EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN CON ESPACIO DE ESTADOS NO ACOTADO: EL CASO CUADRÁTICO UNIFORME

ISMAEL VALENCIA PADRÓN

PROMOCIÓN 2005-2007

ASESOR:

DR. DRAGAN BRANIMIR FILIPOVICH ZACHRISSON

DICIEMBRE 2007

Transmisión de Información con espacio de estados no acotado:

El Caso Cuadrático Uniforme.

Ismael Valencia Padrón

El Colegio de México, Centro de Estudios Económicos

Agradecimientos

A mi madre por su apoyo incondicional.

Quiero agradecer en especial al Dr. Dragan Filipovich por sus sugerencias y acertados comentarios, así como al Dr. David Cantalá por sus observaciones sobre el trabajo final.

A mis profesores del Centro de Estudios Económicos de El Colegio de México por el apoyo constante durante nuestra formación.

Índice

Resumen

El artículo seminal de Crawford y Sobel (CS) de transmisión de información estratégica ha sido ampliamente discutido y utilizado en problemas de negociación, políticas públicas, finanzas y otras áreas. El caso elemental asume funciones de utilidad cuadráticas para los agentes, impone una distribución uniforme sobre el espacio de estados y asume que el conjunto de tipos del emisor es el intervalo unitario. Este trabajo extiende este espacio y explora si los resultados obtenidos por CS se mantienen cuando el espacio de estados no es acotado en alguna dirección.

Demostramos que cuando el espacio tiende a infinito el número de intervalos en el equilibrio más informativo va a infinito pero el largo del intervalo más grande también va a infinito, de manera que tenemos intervalos prácticamente no informativos. Sin embargo, la razón de la longitud de todo intervalo entre la longitud del espacio va a cero conforme el espacio crece.

Transmisión de Información con espacio de estados no acotado: El Caso Cuadrático Uniforme.

1 Introducción

El artículo seminal de Crawford y Sobel (1982, en adelante CS) de transmisión de información estratégica ha sido ampliamente discutido y utilizado en problemas de negociación, políticas públicas, finanzas y otras áreas[1]. El artículo formula un modelo en el que la parte informada, el emisor, comunica su información privada a un tomador de decisiones no informado, el receptor, cuando sus preferencias sobre las acciones no están alineadas pero tampoco son opuestas. En el equilibrio, este conflicto lleva al agente informado a emitir una señal ruidosa. CS muestran que en el equilibrio el emisor particiona el soporte de la variable que representa su información privada e introduce ruido en su señal reportando solamente en cual elemento de la partición se encuentra su observación.

El caso elemental de CS, caballo de batalla en la literatura de transmisión de información con cheap talk, asume funciones de utilidad cuadráticas para los agentes, impone una distribución uniforme sobre el espacio de estados y asume que el conjunto de tipos del emisor es el intervalo unitario [0, 1]. Este trabajo extiende este espacio y explora si los resultados obtenidos por CS se mantienen cuando el espacio de estados no es acotado en alguna dirección[2].

Creemos que estos supuestos pueden ser adecuados en ciertas situaciones, como por ejemplo en el caso de un analista que predice a un inversor el precio que podrá alcanzar un activo, existe una cota natural inferior que es cero en el espacio de estados, pero no hay una cota superior natural.

Un problema que afrontamos es la imposibilidad de definir una distribución uniforme sobre un espacio no acotado. Por esta razón abordamos la cuestión de forma indirecta, definiendo un intervalo de estados $[0, c]$ y tomando el límite cuando $c \to \infty$.

[1] Battaglini (2002) en negociación y Moscarini (2006) en política monetaria.
[2] Kartik (2005) demuestra que si las acciones ideales del emisor ($y(x,b)$) y el receptor ($y(x)$) no coinciden, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|y(x,b)-y(x)| > \varepsilon$ y por lo tanto, todo equilibrio es particional independientemente de si el espacio es acotado o no. Creemos que esto depende de que la masa de probabilidad en las colas de la distribución en un espacio no acotado van a cero.

En el modelo básico de CS, cuando el parámetro de sesgo se reduce y tiende a cero, convergemos al equilibrio plenamente revelador, aquel en el que el emisor revela toda su información privada. En nuestro ejercicio, esperaríamos obtener un resultado análogo cuando extendemos el espacio y mantenemos el sesgo constante, de forma que el tamaño relativo de éste disminuya y vaya a cero. Pero de hecho no es así.

