

# CONSIDERACIONES SOBRE MODELOS DE AJUSTE EMPLEADOS EN LA DEMOGRAFÍA MATEMÁTICA<sup>1</sup>

ALEJANDRO MINA VALDÉS  
*El Colegio de México*

## 1. Introducción

Dentro de las investigaciones demográficas, en especial las que se refieren a la cuantificación de los fenómenos demográficos, tienen gran importancia los modelos de ajuste. Dichos modelos de ajuste sirven para corregir, suavizar o describir el comportamiento de dichos fenómenos. En general se desconoce o no se resalta el alcance del ajuste, es decir, se aplica el modelo, y en algunos casos se piensa que corrigió la información y lo que hizo fue únicamente suavizarla o describirla; el otro caso es cuando se cree que se suavizó el comportamiento del fenómeno y lo que realmente se hizo fue corregirlo.

El presente trabajo tiene la intención de presentar modelos que suavicen, corrijan y describan los fenómenos demográficos tales como la fecundidad, la nupcialidad y la mortalidad. Para el fenómeno fecundidad se trabaja con el polinomio o función de fecundidad de W. Brass y el modelo de fecundidad de A. J. Coale. En cuanto al fenómeno nupcialidad se toma, por una parte, el modelo bilogístico de A. Bocaz y por otra parte el modelo estándar de nupcialidad de A.J. Coale; finalmente con el fenómeno mortalidad se usa el sistema logito de W. Brass y la ley de Makeham.

Inicialmente se presentan cada uno de los modelos, mostrando los alcances y limitaciones de cada uno de ellos, tratando de resaltar los casos en que se está suavizando o describiendo el comportamiento del fenómeno demográfico, de los casos en donde se está corrigiendo

<sup>1</sup> Este trabajo es una síntesis de la tesis presentada por el autor para obtener el grado de Matemático en la Facultad de Ciencias de la UNAM el 14 de agosto de 1981.

la distribución observada del fenómeno; continuando con la presentación y comentarios de los ajustes obtenidos, para presentar finalmente conclusiones generales acerca de cada uno de los modelos de ajuste estudiados.

## 2. Presentación de los modelos de ajuste

A continuación se ofrece una descripción de cada uno de los modelos de ajuste estudiados, dando un ejemplo de su aplicación al final de cada presentación. En general, las gráficas que muestran la bondad de los ajustes no son presentadas en este apartado, sino en la presentación y comentario de los resultados obtenidos.

### 2.1. *El modelo de nupcialidad de A. J. Coale*<sup>2</sup>

El modelo teórico desarrollado por Ansley J. Coale surgió como resultado de las comprobaciones realizadas por él, al examinar en diferentes poblaciones el comportamiento de la nupcialidad por edad a través de las proporciones de no solteras y de las frecuencias de primeros matrimonios.

Dadas las proporciones de mujeres no solteras por años de edad para diferentes cohortes, Coale observó que las curvas construidas con esas proporciones difieren entre sí en la medida en que la nupcialidad de las poblaciones en estudio presentan características diferentes en relación con la edad más baja de ingreso al matrimonio, el ritmo de aumento de ese ingreso desde la edad en que se inicia hasta la edad en que el número de ingresos es máximo, y la intensidad de la nupcialidad, representada por la proporción final; Coale observó que si las proporciones anteriores se presentaban a partir de un origen común, con una escala vertical ajustada convenientemente para cada población, de manera que la proporción de mujeres no solteras en las edades avanzadas sea igual a la unidad, y con una escala horizontal elegida de modo que la tasa media de ascenso de las curvas sea casi la misma, las curvas resultantes son prácticamente coincidentes.

Lo anterior quiere decir que las curvas originales tienen esencialmente la misma estructura, difiriendo únicamente en la edad en que comienza el ingreso al matrimonio, la tasa a la que aumenta el matrimonio y la proporción final de mujeres no solteras.

<sup>2</sup> Ver Coale, A.J. "Age Patterns of Marriage". *Population Studies*, Vol. XXV, No. 2. pp. 193-214, julio, 1971.

El que exista un patrón común de proporciones de mujeres no solteras, por edad, en diferentes poblaciones, implica que existe un patrón común de frecuencias de los primeros matrimonios en las poblaciones de referencia. Coale observó que si las curvas que representan esas frecuencias, calculadas a partir de los matrimonios registrados por años de edad, en poblaciones que tienen características diferentes en relación con la nupcialidad, se llevan a un origen común y con escalas horizontal y vertical convenientemente elegidas para cada población, las curvas resultantes también presentan una sorprendente similitud.

El que exista un patrón común de frecuencias de los primeros matrimonios implica un mismo patrón de riesgo de primer matrimonio, según la edad, que, de acuerdo con lo observado en las poblaciones estudiadas por Coale, parece ser independiente del tamaño del grupo de mujeres destinadas a permanecer solteras.

El patrón común de riesgo de primer matrimonio sugirió a Coale la posibilidad de construir una curva estándar que represente ese riesgo. La curva debería ascender desde el origen, dado por la edad más temprana en que la cohorte comienza a contraer matrimonio, hasta un valor máximo, aproximadamente constante, cuando ya se ha casado la mayoría de las mujeres destinadas a no permanecer solteras. El modelo estándar de riesgo de primer matrimonio se derivó a partir de los datos referentes a los matrimonios registrados en Suecia en 1865-1869, por años de edad, y ajustados por una doble exponencial.

La función propuesta por Coale es:

$$r_s(x) = 0.174e^{-4.411e^{-0.309x}} \quad (1)$$

En donde  $r_s(x)$  representa el riesgo estándar de nupcialidad, es decir, la probabilidad de que una mujer soltera ingrese al estado matrimonial a la edad  $x$  de la escala horizontal ajustada.

En una cohorte en que los primeros matrimonios comienzan a la edad ( $a$ ) y para la cual la escala de la edad al casarse (eje de las abscisas) está reducida por un factor  $K$ , el riesgo de matrimonio de las mujeres que han de casarse a la edad ( $a$ ) es:

$$r(a) = \frac{0.174}{K} e^{-4.411e^{-\frac{0.309}{K}(a - a^0)}} \quad (2)$$

Los tres parámetros que permiten caracterizar el comportamiento de la nupcialidad, mencionados anteriormente, se definen, en el modelo de Coale, de la siguiente manera:

- a° Representa la edad más joven de ingreso al primer matrimonio y corresponde al origen de la curva.
- K. Corresponde al factor relacionado con la escala del tiempo durante el cual ocurren los primeros matrimonios, si en la curva estándar el intervalo entre el origen y el valor máximo es  $x$ , para otra curva el intervalo es  $K_x$ . Por tanto el parámetro  $K$  es el factor que relaciona el ritmo de ingreso al primer matrimonio en una población, con el comportamiento de ese ingreso en la población que sirvió de base al modelo estándar. El valor de  $K$  siempre es positivo, si  $K$  es menor que uno, el ingreso al matrimonio en la población real ocurre a un ritmo más rápido que en el modelo; por el contrario, si  $K$  es mayor que uno, el ritmo es más lento que en el modelo.
- C. Representa la producción de mujeres no solteras a la edad en que las frecuencias de los primeros matrimonios es cercano a cero. Dicha edad depende, de  $a^\circ$  y principalmente de  $K$ . Cuanto más bajo es el valor de  $K$ , más rápido es el ritmo a que se producen los ingresos al primer matrimonio; lo que trae como consecuencia que el valor  $C$  se presente a una edad más joven.

Ahora bien, si  $X_s$  representa la edad en la escala estándar  $g_s(X_s)$  será la frecuencia con que ocurren los primeros matrimonios a la edad  $X_s$ ;  $G_s(X_s)$  la proporción estándar de mujeres no solteras a la edad  $X_s$ , y  $Z_s(X_s)$  el número de año-personas vividas como no solteras hasta la edad  $X_s$ , en una cohorte no expuesta a los riesgos de mortalidad y migración, así se tiene que:

$$G_s(X_s) = \int_0^{X'_s} g_s(X_s) dX_s \quad (3)$$

$$Z_s(X_s) = \int_0^{X'_s} G_s(X_s) dX_s \quad \text{siendo } 0 < X_s < X'_s \quad (4)$$

### 2.1.1 Ejemplo de la aplicación del modelo de nupcialidad de Coale:

Para aplicar este modelo se requiere la información, por edad individual, de las proporciones de primeros matrimonios (para fines del ejemplo se tiene la cohorte 35-39 años de la Encuesta Mexicana de Fecundidad). Dichas proporciones se estandarizan a un radix de 100 mujeres; después son acumuladas con el fin de obtener las edades del estándar de Coale que corresponde a dichas proporciones acumuladas; esto se lleva a cabo interpolando linealmente el valor de los matrimonios acumulados en el estándar de Coale.

Obtenida la serie de las edades del estándar y la serie de las edades observadas, se grafican, mostrando una correlación lineal entre ellas (ver gráfica 1) por lo que se genera la recta de regresión de la forma:

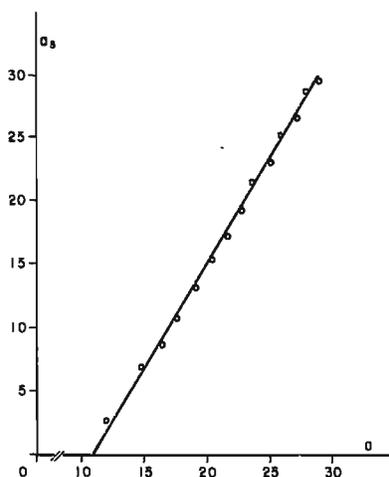
$$a_s = a \frac{1}{K} + d \quad (5)$$

donde:

$a_s$  es la edad estándar

$a$  es la edad observada

Gráfica 1  
Recta de regresión para la cohorte 35-39 años de la EMP.



$\frac{1}{K}$  es la pendiente de la recta y  $K$  el ritmo al que las mujeres ingresan al estado matrimonial.

$d$  es el término independiente de la recta, el cual sirve para determinar el valor de  $a_0$  (si  $a_5 = 0$  entonces  $a = a_0 = -dK$ ).

Con la recta de regresión se obtuvieron las edades  $a_5$  ajustadas (al sustituir en la recta los valores de las edades observadas). Hecho lo anterior, se interpolan linealmente los valores de las edades  $a_5$  ajustadas, teniendo el ajuste de los matrimonios acumulados, los cuales son desacumulados para obtener los matrimonios ocurridos entre las edades  $a$  y  $a+1$ . En el cuadro 1 se resume el procedimiento antes descrito.

Cuadro 1

México: Ajuste de los primeros matrimonios de la cohorte 35-39 años (EMF) vía el modelo de nupcialidad de Coale (por 1000 mujeres).

$a$	$g^0(a)$	$G^0(a)$	$a_5$	$\hat{a}_5$ */	$\hat{G}(a)$	$\hat{g}(a)$
10	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
11	5	5	1.17	0.00	0.00	0.00
12	11	16	2.07	0.55	1.10	1.10
13	33	49	3.37	2.37	21.53	20.43
14	45	94	4.42	4.19	82.84	61.31
15	78	172	5.72	6.01	192.14	109.30
16	103	275	7.13	7.83	329.63	137.49
17	106	281	8.49	9.65	469.71	140.08
18	111	492	9.96	11.47	593.78	124.07
19	99	591	11.42	13.29	693.71	99.93
20	87	678	12.97	15.11	771.38	77.67
21	78	756	14.71	16.93	830.77	59.39
22	60	816	16.42	18.75	875.16	44.39
23	49	865	18.28	20.57	908.56	33.40
24	30	895	19.76	22.39	933.26	24.70
25	38	933	22.37	24.21	951.08	17.82
26	21	954	24.58	26.03	963.78	12.70
27	24	978	28.83	27.85	973.52	9.74
28	10	988	31.64	29.67	981.42	7.90
29	12	1000	40.00	31.49	987.57	6.15

\*/  $\hat{a}_5 = 1.82 a - 21.24$

### 2.2 El modelo bilogístico de A. Bocaz<sup>3</sup>

Si un proceso determinado se inicia a la edad ( $\alpha$ ) y termina a la edad ( $\beta$ ), cuando la mujer tenga ( $x$ ) años de edad habrá recorrido una proporción de tiempo igual a:

$$P_x = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \quad (6)$$

Si conocemos la proporción de personas que ya han participado en el proceso ( $F_x$ ), el modelo bilogístico simple presupone una relación lineal entre:

El logito del tiempo recorrido

$$\text{logit}(P_x) = \ln \frac{1}{P_x} - 1 = \ln \frac{1 - P_x}{P_x} \quad (7)$$

y el logito de la proporción de personas que ya han participado del proceso.

$$\text{logit}(F_x) = \ln \frac{1}{F_x} - 1 = \ln \frac{1 - F_x}{F_x} \quad (8)$$

en símbolos:

$$\text{logit}(F_x) = b_1 + b_2 \text{logit}(P_x) \quad (9)$$

entonces:

$$\ln \frac{1}{F_x} - 1 = b_1 + b_2 \ln \frac{1}{P_x} - 1 \quad (10)$$

A continuación se da un ejemplo de la aplicación del modelo bilogístico de A. Bocaz tomando la distribución observada de mujeres alguna vez casadas o unidas, según edad al casarse o unirse por primera vez, de la encuesta mexicana de fecundidad (1976).

