



EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

**DINÁMICA CAÓTICA EN EL TIPO DE
CAMBIO REAL DE MÉXICO**

LEOVARDO MATA MATA

PROMOCIÓN 2002-2004

ASESOR:

PROF. ENEAS A. CALDIÑO GARCÍA

2007



Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al profesor, Eneas Arturo Caldiño García, por sus comentarios, orientación y paciencia en el desarrollo de este trabajo. A Ángel Calderón por su enseñanza, tiempo y comentarios; a Oscar Fernández por sus agudos cuestionamientos, a Gerardo Esquivel por su apoyo y confianza, y a Fernando Fernández (Universidad de Las Palmas de Gran Canaria) y Apostolos Serletis (University of Calgary) por su ayuda y supervisión.

A Mónica y a todos mis compañeros de la maestría que hicieron mi estancia en El Colegio de México algo muy agradable y enriquecedor.

A mis amigos Victor, Rocio, Juan Delfino, Lilian, Juan Miguel, Norma Beatriz, Carlos Eduardo, Cynthia, Julieta, Sergio, Angélica y Remedios, por su amistad y apoyo incondicional.

A mis alumnos de Microeconomía en el Centro de Estudios Internacionales, por enseñarme algo nuevo cada día.

A mis padres, porque sin ellos no sería lo que soy...

Y finalmente, al Centro de Estudios Económicos (CEE) y al Centro de Estudios Internacionales (CEI) por haberme mostrado el mundo maravilloso de la ciencia política y la ciencia económica¹.

¹GOTT SEI DANK

Resumen

Este estudio analiza la serie de tiempo mensual del tipo de cambio real en México en el periodo que comprende entre enero de 1996 y noviembre de 2005. En particular, se encuentra evidencia de dinámica caótica mediante el cálculo del exponente dominante de Lyapunov, lo que sugiere que los movimientos en el tipo de cambio real pueden modelarse mediante el uso de herramientas de la teoría de sistemas dinámicos.

Palabras clave: exponente de Lyapunov, no linealidad, caos, bootstrap.

Índice

1. Introducción	2
2. Tipo de Cambio Real	4
3. Sistemas dinámicos	6
3.1. Caos determinístico	6
3.2. Caos ruidoso	8
3.3. Estimación del exponente dominante de Lyapunov	14
3.4. Un test para el exponente dominante de Lyapunov	16
4. Resultados	18
5. Conclusiones	25
6. Bibliografía	26

1. Introducción

Si bien es cierto que existe una amplia gama de estudios y literatura sobre el tipo de cambio real (TCR) en México, poco se ha dicho de la “dinámica caótica” que pudiese presentar. Este estudio analiza la serie de tiempo mensual del tipo de cambio real en México¹ en el periodo que comprende entre enero de 1996 y noviembre de 2005² con el objetivo de encontrar evidencia de dinámica caótica.

Cuando hablamos de dinámica caótica, es importante comentar que no existe una única definición de caos, y aquí hemos adoptado la definición usual. En este trabajo, decimos que un sistema dinámico es caótico si presenta sensibilidad a las condiciones iniciales y existe un atractor al cual se converge conforme transcurre el tiempo (Ruelle, 1989). De esta manera, nuestra hipótesis central consiste en que los movimientos del TCR pueden modelarse mediante un sistema dinámico discreto, no lineal y caótico, Nychka *et al.* (1992).

Se investiga la existencia de no linealidad en la serie del TCR, y a través de un análisis gráfico de los rezagos de la serie se estudia si existe evidencia de un atractor para el sistema generador de la serie de tipo de cambio real. Nótese que en este caso el sistema dinámico discreto no lineal asociado al TCR es desconocido, y por tanto debe aproximarse el atractor empleando únicamente las observaciones de la serie de tiempo.

Para medir la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema dinámico, se requiere la existencia de un exponente de Lyapunov positivo, el cual se toma usualmente como una señal del carácter caótico del sistema. Los exponentes de Lyapunov proporcionan información de la inestabilidad de las trayectorias del sistema, y se calculan como la tasa de divergencia entre trayectorias que inicialmente se encontraban sumamente cercanas.

¹Índice del Tipo de Cambio Real Multilateral reportado por el Banco de México con respecto a 111 países, <http://www.banxico.org.mx/eInfoFinanciera/FSinfoFinanciera.html>

²Los datos empleados se delimitaron a este periodo ya que el TCR sufre fuertes variaciones, shocks y cambios bruscos hasta antes de 1996, sin mencionar que durante el periodo 1970-1996 el régimen cambiario no es el mismo.