Se demuestra que cuando $c \to \infty$, el número de intervalos en el equilibrio más informativo va a infinito pero el largo del intervalo más grande también va a infinito, de manera que tenemos intervalos prácticamente no informativos. Sin embargo, la razón de la longitud de todo intervalo entre la longitud del espacio si va a cero conforme c crece.

Kartik, Ottaviani y Squintani (2006) utilizando comunicación costosa muestran que siempre existe un equilibrio en el cual el emisor revela completamente el estado a los receptores cuando el espacio de estados es no acotado. En este mismo marco Ottaviani y Squintani (2006) encuentran que al crecer el espacio de estados, el equilibrio converge al plenamente revelador que resulta en el caso límite con espacio de estados no acotado.[3]

En la sección 2 presentamos el modelo. Manteniendo la convención de que el sesgo del emisor es positivo, consideramos el caso cuando el espacio de estados es no acotado arriba y caracterizamos el equilibrio. En la sección 3 se hace un ejercicio de estática comparada. La sección 4 concluye.

2 Modelo

Tenemos un juego con tres jugadores, un emisor (***E***), un receptor (***R***) y la naturaleza. Un espacio de estados del mundo ***X***, un espacio de mensajes ***M*** y un espacio de acciones ***Y***. Asumimos que los espacios de estados, mensajes y acciones son el mismo.

E tiene una función de utilidad $U^E(y,m,b)=-(y-(x+b))^2$, donde y, un número real, es la acción tomada por ***R***, y b puede ser interpretado como el sesgo del emisor. ***R*** tiene igualmente una función de utilidad dada por $U^R(y,x)=-(y-x)^2$. Todos los aspectos del juego son de conocimiento común, con excepción del estado del mundo, conocido sólo por el emisor pero no por el receptor.

El juego procede de la siguiente forma. La naturaleza escoge un estado del mundo $x \in X$ el cual está distribuido de acuerdo a una función de distribución uniforme. En ocasiones nos referiremos a x

[3] El equilibrio puede ser completamente revelador en modelos con soporte no acotado si el receptor es ingenuo con probabilidad positiva.

como el tipo del emisor. ***E*** observa la realización de la naturaleza y escoge un mensaje, $m \in M$, que comunica al receptor. ***R*** procesa la información contenida en el mensaje de ***E*** y escoge una acción *y*, la cual determina los pagos del emisor y del receptor.

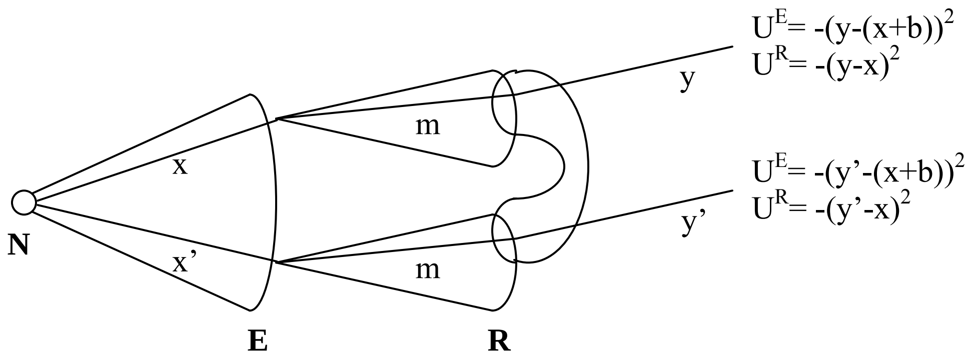


Figura 1. Forma extensiva del juego de transmisión de información estratégica. La naturaleza escoge un estado distribuido uniformemente y *E* escoge un mensaje que determina la acción de *R*. Se muestran dos posibles estados con la acción asociada a ellos. Aparecen los pagos del emisor seguidos de los del receptor.

Caracterización del equilibrio.

Una función de creencias para ***R*** es una función $\mu: M \to \Delta X$ que para cada mensaje de ***E*** evalúa una creencia posterior sobre X. Una estrategia para ***R*** es una función $y: M \to Y$ que asocia cada mensaje de ***E*** a una acción en Y. Finalmente, una estrategia para ***E*** es una función $n: X \to M$.