<sup>3</sup> Ver: Bocaz, Albino, "Experiencia de nupcialidad por cohortes resumida por un modelo bilogístico", *Notas de Población*, año VII, No. 19, abril, 1979.

Cuadro 2

Distribución observada de mujeres alguna vez casadas o unidas, según edad al casarse o unirse por primera vez (ECUPV), cohorte 30-34 años (EMF, 1976)

ECUPV	Proporción de mujeres alguna vez casadas o unidas (por cien) Valores observados
10 - 14	9.1304
15 - 17	27.3913
18 - 19	18.6957
20 - 21	15.5435
22 - 23	16.1957
25 - 29	10.7609
30 y más	2.2826
T o t a l	100.0000

En este caso

de donde:

$$\alpha = 10 \text{ y } \beta = 35$$

$$P_x = \frac{x - 10}{25} \quad (11)$$

Entonces:

Cuadro 3

Edad al casarse o unirse por la vez	x	Px	Fx	Fx (x 100)	logit Px	logit Fx
10 - 14	15	.20	0.091304	9.1304	1.3862944	2.3069441
15 - 17	18	.32	0.365210	36.5210	1.7537718	2.5527898
18 - 19	20	.40	0.552173	55.2173	0.4054651	-0.2094581
20 - 21	22	.48	0.707608	70.7608	0.0800427	-0.8837983
22 - 24	25	.60	0.869566	86.9566	-0.4054651	-1.8971300
25 - 29	30	.80	0.977173	97.7173	-1.3869440	-3.7567606
30 y más	35	1.00	1.000000	100.0000	-	-

Ahora, con el supuesto de una relación de tendencia lineal entre ambos logitos (ver gráfica 2); se determina la recta de regresión siguiente:

$$\ln \frac{1}{F_x} - 1 = -.947272 + 211542318 \ln \frac{1}{P_x} - 1 \quad (12)$$

$$\text{corr} = 0.9964262$$

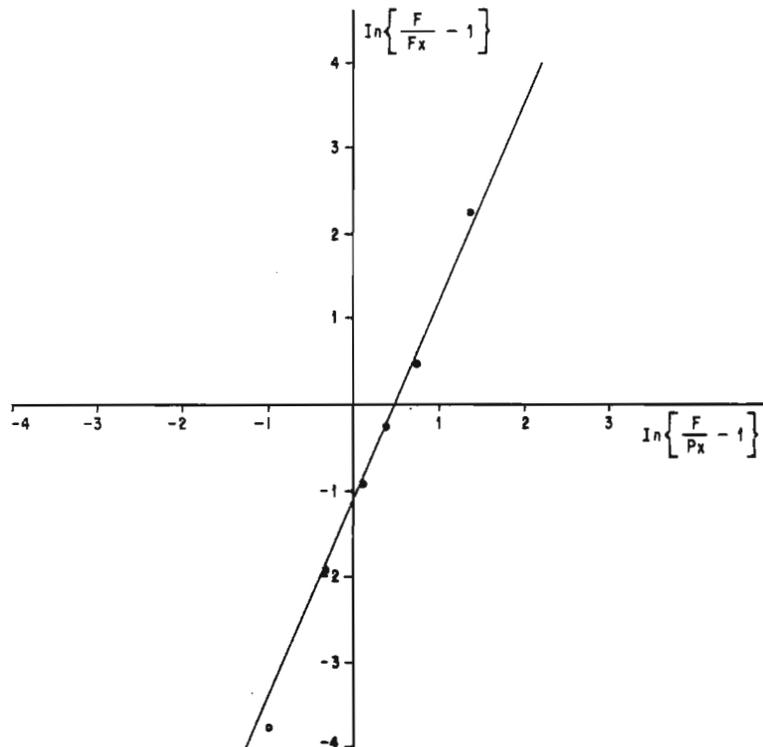
De (12) se obtienen los valores de  $\hat{F}(x)$  siguientes:

Cuadro 4

x	logit $\hat{F}_x$	$\hat{F}_x$
15	2.0391275	0.1151556
18	0.6765272	0.3370368
20	-0.0738062	0.5184432
22	-0.7748415	0.6845673
25	-1.8207378	0.8606546
30	-3.9336715	0.9808040

Gráfica 2

Correlación entre las transformadas logísticas de la proporción de mujeres casadas y del tiempo de permanencia en el proceso de nupcialidad. Cohorte de mujeres 30-34 años (EMF, 1976)



De aquí que la proporción teórica  $f_x$ , por grupos de edad, estará dada por

$$\hat{f}_x = (\hat{F}_x - \hat{F}_{x-1}) \tag{13}$$

Así:

Cuadro 5

x	$\hat{f}_x$
15	.1151556
18	.2218812
20	.1814064
22	.1661241
25	.1760873
30	.1201494
35	.0101060

Evaluando la ecuación (12) para las edades exactas: 11, 12, 13, ..., 35 se obtienen los siguientes valores  $\hat{F}(x)$ :

Cuadro 6

x	$\hat{F}(x)$	x	$\hat{F}(x)$	x	$\hat{F}(x)$
11	.0027347	20	.5184432	28	.9517479
12	.0132018	21	.6053370	29	.9686415
13	.0340631	22	.6845673	30	.9808040
14	.0675507	23	.7539335	31	.9892227
15	.1151556	24	.8125692	32	.9947247
16	.1771369	25	.8606546	33	.9979921
17	.2521238	26	.8990524	34	.9995878
18	.3370368	27	.9289764	35	.9999990
19	.427664				

Utilizando la ecuación (13), obtenemos los valores  $\hat{f}(x)$  para las edades cumplidas: 10, 11, 12, ..., 34. A continuación se dan los valores, observados y estimados, de la función  $f(x)$  (por cien).

Cuadro 7

x	f(x)	$\hat{f}(x)$	x	f(x)	$\hat{f}(x)$	x	f(x)	$\hat{f}(x)$
10	0.21739	0.27347	19	8.58696	9.09768	27	1.73913	2.27150
11	0.32609	1.04671	20	9.34783	8.68938	28	1.63043	1.68936
12	0.97826	2.08613	21	6.19565	7.92303	29	0.97826	1.21626
13	2.50000	3.34876	22	7.17391	6.93662	30	1.19565	0.84187
14	5.10870	4.76049	23	5.65217	5.86357	31	0.54348	0.55020
15	6.63043	6.19813	24	3.36957	4.80854	32	0.32609	0.32674
16	9.89130	7.49869	25	3.69565	3.83978	33	0.10870	0.15957
17	10.86957	8.49130	26	2.71739	2.99240	34	0.10870	0.04122
18	10.10870	9.04296						

### 2.3. Polinomio de fecundidad de W. Brass.\*

El Polinomio de fecundidad de Brass se define como:

$$f(a) = c(x-S)(S+33-a)^2 \quad \text{para } S \leq a \leq S+33 \quad (14)$$

$$f(a) = c(x-S)(b-a)^2 \quad (15)$$

Donde:

c: se relaciona con el nivel de la fecundidad

s: indica la edad en la cual comienza la fecundidad

b: indica la edad en la cual termina la fecundidad (b=S+33)

El valor 33 tiene que ver con el intervalo del período reproductivo, es un promedio de numerosas observaciones.

En general se cuenta con las tasas específicas de fecundidad para los grupos quinquenales de edad: 10-14, 15-19, ..., 40-44 y 45-49, las cuales nos dan el comportamiento de dicha función en los puntos 12.5, 17.5, ..., 42.5 y 47.5. Para desagregar dicha información y obtener una completa descripción de la fecundidad por edades individuales se puede utilizar el polinomio de fecundidad de W. Brass.

\* Ver: Brass, W. "Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (Fecundidad y mortalidad)". CELADE, Serie DS. No. 9, San José, Costa Rica, 1973, pp. 15-20.

Las soluciones del polinomio de fecundidad de W. Brass son:

$$D = \text{descendencia final} = \frac{c(b - S)^4}{12} \tag{16}$$

$$\bar{x} = \text{edad media a la fecundidad} = \frac{S + 2b}{5} \tag{17}$$

$$\sigma = \text{desviación estándar} = \frac{b - S}{5} \tag{18}$$

Despejando de las anteriores ecuaciones los valores de S, b y c:

$$S = \bar{x} - 25 \tag{19}$$

$$b = \bar{x} + 35 \tag{20}$$

$$Km = \frac{12 D}{(b-S)^4} \tag{21}$$

Ejemplo de la aplicación del polinomio de W. Brass: Para la región 3, que comprende los estados de Tamaulipas y Veracruz, se obtiene para 1970:

Cuadro 8

Grupos de edad	Promedio de nacimientos 1969-71 <sup>1/</sup>	Total de mujeres al 30.06.70 <sup>2/</sup>	Tasas específicas de fecundidad f(a)	a
12 - 14	1 198	200 329	0.005980	13.5
15 - 19	21 306	280 781	0.075881	17.5
20 - 24	53 031	234 961	0.225701	22.5
25 - 29	48 797	193 137	0.252655	27.5
30 - 34	33 737	149 714	0.225343	32.5
35 - 39	24 073	147 849	0.162822	37.5
40 - 49	15 683	196 067	0.079988	43.3
			1.028370	

Fuente: <sup>1/</sup> Anuario Estadístico, México, 1972.

<sup>2/</sup> IX Censo General de Población, México, 1972.

En este caso:

$$D = 5 \sum_{a=13.5}^{43.3} f(a) = 5(1.028370) = 5.14185 \tag{22}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{a=13.5}^{43.3} f(a)}{\sum_{a=13.5}^{43.3} f(a)} \quad (23)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{a=13.5}^{43.3} a^2 f(a) - \bar{x}^2}{\sum_{a=13.5}^{43.3} f(a)}} = 6.826578 \quad (24)$$

Por lo tanto:

$$S = \bar{x} - 2\sigma = 15.838044 \quad (25)$$

$$b = \bar{x} + 3\sigma = 49.970934 \quad (26)$$

$$c = \frac{12D}{(b-S)^4} = 0.0000454578 \quad (27)$$

Finalmente se obtiene la función de fecundidad:

$$f(a) = 0.0000454578 (a - 15.838044) (49.970934 - a)^2 \quad (28)$$

Obsérvese que se puede evaluar la función de fecundidad  $f(a)$  para toda  $a$  mayor a 15.838044 y menor a 49.970934, desagregando de grupos quinquenales a edades individuales la experiencia en cuanto a la fecundidad de dicha región, lo cual se da en el Cuadro 9.

#### 2.4 Modelo de fecundidad de A. J. Coale y J. Trussell<sup>5</sup>

Este modelo se basa en el modelo estándar de nupcialidad de A. J. Coale; parte de la función  $G(a)$  (función acumulada de los primeros matrimonios ocurridos hasta la edad  $a$ ) y de la función  $r(a)$  que representa la proporción de mujeres casadas con hijos nacidos vivos en la edad  $a$  (fecundidad de las casadas).

La forma de la función  $f(a)$  es:

$$f(a) = G(a) r(a) \quad (29)$$

<sup>5</sup> Ver: Coale, A.J. y Trussell, T.J.: "Model Fertility Schedules: Variations in the age structure of childbearing in human populations". *Population Index*, 40 (2), pp. 185-258, 1974.

Cuadro 9

Región 3. Tamaulipas y Veracruz. Tasas específicas de fecundidad, obtenidas a partir de la función de fecundidad de W. Brass.

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
16.5	0.03371	28.5	0.26535	40.5	0.10056
17.5	0.07966	29.5	0.26025	41.5	0.08371
18.5	0.11985	30.5	0.25268	42.5	0.06765
19.5	0.15456	31.5	0.24290	43.5	0.05265
20.5	0.18406	32.5	0.23119	44.5	0.03900
21.5	0.20863	33.5	0.21781	45.5	0.02695
22.5	0.22854	34.5	0.20305	46.5	0.01679
23.5	0.24405	35.5	0.18717	47.5	0.00878
24.5	0.25545	36.5	0.17044	48.5	0.00321
25.5	0.26301	37.5	0.15315	49.5	0.00034
26.5	0.26700	38.5	0.13555		
27.5	0.26768	39.5	0.11793		

$$\text{siendo: } r(a) = n(a) \cdot M \cdot \exp[m \cdot v(a)] \quad (30)$$

donde:

$n(a)$  representa la fecundidad natural a edad  $a$  (obtenida a partir de la experiencia de 43 países).

