COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

OFERTAS SIMULTÁNEAS EN MERCADOS DE EMPAREJAMIENTO

TESIS PRESENTADA POR

YERANIA SÁNCHEZ RAMOS

ASESOR: DR. DAVID CANTALA

MÉXICO, D.F., JUNIO DE 2007

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. David Cantala, por la dirección de esta tesis durante la cual siempre mostró paciencia y gran disposición a transmitir su conocimiento e ideas.

A los miembros del Centro de Estudios Económicos, que de diversas formas y en momentos distintos de mi estancia en el Colegio de México contribuyeron a mi desarrollo académico y personal.

OFERTAS SIMULTÁNEAS EN MERCADOS DE EMPAREJAMIENTO

RESUMEN

Se presenta un mecanismo de ofertas simultáneas en un mercado de emparejamiento y se analizan sus propiedades de estabilidad. La motivación de este trabajo se basa en los resultados de Cantala (2004), respecto a los cuales propone investigar si la utilización de ofertas simultáneas en los mercados de emparejamiento soluciona la inestabilidad que puede ocurrir cuando se tienen asignaciones cuasi-estables y las ofertas se realizan de forma secuencial. De manera que, los objetivos de la tesis son: (i) diseñar un algoritmo de ofertas simultáneas con asignación inicial arbitraria y posibilidad de despidos (utilizando un modelo uno a uno); (ii) identificar condiciones sobre las asignaciones iniciales tal que el mecanismo construido siempre reestabiliza el mercado. El trabajo se estructura de la siguiente forma, se introduce el modelo de emparejamiento uno a uno con base en el cual se desarrolla el algoritmo, después se define el algoritmo además de que se indica su funcionamiento mediante un ejemplo y finalmente se establecen las propiedades del algoritmo en relación con la reestabilización de los mercados. Las conclusiones son: (1) el algoritmo DAF con ofertas simultáneas y posibilidad de despido, es capaz de reestabilizar mercados cuyas asignaciones iniciales son emparejamientos perturbados por la salida de trabajadores o la entrada de empresas al mercado, es decir, asignaciones cuasi-estables para las empresas; (2) la ejecución de DAF cuando la asignación inicial es arbitraria no siempre lleva a un resultado estable pues en el caso de asignaciones iniciales alteradas por la entrada de trabajadores al mercado o la salida de empresas (asignaciones cuasi-estables para los trabajadores) se encontró evidencia de ciclicidad.

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

El trabajo de tesis comprende el diseño de un mecanismo de ofertas simultáneas y se analizan sus propiedades para estabilizar mercados.

Un mercado de emparejamiento se compone de dos conjuntos disjuntos y finitos de agentes, cada uno de los cuales tiene una relación de preferencias sobre los miembros del otro conjunto y el vacío que implica permanecer sin pareja. El problema de emparejamiento reside entonces en el proceso de asignación de los elementos de un conjunto con los del otro. Este problema fue introducido por Gale y Shapley (1962) quienes proponen un concepto de solución denominado emparejamiento estable. La estabilidad requiere dos condiciones: la racionalidad individual, indicando que los agentes prefieren mantener su pareja en una asignación a estar solos; y no deben existir pares bloqueadores en los que dos agentes, pertenecientes a conjuntos distintos, estén dispuestos a dejar sus parejas para unirse. Los autores demuestran que tal equilibrio existe mediante la construcción de un algoritmo que establece las reglas de emparejamiento, el cual es conocido como algoritmo de aceptación diferida (*Deferred Acceptance*, DA).

El algoritmo de aceptación diferida planteado por Gale y Shapley inicia con una asignación en la cual ningún agente tiene pareja. Los agentes de un conjunto realizan ofertas de emparejamiento de acuerdo con su orden de preferencias en tanto que los agentes del otro conjunto aceptan y mantienen la mejor propuesta recibida en un periodo. En cada iteración, los agentes rechazados le hacen oferta a la siguiente opción en su lista de preferencias. Mientras se tengan individuos aceptables, más preferidos que no tener pareja, a quines hacerles propuesta el proceso continua. El algoritmo se detiene después de la etapa en la cual cada agente rechazado le ha hecho oferta a todos los elementos en su conjunto de aceptables.