El concepto de solución que utilizamos en este contexto es el siguiente:

Definición 1. **Equilibrio Secuencial Débil (ESD).** El equilibrio consiste en una familia de reglas de señalización, *n*(m,b), que especifican el mensaje que el emisor envía al receptor dado su tipo y una regla de acción para el receptor, y(*n*), que especifica la acción que el receptor toma después de recibir un mensaje *n*, tales que:

1) $n(\mathrm{m}, \mathrm{b}) = \arg\max_{n \in [0,c]} U^E(y(n), \mathrm{m}, \mathrm{b}), \ \forall\, (\mathrm{m}, \mathrm{b}) \in [0,c]^2 \quad \forall\, \mathrm{m} \in [0,c].$

2) $y(n) = \arg\max_{y} E[U^R(y, \mathrm{m}) | (\mathrm{m}, \mathrm{b})\ T(n)] \qquad \forall\, n$ en la ruta de equilibrio.

Donde $T(n) = \{(\mathrm{m}, \mathrm{b}) \in [0,c]$ tal que $n(\mathrm{m}, \mathrm{b}) = n\}$ denota el conjunto de todos los tipos del emisor que envían *n*.

■

En todos los equilibrios ***E*** particiona el soporte de la distribución de probabilidad de la variable que representa su información privada e introduce ruido en su señal al reportar sólo en cual elemento de la partición se encuentra su observación.

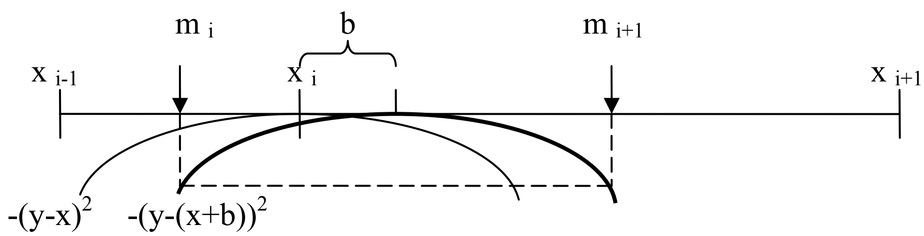


Figura 2. x_i es el estado para el cual el emisor es indiferente entre las acciones del receptor asociadas a los mensajes m_i y m_{i+1}. La curva gruesa es la función de pago del emisor en el estado x_i.

Esto representa un compromiso entre incluir suficiente información en la señal para inducir a ***R*** a responder a ella y mantener la suficiente para que su respuesta sea tan favorable como sea posible. El modelo hace imposible la revelación completa ya que si ***R*** estuviera dispuesto a creer plenamente el mensaje de ***E***, entonces éste tendría incentivos a mentir. ***R*** es conciente de estos incentivos.

2.1 Espacio de Estados Acotado por Abajo

En el modelo básico de CS, con estados distribuidos uniformemente en el intervalo unitario los equilibrios son particionales bajo divergencia de intereses, es decir, el espacio de estados del mundo es dividido en intervalos y nunca en estados puntuales, por tanto nunca existirá la plena revelación.

En nuestro ejercicio, deseamos establecer si los resultados de CS se mantienen cuando nuestro espacio de estados es no acotado. Un problema que enfrentamos al extender nuestro espacio, es que la distribución uniforme no puede ser definida en un intervalo no acotado. Debido a esto, abordamos el ejercicio de forma indirecta, comenzamos con un espacio de un tamaño determinado, utilizando una distribución uniforme, y extendemos el espacio tomando el límite cuando tiende a infinito.

Supongamos que el estado es uniformemente distribuido y dejemos que el espacio de estados sea $\mathbf{X}=[0, c]$. Las funciones de utilidad de los agentes son:

$U^E(y,x,b) = -(y-(x+b))^2$
$U^R(y,x) = -(y-x)^2$

donde $b > 0$.

Sea a(N) una partición con N intervalos y puntos de división $a_0(N),\ldots a_N(N)$ donde $0 = a_0(N)<\ldots<a_N(N) = c$. Considerando las condiciones que caracterizan una partición de equilibrio tenemos que la acción inducida está dada por:

$$\bar{y}(a_i, a_{i+1}) = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \qquad i = 0, \ldots, N\text{-}1.$$

Es decir, es el valor esperado de la acción en el intervalo del mensaje.

La condición de indiferencia del tipo frontera, aquella para la cual un emisor que cae en los límites entre dos intervalos es indiferente entre los valores asociados de y, está dada por:

$$-\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2} - a_i - b\right)^2 = -\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2} - a_i - b\right)^2 \qquad i = 1,\ldots,N\text{-}1 \tag{1}$$

La cual se mantiene dada la monotonicidad de a_i, si:

$$a_{i+1} - a_i = a_i - a_{i-1} + 4b \tag{2}$$

Esta ecuación muestra que en el equilibrio un intervalo es mayor en $4b$ al intervalo que le precede.