$M$  es un factor de escala (como el valor  $C$  del modelo estándar de nupcialidad de Coale).

$v(a)$  expresa la tendencia de las mujeres en edad avanzada al uso de anticonceptivos y aborto.

$m$  denota el grado de control de los niveles de fecundidad.

Los valores de  $n(a)$  y  $v(a)$  para los grupos de edad 20-24, 25-29, ..., 40-44 y 45-49, son los siguientes:

Cuadro 10

Edad	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
$n(a)$	0.460	0.431	0.396	0.321	0.167	0.024
$v(a)$	0.000	-0.316	-0.814	-1.048	-0.424	-1.667

El modelo de fecundidad de Coale y Trussell se emplea estandarizado a 1.0 la suma de las tasas específicas de fecundidad. Coale obtiene los valores de las tasas específicas de fecundidad desagregadas en edades individuales para los siguientes parámetros:

$$1) \bar{m} = \text{edad media a la fecundidad} = \frac{\sum_{12.5}^{49.5} af(a)}{12.5} \quad \left[ \text{donde } \sum_{12.5}^{49.5} f(a) = 1.0 \right] \quad (31)$$

$$2) \sigma = \text{desviación estándar} = \frac{\sum_{12.5}^{49.5} a^2 f(a) - \bar{m}^2}{12} \quad (32)$$

$$3) R_1 = \text{cociente de propiedad} = \frac{\sum_{15.5}^{19.5} f(a)}{24.5} \quad (33)$$

$$4) \text{MED} = \text{el valor de } \hat{a} \text{ tal que } \sum_{12.5}^{\hat{a}} f(a) = 0.5 \quad (34)$$

$$5) \text{SKEW} = \frac{\sum_{12.5}^{49.5} (a - \bar{m})^3 f(a)}{12.5 \sigma^3} \quad (35)$$

$$6) \text{PAR 1} = \frac{\text{Paridad (15-19)}}{\text{Paridad (20-24)}} \quad (36)$$

$$7) \text{PAR 2} = \frac{\text{Paridad (20-24)}}{\text{Paridad (25-29)}} \quad (37)$$

8)  $a_0$  = edad inicial al matrimonio en la función de nupcialidad

9)  $K$  = factor de escala de la función de nupcialidad.

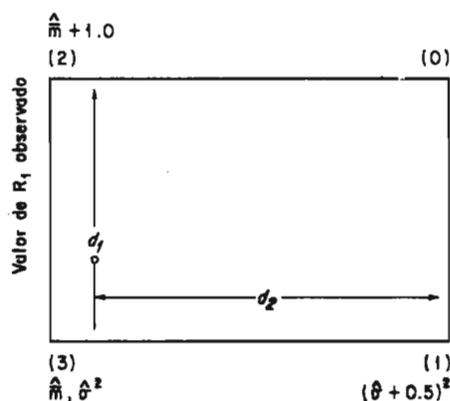
10)  $m$  = grado de control de la fecundidad.

Con diferentes combinaciones de los anteriores parámetros los autores crearon tablas que muestran la distribución de las tasas específicas de fecundidad,<sup>6</sup> las cuales se utilizan como estándar para obtener la distribución de dichas tasas para el caso particular que se tenga.

La forma en que se deben utilizar las tablas antes citadas es la siguiente:

- a) Se obtienen los valores de los parámetros  $\bar{m}$ ,  $\sigma$  y  $R_1$ .
- b) Se buscan los valores de  $R_1$  en las tablas que cubra el valor observado de dicho parámetro y a los parámetros  $\bar{m}$  y  $\sigma$  como se muestra en la siguiente gráfica.

Gráfica 3



donde:

$$d_1 = (\hat{m} + 1.0) - \hat{m} \tag{38}$$

$$d_2 = \frac{(\hat{\sigma} + 0.5) - \sigma}{(\hat{\sigma} + 0.5) - \sigma^2} \tag{39}$$

$$(0) \text{ es el punto } P_0 = [(\hat{\sigma} + 0.5)^2, (\hat{m} + 1.0)] \tag{40}$$

$$(1) \text{ es el punto } P_1 = [(\hat{\sigma} + 0.5)^2, \hat{m}] \tag{41}$$

<sup>6</sup> Coale, A.J. y Trussell T.J., *op. cit.*, pp. 205-257.

$$(2) \text{ es el punto } P_2 = [\hat{\sigma}^2, (\hat{m} + 1.0)] \quad (42)$$

El Punto (3) debe ser tal que el valor que se tiene para él es el menor de los tres puntos anteriores, siendo el punto que se elimina.

c) De cada punto ( $P_0$ ,  $P_1$  y  $P_2$ ) se toman los valores de los parámetros  $a_0$ ,  $K$  y  $m$  que se dan en las tablas correspondientes.

Así se tiene:

$$P_0 \longrightarrow a_0^{(0)}; K^{(0)}; m^{(0)} \quad (43)$$

$$P_1 \longrightarrow a_0^{(1)}; K^{(1)}; m^{(1)} \quad (44)$$

$$P_2 \longrightarrow a_0^{(2)}; K^{(2)}; m^{(2)} \quad (45)$$

d) Se calculan los valores de los parámetros ponderadores,  $W_0$ ,  $W_1$  y  $W_2$ , como sigue:

$$W_1 = d_1 \quad (46)$$

$$W_2 = d_2^* = d_2 + \frac{d_1(1-d_1)}{\sigma + 0.25} \quad (47)$$

$$W_0 = 1 - W_1 - W_2 \quad (48)$$

e) Se obtienen los valores de los parámetros  $a_0$ ,  $K$  y  $m$  para la fecundidad observada.

$$\hat{a} = W_0 a_0^{(0)} + W_1 a_0^{(1)} + W_2 a_0^{(2)} \quad (49)$$

$$\hat{K} = W_0 K^{(0)} + W_1 K^{(1)} + W_2 K^{(2)} \quad (50)$$

$$\hat{m} = W_0 m^{(0)} + W_1 m^{(1)} + W_2 m^{(2)} \quad (51)$$

f) Se evalúa la función  $f(a) = G(a) n(a) e^{m \cdot v(a)}$ ,<sup>7</sup> obteniendo los valores, corregidos y desagregados por edad, de la distribución de las tasas específicas de fecundidad correspondientes a la experiencia observada.

<sup>7</sup> Empleando el programa de computación que aparece en las páginas 202 y 203 del artículo de Coale y Trussell antes citado.

Ejemplo de la aplicación del modelo de fecundidad de A. J. Coale y J. Trussell.

Tomando también la región 3, que comprende los estados de Tamaulipas y Veracruz, se tienen las siguientes tasas específicas de fecundidad.

Cuadro 11

Grupos de edad	a	f(a)	f <sup>s</sup> (a)
12 - 14	13.5	0.005980	0.005815
15 - 19	17.5	0.075881	0.073788
20 - 24	22.5	0.225701	0.219475
25 - 29	27.5	0.252655	0.245685
30 - 34	32.5	0.225343	0.219126
35 - 39	37.5	0.162822	0.158330
40 - 49	43.3	0.079988	0.077781
		1.028370	1.000000

De Donde:

$$\bar{m} = \frac{43.3}{13.5} \sum af^s(a) = 29.4912 \tag{52}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{43.3}{13.5} \sum a^2 f^s(a) - \bar{m}^2 - \frac{5^2}{12}} = 6.9775 \tag{53}$$

$$R = \frac{0.073788}{0.219475} = 0.336202 \tag{54}$$

Buscando los valores de R<sub>1</sub> en las tablas de Coale y Trussell, tales que cubran los valores de R<sub>1</sub>,  $\bar{m}$  y  $\sigma$  observados:

Cuadro 12

$\bar{x}$ \ $\sigma$	6.5	7.0
29	0.2860	0.3370
30	0.2457	0.3319

En este caso:

$$P_0 = (7,29); P_1 = (7,30) \text{ y } P_2 = (6.5,29) \quad (55)$$

$$a_o^{(0)} = 15.39; K^{(0)} = 0.300; m^{(0)} = 0.282 \quad (56)$$

$$a_o^{(1)} = 12.74; K^{(1)} = 0.750; m^{(1)} = 0.230 \quad (57)$$

$$a_o^{(2)} = 12.56; K^{(2)} = 1.000; m^{(2)} = 0.899 \quad (58)$$

$$W_1 = d_1 = 29.4912 - 29 = 0.4912 \quad (59)$$

$$d_2 = \frac{7^2 - (6.9775)^2}{7^2 - (6.5)^2} = 0.04659 \quad (60)$$

$$W_2 = d_2^* = d_2 + \frac{d_1(1-d_1)}{\sigma + 0.25} = 0.083618 \quad (61)$$

$$W_0 = 1 - W_1 - W_2 = 0.425182 \quad (62)$$

Finalmente:

$$\hat{a}_o = W_0 a_o^{(0)} + W_1 a_o^{(1)} + W_2 a_o^{(2)} = 13.8517 \quad (63)$$

$$\hat{K} = W_0 K^{(0)} + W_1 K^{(1)} + W_2 K^{(2)} = 0.5796 \quad (64)$$

$$\hat{m} = W_0 m^{(0)} + W_1 m^{(1)} + W_2 m^{(2)} = 0.3080 \quad (65)$$

Con  $\hat{a}_o$ ,  $\hat{K}$  y  $\hat{m}$  y usando el programa de computación se obtiene la siguiente estructura por edad de la fecundidad:

Cuadro 13

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
13	0.05470	23	0.25400	33	0.20776	43	0.05470
14	0.03697	24	0.26020	34	0.19646	44	0.03697
15	0.02294	25	0.26140	35	0.18489	45	0.02294
16	0.01438	26	0.26096	36	0.17261	46	0.01438
17	0.00855	27	0.25910	37	0.16021	47	0.00855
18	0.00445	28	0.25390	38	0.14725	48	0.00445
19	0.00121	29	0.24700	39	0.13376	49	0.00121
20	0.00000	30	0.23800	40	0.11932	50	0.00000
21	0.00000	31	0.22837	41	0.09790	51	0.00000
22	0.00000	32	0.21829	42	0.07400	52	0.00000

### 2.5 La función de Makeham

Uno de los esfuerzos para dar una ley matemática que describiera la mortalidad experimentada por una población dada, fue el hecho por Gompertz. La ley que desarrolló (Ley de Gompertz) supone que la resistencia del hombre a la muerte decrece a una tasa proporcional a sí misma, y que las causas de muerte se agrupan en: a) aquellas independientes de la edad y b) aquellas en las que el organismo ofrece una resistencia que se va perdiendo con el tiempo.

Gompertz, en su ley, sólo considera las causas de muerte dependientes de la edad y Makeham, basado en la ley de Gompertz, integra las causas independientes de la edad para generar su ley.

Si se denota como  $M_x$  (tasa instantánea de mortalidad) a la susceptibilidad del hombre a la muerte, y al recíproco de ella,  $\frac{1}{M_x}$ , como la resistencia del hombre a la muerte, entonces, el supuesto de la ley de Gompertz se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx} (1/M_x) = -h(1/M_x) \quad (66)$$

donde  $h$  es la tasa a la cual decrece la resistencia del hombre a la muerte.

Desarrollando (66):

$$\int \frac{d(1/M_x)}{1/M_x} dx = -h \int dx \quad (67)$$

$$\ln (1/M_x) + \ln B = -hx \quad (68)$$

$$\ln \frac{B}{M_x} = -hx \quad (69)$$

$$\frac{B}{M_x} = e^{-hx} \quad (70)$$

$$M_x = Be^{hx} \quad (71)$$

Se denota a  $e^h$  como  $C$ , entonces (71) se expresa como:

$$M_x = BC^x \quad (72)$$

Por otro lado, la tasa instantánea de mortalidad  $M_x$  se define como:

$$M_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell(x) - \ell(x+h)}{h\ell(x)} \quad (73)$$

$$= \frac{-1}{\ell(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h} \quad (74)$$

$$= -\frac{1}{\ell(x)} \frac{1}{dx} \ell(x) \quad (75)$$

$$= -\frac{d}{dx} \ln \ell(x) \quad (76)$$

De (76):

$$\int_0^x M_y dy = -\int_0^x \frac{d}{dy} \ln \ell(y) dy \quad (77)$$

$$= -\ln \ell(y) \Big|_0^x \quad (78)$$

$$= -[\ln \ell(x) - \ln \ell(0)] \quad (79)$$

$$= -\ln \frac{\ell(x)}{\ell(0)} \quad (80)$$

Por lo tanto:

$$\ln \frac{\ell(x)}{\ell(0)} = -\int_0^x M_y dy \quad (81)$$

$$\frac{\ell(x)}{\ell(0)} = e^{-\int_0^x M_y dy} \quad (82)$$

$$\ell(x) = \ell(0) e^{-\int_0^x M_y dy} \quad (83)$$

Makeham, al combinar las dos causas de muerte supuestas por Gompertz, considera la expresión (7) como:

$$M_x = A + BC^x \quad (84)$$

En donde el parámetro A está asociado al efecto de las causas de muerte independientes de la edad.