El algoritmo de aceptación diferida transforma una asignación inicial sin parejas en una asignación estable. Knuth (1976) plantea que si se comienza con una asignación inicial arbitraria y se satisfacen pares bloqueadores iterativamente puede no alcanzarse una asignación estable, es posible que aparezcan ciclos de pares bloqueadores. No obstante, Roth y Vande Vate (1990) muestran que satisfaciendo pares bloqueadores, siempre se puede llegar a un emparejamiento estable a partir de cualquier asignación inicial arbitraria. Para ello construyen una secuencia de asignaciones asociada con una secuencia creciente de conjuntos los cuales no contienen bloqueos, hasta llegar a un emparejamiento estable.

Respecto al mercado laboral, la investigación se enfocó inicialmente a los mercados denominados de entrada. Estos se caracterizan por la disponibilidad simultánea de vacantes y candidatos en busca de trabajo. Posteriormente, se comenzó con el estudio de mercados más desarrollados que involucran disrupciones causadas por cambios en las población de trabajadores y variaciones en los puestos de trabajo disponibles. Blum et al. (1997) fueron los primeros en publicar un artículo dedicado al análisis de este tipo más complejo de mercados. Basados en un modelo uno a uno (asignación del elemento de un conjunto con solo un elemento del otro conjunto), abordan el problema de desestabilización de asignaciones dado el retiro de trabajadores o la creación de empresas. Logran la reestabilización del mercado usando un proceso descentralizado de ofertas y aceptaciones. El algoritmo que proponen inicia con una asignación arbitraria y se selecciona una empresa con vacante la cual realiza ofertas a los trabajadores que más le convienen de acuerdo con su orden de preferencias. En cada iteración, un par bloqueador es satisfecho (una empresa y un trabajador que dejan sus emparejamientos para formar una nueva pareja pues se prefieren mutuamente a las asignaciones que tenían) solo cuando la empresa tiene su puesto disponible y la oferta es aceptable. El proceso se detiene cuando no hay más empresas elegibles.

Cantala (2004) hace aportaciones al estudio de los mercados que involucran disrupciones causadas por cambios en la población de trabajadores y variaciones en los puestos de trabajo disponibles, específicamente al trabajo de Blum et al., en tres sentidos: (i) analiza la desestabilización de asignaciones debido al retiro de trabajadores y la creación de empresas pero también dada la entrada de trabajadores al mercado y el cierre de puestos; (ii) estudia el proceso de reestabilización empleando un modelo varios a uno (asignación del elemento de un conjunto con uno o más individuos del otro conjunto); e (iii) introduce la posibilidad de despedir trabajadores. Construye entonces dos algoritmos. El primero denominado algoritmo *Set Offering* (SO), considera una asignación inicial correspondiente a la perturbación de un emparejamiento estable dado cambios en la población de trabajadores o en el número de puestos de trabajo, en el que las ofertas son realizadas por las empresas y no hay despidos. Éste produce un resultado estable cuando la disrupción de la asignación inicial se debe al retiro de trabajadores o la creación de puestos. El otro algoritmo recibe el nombre de *Acceptance Firing* (AF), su asignación inicial es un emparejamiento que perdió estabilidad debido a cambios en la población de trabajadores o en los puestos de trabajo. Ahora las ofertas son llevadas a cabo por los trabajadores. Los trabajadores desempleados hacen propuesta a la empresa que más prefieren en su conjunto de aceptables (el conjunto de empresas que el trabajador prefiere a permanecer desempleado con las cuales no ha estado emparejado anteriormente o que no les ha hecho oferta aún). Éste lleva a un resultado estable cuando la desestabilización de la asignación inicial se dio por la entrada de trabajadores o el cierre de puestos. El algoritmo AF es una versión del algoritmo DA solo que con los trabajadores realizando las ofertas de acuerdo con su orden de preferencias. Los resultados de Cantala (2004) son robustos si asumimos que las ofertas se llevan a cabo de manera secuencial.

La motivación de este trabajo se basa en los resultados de Cantala (2004) y sus observaciones. Esboza un ejemplo para establecer cuan relevante es el lado del mercado que realiza las ofertas, dada la posibilidad de despidos. Utiliza una asignación estable que es alterada por la entrada de un trabajador o el cierre de puestos de trabajo, denominada cuasi-estable para los trabajadores, y establece una dinámica de ofertas dirigida por las empresas de manera secuencial (solo una empresa puede hacer oferta en cada iteración). Con el ejemplo circunscrito en un modelo uno a uno, muestra que el proceso de ofertas secuenciales por parte de las empresas puede no reestabilizar el mercado dada la asignación inicial cuasi-estable para los trabajadores. Esto implica que la dinámica de ofertas realizada por los trabajadores podría no reestabilizar un emparejamiento perturbado por el retiro de trabajadores o la apertura de vacantes, llamada asignación inicial cuasi-estable para las empresas. Propone investigar si la utilización de ofertas simultáneas puede solucionar el problema.

