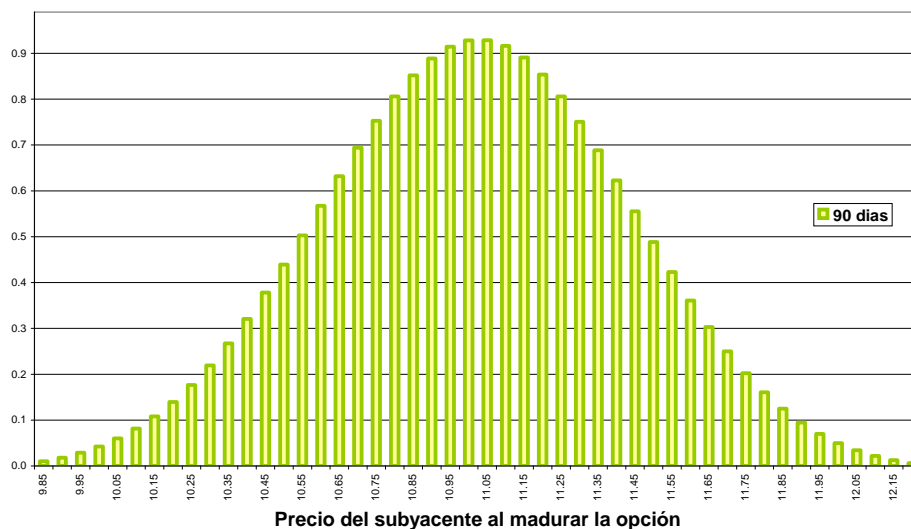
Gráfica 2.1

Aproximación discreta de FDNR



Gráfica 2.2

Aproximación discreta de la FDNR



En las gráficas se observa que mientras más tiempo tarda en madurar una opción la probabilidad que el agente asocia a un evento extremo sobre el tipo de cambio es mayor. Así mismo el valor que toma la función es mayor si el período a madurar es corto.

Esto concuerda con el hecho de que existe menos incertidumbre sobre el valor del tipo de cambio si el período en el cual vence la opción es corto. En cambio si el período es largo el tipo de cambio tiene mayor probabilidad de tomar valores extremos.

Al hacer este análisis de la aproximación discreta de la FDNR se espera encontrar que la expectativa sobre el valor del tipo de cambio al momento de madurar la opción sea que éste tome valores alrededor del valor medio y que esta expectativa disminuya conforme el período de maduración de la opción aumenta. Es decir que el agente espera que el tipo de cambio fluctúe más mientras más pasa el tiempo.

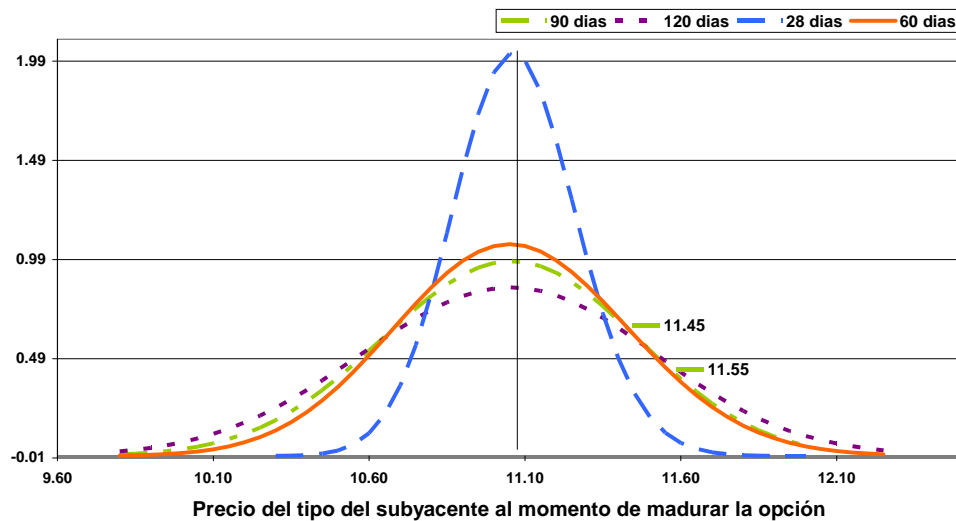
Una vez mostrada la función discreta se va a presentar la FDNR.

En la gráfica 2.3 se muestra como cambia la FDNR respecto al período

de maduración de la opción.

Gráfica 2.3

Función de Densidad Neutral al Riesgo



Se comprueba el comportamiento que se mostró en la función discreta.

Se observa como la FDNR se va “achatando” respecto al período de maduración de la opción. Se asigna una mayor masa de probabilidad a los valores medios mientras más corto sea el período de maduración. A valores que se encuentran en el último cuartil les corresponde casi el mismo valor de la función cuando la opción madura en 90 o 60 días. A valores que se encuentran en el primer cuartil siempre les corresponde un valor distinto.

Esto confirma lo que se esperaba al hacer el análisis de la función discreta. El agente tiene la expectativa de que el tipo de cambio permanezca alrededor de su valor medio y esta expectativa va disminuyendo conforme aumenta el período de medición τ .