Desarrollando (84):

$$\int_0^x My \, dy = \int_0^x (a + BC^y) \, dy \quad (85)$$

$$= \int_0^x A \, dy + \int_0^x BC^y \, dy \quad 86$$

$$= Ax + \frac{BC^x}{\ln C} - \frac{B}{\ln C} \quad (87)$$

$$-\int_0^x My \, dy = -Ax - \frac{B}{\ln C} (C^x - 1) \quad (88)$$

Se denota a  $-A$  como  $\ln S$  y a  $\frac{-B}{\ln C}$  como  $\ln g$ , entonces (88) se expresa como:

$$-\int_0^x My \, dy = x \ln S + (C^x - 1) \ln g \quad (89)$$

$$\ln S^x + \ln g (C^x - 1) \quad (90)$$

Sustituyendo (90 en (83):

$$\ell(x) = \ln S^x g (C^x - 1) \quad (91)$$

$$= \frac{\ln S}{g} S^x g C^x \quad (92)$$

Se denota a  $\frac{l_0}{g}$  como K, entonces (92) se expresa como:

$$l(x) = KS^x g^{Cx} \quad (93)$$

La expresión (93) es la comúnmente llamada ley de Makeham, siendo la siguiente expresión la llamada función de Makeham:

$$Y(x) = Ka^x b^{d^x} \quad (94)$$

Para determinar los valores de los parámetros K, a, b y d se usa el método de los grupos no superpuestos<sup>8</sup> el cual consiste en separar los datos observados [Y(x)] en cuatro grupos de observaciones sucesivas, con un número igual de valores por grupo. Es decir:

Primer grupo:

$$x: 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (m-1) \quad (95)$$

$$Yx: Y_0 \ Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_{m-1} \quad (96)$$

Segundo grupo:

$$x: m \ (m+1) \ (m+2) \ \dots \ (2m-1) \quad (97)$$

$$Yx: Y_m \ Y_{m+1} \ Y_{m+2} \ \dots \ Y_{2m-1} \quad (98)$$

Tercer grupo:

$$x: 2m \ (2m+1) \ (2m+2) \ \dots \ (3m-1) \quad (99)$$

$$Yx: Y_{2m} \ Y_{2m+1} \ Y_{2m+2} \ \dots \ Y_{3m-1} \quad (100)$$

Cuarto grupo:

$$x: 3m \ (3m+1) \ (3m+2) \ \dots \ (4m-1) \quad (101)$$

$$Yx: Y_{3m} \ Y_{3m+1} \ Y_{3m+2} \ \dots \ Y_{4m-1} \quad (102)$$

Calculando los logaritmos decimales para cada una de las observaciones:

$$\log Y(i) = \log K + i \log a + d^i \log b \text{ para toda } i = 0, 1, 2, \dots, (4m-1) \quad (103)$$

<sup>8</sup> Véase: Albin Boreau, "El uso de la ley de Makeham como función demográfica", *Notas de Población*, CI EADE, año II, Vol. 6, diciembre, 1974, pág. 41.

y sumando dichos logaritmos para cada grupo, se obtiene (sean  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  los resultados de dichas sumas):

$$S_0 = m \log K + \frac{m(m-1)}{2} \log a + \frac{d^m - 1}{d-1} \log b \quad (104)$$

$$S_1 = m \log k + m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \log a + d^m \frac{d^m - 1}{d-1} \log b \quad (105)$$

$$S_2 = m \log K + 2m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \log a + d^{2m} \frac{d^m - 1}{d-1} \log b \quad (106)$$

$$S_3 = m \log K + 3m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \log a + d^{3m} \frac{d^m - 1}{d-1} \log b \quad (107)$$

Calculando las primeras y segundas diferencias de las anteriores sumas, se tiene:

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0 \quad (108)$$

$$= m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \quad (109)$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1 \quad (110)$$

$$= m^2 \log a + d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \quad (111)$$

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2 \quad (112)$$

$$= m^2 \log a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \quad (113)$$

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0 \quad (114)$$

$$= -\frac{(d^m - 1)^3}{d-1} \log b \quad (115)$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1 \quad (116)$$

$$= d^m \frac{(d^m - 1)^3}{d-1} \log b \quad (117)$$

Dividiendo (117) entre (115):

$$d = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \quad (118)$$

$$d = \left[ \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \right]^{1/m} \quad (119)$$

De (41):

$$\log b = \frac{d-1}{(d^m-1)^3} \Delta^2 S_0 \quad (120)$$

$$b = \text{antilog} \left[ \frac{d-1}{(d^m-1)^3} \Delta^2 S_0 \right] \quad (121)$$

De (35) y (39):

$$\log a = \frac{1}{m^2} \Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \quad (122)$$

$$a = \text{antilog} \left[ \frac{1}{m^2} \Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \right] \quad (123)$$

Finalmente, el parámetro K se estima a partir de la condición de mínimos cuadrados:

$$Q = \sum_0^{4m-1} (Y_x - K a^x b^{d^x})^2 = 0 \quad (124)$$

Sea  $V_x = a^x b^{d^x}$ , entonces (124) se expresa como:

$$\sum_0^{4m-1} (Y_x - X V_x)^2 = 0 \quad (125)$$

$$= (Y_x^2 - 2K Y_x V_x + K^2 V_x^2) \quad (126)$$

$$= (Y_x^2 - 2Y_x^2 + K^2 V_x^2) \quad (127)$$

$$= (K^2 V_x^2 - Y_x^2) \quad (128)$$

Entonces:

$$\sum_0^{4m-1} K^2 V_x^2 = \sum_0^{4m-1} Y_x^2 \quad (129)$$

$$K^2 = \frac{\sum_0^{4m-1} Y_x^2}{\sum_0^{4m-1} V_x^2} \quad (130)$$

$$= \frac{\sum_0^{4m-1} Y_x K V_x}{\sum_0^{4m-1} V_x^2} \quad (131)$$

$$K = \frac{\sum_0^{4m-1} Y_x V_x}{\sum_0^{4m-1} V_x^2} \quad (132)$$

Ejemplos de la aplicación de la función de Makeham.

Tomando la serie  $l(x)$  de la tabla de mortalidad para los hombres en 1975 a nivel nacional. Se mostrará que la función de Makeham sirve para describir y desagregar la serie indicada. La información empleada aparece en el cuadro 14.

Cabe señalar que para la serie  $q(x)$  sólo para los valores de ella en los grupos de edades 10-14, 15-19, ..., 60-64 y 65-69 se tiene una buena descripción del fenómeno.

Obtenida la serie de valores  $\dot{Y}_x$ , los cuales representan los valores acumulados de la serie  $q(x)$  estimada, se desacumulan dichos valores obteniendo los valores estimados de la serie  $q(x)$  (ver Cuadro 15).

Para la serie  $l(x)$  se tiene que la función de Makeham describe el comportamiento de ella desde la edad cero hasta la edad 70.

A continuación se resumen los pasos que se siguieron para obtener la distribución de la serie  $l(x)$  (hombres, nivel nacional, 1975), vía la función de Makeham.

Cuadro 14  
México: Valores  $q(x)$  y  $l(x)$ . Hombres 1975.

Edad	$q(x)$	$l(x)$
0	0.05178	100 000
1 - 4	0.01672	94 822
5 - 9	0.00593	93 236
10 - 14	0.00489	92 683
15 - 19	0.00950	92 230
20 - 24	0.01464	91 354
25 - 29	0.01784	90 016
30 - 34	0.01946	88 410
35 - 39	0.02961	86 690
40 - 44	0.03358	84 123
45 - 49	0.04487	81 299
50 - 54	0.05943	77 651
55 - 59	0.07766	73 036
60 - 64	0.11432	67 364
65 - 69	0.14986	59 663
70 - 74	0.21898	50 722
75 - 79	0.31455	39 615
80 y +	1.00000	27 154

Fuente: S.S.A. Subsecretaría de Planeación, "Tablas abreviadas por estados y para ocho regiones de México, 1975".

Cuadro 15  
México: Distribución de la función  $q(x)$  usando la función  
de Makeham. Hombres, 1975.

Grupos de edad	$q(x)$ observadas	$q(x)$ estimadas
10 - 14	.00489	.00477
15 - 19	.00950	.01005
20 - 24	.01464	.01439
25 - 29	.01784	.01754
30 - 34	.01946	.02128
35 - 39	.02961	.02672
40 - 44	.03358	.03461
45 - 49	.04487	.04563
50 - 54	.05943	.06074
55 - 59	.07766	.08121
60 - 64	.11432	.10882
65 - 69	.14986	.14595

Cuadro 16

x	Yx	log Yx	Sx	Δ Sx	Δ² Sx
0	66.769	1.82457			
1	117.491	2.07000			
2	177.154	2.24835	8.53124		
3	244.518	2.38831		1.99414	
4	317.554	2.50182			
5	395.205	2.59682	10.52538		-0.96243
6	476.504	2.67807		1.03171	
7	560.627	2.74867			
8	647.317	2.81112			
9	735.727	2.86672	11.55709		-0.35277
10	825.743	2.91684			
11	917.097	2.96242		0.67894	
12	1009.327	3.00403			
13	1102.010	3.04219	12.23603		
14	1195.246	3.07746			
15	1295.246	3.11235			

$$d^m = \frac{S}{S}, \log b = \frac{d-1}{(d^m-1)} \Delta^2 S_0 \text{ y } m^2 \log a = \Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^{m-1}} \quad (133)$$

$$\therefore d^4 = \frac{-0.35277}{-0.96243} = 0.36654 \longrightarrow d = 0.77809 \quad (134)$$

$$\log b = \frac{-0.77809-1}{(0.36654-1)} (-0.96243) = -0.84021 \longrightarrow b = 0.14447 \quad (135)$$

$$\log a = \frac{1}{16} 1.99414 - \frac{(-0.96243)}{(0.36654-1)} = 0.02968 \longrightarrow a = 1.07072 \quad (136)$$

Teniendo la serie de valores  $\hat{Y}(x)$ , que en este caso representan los valores acumulados  $\hat{\ell}(x)$ , del final de la tabla al inicio de ella, se desacumulan obteniendo los valores estimados, vía la función de Makeham, de la serie  $\ell(x)$  (ver Cuadro 19).

Finalmente, con la función de Makeham obtenida  $[Y(x) = (487.38580) (1.07072)^x (0.14447)^{(0.77809)^x}]$  se evaluó para  $x = 0.0, 0.2, 0.4, \dots, 14.6, 14.8, 15.0$ , obteniendo con ello la desagregación de la función  $\ell(x)$ . En el cuadro 20 se resumen los pasos seguidos para

Cuadro 17

x	$a^x$	$d^x$	$b^{d^x}$	$V_x$	$Y_x$	$Y_x V_x$	$\hat{Y}_x$
0	1.00000	1.00000	1.14447	0.14447	66.769	9.64612	70.41263
1	1.07072	0.77809	0.22194	0.23764	117.491	27.92056	115.82236
2	1.14644	0.60542	0.30996	0.35535	177.154	62.95167	173.19254
3	1.22752	0.47107	0.40197	0.49343	244.518	120.65252	240.49078
4	1.31433	0.36654	0.49207	0.64207	317.554	205.37487	315.21189
5	1.40728	0.28520	0.57593	0.81049	395.205	320.30970	395.02132
6	1.50680	0.22191	0.65095	0.98085	476.504	467.37895	478.05236
7	1.61336	0.17267	0.71601	1.15518	560.627	647.62510	563.01833
8	1.72746	0.13435	0.77111	1.33206	647.317	862.26508	649.22713
9	1.84962	0.10454	0.81689	1.51094	735.727	1111.63935	736.41070
10	1.98043	0.08134	0.85439	1.69206	825.743	1397.20670	824.68602
11	2.12048	0.06329	0.88475	1.87609	917.097	1720.55651	914.37963
12	2.27044	0.04924	0.90913	2.06413	1009.327	2083.38214	1006.02765
13	2.43101	0.03832	0.92854	2.25729	1102.010	2487.55615	1100.17109
14	2.60293	0.02981	0.94396	2.45706	1195.246	2936.79114	1197.53615
15	2.78701	0.02320	0.95611	2.66469	1295.246	3451.42906	1298.73207

1 7912.68562

$$\Sigma V_x^2 = 36.75258$$

$$K = \frac{\Sigma Y_x V_x}{\Sigma V_x^2} = 487.38580 \quad Y(x) = (487.38580) (1.07072)^x (0.14447) (0.77809)^x$$

Cuadro 18

x	$Y_x$	$\hat{Y}_x$	$\hat{\hat{Y}}_x$
0	66.769	70.41263	45.40973
1	117.491	115.82236	57.37018
2	177.154	173.19254	67.29824
3	244.518	240.49078	74.72111
4	317.554	315.21189	79.80943
5	395.205	395.02132	83.03104
6	476.504	478.05236	84.96597
7	560.627	563.01833	86.20880
8	647.317	649.22713	87.18357
9	735.727	736.41070	88.27532
10	825.743	824.68602	89.69361
11	917.097	914.37963	91.64802
12	1009.327	1006.02765	94.14344
13	1102.010	1100.17109	97.14344
14	1195.246	1197.53615	101.19592
15	1295.246	1298.73207	

Cuadro 19  
 México: Distribución de la función  $l(x)$  usando la función  
 de Makeham. Hombres, 1975.