Se plantean dos objetivos: (1) diseñar un algoritmo de ofertas simultáneas con asignación inicial arbitraria y posibilidad de despidos (utilizando un modelo uno a uno); (2) identificar condiciones sobre las asignaciones iniciales tal que el mecanismo construido siempre reestabiliza el mercado. El algoritmo que se construye se diferencia del algoritmo de aceptación diferida de Gale y Shapley en que comienza con una asignación inicial arbitraria, las empresas pueden despedir a los trabajadores y los trabajadores despedidos se reintegran al conjunto de aceptables de manera que es factible para las empresas hacer propuestas a trabajadores los cuales ya las habían rechazado. Con respecto al algoritmo diseñado por Blum et al. (1997), las diferencias básicas son que las ofertas se llevan acabo de manera simultanea, todas las empresas con o sin pareja pueden hacer propuestas y es posible despedir trabajadores. Contrastando el algoritmo con AF, las propuestas son realizadas por las empresas, las empresas con o sin pareja hacen ofertas, y cada empresa solo tiene una vacante a ofrecer. Se encontró que el algoritmo siempre reestabiliza un emparejamiento estable perturbado por la salida de trabajadores del mercado o la entrada de empresas. Si la asignación inicial es arbitraria entonces el mecanismo no siempre converge a un emparejamiento estable.

El trabajo se estructura de la siguiente forma, se presenta el modelo de emparejamiento uno a uno con base en el cual se desarrolla el algoritmo, después se define el algoritmo además de que se indica su funcionamiento mediante un ejemplo y finalmente se establecen las propiedades del algoritmo respecto a la reestabilización de los mercados.

II. MODELO DE EMPAREJAMIENTO UNO A UNO

El mercado de emparejamiento es una tripleta $(F, W, \succ)$ donde $F = \{f_1, ..., f_m\}$ y $W = \{w_1, ..., w_n\}$ son conjuntos finitos y disjuntos de empresas y trabajadores, respectivamente. Cada agente tiene una relación de preferencias estricta, transitiva y completa sobre los agentes del otro conjunto y la opción de permanecer sin pareja. De manera que $\succ = (\succ_{f1},...,\succ_{f_m},\succ_{w_1},...,\succ_{w_n})$ es el perfil de preferencias de todos los agentes; toda empresa $f \in F$ tiene una relación de preferencias $\succ_f$ *sobre* $W \cup \{\phi\}$ y cada trabajador $w \in W$ una relación de preferencias $\succ_w$ *sobre* $F \cup \{\phi\}$. Sea $V = F \cup W$ el conjunto de agentes, se escribe $v' \succ_v v''$ cuando v' se prefiere a v'' bajo la relación de preferencias de v y se dice que v prefiere v' a v''. Si $\phi \succ_v v'''$, significa que el agente v prefiere permanecer solo a emparejarse con v'''. $A(\succ_f) = \{w \in W : w \succ_f \phi\}$ denota el conjunto de trabajadores que son aceptables para la empresa f y $A(\succ_w) = \{f \in F : f \succ_w \phi\}$ el conjunto de empresas que son aceptables para el trabajador w.

Una asignación es una función $\mu : F \cup W \to F \cup W$, tal que $\forall f \in F$ y $\forall w \in W$:
(1) $\mu(f) = w \Leftrightarrow \mu(w) = f$ cuando f y w están emparejados,
(2) $\mu(f) \neq \phi \Rightarrow \mu(f) \in W$ denota que f está emparejado en μ el cual le asigna $\mu(f)$ y,
(3) $\mu(w) \neq \phi \Rightarrow \mu(w) \in F$ implica que w está emparejado en μ asignándole $\mu(w)$. Si $\mu(v)=\varnothing$ entonces v no tiene pareja en μ.

La asignación μ es bloqueada por una empresa f si $\phi \succ_f \mu(f)$ y bloqueada por un trabajador w si $\phi \succ_w \mu(w)$. Una asignación μ es individualmente racional para los trabajadores si no está bloqueada por ningún trabajador y es individualmente racional para las empresas si no es bloqueada por ninguna empresa. La asignación es individualmente racional si cada agente es aceptable para su pareja, $\mu(v) \succ_v \phi$ y $v \in F \cup W$.