En años recientes han aparecido muchos algoritmos para estimar los exponentes de Lyapunov para un sistema dinámico desconocido, el cual se reconstruye mediante una serie de tiempo. El artículo de Wolf *et al.* (1985) proporciona un algoritmo para calcular los exponentes de Lyapunov en aplicaciones empíricas, pero este procedimiento es sensible al número de observaciones y al nivel de ruido presente en los datos. Este método permite obtener una estimación consistente del máximo exponente de Lyapunov sólo en condiciones ideales, esto es, con muestras “grandes” y libres de cualquier tipo de ruido o perturbación aleatoria, por lo que cuando se trabaja con series cortas y contaminadas con ruido, este método no resulta apropiado.

Más recientemente, algunos autores han propuesto nuevos métodos para estimar los exponentes de Lyapunov bajo muestras pequeñas, veáse Rosenstein *et al.* (1993), Dechert y Gençay (1992) y Nychka *et al.* (1992).

Los exponentes de Lyapunov han sido empleados para detectar dinámica caótica en series de tiempo financieras. Bajo-Rubio *et al.* (1992) encuentran evidencia de caos determinístico para el tipo de cambio entre la peseta española y el dólar americano. Dechert y Gençay (1992) emplean los exponentes de Lyapunov para distinguir entre procesos determinísticos lineales y procesos determinísticos caóticos no lineales. De hecho, Bask y Gençay (1998) proporcionaron un test para probar la presencia de un exponente de Lyapunov positivo en una serie de tiempo con muestras pequeñas, y mediante esta técnica Bask (1998) encuentra evidencia de que algunos tipos de cambio pueden caracterizarse por caos determinístico.

Por otro lado, Serletis y Gogas (2000) encuentran evidencia de dinámica caótica no lineal en siete series de tipo de cambio real para países miembros de la OCDE, sugiriendo que los movimientos en el tipo de cambio real pueden modelarse mediante sistemas dinámicos caóticos. El procedimiento aplicado por Serletis y Gogas (2000) para estimar el exponente de Lyapunov se basa en el algoritmo desarrollado por Nychka *et al.* (1992) .

No obstante, estos y otros artículos han sido criticados por la ausencia de un marco

estadístico que permita desarrollar un test robusto para probar la presencia de un exponente de Lyapunov positivo. De hecho, la situación actual de la literatura se encuentra precisamente en el diseño de un contraste estadístico robusto para la hipótesis nula de que al menos el máximo exponente de Lyapunov resulta positivo, veáanse Shintani y Linton (2003 y 2004) y Fernández *et al.* (2005).

Este trabajo emplea un nuevo test para probar la existencia de un exponente de Lyapunov positivo en el sistema dinámico asociado a la serie de tipo de cambio real de México. Esta prueba ha sido robusta cuando se comparan procesos estocásticos y determinísticos ya conocidos, y se basa en la estabilidad del exponente dominante de Lyapunov estimado para diferentes tamaños de muestra, veáse Fernández *et al.* (2005).

La evidencia encontrada bajo este test sugiere que es posible modelar los movimientos en el tipo de cambio real mediante el uso de herramientas de la teoría de sistemas dinámicos, lo cual es altamente relevante, ya que se abre la posibilidad, en principio, a esquemas de pronóstico alternativos para el tipo de cambio real.

No obstante, estimar de manera consistente la función que describe el sistema asociado al TCR para aproximar su comportamiento, o incorporar a un modelo existente la noción de caos son temas de investigación no concluyentes, veáanse Shintani y Linton (2003 y 2004). Por ello, este trabajo busca ser el comienzo de investigaciones futuras que generen modelos de pronóstico, y que permitan estudiar la influencia de esta variable en el desempeño económico y en el funcionamiento global de la economía.

2. Tipo de Cambio Real

El tipo de cambio nominal y el tipo de cambio real son dos precios relativos asociados a la existencia de economías abiertas con diferentes monedas. El tipo de cambio nominal es el precio relativo de una moneda con respecto a otra. Se define como el número de unidades de

moneda doméstica por unidad de moneda extranjera o, alternativamente, como el precio de una unidad de moneda extranjera en términos de moneda doméstica.

El tipo de cambio real es el precio de los bienes extranjeros en términos de los bienes domésticos. Si el índice de precios del país extranjero en el tiempo t es P_t^* y el de los bienes domésticos es P_t , el tipo de cambio real es igual a $E_t P_t / P_t^*$, donde E_t son las unidades de moneda nacional que hay que pagar para obtener una unidad de moneda extranjera³.