Es interesante observar como después de cierto tiempo el agente espera casi con la misma probabilidad que el tipo de cambio tome ciertos valores lejos del valor medio. De hecho la expectativa de que el tipo de cambio

tome valores entre \$11.45 y \$11.55 es la misma aun cuando el período de maduración de la opción sea de 60 o de 90 días.

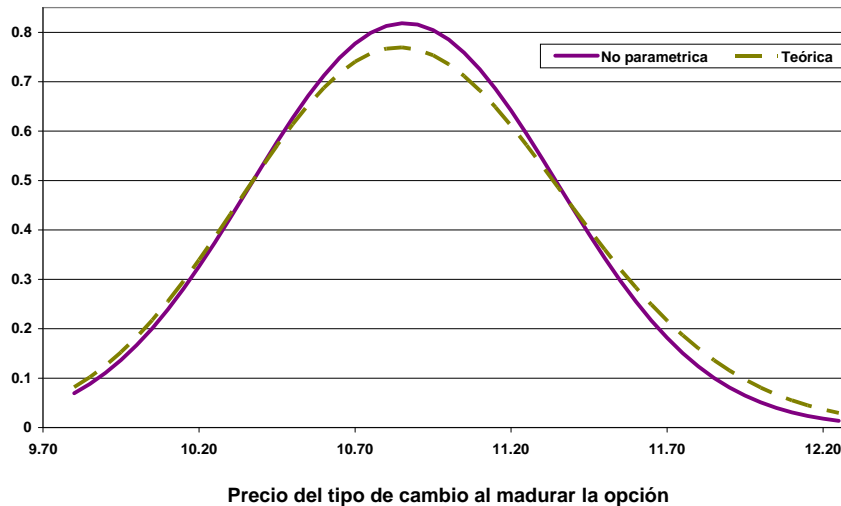
También sería útil conocer que tanto difiere la FDNR obtenida a través de las volatilidades de mercado con respecto a la FDNR teórica. Esta última es obtenida suponiendo que la volatilidad es constante para todo precio de ejercicio y para toda maduración.

La volatilidad que se utilizó para obtener la función teórica fue un promedio de las volatilidades *at the money* que tuvieran el mismo período de maduración.

En la gráfica 2.4 se muestran las dos funciones de densidad.

Gráfica 2.4

FDNR no paramétrica y teórica



FDNR obtenida por medio de opciones con maduración de 120 días.

Se observa que la función de densidad obtenida a través del precio de las opciones de mercado difiere con respecto a la función teórica. La primera tiene mayor masa de probabilidad en los valores cercanos a la media y menor masa en el último cuartil de la distribución.

Esto nos indica que el agente asigna mayor probabilidad a que el tipo de cambio siga alrededor de su valor medio y asigna menor probabilidad a que el tipo de cambio tome valores en el último cuartil de la densidad. Es decir la expectativa de que el tipo de cambio tome valores alrededor de la media es más grande que la expectativa que tendría un agente si siguiera la FDNR teórica y tiene una expectativa menor de que el tipo de cambio tome valores por encima de ese valor medio respecto a la función teórica.

2.2.1. Aplicación

Una vez obtenida la función de densidad se puede obtener la densidad de los rendimientos que espera el agente.

Si se define el rendimiento compuesto u_τ en el período de maduración τ que corresponde a la FDNR (es decir el rendimiento que espera recibir el agente de acuerdo a sus expectativas) como la diferencia en logaritmos del valor del subyacente en el momento que madura la opción y el valor del mismo al momento que se adquiere la opción, se tiene lo siguiente:

$$u_\tau \equiv \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$$

Ya definido el rendimiento compuesto se genera la función de densidad de la siguiente manera

$$\Pr\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \leq u\right) = \Pr(S_T \leq S_t e^u) = \int_0^{S_t e^u} f_t^*(S_T) dS_T$$

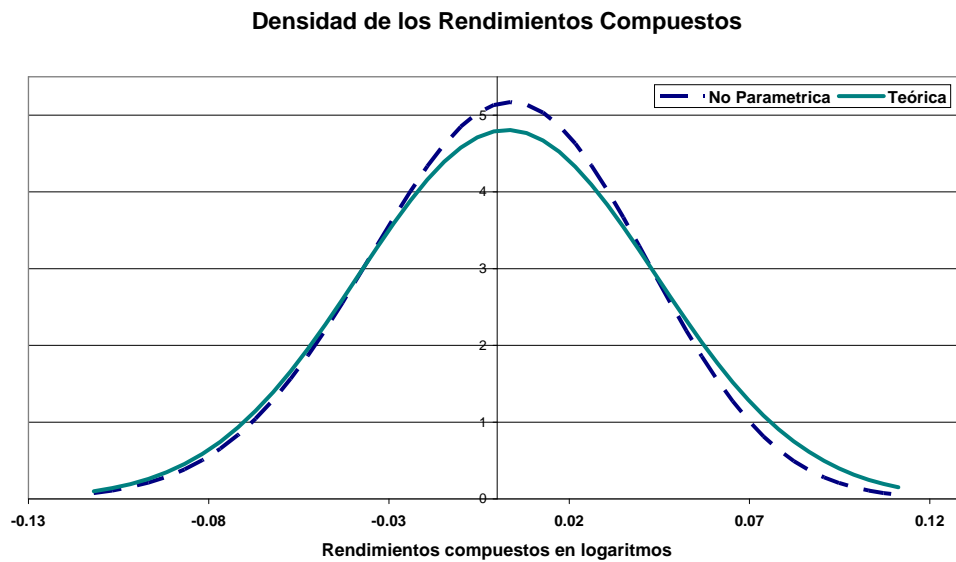
Esta expresión denota la función de distribución de los rendimientos compuestos en función de la FDNR. Para obtener la función de densidad basta con derivar la expresión anterior