Dos agentes (f, w) forman un par bloqueador para μ si se prefieren mutuamente con respecto a las parejas que tienen asignadas en μ, formalmente $f \succ_w \mu(w)$ y $w \succ_f \mu(f)$.

La asignación μ es estable si cumple con la condición de racionalidad individual y no es bloqueada por ningún par (f, w). El conjunto de asignaciones estables de un mercado $(F, W, \succ)$, se senota como $S(F, W, \succ)$.

Una asignación estable perturbada por el retiro de trabajadores y/o la entrada de empresas es cuasi-estable para las empresas. Esta condición establece que los pares bloqueadores existen si y solo si satisfacerlos no implica que las empresas involucradas en los bloqueos despidan su trabajador. La asignación μ es cuasi-estable para las empresas si cumple con racionalidad individual y no tiene ningún par bloqueador que incluya a una empresa con pareja. El conjunto de asignaciones cuasi-estables para las empresas del mercado $(F, W, \succ)$ se denota como $FQS(F, W, \succ)$.

Una asignación estable perturbada por la entrada de trabajadores y/o la salida de de empresas es cuasi-estable para los trabajadores. La asignación μ es cuasi-estable para los trabajadores si cumple con racionalidad individual y no tiene ningún par bloqueador que incluya a un trabajador con pareja. El conjunto de asignaciones cuasi-estables para los trabajadores del mercado $(F, W, \succ)$ se denota como $WQS(F, W, \succ)$.

III. ALGORÍTMO DE ACEPTACIÓN DIFERIDA CON DESPIDOS (DAF)

El mecanismo comienza con una asignación arbitraria. En cada iteración *i*, las empresas hacen ofertas simultáneas al trabajador más preferido en su conjunto de aceptables conformado por trabajadores a quienes no les han hecho ofertas y trabajadores despedidos en la etapa anterior. Los trabajadores aceptan la mejor oferta tomando en cuenta la pareja que les fue asignada en la iteración previa, $\mu_{i-1}(w)$. Los trabajadores despedidos, son reintegrados al conjunto de aceptables. El proceso continua hasta que las empresas han agotado su conjunto de aceptables o ya no desean hacer ofertas.

Sea μ^I una asignación arbitraria y $(F, W, \succ)$ el mercado de emparejamiento.

Inicio

(a) $\mu^0 = \mu^I \quad i := 1$

(b) $\forall f \in F, \quad A_0(f) = \{w \in W \mid w \succ_f \phi \wedge w \notin \mu^0(f)\}$

Iteración principal

(I) Ofertas

I.1 Si $\forall f \in F$,

$\mu^{i-1}(f) \in W$ tal que $\mu^{i-1}(f) \succ_f \max_{\succ_f} A_{i-1}(f)$

ó bien $A_{i-1}(f) = \phi$

$\Rightarrow$ el algoritmo se detiene y el resultado es μ^{i-1}

I.2 Si no, cada empresa f tal que $\max_{\succ_f} A_{i-1}(f) \succ_f \mu^{i-1}(f)$ y $A_{i-1}(f) \neq \phi$ hace oferta a $\max_{\succ_f} A_{i-1}(f)$.

(II) Nuevo emparejamiento tentativo

II.1 Cada trabajador $w \in W$ que recibió ofertas (en I.2) escoge la empresa que prefiere entre $\mu^{i-1}(w)$ y las empresas que le hicieron propuestas. Los demás trabajadores se quedarán con la misma pareja a menos que sean despedidos.

(III) Actualización de los conjuntos aceptables

Sea $U_i = \left\{ w \in W \middle| \mu^{i-1}(w) \neq \mu^{i}(w) = \phi \right\}$ el conjunto de trabajadores despedidos en la iteración *i*, entonces:

$A_i(f) = A_{i-1}(f)_{\setminus\{\max_{\succ_f} A_{i-1}(f)\}} \cup (U_i \cap A_0(f))$ para todas las empresas que hicieron propuestas en I.2, y

$A_i(f) = A_{i-1}(f) \cup (U_i \cap A_0(f))$ para las demás empresas (que prefieren $\mu^{i-1}(f)$ a cualquier trabajador en $A_{i-1}(f)$ o bien para quienes $A_{i-1}(f) = \phi$).