El hecho de que una definición del tipo de cambio real, en particular, resulte en una variable bilateral o multilateral, dependerá de la definición de P_t que estemos utilizando. Así, desde un enfoque bilateral, puede ser el índice de precios al mayoreo de un país en específico, pero desde un enfoque multilateral, típicamente tiene como meta representar un índice de precios del mercado mundial.

El Índice del Tipo de Cambio Real Multilateral mide el precio relativo de los bienes y servicios de nuestra economía con respecto a los de un grupo de países con los cuales se realizan transacciones comerciales, así el tipo de cambio real refleja de qué manera los precios domésticos se adaptan, o están ligados, a los precios de los mercados mundiales.

A diferencia de los tipos de cambio real bilaterales, el tipo de cambio real multilateral mide el valor real del peso en relación a las monedas de nuestros principales socios comerciales. La ponderación de cada socio dentro del índice refleja su participación en el comercio total (exportaciones más importaciones) de nuestro país.

Este índice tiene en cuenta las fluctuaciones de las monedas y de los precios de nuestros socios comerciales y es, por lo tanto, una medida amplia de competitividad. De hecho, es una medida ponderada de los tipos de cambio reales bilaterales, en la que las ponderaciones son iguales a las proporciones que representa el comercio de los distintos países.

Por ello, en este trabajo empleamos la serie mensual del Índice del Tipo de Cambio Real Multilateral reportada por el Banco de México con respecto a 111 países, y cuyo periodo

³Los dos índices deben encontrarse en la misma base.

comprende de enero de 1996 a noviembre de 2005⁴. El objetivo es encontrar evidencia de dinámica caótica mediante el cálculo del exponente dominante de Lyapunov, y abrir la posibilidad a investigaciones futuras para aproximar los movimientos en el tipo de cambio real mediante el uso de herramientas de la teoría de sistemas dinámicos.

3. Sistemas dinámicos

El comportamiento caótico en diversos modelos ha sido de gran interés en los últimos años ya que sugiere una representación parsimoniosa para sistemas que siguen un comportamiento complejo. En sus inicios, la idea de caos se asociaba sólo a sistemas determinísticos y se consideraba una alternativa a la modelación estocástica. No obstante, es posible ajustar modelos dinámicos a series de tiempo sin presuponer que el sistema sea estrictamente determinístico. Esto es relevante para la modelación de sistemas económicos y biológicos, donde la información disponible está limitada por el tamaño de muestra y la contaminación por ruido.

3.1. Caos determinístico

Una de las principales herramientas matemáticas para modelar y describir los procesos que evolucionan con el tiempo son las ecuaciones diferenciales. En los siglos XVIII y XIX se desarrollaron muchas técnicas para resolverlas explícitamente. Estos métodos llevaron a la teoría de sistemas dinámicos, un marco conceptual que permite analizar detalladamente como cambia un proceso con el paso del tiempo.

Un sistema dinámico discreto determinístico es una pareja formada por un conjunto no vacío W y una función $f : W \rightarrow W$ tal que $w_{t+1} = f(w_t)$ para cada $t \in \mathbb{N}$. Dada una condición inicial $w_0 \in W$, la sucesión $\{w_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ se denomina trayectoria u órbita del sistema y

⁴Utilizamos la serie mensual, ya que este índice no se reporta en periodos menores a un mes.

escribimos $w_t = f^t(w_0)$, es decir, el punto w_t puede encontrarse aplicando t veces la función f al punto w_0 , Devaney *et al.* (1989).

Si las trayectorias del sistema dinámico convergen a un conjunto no vacío $A \subset W$ sin importar la condición inicial w_0 , decimos que A es un atractor de f y $f(A) = A$. Este conjunto puede constar de un sólo punto, pero el caso interesante es cuando A contiene más de uno, ya que eso nos dice que las trayectorias del sistema $w_{t+1} = f(w_t)$ fluctúan alrededor de los puntos de A . Las trayectorias que se mueven sobre el atractor pueden ser inestables, esta inestabilidad se manifiesta en sensibilidad a las condiciones iniciales, y en ese caso, decimos que el atractor es un atractor extraño y que el sistema $w_{t+1} = f(w_t)$ es caótico, Ruelle (1989).

Formalmente, decimos que f posee sensibilidad a condiciones iniciales en el punto w_0 , si existe $\delta > 0$ tal que para cualquier conjunto abierto U que contiene a w_0 se cumple que $|f^t(u) - f^t(w_0)| > \delta$ para cada $u \in U$ y para algún $t \in \mathbb{N}$. En otras palabras, condiciones iniciales muy parecidas producen resultados finales completamente diferentes.