La solución de esta ecuación puede ser escrita:

$$a_i = a_1 i + 2i(i-1)b \tag{3}$$

La condición $2i(i-1) < c$, establece la cota máxima en la cantidad de intervalos de la partición.

Lema 1. La cantidad máxima de intervalos en una partición de equilibrio donde existe al menos un equilibrio de cada tamaño de uno hasta N(b,c), está dada por[4]:

$$N(b,c) = \left\langle -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2c}{b}\right)^{1/2} \right\rangle$$

donde c es el tamaño del espacio y $\langle \arg \rangle$ denota el entero igual o mayor inmediato a *arg*.

Proposición 1. Cuando $c \to \infty$, entonces N(b, c) $\to \infty$.

Prueba. Es inmediata de la expresión del lema 1.

■

Observación. En el modelo canónico de CS entre más se aproximen los intereses de ambos - b disminuya - más intervalos habrá y en el caso límite de $b \to 0$, se tiene que N(b) $\to \infty$, y por tanto la

[4] La derivación de la fórmula se encuentra en el Apéndice A.

longitud de los intervalos tiende a cero, lo que indica plena revelación. Esto es intuitivo, ya que al no haber divergencia de intereses, está en beneficio de ***E*** que ***R*** escoja la acción que maximiza su utilidad, la cual es la misma para ambos.

En nuestro ejercicio, aún cuando el número de intervalos va a infinito, no podemos llamar a esta partición plenamente separadora, ya que hacia la derecha nuestros intervalos siempre serán más grandes por $4b$ (debido a nuestra condición de indiferencia), esto significa que ***E*** nunca revelará su tipo exacto.

Por tanto, para un b dado, la longitud de cualquier intervalo está dada por la siguiente expresión.

Lema 2. El *i-ésimo* intervalo m_i en el equilibrio más informativo tendrá una longitud dada por[5]

$$|m_i| = \frac{c}{N(b,c)} + 2b(2i - N(b,c) - 1) \tag{4}$$

Definición 2. Un *valor umbral* [6] es el máximo valor de c que permite una cota máxima N(b,c) dada y está definido por $2b$ N(b,c) (N(b,c) +1).

■

El carácter discreto de N(b,c) impone un comportamiento interesante a nuestra partición de equilibrio. Para un determinado rango de valores de c, la cantidad de intervalos en el equilibrio más informativo permanece constante y se incrementa al rebasar c el valor umbral del rango. Esto ocasiona que la longitud del intervalo presente un comportamiento monotónico, creciendo linealmente entre valores umbrales inmediatos, para caer discontinuamente a su longitud mínima una vez que se cruza el valor umbral.

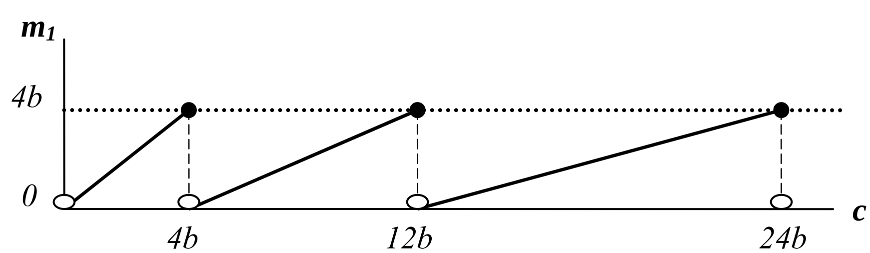


Figura 3. La longitud de un intervalo crece linealmente entre valores umbrales consecutivos y cae discontinuamente a su longitud mínima al cruzar el umbral. La figura muestra el comportamiento de la longitud del primer intervalo conforme c va creciendo.

[5] La derivación de la expresión se muestra en el Apéndice B.
[6] Ver Apéndice C para la derivación de la expresión.

Lema 3. La longitud del *i-ésimo* intervalo toma valores entre $\left(4b(i-1),4bi\right]$. $i=1,\dots,N(b,c)$

Esto es bastante ilustrativo, nos indica que el rango de longitud del *i-ésimo* intervalo es independiente del valor de *c*. Además, que al estar restringido en su longitud, su tamaño relativo irá cayendo conforme *c* aumenta, como se verá más adelante.

Por nuestra condición de indiferencia, a la derecha nuestros intervalos serán cada vez mayores. De la expresión (4) obtenemos la longitud del intervalo N:

$$|m_N| = \frac{c}{N(b,c)} + 2b(N(b,c)-1) \tag{5}$$

Proposición 2. La longitud del último intervalo $|m_N| \to \infty$, cuando $c \to \infty$.