Edad	$l(x)$ observadas	$l(x)$ estimadas
0	100.000	101.19592
5	93.236	97.36506
10	92.683	94.14344
15	92.230	91.64802
20	91.354	89.69361
25	90.016	88.27532
30	88.410	87.18357
35	86.690	86.20880
40	84.123	84.96597
45	81.299	83.03104
50	77.651	79.80943
55	73.036	74.72111
60	67.364	67.28824
65	59.663	57.37018
70	50.722	45.40973

obtener los valores  $R_x$ , los cuales representan los valores  $l(x)$  con un radix de  $R(15) = 20.57743$ . Con la serie  $R_x$  y tomando  $l(x) = 100\ 000$  se obtuvo la desagregación de la función  $l(x)$  que se muestra numéricamente, en el cuadro 21 y gráficamente en la gráfica 4.

### 2.6 El sistema logito de W. Brass.<sup>9</sup>

El sistema logito se basa en la siguiente relación:

$$\text{logit}(1 - l_x) = \alpha + \beta \text{logit}(1 - l_x^s) \quad (137)$$

donde  $l_x^s$  son los sobrevivientes a edad  $x$  de una tabla estándar de vida ( $l_0 = 1$  y  $l_0^s = 1$ ).

Se define el logito como:

$$\text{logit}(1 - l_x) = \frac{1}{2} \log_e \frac{1 - l_x}{l_x} \quad (138)$$

<sup>9</sup> Ver: Brass, W.: "Sobre la escala de la mortalidad". CELADE, Serie DS No. 7, 1971. Traducción del artículo "On the scale of Mortality", incluido en *Biological Aspects of Demography*. Taylor and Francis Ltd., London, 1970.

Cuadro 20  
 México: obtención de los valores  $R_x$  vía la función de Makeham.

x	$a^x$	$b^{d^x}$	$KV_x$	$V_x = a^x b^{d^x}$	$R_x$
.0			70.41263		
.2	1.01376	0.15882	78.47399	.16101	8.06136
.4	1.02771	0.17379	87.05198	.17379	8.57799
.6	1.04185	0.18933	96.13685	.19725	9.08487
.8	1.05619	0.20539	105.72860	.21693	9.59175
1.0			115.82236		10.09776
1.2	1.08545	0.23891	126.38889	.25932	10.56653
1.4	1.10039	0.25625	137.42817	.28197	11.03928
1.6	1.11553	0.27391	148.92073	.30555	11.49256
1.8	1.13088	0.29183	160.84706	.33002	11.92633
2.0			173.19254		12.34458
2.2	1.16222	0.32825	185.93768	.38150	12.74514
2.4	1.17821	0.34665	199.06298	.40843	13.12530
2.6	1.19442	0.36509	212.53433	.43607	13.47135
2.8	1.21086	0.38355	226.35659	.46443	13.82226
3.0			240.49078		14.13419
3.2	1.24441	0.42032	254.92227	.52304	14.43149
3.4	1.26153	0.43852	269.62670	.55321	14.70443
3.6	1.27889	0.45658	284.59432	.58392	14.93762
3.8	1.29649	0.47444	299.79588	.61511	15.20156
4.0			315.21189		15.41601
4.2	1.33241	0.50945	330.83748	.67880	15.62559
4.4	1.35075	0.52655	346.64828	.71124	15.81080
4.6	1.36933	0.54334	362.61991	.74401	15.97163
4.8	1.38818	0.55980	378.74751	.77710	16.12760
5.0			395.02132		16.27381
5.2	1.42664	0.59169	411.41698	.84413	16.39566
5.4	1.44627	0.60709	427.93448	.87802	16.51750
5.6	1.46617	0.62210	444.54459	.91210	16.61011
5.8	1.48635	0.63672	461.25705	.94639	16.71246
6.0			478.05236		16.79531
6.2	1.52753	0.66477	494.92078	1.01546	16.86842
6.4	1.54855	0.67819	511.85744	1.05021	16.93666
6.6	1.56986	0.69120	528.85746	1.08509	17.00002
6.8	1.59146	0.70381	545.91596	1.12009	17.05850
7.0			563.01833		17.10237
7.2	1.63556	0.72782	580.17918	1.19039	17.16085
7.4	1.65807	0.73922	597.37903	1.22568	17.19985
7.6	1.68088	0.75024	614.62274	1.26106	17.24371
7.8	1.70401	0.76086	631.90056	1.29651	17.27782
8.0			649.22713		17.32657
8.2	1.75123	0.78098	666.58781	1.36768	17.36068
8.4	1.77532	0.79049	683.98261	1.40337	17.39480
8.6	1.79975	0.79964	701.42127	1.43915	17.43866
8.8	1.82452	0.80844	718.89893	1.47501	17.47766
9.0			736.41070		17.51177
9.2	1.87507	0.82502	753.97121	1.54697	17.56051
9.4	1.90088	0.83282	771.57559	1.58309	17.60438
9.6	1.92703	0.84031	789.22383	1.61930	17.64824
9.8	1.95355	0.84750	806.93055	1.65563	17.70672
10.0			824.68602		17.75547
10.2	2.00768	0.86100	842.49997	1.72861	17.81395
10.4	2.03531	0.86733	860.37728	1.76529	17.87731
10.6	2.06331	0.87339	878.30333	1.80207	17.92605
10.8	2.09170	0.87920	896.31223	1.83902	18.00890
11.0			914.37963		18.06740
11.2	2.14966	0.89007	932.53962	1.91335	18.15999
11.4	2.17924	0.89516	950.77760	1.95077	18.23798
11.6	2.20923	0.90003	969.10330	1.98837	18.32570
11.8	2.23963	0.90468	987.51674	2.02615	18.41344
12.0			1006.02765		18.51091
12.2	2.30169	0.91337	1024.62629	2.10229	18.59864
12.4	2.33336	0.91743	1043.34191	2.14069	18.71562
12.6	2.36547	0.92131	1062.17450	2.17933	18.83259
12.8	2.39801	0.92501	1081.10943	2.21818	18.93493
13.0			1100.17109		19.06166
13.2	2.46446	0.93193	1119.37897	2.29670	19.20788
13.4	2.42837	0.93515	1138.70381	2.33635	19.32484
13.6	2.53275	0.93822	1158.16513	2.37628	19.46132
13.8	2.56760	0.94115	1177.76779	2.41650	19.60266
14.0			1197.53615		19.76836
14.2	2.63875	0.94662	1217.43612	2.49789	19.89997
14.4	2.67506	0.94917	1237.54078	2.53914	20.10466
14.6	2.71187	0.95159	1257.74292	2.58059	20.20214
14.8	2.74918	0.95391	1278.15464	2.62247	20.41172
15.0			1298.73207		20.57743

Cuadro 21  
 México: Desagregación de la función  $l(x)$  vía la función  
 de Makeham, hombres, 1975.

Edad x	$l(x)$	Edad x	$l(x)$	Edad x	$l(x)$
0	100.000	25	86.286	50	79.086
1	99.195	26	85.049	51	78.375
2	98.176	27	85.765	52	77.617
3	97.702	28	85.552	53	76.836
4	96.708	29	85.339	54	75.936
5	96.068	30	85.102	55	74.917
6	95.263	31	84.936	56	73.875
7	94.576	32	84.747	57	72.595
8	93.913	33	84.533	58	71.459
9	93.344	34	84.368	59	70.133
10	92.634	35	84.202	60	68.688
11	92.018	36	83.965	61	67.172
12	91.521	37	83.799	62	65.467
13	90.952	38	83.586	63	62.785
14	90.384	39	83.396	64	61.937
15	89.957	40	83.112	65	59.995
16	89.484	41	82.899	66	57.958
17	89.057	42	82.615	67	55.850
18	88.631	43	82.307	68	53.648
19	88.252	44	81.975	69	51.350
20	87.802	45	81.620	70	49.072
21	87.518	46	81.217	71	46.613
22	87.115	47	80.720	72	44.150
23	86.878	48	80.270	73	41.686
24	86.570	49	79.678	74	39.176

La relación (137) señala que existe una relación lineal entre la serie de los logitos observados [ $logit(1 - lx)$ ] y la serie de los logitos del estándar [ $logit(1 - l_x^s)$ ].

La relación (138) surge a partir de la siguiente función:

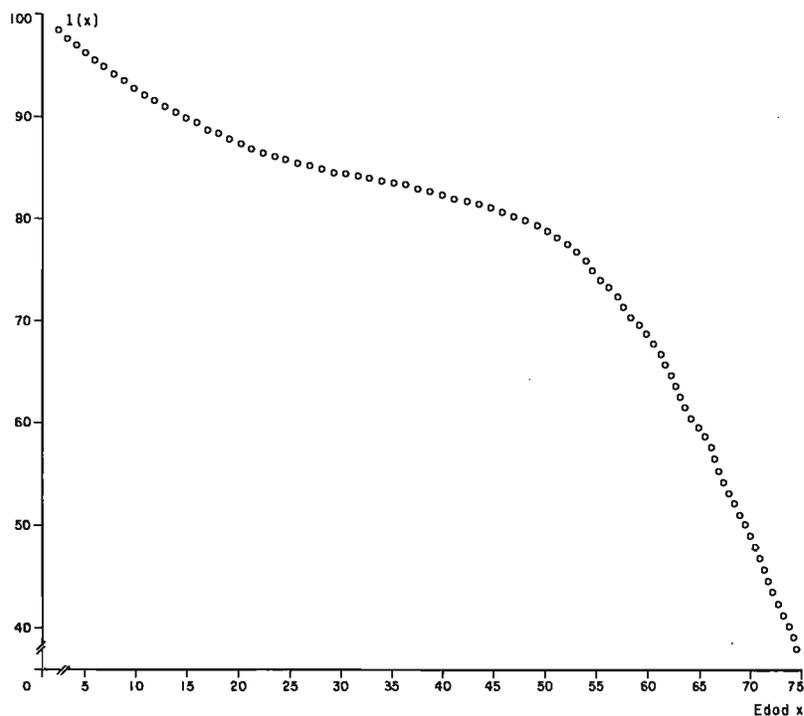
$$f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x - \alpha}{\beta} \tag{139}$$

que corresponde a una curva simétrica cuya medida es  $\alpha$  y cuyo desvío estándar es igual a  $\beta$ . Esta curva es una curva de respuesta usada en ensayos biológicos y sirve para estimar cómo los animales reaccionan a una cierta droga: por analogía se piensa en una población humana y la forma en que muere a medida que aumenta la dosis de tiempo.

Sea  $Y_s(x)$  el  $logit(1 - lx^s)$  y  $Y(x)$  el logito obtenido directamente con los valores observados:  $logit(1 - lx)$ . Se tiene una tabla estándar

Gráfica 4

México: Distribución de la función  $l(x)$ , desagregada a través de la función de Makeham, hombres, 1975.



dar de mortalidad, con la cual se calculan los valores de la serie  $Y_s(x)$  y una tabla empírica con la cual se calculan los valores de la serie  $Y(x)$ .

Después se grafican los valores  $Y_s(x)$  contra los  $Y(x)$  observándose la relación lineal que guardan. En el caso de tablas con valores de  $l(x)$  para  $x = 0, 1, 5, 10, 15, \dots, 70, 75$  y  $80$ , que generan 18 puntos de la forma  $[Y_s(x), Y(x)]$ , se llevan a cabo los siguientes pasos para obtener la recta de ajuste:

1) Se dividen los 18 puntos en dos grupos, de 9 observaciones cada uno, el primero para  $x = 0, 1, 5, \dots, 30$  y  $35$  y el segundo para  $x = 40, 45, \dots, 75$  y  $80$ .

Nota: De hecho el primer grupo consta sólo de 8 puntos ya que  $l(0) = 1$  y el logito para  $x = 0$  no está definido.