$$\frac{\partial}{\partial u} \Pr\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \leq u\right) = S_t e^u f_t^*(S_t e^u)$$

De esta manera se realizó la estimación de la función de densidad de los rendimientos y se comparó con la función de rendimientos teórica.

La gráfica 2.5 muestra la densidad del rendimiento compuesto

Gráfica 2.5



Densidad obtenida por medio de opciones con maduración de 90 días

En la densidad obtenida por la FDNR no paramétrica existe una mayor masa de probabilidad en los valores positivos cercanos al cero. También se observa que la probabilidad de obtener un rendimiento alto es menor que la que denota la función de rendimientos teórica.

Esto denota que el agente espera obtener rendimientos más grandes que aquellos que obtendría un agente que sigue la función de densidad teórica. La expectativa de obtener un rendimiento ligeramente positivo es más alta y el de obtener un rendimiento alto es más baja respecto a la expectativa que implica la densidad de rendimientos teórica.

Capítulo 3

Conclusiones

Se estimó la *Función de Densidad Neutral al Riesgo* a través del precio de las opciones *call* sobre el tipo de cambio peso-dólar. Se utilizó una técnica para estimar la FDNR que no supone proceso alguno del subyacente ni forma paramétrica alguna de la función de densidad.

Se observó que mientras más largo es el período de maduración de la opción más grande tiende a ser la varianza de la FDNR. Mientras más corto es el período de maduración mayor masa de probabilidad se acumula en los valores medios

Se encontró que la FDNR difiere de la función de densidad teórica de tal manera que el agente asigna mayor probabilidad a valores cercanos a la media y menor probabilidad a valores que se encuentran en el último cuartil.

El agente que compra opciones sobre el tipo de cambio del MEXDER asigna una mayor probabilidad a que el tipo de cambio se mantenga alrededor de su valor medio.

Lo anterior nos dice que en el período de estudio los agentes que compran una opción sobre el tipo de cambio en el MEXDER tienen la expectativa que éste no fluctuará demasiado. De hecho el agente tiene una expectativa menor de que el tipo de cambio tome valores lejanos a su valor medio que un individuo que sigue la FDNR teórica.

El agente que compró una opción sobre el tipo de cambio tenía la expectativa de que el rendimiento que recibiría sería ligeramente positivo y más

alto respecto al rendimiento que recibiría si se sigue la Función de Densidad Neutral al Riesgo teórica.

Bibliografía

- [1] Aït-Sahalia, Y. y Lo, A. (1998), Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices, *The Journal of Finance*, Vol 53, No. 2, 499-547.
- [2] Bahra, B. (1996), Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England Working Paper, 66 .
- [3] Bredeen, D.T. y Litzenberger, R. H (1978), Prices of State-contingent claims implicit in option prices, *Journal of Business* 51, 621-651.
- [4] Carlson, J. B., Craig, B. R. y Melick, W. R.(2005), Recovering Market Expectations of FOMC Rate Changes with Options on Federal Funds Rate, Working Paper 05-07, Federal Reserve Bank of Cleveland.
- [5] Diaz de Leon, A. y Casanova M. E. (2004), Expectativas del mercado implícitas en los precios de instrumentos derivados: Aplicaciones al mercado cambiario y petrolero, Documento de Investigación 2004-01, Banco de México.
- [6] Fox J. (2000), *Nonparametric Simple Regression*, Series: Quantitative Applications in the social Science, 130, Sage Publications
- [7] Fox J. (2000), *Multiple and Generalized Nonparametric Regression*, Series: Quantitative Applications in the social Science, 131, Sage Publications
- [8] Gereben, A. (2002), Extracting market expectations from options prices: an application to over-the-counter New Zealand dollar options, Discussion Paper Series DP2002/04, Reserve Bank of New Zealand

- [9] Hull, J. C. (2006), Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall, Sixth Edition,
- [10] Malz, A. M. (1997), Option-implied probability distributions and currency excess returns, Federal Reserve Bank of New York Staff Report 32, Noviembre 1997.
- [11] Melick, W. R. y Thomas, C. P. (1997), Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 32, No. 1, 91-115.
- [12] Pagan, A. y Ullah, A. (1999), Nonparametric Econometrics, Cambridge University Press.