Prueba. De la proposición 1 sabemos que cuando $c \to \infty$, entonces N(b, c) $\to \infty$, lo que lleva al segundo sumando a crecer ilimitadamente, por tanto $|m_N| \to \infty$.

■

Para el caso límite donde *c* va a infinito, este intervalo se vuelve prácticamente no informativo.

2.2 Informatividad relativa

La informatividad de un equilibrio se refiere a cuánto aprende ***R*** acerca de la información privada de ***E*** después de realizada la comunicación. Por tanto, la comunicación se vuelve más informativa cuando el número de intervalos aumenta. Esto permite a ***R*** hacer más inferencias del posible estado del mundo. Sin embargo, hemos visto que en el caso límite cuando N(b, c) $\to \infty$, los últimos intervalos son demasiado grandes para contener información precisa, esto nos lleva a preguntarnos si nuestra noción de informatividad es la adecuada en este caso.

En algunas ocasiones más importante aún que el tamaño de los intervalos, es la proporción de éstos frente a nuestro espacio de estados. Consideremos el caso de un inversionista que desea participar en un proyecto productivo. El inversionista conoce el monto del proyecto y desea saber los flujos de retorno al capital que éste proporciona. Después de conocer el reporte de un experto, el capitalista infiere un rango posible de su flujo de ingresos y establece el rendimiento del proyecto que compara con aquellos que le otorgan otros instrumentos. En esta situación, lo que importa al inversionista es el rendimiento de su inversión, o bien, la proporción de sus flujos de ingresos respecto al monto invertido.

Considerando esta forma no convencional de informatividad, observemos el comportamiento de la razón de un intervalo m_i entre la longitud del espacio.

Lema 4. La razón de la norma del *i-ésimo* intervalo entre la longitud del espacio está dada por[7]:

$$\left|\frac{\mathrm{m_i}}{c}\right| = \frac{1}{N(b,c)} + \frac{b}{c}(4i-1) - b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{2}{bc}\right)^{1/2}$$

Proposición 3. La longitud relativa del *i-ésimo* intervalo $\left|\frac{\mathrm{m_i}}{c}\right| \to 0$ cuando $c \to \infty$.

Prueba. Es inmediata de la expresión del lema 4.

■

Encontramos que el tamaño relativo de los intervalos en un equilibrio particional se desvanece cuando el tamaño del espacio va a infinito, manteniendo el nivel del sesgo fijo. Eventualmente, cuando el espacio crece, la comunicación se vuelve plenamente reveladora.

En este sentido, podemos pensar que nuestra partición de equilibrio converge al equilibrio plenamente revelador cuando el espacio de estados es no acotado.

3 Estática Comparada

Una pregunta natural es cual de todos los equilibrios es mejor para ***R*** y ***E***. Eso dependerá del valor de *x*, el cual determina la utilidad de los agentes, sin embargo *ex ante*, es obvio que será aquel cuya utilidad esperada sea mayor.

Denotamos la utilidad esperada del agente ***R*** como

$$EU^R \equiv \sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} U^R(\bar{y}(a_{i-1}, a_i), m) f(m) dm$$

y la del agente ***E*** de la siguiente manera:

[7] Ver Apéndice D para la derivación de la expresión.

$$EU^{E} \equiv \sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} U^{R}(\bar{y}(a_{i-1}, a_{i}), m, b) f(m) dm$$

que para el caso cuadrático se reducen a las expresiones del siguiente [8]:

Lema 5. Las utilidades esperadas de los agentes están dadas por:

$$EU^{R} = -\left[\frac{c^{2}}{12N^{2}} + \frac{b^{2}(N^{2}-1)}{3}\right]$$

$$EU^{E} = -\left[\frac{c^{2}}{12N^{2}} + \frac{b^{2}(N^{2}-1)}{3} + b^{2}\right]$$

Del análisis de estas expresiones encontramos los teoremas 3 y 5 de CS que sintetizamos en la siguiente proposición para nuestro ejercicio.

Proposición 4. Dadas las preferencias y el espacio (i.e. *b* y *c*), la partición con más intervalos maximiza EU^R y EU^E, y es por tanto *ex ante* Pareto superior a los demás equilibrios.

Prueba. Aún cuando N es una variable discreta la función puede ser derivada si se evalúa en los valores que toma la variable. Dado que $\frac{dEU^{R}}{dN} = -\left[-\frac{c^{2}}{6N^{3}} + \frac{2b^{2}N}{3}\right] > 0$ para todo $c > b$, y $\frac{d^{2}EU^{R}}{dN^{2}} =$

$-\left[\frac{c^{2}}{2N^{4}} + \frac{2b^{2}}{3}\right] < 0$ para todo b y N, entonces la función es creciente y cóncava en N. Por lo tanto alcanza el máximo en N(*b,c*), la partición máxima posible. La prueba para EU^E es análoga y se muestra en el Apéndice F.