2) Se calculan los puntos medios:

$$P_1 = \bar{Y}_1^s(x), \bar{Y}_1(x) \quad y \quad P_2 = \bar{Y}_2^s(x), \bar{Y}_2(x) \quad (140)$$

donde:

$$\bar{Y}(x) = \frac{\sum_{x=1}^{35} Y(x)}{8} \quad \bar{Y}_1^s(x) = \frac{\sum_{x=1}^{35} Y^s(x)}{8} \quad (141)$$

y

$$\bar{Y}_2(x) = \frac{\sum_{x=40}^{80} Y(x)}{9} \quad \bar{Y}_2^s(x) = \frac{\sum_{x=40}^{80} Y^s(x)}{9} \quad (142)$$

3) Se obtiene la recta de ajuste que pasa por los puntos  $P_1$  y  $P_2$ :

$$Y(x) - \bar{Y}_1(x) = \frac{\bar{Y}_2(x) - \bar{Y}_1(x)}{\bar{Y}_2^s(x) - \bar{Y}_1^s(x)} Y_s(x) - \bar{Y}_1^s(x) \quad (143)$$

donde:

$$\beta = \frac{\bar{Y}_2(x) - \bar{Y}_1(x)}{\bar{Y}_2^s(x) - \bar{Y}_1^s(x)} \quad (144)$$

Sustituyendo (144) en (143)

$$Y(x) - \bar{Y}_1(x) = \beta Y_s(x) - \bar{Y}_1^s(x) \quad (145)$$

$$Y(x) = \beta Y_s(x) + \bar{Y}_1(x) - \beta \bar{Y}_1^s(x) \quad (146)$$

donde:

$$\alpha = \bar{Y}_1(x) - \beta \bar{Y}_1^s(x) \quad (147)$$

Por lo tanto:

$$Y(x) = \alpha + \beta Y_s(x) \quad (148)$$

4) Obtenida la recta de ajuste (148), se calculan los valores de los logitos ajustados [ $\hat{Y}(x)$ ], sustituyendo en la relación (148) los valores de los logitos estándar.

5) Se estima la serie ajustada de valores  $\hat{l}(x)$ , aplicando los antilogitos (153).

Sabemos:

$$Y(x) = \frac{1}{2} \log_e \frac{1 - \hat{l}(x)}{\hat{l}(x)} \quad (149)$$

entonces:

$$2\hat{Y}(x) = \log_e \frac{1 - \hat{l}(x)}{\hat{l}(x)} \quad (150)$$

$$\exp 2\hat{Y}(x) = \frac{1 - \hat{l}(x)}{\hat{l}(x)} \quad (151)$$

$$\hat{l}(x) \cdot \exp [2\hat{Y}(x)] + \hat{l}(x) = 1 \quad (152)$$

$$\hat{l}(x) = \frac{1}{1 + \exp [2\hat{Y}(x)]} \quad (153)$$

6) Finalmente se calculan los cocientes de mortalidad:

$$q(x) = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)} \quad (154)$$

Ejemplo de la aplicación del sistema logito: obtención de la tabla de mortalidad corregida para la República Mexicana, hombres, 1975.

Se obtuvieron los valores de los logitos observados y los del estándar [ $Y(x)$  y  $\hat{Y}(x)$ ], ver cuadro 23.

Se calculan los puntos medios  $P_1$  y  $P_2$  (empleando las relaciones (140) y (141):

$$P_1 = (-1.17545, -1.18790) \text{ y } P_2 = (-0.30503, -0.28419) \quad (155)$$

siendo la recta que pasa por  $P_1$  y  $P_2$  (empleando las relaciones (144) y (147):

Cuadro 22

México: Valores  $l_x$  y  $l_x^s$ , nivel nacional, hombres, 1975.

Edad	$l_x$ a/	$l_x^s$ b/
0	1.00000	1.00000
1	0.94822	0.94496
5	0.93236	0.92939
10	0.92683	0.92305
15	0.92230	0.91818
20	0.91354	0.90997
25	0.90016	0.89849
30	0.88410	0.88671
35	0.86690	0.87357
40	0.84123	0.85742
45	0.81299	0.83576
50	0.77651	0.80507
55	0.73036	0.76109
60	0.67364	0.69856
65	0.59663	0.61258
70	0.50722	0.50076
75	0.39615	0.36521
80	0.27154	0.22162

Fuentes: a/ SSA, Subsecretaría de planeación, dirección general de bioestadística, serie bioestadística, No. 2, "Tablas abreviadas de mortalidad por estados y para ocho regiones de México", 1980.

b/ Valores obtenidos de las tablas modelo de Coale y Demeny, región Oeste; a dichas tablas se entró con la esperanza de vida al nacimiento observada para los hombres en 1975 (nivel nacional). Interpolando dicho valor se obtuvo la tabla estándar.

Cuadro 23

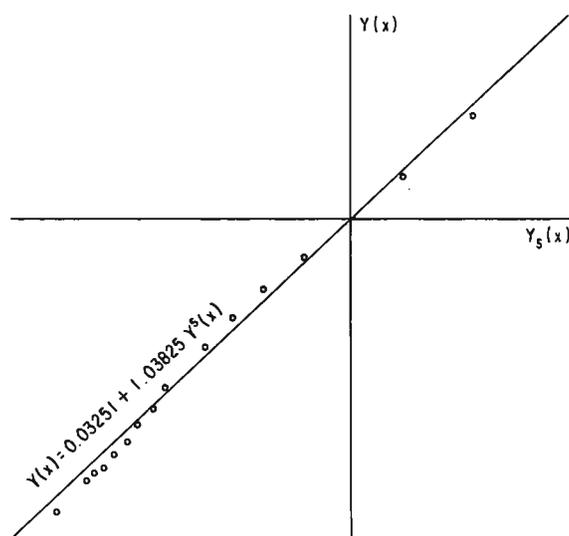
México: Valores de los logitos  $Y(x)$  y  $Y_s(x)$ , nivel nacional, hombres, 1975.

Edad	$Y(x)$	$Y_s(x)$
1	-1.45379	-1.42154
5	-1.31176	-1.28868
10	-1.26949	-1.24226
15	-1.23701	-1.20894
20	-1.17882	-1.15663
25	-1.09950	-1.09028
30	-1.01592	-1.02878
35	-0.93691	-0.96645
40	-0.83370	-0.89701
45	-0.73478	-0.81351
50	-0.62272	-0.70914
55	-0.49822	-0.57933
60	-0.36235	-0.42023
65	-0.19572	-0.22909
70	-0.01444	-0.00152
75	0.21077	0.27641
80	0.49341	0.62813

$$\hat{Y}(x) = (0.03251) + (1.03825) Y^s(x) \quad (156)$$

En la gráfica 5 se observa la distribución lineal de los puntos...  $[Y^s(x), Y(x)]$  así como la recta de ajuste para el caso estudiado.

Gráfica 5  
México: logitos  $Y(x)$  y  $Y^s(x)$  para el nivel nacional, hombres, 1975



Obtenida la recta  $Y(x) = 0.3251 + 1.03825 Y^s(x)$ ... (c) se calculan los valores de los logitos ajustados  $[\hat{Y}(x)]$ , sustituyendo en la relación (c) los valores de los logitos estándar; después se obtienen los valores  $\hat{l}_x$  aplicando los antilogitos (ver Cuadro 24).

Obtenidos los valores  $\hat{l}_x$  se pasó a calcular la tabla de mortalidad corregida para la República Mexicana, hombres, 1975. En el cuadro 25 se dan los valores de las series  $q(x)$ , observadas y estimadas.

### 3. Presentación de los ajustes obtenidos

#### 3.1. Nupcialidad

Se aplicó el modelo estándar de nupcialidad de A. J. Coale y el modelo bilogístico de A. Bocaz a datos de las encuestas PECFAL-

Cuadro 24  
México: Valores  $\hat{\ell}_x$  para el nivel nacional, hombres, 1973.

Edad	$\hat{Y}(x)$	$\hat{\ell}_x$
0	---	1.00000
1	-1.44340	0.94718
5	-1.30546	0.93156
10	-1.25727	0.92515
15	-1.22267	0.92022
20	-1.16836	0.91187
25	-1.09947	0.90015
30	-1.03562	0.88808
35	-0.97091	0.87455
40	-0.89881	0.85786
45	-0.81212	0.83538
50	-0.70375	0.80337
55	-0.56898	0.75730
60	-0.40379	0.69159
65	-0.20534	0.60123
70	0.03093	0.48454
75	0.31949	0.34548
80	0.68467	0.20273

RURAL (Encuesta Comparativa de Fecundidad en América Latina, zonas rurales 1970) y EMF (Encuesta Mexicana de Fecundidad, 1976); tomando a la población femenina por edad a la primera unión para las cohortes 15-19 años, 20-24 años, ..., 40-44 años y 45-49 años.

Con el fin de observar los tipos de ajuste que se obtienen al aplicar las dos técnicas antes mencionadas se tomó la cohorte 35-39 años de edad, tanto de la PECFAL-RURAL como de la EMF; los resultados de la aplicación se observan en los cuadros 26 y 27 y los ajustes obtenidos se muestran en las gráficas 6 y 7.

Se observa que el modelo de Albino Bocaz no considera ningún estándar como referencia para ajustar la estructura por edad de las primeras uniones, el modelo de Coale sí lo considera siendo el estándar de Coale universal; a simple vista (ver gráficas 6 y 7) el modelo de Bocaz nos da un mejor ajuste que el de Coale, esto bajo el supuesto de que la información observada estuviese bien detectada, lo cual no es cierto; por esto último el modelo que realmente corrige la información estrictamente hablando, es el modelo de A.J. Coale.

Cuadro 25

México: Valores  $q(x)$ , observados y ajustados, para el nivel nacional, hombres, 1975.

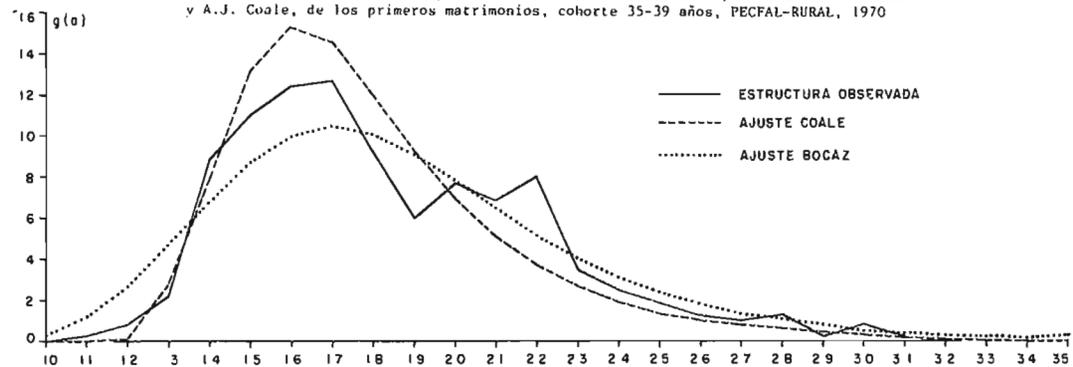
Edad	$q(x)$	$\hat{q}(x)$
0	0.05178	0.05281
1	0.01672	0.01649
5	0.00593	0.00688
10	0.00489	0.00533
15	0.00950	0.00908
20	0.01464	0.01283
25	0.01784	0.01342
30	0.01946	0.01523
35	0.02961	0.01909
40	0.03358	0.02621
45	0.04487	0.03831
50	0.05943	0.05735
55	0.07766	0.08677
60	0.11432	0.13064
65	0.14986	0.19411
70	0.21898	0.28701
75	0.31455	0.41319
80	1.00000	1.00000

En resumen, el modelo de Albino Bocaz está basado en la información observada y vía una transformación lineal suaviza dichas observaciones, en cambio el modelo de Coale si bien es cierto que también se basa en las observaciones dadas, involucra un estándar de nupcialidad universal el cual realmente corrige la distribución por edad de la nupcialidad.

Viendo por separado cada uno de los ajustes, es decir, por una parte los ajustes obtenidos para la cohorte 35-39 vía el modelo de Bocaz, tanto para la PECFAL-RURAL como para la EMF, y por otro lado los ajustes obtenidos al aplicar el modelo de Coale a esa misma cohorte y para las mismas encuestas, observamos coherencia en los resultados, lo cual se puede ver en las gráficas 8 (la cual muestra los ajustes vía el modelo de Bocaz) y 9 (la cual muestra los ajustes de Coale). Dichas gráficas nos explican el peligro que puede haber al pensar que el modelo de Bocaz corrige, estrictamente hablando, la estructura por edad de los primeros matrimonios que como ya se vio es falso.