(IV) *i := i+1*

FUNCIONAMIENTO DEL ALGORITMO DAF

Ejemplo 1. Considérese la ejecución del algoritmo con una asignación inicial cuasi-estable para los trabajadores.

Sea μ^I una asignación inicial arbitraria y $(F, W, \succ)$ un mercado tal que

$F = \{f_1, f_2\}$; $W = \{w_1, w_2\}$;
$\succ_{f_1} = w_2, w_1$; $\succ_{w_1} = f_1, f_2$;
$\succ_{f_2} = w_2, w_1$; $\succ_{w_2} = f_1, f_2$.

Inicio

(a) $\mu^0 = \mu^I = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \phi \\ w_1 & \phi & w_2 \end{pmatrix}$ $i := 1$

(b) $A_0(f_1) = w_2$ $A_0(f_2) = w_2, w_1$

Iteración principal (primera iteración)

(I) Ofertas

f_1 le hace oferta a w_2 pues $w_2 \succ_{f_1} \mu^0(f_1) = w_1$;
f_2 le hace oferta a w_2 pues $w_2 \succ_{f_2} \mu^0(f_2) = \phi$.

(II) Nuevo emparejamiento tentativo

w_1 no recibe ofertas y $f_1 = \mu^0(w_1)$ le ha hecho oferta a w_2;
w_2 acepta la oferta de f_1 pues $f_1 \succ_{w_2} f_2$.

(III) Actualización de los conjuntos de aceptables

$U_1 = \{w_1\}$ es el conjunto de trabajadores despedidos en la primera iteración.

$$\mu^1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \phi \\ w_2 & \phi & w_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_1(f_1) = w_1 \\ A_1(f_2) = w_1 \end{array}$$

(IV) i := 1+1, ir a (I)

Iteración principal (segunda iteración)

(I) Ofertas

f_1 desea permanecer con su emparejamiento en μ^1, $\mu^1(f_1) = w_2 \succ_{f_1} w_1$.
f_2 le hace oferta a w_1, $w_1 \succ_{f_2} \mu^1(f_2) = \phi$.

(II) Nuevo emparejamiento tentativo

w_1 acepta la oferta de f_2 ya que $f_2 \succ_{w_1} \mu^1(w_1) = \phi$.

w_1 permanece con su emparejamiento en μ^1.

(III) Actualización de los conjuntos aceptables

$U_2 = \{\phi\}$, entonces:

$$\mu^2 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_2(f_1) = w_1 \\ A_2(f_2) = \phi \end{array}$$

dado que $\mu^2(f_1) \succ_f \max_{\succ f_1} A_2(f_1)$ y $A_2(f_2) = \phi$

$\Rightarrow$ el algoritmo se detiene y el resultado es DAF(μ^{I}) $= \mu^2$.

IV. PROPIEDADES DEL ALGORÍTMO DAF

Dadas las características del algoritmo diseñado se presentan ciertas complicaciones en el análisis de estabilidad. Un punto clave que dificulta el análisis de las propiedades del algoritmo reside en la posibilidad de despidos dada la forma en que las empresas realizan las ofertas y el hecho de que se tienen asignaciones iniciales arbitrarias. Estas condiciones nos inducen a pensar que el proceso podría llegar a seguir ciclos, de tal forma que las asignaciones y los conjuntos de trabajadores aceptables para cada empresa en una iteración se repitan para una etapa posterior. Tal posibilidad es un primer impedimento para que el algoritmo logre estabilizar el mercado.

Como una primera aproximación al análisis de estabilidad del algoritmo propuesto, se asume que la asignación inicial es cuasi-estable para las empresas tal que el problema de cicliciad se descarta. La proposición 1 corresponde a esta simplificación y se plantea que, en este caso, el algoritmo reestabiliza el mercado.

Proposición 1. Sea $(F,W,\succ)$ un mercado, si la asignación inicial del algoritmo DAF es cuasi-estable para las empresas dada la perturbación de un emparejamiento estable por el retiro de trabajadores o la entrada de empresas, entonces lo serán también las asignaciones obtenidas en cada iteración. El algoritmo es finito y la asignación resultante es estable.

Demostración

Sea $\mu^0 = \mu^I \in FQS(F,W,\succ)$ la asignación inicial del algoritmo y sea $\mu^{i-1} \in FQS(F,W,\succ)$, se prueba que $\mu^i \in FQS(F,W,\succ)$.