■

Proposición 5. Dada una partición máxima (i.e. N(*b,c*)), el tamaño del espacio que maximiza la utilidad de ***R*** es el mínimo que permite tal partición, es decir, se prefiere el valor mínimo de *c* con que se obtiene la cota máxima N(*b,c*).

[8] Ver Apéndice E para la obtención de las expresiones.

Prueba. Variando c en un rango tal que N(b,c) se mantenga constante (es decir, entre valores umbrales consecutivos) podemos derivar y obtener que $\frac{dEU^R}{dc} = -\frac{c}{6N^2} < 0$ y $\frac{d^2EU^R}{dc^2} = -\frac{1}{6N^2} < 0$. La función es decreciente y cóncava en c. El menor tamaño del espacio es el que maximiza la utilidad.

3.1 Bienestar

Si σ_m^2 representa la varianza residual del mensaje, podemos establecer el siguiente:

Lema 6. Las utilidades esperadas de los agentes están dadas por [9]:

$EU^R = -\sigma_m^2$

$EU^E = -(\sigma_m^2 + b^2)$

Como las expresiones de EU^R y EU^E señalan, ***E*** tiene incentivos a reducir su varianza junto con ***R*** tanto como sea posible, antes de conocer su tipo.

La intuición de nuestros resultados puede ser ilustrada de la siguiente forma. Un receptor preferirá una partición con el mayor número de intervalos para un espacio dado ya que ello le permite reducir la varianza de su utilidad esperada. Dado que ***R*** basa su elección de y en los estados que limitan los intervalos, entonces un equilibrio con más intervalos es, ceteris paribus, más informativo. El lema 6 extiende el argumento de la sección 2.2 de que un equilibrio con más intervalos es más informativo.

De manera análoga, se preferirá el menor espacio de estados que proporcione una partición máxima N(b,c), ya que esto reduce la varianza del mensaje.[10]

4 Conclusiones

Partiendo del modelo básico de Crawford y Sobel (1982) introducimos la posibilidad de que el espacio de estados crezca, y lo pueda hacer de forma no acotada. Enfocándonos en el caso con preferencias cuadráticas y un espacio uniformemente distribuido, hemos mostrado que cuando el espacio crece no acotado el número de intervalos va a infinito. Este resultado análogo al de CS cuando se reduce el sesgo del emisor, es cualitativamente diferente ya que no indica la plena revelación. Los intervalos de la extrema derecha tienden incluso a una no informatividad total.

---

[9] Ver Apéndice G para la obtención de las expresiones.

[10] Esto es directo de la proposición 5 y el lema 6.

Cuando consideramos la informatividad en forma diferente a CS, atendiendo a la norma relativa de cada intervalo y no a su longitud absoluta, encontramos que nuestros equilibrios tienden, ahora sí, a la revelación total. En este criterio no convencional de informatividad lo que importa es la posición relativa del estado en el espacio.

Finalmente, los ejercicios de estática comparada son consistentes en sus resultados con los obtenidos por Crawford y Sobel.

Referencias

[1] Battaglini, Marco (2002). "Multiple Referrals and Multidimensional Cheap Talk", *Econometrica* 70(4), 1379-1401.

[2] Crawford, Vincent y Joel Sobel (1982). "Strategic Information Transmission", *Econometrica* 50(6), 1431-1451.

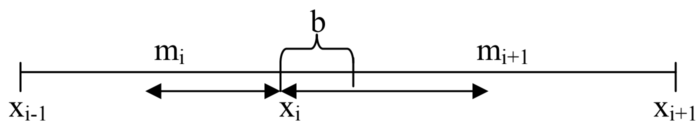
[3] Kartik, Navin (2005). "Information Transmission with Almost Cheap Talk", Mimeo.

[4] Kartik, Navin, Marco Ottaviani y Francesco Squintani (2006). "Credulity, Lies and Costly Talk", *Journal of Economic Theory*, Forthcoming.

[5] Moscarini, Giuseppe (2006). "Competente Implies Credibility", Mimeo, Marzo.

[6] Ottaviani, Marco y Francesco Squintani (2006). "Naive Audience and Communication Bias", Mimeo, Junio.