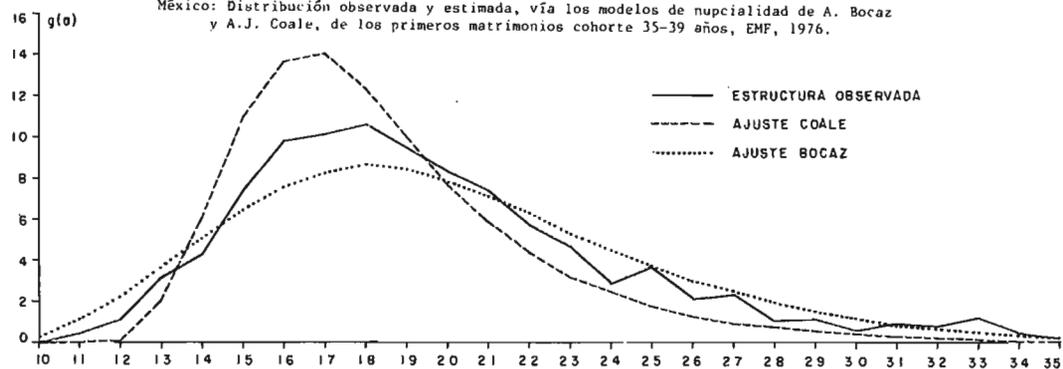
Gráfica 6

México: Distribución observada y estimada, vía los modelos de nupcialidad de A. Bocaz y A.J. Coale, de los primeros matrimonios, cohorte 35-39 años, PECFAL-RURAL, 1970

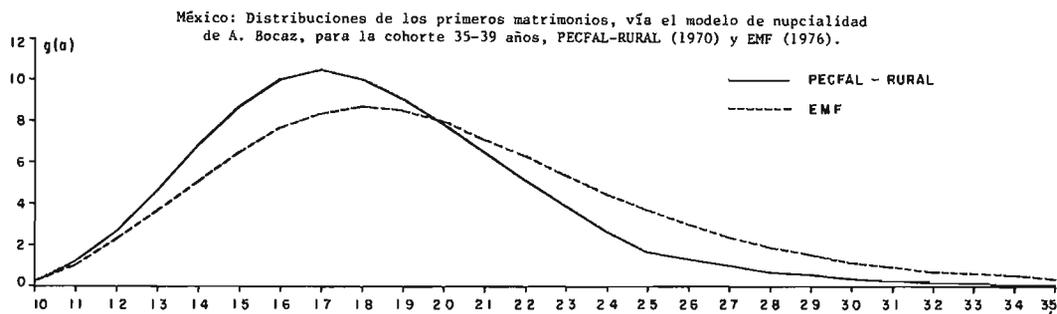


Gráfica 7

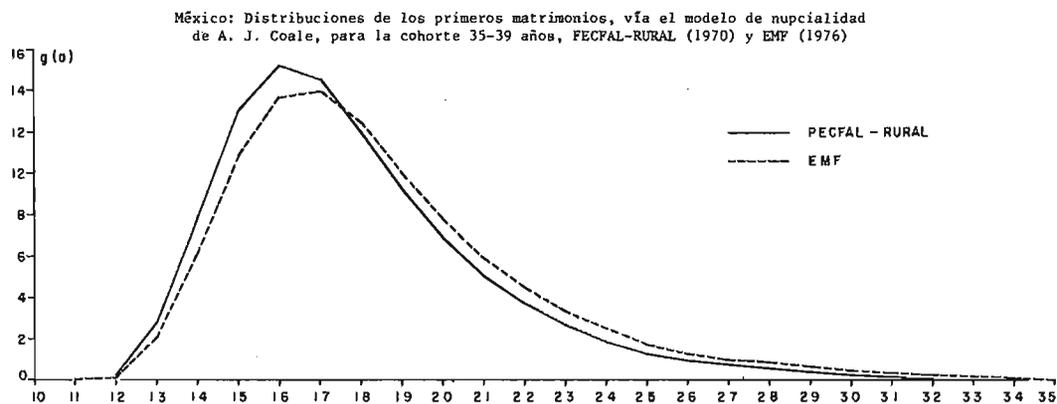
México: Distribución observada y estimada, vía los modelos de nupcialidad de A. Bocaz y A.J. Coale, de los primeros matrimonios cohorte 35-39 años, EMF, 1976.



Gráfica 8



Gráfica 9



Cabe señalar que para las demás cohortes también se tienen las mismas observaciones que las tenidas para el cohorte 35-39 años.

Cuadro 26

México: Estimación de los primeros matrimonios  $g(a)$ , a través de los modelos de nupcialidad de A. Bocaz y A. J. Coale, cohorte 35-39 años, PECFAL-RURAL, 1970.

$a$	$g^0(a)$	$g(a)$ Bocaz	$g(a)$ Coale
10	0.00	0.25	0
11	0.28	1.23	0
12	0.83	2.77	0.18
13	2.21	4.73	2.69
14	8.84	6.84	7.86
15	11.05	8.72	13.15
16	12.43	9.98	15.33
17	12.71	10.42	14.58
18	9.39	10.06	12.01
19	6.08	9.09	9.23
20	7.73	7.81	6.92
21	6.91	6.45	5.08
22	8.01	5.17	3.72
23	3.59	4.07	2.68
24	2.49	3.15	1.87
25	1.93	2.41	1.31
26	1.38	1.83	1.00
27	1.10	1.38	0.79
28	1.38	1.04	0.58
29	0.27	0.77	0.41
30	0.83	0.57	0.26
31	0.27	0.41	0.20
32	0.00	0.30	0.12
33	0.00	0.21	0.00
34	0.00	0.14	0.00
35	0.28	0.09	0.00
36	0.00	0.06	0.00
37	0.00	0.03	0.00
38	0.00	0.01	0.00
39	0.00	0.00	0.00

### 3.2. Fecundidad

Con información del censo nacional de población de 1970 y las estadísticas vitales, se calcularon las tasas específicas de fecundidad para 8 regiones de la República Mexicana (ver cuadro 28).

A cada una de las estructuras de fecundidad se les aplicó el modelo de nupcialidad de Coale y Trussell y se obtuvieron las funciones de fecundidad de Brass. Tomando los ajustes obtenidos para la región 3, se tiene que la desagregación de las tasas específicas de fecundidad, de grupos quinquenales a edades individuales, se logró a través de los dos métodos (ver cuadro 29).

En la gráfica 10 se muestran las distribuciones de la estructura por edad de la fecundidad vía la función de fecundidad de Brass y el

Cuadro 27

México: Estimación de los primeros matrimonios ( $g(a)$ ), a través de los modelos de nupcialidad de A. Bocaz y A. J. Coale, cohorte 35-39 años, EMP, 1976

$g$	$g^0(a)$	$g(a)$ Bocaz	$g(a)$ Coale
10	0.00	0.30	0.00
11	0.46	1.19	0.00
12	1.14	2.36	0.01
13	3.19	3.72	2.04
14	4.33	5.17	6.13
15	7.41	6.53	10.93
16	9.80	7.63	13.75
17	10.14	8.36	14.01
18	10.60	8.63	12.41
19	9.46	8.45	9.99
20	8.32	7.93	7.77
21	7.41	7.15	5.94
22	5.70	6.26	4.44
23	4.68	5.34	3.34
24	2.85	4.46	2.47
25	3.65	3.67	1.78
26	2.05	2.97	1.27
27	2.28	2.38	0.97
28	1.03	1.89	0.79
29	1.14	1.48	0.62
30	0.57	1.15	0.44
31	0.91	0.88	0.29
32	0.57	0.67	0.22
33	1.14	0.49	0.15
34	0.46	0.36	0.06
35	0.23	0.25	0.00
36	0.34	0.16	0.00
37	0.11	0.10	0.00
38	0.00	0.05	0.00
39	0.00	0.01	0.00

modelo de fecundidad de Coale y Trussell; si bien es cierto que las dos distribuciones son muy semejantes existen diferencias en la obtención de cada una de ellas, las cuales son: la función de fecundidad de Brass considera sólo la estructura de fecundidad observada, con lo que la desagregación está basada en un ajuste que suaviza el comportamiento de las tasas específicas de fecundidad observadas, sin que necesariamente sea corregida dicha estructura, en cambio con el modelo de fecundidad de Coale y Trussell sí se está corrigiendo dicha estructura, que si bien se basa en la estructura observada, para estimar los parámetros  $a_0$ ,  $K$  y  $m$  (ver presentación del modelo), con ellos se entra a las tablas estándar de fecundidad, las cuales desagregan y corrigen las tasas quinquenales de fecundidad.

Cuadro 28

México: Tasas específicas de fecundidad observadas para ocho regiones\*/ 1970

Grupos de edad	Tasas específicas de Fecundidad							
	Región 1	Región 2	Región 3	Región 4	Región 5	Región 6	Región 7	Región 8
10 - 14	.006852	.005635	.005980	.006931	.005173	.006669	.003363	.007427
15 - 19	.099830	.101023	.075881	.108421	.086394	.111917	.062422	.116659
20 - 24	.309937	.292224	.225701	.339261	.298868	.327244	.236672	.305102
25 - 29	.261224	.339958	.252655	.396228	.355658	.346320	.277851	.306662
30 - 34	.288444	.279880	.225343	.332968	.313209	.293992	.232856	.250673
35 - 39	.207526	.200000	.162822	.257775	.243309	.220081	.166772	.186627
40 - 49	.080235	.079988	.087711	.090303	.084618	.084618	.066380	.073523

\*/ Región 1: Baja California Norte, Baja California Sur, Nayarit, Sinaloa y Sonora.

Región 2: Coahuila, Chihuahua, Durango y Nuevo León.

Región 3: Tamaulipas y Veracruz.

Región 4: Aguascalientes, San Luis Potosí y Zacatecas.

Región 5: Guanajuato, Jalisco y Michoacán.

Región 6: Hidalgo, Morelos, Puebla, Querétaro y Tlaxcala.

Región 7: Distrito Federal y México.

Región 8: Guerrero, Oaxaca, Chiapas, Tabasco, Yucatán y Quintana Roo.

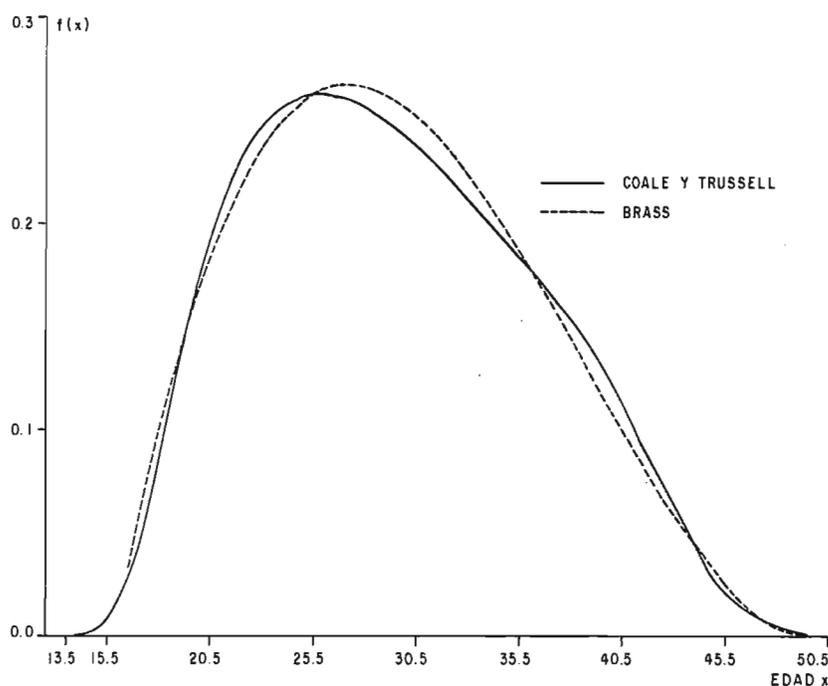
Cuadro 29

Estimación de la estructura por edad de la fecundidad  $f(x)$ , a través de la función de fecundidad de Brass y el modelo de fecundidad de Coale y Trussell, región 3 (Tamaulipas y Veracruz), 1970

Brass		Coale y Trussell		
$x$	$f(x)$	$x$	$f^*(x)$	$f(x)$
		13	.00000227	.00001
		14	.00022777	.00117
		15	.00158495	.00815
16.5	0.03371	16	.00544480	.02800
17.5	0.07966	17	.01240358	.06378
18.5	0.11985	18	.02161955	.11116
19.5	0.15456	19	.03052353	.15695
20.5	0.18496	20	.03786726	.19471
21.5	0.20863	21	.04331302	.22271
22.5	0.22854	22	.04703997	.24187
23.5	0.24405	23	.04941704	.25410
24.5	0.25545	24	.05068685	.26062
25.5	0.26301	25	.05123540	.26344
26.5	0.26700	26	.05114200	.26296
27.5	0.26768	27	.05039794	.25914
28.5	0.26535	28	.04939168	.25396
29.5	0.26025	29	.04806066	.24712
30.5	0.25268	30	.04636967	.23843
31.5	0.24290	31	.04441470	.22837
32.5	0.23119	32	.04245365	.21829
33.5	0.21781	33	.04040565	.20776
34.5	0.20305	34	.03820756	.19646
35.5	0.18717	35	.03595740	.18489
36.5	0.17044	36	.03357045	.17261
37.5	0.15315	37	.03115897	.16021
38.5	0.13555	38	.02863732	.14725
39.5	0.11793	39	.02574224	.13236
40.5	0.10056	40	.02223229	.11432
41.5	0.08371	41	.01823957	.09379
42.5	0.06765	42	.01440410	.07406
43.5	0.05265	43	.01063757	.05470
44.5	0.03900	44	.00718914	.03697
45.5	0.02695	45	.00446201	.02294
46.5	0.01670	46	.00279624	.01438
47.5	0.00878	47	.00166239	.00855
48.5	0.00321	48	.00086546	.00445
49.5	0.00034	49	.00023531	.00121

Gráfica 10

Distribución de la estructura por edad de la fecundidad,  
 vía la función de fecundidad de Brass y el modelo de  
 fecundidad de Coale y Trussell, región 3, 1970



En resumen, la función de fecundidad de Brass desagrega y suaviza la estructura de fecundidad observada, y el modelo de Coale y Trussell desagrega y corrige dicha estructura. Cabe señalar que para estos dos modelos los ajustes obtenidos, a partir de cada uno de ellos, no difieren tanto como los obtenidos en el caso de los modelos de nupcialidad de Coale y Bocaz.