Caso 1) *f* tiene pareja: $\mu^{i-1}(f) \in W$ (en la iteración *i-1*, *f* estaba libre y se empareja con $\mu^{i-1}(f)$ o bien $\mu^{i-2}(f) = \mu^{i-1}(f)$).

Por cuasi-estabilidad de las empresas en μ^{i-1}, tenemos que no hay trabajadores despedidos en *i-1* para ser reintegrados a los conjuntos aceptables. Dado que $\mu^{i-1}(f) \succ_f \max_{\succ_f} A_{i-1}(f)$, *f* no hace ofertas en *i* entonces no bloquea con ningún trabajador en μ^i.

Caso 2) *f* no tiene pareja: $\mu^{i-1}(f) = \phi$

Si *f* no hace oferta o es rechazado entonces la empresa continua sin pareja, $\mu^i(f) = \phi$. Si *f* hace oferta y es aceptada por *w* entonces $\mu^i(f) = w$. $\forall w'$ tal que $w' \succ_f w$ necesariamente $w' \notin A_{i-1}(f)$, de otra forma *f* le habría hecho propuesta a w'. Ello implica que *f* puede no ser aceptable para w' por lo que la empresa nunca bloquearía con ese trabajador. Si *f* es aceptable para w' entonces la empresa debió haberle hecho propuesta en alguna iteración previa y w' lo rechazó, o en caso de haberlo aceptado recibió oferta de una empresa más preferida y lo dejó. Suponiendo que w' haya sido reintegrado al conjunto de aceptables de *f*, la empresa debió hacerle oferta a w' que fue rehusada y de ser aceptada tuvo nuevamente una propuesta de otra empresa que prefería y abandonó a *f*; de esta forma $w' \notin A_{i-1}(f)$. Como $\mu^{i-1} \in FQS(F,W,\succ)$, no hay trabajadores despedidos que son reintegrados a los conjuntos de aceptables de manera que en *i-1* w' rechazó la propuesta de *f*, lo dejó por otra empresa preferida o no pudo hacerle oferta pues ya no estaba en su conjunto de aceptables. Por ende (f, w') no conforma un par bloqueador para μ^i. Puesto que $w = \max_{\succ_f} A_{i-1}(f)$, *f* no bloquea μ^i con otros trabajadores.

De manera que si $\mu^{i-1} \in FQS(F,W,\succ)$ entonces $\mu^i \in FQS(F,W,\succ)$. Como $\mu^0 = \mu^I \in FQS(F,W,\succ)$ implica que $\mu^1 \in FQS(F,W,\succ)$ y así sucesivamente a lo largo del algoritmo.

Nótese que el algoritmo siempre termina dado que las asignaciones son cuasi-estables para las empresas entonces sea $\mu^0 = \mu^I, \mu^1, ..., \mu^l = DA(\mu^I)$ la secuencia de asignaciones generada por el algoritmo con $\mu^I \in FQS(F,W,\succ)$, implica que $\mu^i \in FQS(F,W,\succ) \quad \forall i \in \{1,...,l\}$.

Finalmente el algoritmo termina cuando todas las empresas están emparejadas y ya no desean hacer ofertas o han hecho propuestas a todos sus trabajadores aceptables. Si las empresas tienen pareja, la cuasi-estabilidad asegura que no forman parte de ningún par bloqueador. Si no tienen pareja, han hecho propuestas a todos los trabajadores de su conjunto de aceptables y se mostró que no conforman un par bloqueador con los trabajadores que rechazaron sus ofertas o los dejaron en iteraciones anteriores. Por lo tanto, no hay pares bloqueadores para $DAF(\mu^I)$ y como cumple racionalidad individual entonces es estable. ■

Al restringir el tipo de asignaciones iniciales se facilita el análisis de las propiedades del algoritmo DAF respecto a estabilidad. No obstante, los resultados clave sobre la capacidad del algoritmo para reestabilizar el mercado se centran en averiguar las implicaciones de la reintegración de trabajadores despedidos en los conjuntos aceptables de las empresas.

Sería deseable poder establecer que si el algoritmo AF con asignación inicial arbitraria μ^I converge a un resultado estable, entonces el algoritmo DAF con la misma asignación inicial arbitraria μ^I también llega a un resultado estable. Sin embargo, la configuración de AF determina que el algoritmo se detiene después de un número finito de iteraciones pero esto no es claro para DAF.