Apéndice A. **Partición máxima.**



Para ser indiferente entre las acciones asociadas a estos intervalos, el tipo frontera debe obtener la misma utilidad de ambas, por tanto:

$$\frac{1}{2}m_i + b = \frac{1}{2}m_{i+1} - b$$

$$m_i = m_{i+1} - 4b$$

$$a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i - 4b$$

$$a_{i+1} = 2a_i - a_{i-1} + 4b$$

N(*b, c*) es el mayor entero positivo, dado por la condición de que $2i(i-1) < c$.

$$2i^2 b - 2ib - c < 0$$

$$i = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4(2b)(-c)}}{2(2b)} \qquad \text{donde} \quad i = 1, \ldots, N-1$$

$$i = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 8bc}}{4b}$$

$$i = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{c}{2b}}$$

$$i = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2c}{b}\right)^{1/2}$$

Tomamos la raíz positiva, y como estamos interesados en el último intervalo consideramos la diferencia de menos uno.

$$i = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2c}{b}\right)^{1/2}$$

$$i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2c}{b}\right)^{1/2}$$

Finalmente obtenemos:

$$N(b,c) = \left\langle -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2c}{b}\right)^{1/2} \right\rangle$$

Apéndice B. **Norma del *i-ésimo* intervalo.**

Sabemos que bajo nuestros supuestos el intervalo m_{i+1} será mayor que m_i por $4b$, por lo que la medida del *i-ésimo* intervalo puede ser expresada de la siguiente manera:

$$m_1 + (m_1+4b) + (m_1+4b+4b) + (m_1+4b+4b+4b) + \ldots = c$$

$$m_1 + (m_1+4b) + (m_1+4b(2)) + (m_1+4b(3)) + \ldots +(m_1+(N-1)4b = c$$

donde: $m_{1:}$ norma del primer intervalo

N: número de intervalos de la partición.

$$Nm_1 + 4b\sum_{i=1}^{N-1} i = c$$

$$m_1 = \frac{1}{N}(c - 4b\sum_{i=1}^{N-1} i)$$

Reexpresando la sumatoria

$$m_1 = \frac{1}{N}\left(c - 4bN\left(\frac{N-1}{2}\right)\right)$$

Finalmente

$$m_1 = \frac{c}{N} - 2b(N-1)$$

Pero el intervalo *i* mide $m_1 + 4b(i-1)$, por tanto

$$|m_i| = \frac{c}{N} - 2b(N-1) + 4b(i-1)$$

$$|m_i| = \frac{c}{N} + 2b(2i - N - 1)$$

Apéndice C. **Rango de longitudes del *i-ésimo* intervalo.**

La longitud de un intervalo *i* cualquiera toma valores entre $(4b(i-1), 4bi]$, para $i=1,\ldots,N(b,c)$, alcanzando su máxima longitud cuando el valor de *c* alcanza un cierto umbral, y cayendo a la mínima cuando se cruza éste.

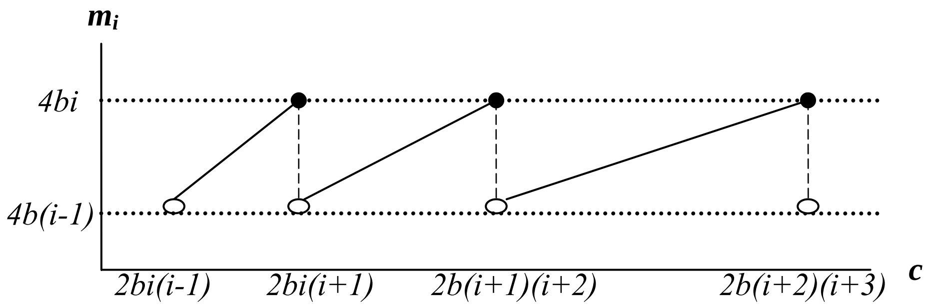
El espacio máximo c que permite una cantidad N de intervalos está dado por:

$$c_{\max} = 4b\sum_{i=1}^{N} i = 4b(N+1)\left(\frac{N}{2}\right) = 2bN(N+1)$$

Por tanto

$$c_{umbral} = 2bN(b,c)(N(b,c)+1)$$

La ilustración muestra el comportamiento de la longitud del *i-ésimo* intervalo conforme aumenta *c*.



Apéndice D. Razón de la longitud de un intervalo entre la longitud del espacio.