#### 3.4. Mortalidad

Tomando de la tabla abreviada de mortalidad, para los hombres, a nivel nacional 1975,<sup>10</sup> las series  $q(x)$  y  $l(x)$  se aplicaron el sistema lo-

<sup>10</sup> Secretaría de Salubridad y Asistencia, *op. cit.*, p. 19.

gito de W. Brass (tomando como estándar la tabla modelo de Coale y Demeny, asociada a la esperanza de vida observada) y la función de Makeham, obteniendo los resultados que aparecen en el cuadro 30.

Cuadro 30

México: Ajuste de la serie  $q(x)$  vía el sistema logito de W. Brass y la ley de Makeham, hombres, 1975.

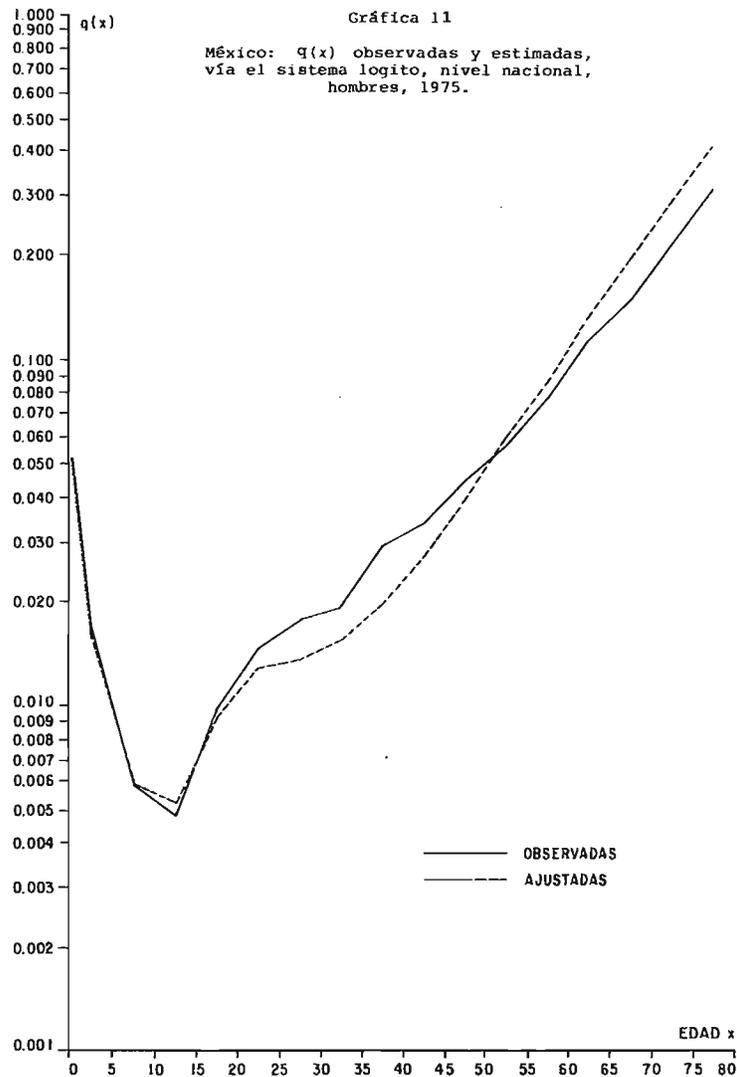
Grupos de edad	$q(x)$ observada	$q(x)$ Sistema logito	$\hat{q}(x)$ función de Makeham
0	0.05178	0.05281	
1 - 4	0.01672	0.01649	
5 - 9	0.00593	0.00688	
10 - 14	0.00489	0.00533	0.00477
15 - 19	0.00950	0.00908	0.01005
20 - 24	0.01464	0.01285	0.01439
25 - 29	0.01784	0.01342	0.01754
30 - 34	0.01946	0.01523	0.02128
35 - 39	0.02961	0.01909	0.02672
40 - 44	0.03358	0.02621	0.03461
45 - 49	0.04487	0.03831	0.04563
50 - 54	0.05943	0.05735	0.06074
55 - 59	0.07766	0.08677	0.08121
60 - 64	0.11432	0.13064	0.10882
65 - 69	0.14986	0.14986	0.14595
70 - 74	0.21898	0.28701	
75 - 79	0.31455	0.41319	

Fuente: Cuadros 15 y 25.

En las gráficas 11 y 12 se muestran la bondad de los ajustes obtenidos. Por una parte (gráfica 11), con el sistema logito, relacionamos la experiencia de mortalidad observada con la de un estándar escogido; dicha relación se linealiza vía los logitos observados y estimados con lo cual se pasa a corregir la estructura por edad de la mortalidad. Por otra parte (gráfica 12), con la función de Makeham, caracterizamos la experiencia de la mortalidad observada, obteniendo en base a ella la forma de la función de distribución de la mortalidad.

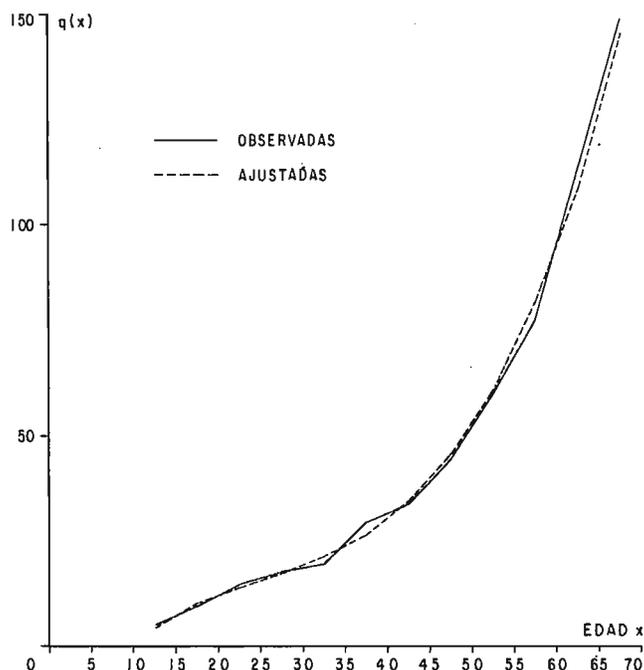
Así, mientras que la función de Makeham nos da la distribución de la mortalidad, sin corregir los niveles que en cada grupo de edad se observa, el sistema logito de Brass corrige la estructura de la mortalidad.

Se debe tener cuidado cuando se tenga un ajuste, como el que da la función de Makeham, tal que difiera mínimamente de los valores observados, y se piense que se está corrigiendo la estructura por edad de la mortalidad, o bien, tener un ajuste, como el que da el sistema logito de W. Brass, que si bien puede no estar necesariamente correlacionado con los niveles observados de mortalidad, y estar corrigiendo adecuadamente la estructura por edad de la mortalidad.



Gráfica 12

México:  $q(x)$  observadas y estimadas vía la función de Makeham, nivel nacional, hombres, 1975.



Cabe señalar que una de las ventajas que tiene la función de Makeham sobre el sistema logito es que la primera sirve para desagregar de grupos de edades quinquenales a edades individuales la experiencia de mortalidad de una población (ver ejemplo en la presentación de la función de Makeham). Para que el sistema logito sirviera para corregir y desagregar la estructura por edad de la mortalidad, se tendría que aplicar la función de Makeham al estándar, desagregándolo y después, vía la relación entre logitos:  $\hat{Y}(x) = \alpha + \beta^S(x)$ , obtener la tabla de mortalidad por edades individuales.

#### 4. Conclusiones generales

Después de haber visto modelos de ajuste, para los fenómenos nupcialidad, fecundidad y mortalidad, se ha resaltado la importancia que

tiene conocer cuándo un ajuste suaviza la estructura por edad del fenómeno en cuestión, cuándo la corrige y cuándo la caracteriza.

Modelos como los de A. J. Coale, para nupcialidad, el de A.J. Coale y Trussell, para la fecundidad y el sistema logito de W. Brass son modelos que al estar basados en estándares, en el caso de nupcialidad universal y en los casos de fecundidad y mortalidad dependientes de los niveles observados, corrigen las estructuras por edad del fenómeno en cuestión, es decir, los ajustes obtenidos vía los anteriores modelos no necesariamente minimizan los residuales (la diferencia entre los valores observados y los ajustados); esto último dependerá de la calidad de la información con que se cuenta, ya que puede tenerse una estructura por edad poco o muy alejada de la realidad, por lo que no necesariamente se debe esperar un ajuste que se adapte lo mejor posible a la distribución observada, la cual en general no muestra la situación imperante del fenómeno.

El modelo bilogístico de A. Bocaz y la función de fecundidad de W. Brass, sirven para obtener ajustes que suavizan la estructura por edad del fenómeno nupcialidad, en el caso del primero, o fecundidad en el caso del segundo. Los ajustes obtenidos a través de los anteriores modelos no deben ser considerados como ajustes que corrigen la información sino ajustes que suavizan y desagregan la información observada. Ellos no están basados directamente en estándares sino que se basan en la experiencia observada de dichos fenómenos; la gran ventaja de estos es que sirven para desagregar, a edades individuales, las estructuras por edad tanto de la nupcialidad como de la fecundidad.

Ajustes como los que se obtienen vía la función de Makeham, para el fenómeno mortalidad, caracterizan la distribución por edad de la mortalidad, ya sea a través de las probabilidades de muertes  $[q(x)]$ , o bien de los sobrevivientes a edad  $x[l(x)]$ . La caracterización se lleva a cabo minimizando los residuales, es decir encontrando una función que se adapte de la manera más adecuada a la experiencia observada, sin que esto quiera decir que se está corrigiendo la información.

Cabe señalar que para los fines de este trabajo una suavización, a diferencia de una caracterización, no necesariamente debe adaptarse; minimizando los residuales, a la estructura por edad observada, lo cual en la caracterización debe buscarse.

Finalmente se recomienda a todos aquellos que utilizan modelos de ajuste que tengan un conocimiento claro del o los modelos que van a aplicar; para ello se debe hacer una evaluación de la calidad de la información con la que se está trabajando, ya que se puede dar el caso que la calidad de la información sea adecuada y lo único que requiera sea su desagregación o bien sólo una suavización. Si después

de evaluar la información se cree necesario corregirla, antes de hacerlo hay que reflexionar sobre los niveles reales que se suponen predominan en la población observada, para con ello seleccionar adecuadamente el estándar o los estándares que servirán en la corrección de dicho fenómeno.

#### BIBLIOGRAFIA

- Bocaz, A., "Experiencia de nupcialidad por cohortes resumida por un modelo bilogístico", *Notas de Población*, año VII, No. 19, abril, 1979.
- Bocaz, A., "El uso de la ley de Makeham como función demográfica", *Notas de Población*, CELADE, año II, Vol. 6, diciembre, 1974.
- Brass, W., "On the scale of mortality", *Biological Aspects of Demography*. Taylor and Francis Ltd. London, 1970.
- Brass, W., "Seminario sobre métodos para medir variables demográficas (Fecundidad y Mortalidad)", CELADE, Serie DS, No. 9, San José, Costa Rica, 1973.
- Coale, A.J. "Age Patterns of Marriage". *Population Studies*. Vol. XXV, No. 2, Julio, 1971.
- Coale, A. J. y T. J. Trussell, "Model Fertility Schedules: variations in the age structure of childbearing in human populations". *Populations Index*, 40 (2), 1974.
- Coale, A. J. y P. Demeny, *Regional Model Life Tables and Stable Populations*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1966.
- Coale, A. J. y D. R. McNeil, "The distribution by age of the frequency of first marriage in a female cohort". *JASA*, Vol. 67, No. 340, 1972.
- Retherford, R., "The Brass fertility polinomial", *Census forum*, Vol. 5, No. 4, 1979.