Proposición 2. En un mercado $(F, W, \succ)$, el algoritmo DAF con asignación inicial arbitraria μ^I no siempre converge a un resultado estable.

Demostración

Siguiendo el ejemplo que Cantala (2004) emplea para mostrar la ineficiencia de una dinámica de ofertas secuenciales por parte de las empresas cuando la asignación inicial es cuasi-estable para los trabajadores, se muestra también la ineficiencia del algoritmo DAF. Considérense los siguientes agentes, preferencias y asignación inicial:

Mercado $(F, W, \succ)$
$F = \{f_1, f_2, f_3\}; \quad W = \{w_1, w_2, w_3\};$

$\succ_{f_1} = w_1, w_2; \qquad \succ_{f_2} = w_3, w_1; \qquad \succ_{f_3} = w_2, w_3;$
$\succ_{w_1} = f_2, f_1; \qquad \succ_{w_2} = f_1, f_3; \qquad \succ_{w_3} = f_3, f_2.$

Inicio

(a) $\mu^0 = \mu^I = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \phi \\ w_2 & \phi & w_3 & w_1 \end{pmatrix}$

(b) $A_0(f_1) = w_1 \qquad A_0(f_2) = w_3, w_1 \qquad A_0(f_3) = w_2$

La asignación inicial es cuasi-estable para los trabajadores. La estabilidad del emparejamiento pudo haber sido perturbada por la entrada de un trabajador (w_1) o la salida de una empresa (digamos f_4 que tenía a w_1 como pareja).

Iteraciones

$$\mu^1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \phi \\ w_1 & \phi & w_3 & w_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &U_1 = \{w_2\} \\ &A_1(f_1) = w_2 \\ &A_1(f_2) = w_1 \\ &A_1(f_3) = w_2 \end{aligned}$$

$$\mu^2 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \phi \\ \phi & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &U_2 = \{w_3\} \\ &A_2(f_1) = w_2 \\ &A_2(f_2) = w_3 \\ &A_2(f_3) = w_3 \end{aligned}$$

$$\mu^3 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \phi \\ w_2 & w_3 & \phi & w_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &U_3 = \{w_1\} \\ &A_3(f_1) = w_1 \\ &A_3(f_2) = w_1 \\ &A_3(f_3) = w_3 \end{aligned}$$

$$\mu^4 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \phi \\ w_1 & \phi & w_3 & w_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &U_4 = \{w_2\} \\ &A_4(f_1) = w_2 \\ &A_4(f_2) = w_1 \\ &A_4(f_3) = w_2 \end{aligned}$$

Nótese que $\mu^1 = \mu^4$ y los conjuntos de trabajadores aceptables para las empresas son los mismos en ambas iteraciones, el algoritmo lleva a cabo ciclos. Por lo tanto, DAF dada la asignación inicial no reestabiliza el mercado. ■

V. CONCLUSIONES

El algoritmo DAF con ofertas simultáneas y posibilidad de despido, es capaz de reestabilizar mercados cuyas asignaciones iniciales son emparejamientos perturbados por la salida de trabajadores o la entrada de empresas al mercado, es decir, asignaciones cuasi-estables para las empresas.

La ejecución de DAF cuando la asignación inicial es arbitraria no siempre lleva a un resultado estable. En el caso de asignaciones iniciales alteradas por la entrada de trabajadores al mercado o la salida de empresas (asignaciones cuasi-estables para los trabajadores), se encontró evidencia de ciclicidad.

BIBLIOGRAFÍA

Blum, Y., Roth, E.E., Rothblum, U.G., 1997. Vacancy chains and equilibration in senior labor markets. J. Econ. Theory 76, 362-411.

Cantala, D., 2004. Restabilizing matching markets at senior level. Games and Econ. Behav. 48, 1-17.

Gale, D., Shapley, L.S., 1962. College admissions and the stability of marriage. Amer. Math. Monthly 69, 9-15.

Knuth, D.E., 1976. Marriages Stables. Les presses de l'Université Montréal, Montréal.

McVitie, D., Wilson, L.B., 1970. Stable marriage assignment for unequal sets. BIT 10, 295-309.

Roth, A.E., Sotomayor, M.O.A., 1990. Two-sided matching. A study in game theoretical modeling and analysis. In: Econometric Society Monograph, vol.18. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Roth, A.E., Vande Vate, J.H., 1990. Random paths to stability in two-sided matching. Econometrica 58, 1475-1480.