Dividiendo la expresión del lema 2 por la longitud del espacio c:

$$\left|\frac{m_i}{c}\right| = \frac{c}{cN(b,c)} + 2b(2i - N(b,c) - 1)/c$$

$$\left|\frac{m_i}{c}\right| = \frac{1}{N(b,c)} + \frac{2b}{c}(2i-1) - \frac{2b}{c}N(b,c)$$

$$\left|\frac{m_i}{c}\right| = \frac{1}{N(b,c)} + \frac{2b}{c}(2i-1) - \frac{2b}{c}\left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2c}{b}\right)^{1/2}\right\rangle$$

finalmente

$$\left|\frac{m_i}{c}\right| = \frac{1}{N(b,c)} + \frac{2b}{c}(2i-1) - b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{2}{bc}\right)^{1/2}$$

Apéndice E. Utilidad esperada de los agentes.

En el caso cuadrático, la utilidad esperada del receptor es:

$$EU^R \equiv \sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} U^R \overline{y}(a_{i-1}, a_i), m) f(m) dm$$

$$EU^R = -\sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} \left[m - \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right]^2 \frac{1}{c} dm$$

$$EU^R = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} \left[m^2 - ma_{i-1} - ma_i + \frac{a_{i-1}{}^2}{4} + \frac{a_i{}^2}{4} + \frac{a_{i-1}a_i}{2} \right] dm$$

$$EU^R = -\frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} \left[a_i{}^3 - 3a_i{}^2 a_{i-1} + 3a_i a_{i-1}{}^2 - a_{i-1}{}^3 \right]$$

$$EU^R = -\frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} (a_{i-1} - a_i)^3$$

$$EU^R = -\frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{c}{N} + 2b(2i - N - 1) \right]^3$$

$$EU^R = -\left[\frac{c^2}{12N^2} + \frac{b^2(N^2 - 1)}{3} \right]$$

Y para el Emisor tenemos:

$$EU^E \equiv \sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} U^R \overline{y}(a_{i-1}, a_i), m, b) f(m) dm$$

$$EU^E = -\sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} \left[m - \frac{a_{i-1} + a_i}{2} - b \right]^2 \frac{1}{c} dm$$

$$EU^E = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} \left[m^2 - ma_{i-1} - ma_i + \frac{a_{i-1}{}^2}{4} + \frac{a_i{}^2}{4} + \frac{a_{i-1}a_i}{2} + a_{i-1}b + a_i b - 2mb + b^2 \right] dm$$

$$EU^E = -\frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} \left[a_i{}^3 - 3a_i{}^2 a_{i-1} + 3a_i a_{i-1}{}^2 - a_{i-1}{}^3 + a_i b^2 - a_{i-1} b^2 \right]$$

$$EU^E = -\frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} \left[(a_{i-1} - a_i)^3 + (a_{i-1} - a_i) b^2 \right]$$

$$EU^E = -\frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} \left[\left[\frac{c}{N} + 2b(2i - N - 1) \right]^3 + \left[\frac{c}{N} + 2b(2i - N - 1) \right] b^2 \right]$$

$$EU^E = -\left[\frac{c^2}{12N^2} + \frac{b^2(N^2 - 1)}{3} + b^2 \right]$$

Apéndice F. **Prueba de proposición 4.**

Aún cuando N es una variable discreta la función puede ser derivada y evaluada en los valores que toma la variable.

$$\frac{dEU^E}{dN} = -\left[-\frac{c^2}{6N^3} + \frac{2b^2N}{3} \right] > 0 \;\; \forall\, c > b, N$$

$$\frac{d^2EU^E}{dN^2} = -\left[\frac{c^2}{2N^4} + \frac{2b^2}{3} \right] < 0 \;\; \forall\, b, N$$

La función es creciente y cóncava en N. Por lo tanto alcanza el máximo en el máximo valor de N, osea, en N(b,c).

Apéndice G. **Varianza del mensaje.**

La varianza del mensaje está dada por:

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{ai-1}^{ai} \left[m - \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right]^2 \frac{1}{c} dm$$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} (a_{i-1} - a_i)^3$$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{12c} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{c}{N} + 2b(2i - N - 1) \right]^3$$

Desarrollando y simplificando

$$\sigma_m^2 = \left[\frac{c^2}{12N^2} + \frac{b^2(N^2 - 1)}{3} \right]$$

Para el caso de una partición máxima tenemos:

$$\sigma_m^2 = \left[\frac{c^2}{12N(b,c)^2} + \frac{b^2(N(b,c)^2 - 1)}{3} \right]$$

De donde es inmediato de las expresiones del Apéndice E:

$EU^R = -\sigma_m^2$ y $EU^E = -(\sigma_m^2 + b^2)$