Una manera de “medir” que tan sensible es un sistema dinámico a las condiciones iniciales es mediante los llamados exponentes de Lyapunov. Un exponente de Lyapunov es aproximadamente igual a la tasa de crecimiento promedio de la diferencia entre dos series de tiempo conforme evolucionan desde condiciones iniciales ligeramente distintas.

Supongamos que tenemos una serie de tiempo producida por el sistema dinámico descrito por $w_{t+1} = f(w_t)$, donde f es una función de una sola variable. Si consideramos que existe una perturbación ε_0 en $t = 0$, entonces el error en el tiempo t es $\varepsilon_t = f^t(w_0 + \varepsilon_0) - f^t(w_0)$. El crecimiento promedio del error puede medirse mediante una constante λ de forma que $|\varepsilon_t| \approx |\varepsilon_0| e^{\lambda t}$. Si la función es diferenciable, véase Holden (1986), se tiene que

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln(f'(w_i)). \quad (1)$$

Ahora bien, notemos que el caso mencionado corresponde a una función de una sola variable. Si f es una función de n variables tendremos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ exponentes de Lyapunov, uno por cada variable. De esta forma, si $J_t(w_0)$ es la matriz jacobiana de la t -ésima iteración de la función f , entonces los exponentes de Lyapunov, véase Peitgen *et al.* (1992), son

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(|m_k^t|) \quad (2)$$

donde m_k^t , $k = 1, 2, \dots, n$ son los valores propios de $J_t(w_0)$. En este contexto, definimos el exponente dominante de Lyapunov como $\lambda_{máx} = máx \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Si $\lambda_{máx}$ es positivo, entonces f posee sensibilidad a las condiciones iniciales, Abarbanel (1996).

En otras palabras, decimos que el sistema dinámico $w_{t+1} = f(w_t)$ es caótico si existe un atractor al cual se converge en el espacio de fases⁵ y existe un exponente dominante de Lyapunov positivo, Peitgen *et al.* (1992).

3.2. Caos ruidoso

En la sección anterior comentamos cuándo un sistema dinámico discreto determinístico, $w_t = f(w_{t-1})$, es caótico. No obstante, en la práctica la información disponible sobre el estado del sistema w_t puede estar limitada por el tamaño de la muestra y la contaminación por ruido. En ese caso se incorporan componentes aleatorios para analizar el sistema dinámico $w_t = f(w_{t-1})$ y decimos que presenta caos ruidoso.

En particular, si deseamos analizar el comportamiento de una variable bajo estudio u_1 , podemos considerar todas las posibles variables u_2, u_3, \dots, u_m que interactúan con u_1 y suponer un sistema dinámico

$$w_t = f(w_{t-1})$$

⁵El espacio de fases es un subconjunto de $W \times W$ que contiene las trayectorias del sistema dinámico (w_t, w_{t+1}) .

donde $w_t = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ y $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable. En la práctica, desconocemos la forma funcional de f y sólo disponemos de algunas variables contaminadas por ruido. Este problema no es grave, ya que es posible estudiar un sistema dinámico empleando solamente una variable y sus rezagos, Takens, Eckmann y Ruelle (1985).

El teorema de Takens afirma que dado un sistema caótico determinístico descrito por $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ sobre un atractor con dimensión $D < \infty$, existe una función diferenciable $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$x_{t+1}^d = g(x_t^d) \quad (3)$$

para cualquier $d > 2D + 1$ y $L > 0$, donde $x_t^d = (x(t - dL), x(t - (d - 1)L), \dots, x(t - L))$ y x es cualquiera de las variables u_1, u_2, \dots, u_m . Este resultado es importante porque sugiere que los rezagos de una sola variable permiten estudiar el sistema dinámico $w_t = f(w_{t-1})$ a través de la función g , aún cuando se desconozcan el resto de las variables.

Si tenemos una serie de tiempo $\{x_t\}_{t \in T}$ de la variable x , entonces podemos suponer que los datos disponibles $\{x_t\}_{t \in T}$ son generados por la dinámica del sistema $w_t = f(w_{t-1})$, así

$$x_t = h(w_{t-1}), \quad (4)$$

donde $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

Si se define $J^d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ como $J^d(x) = (h(x), h(f(x)), \dots, h(f^{d-1}(x)))$, veáse Gençay (1996), se cumple,

$$x_{t+1}^d = J^d(w_{t+1}) = J^d(f(w_t)),$$

y por tanto

$$J^d(f(w_t)) = g(J^d(w_t)). \quad (5)$$

Este resultado nos dice que g es topológicamente conjugada⁶ a f , es decir, g tiene las mismas propiedades dinámicas que la función f ⁷, veáse Takens, Eckmann y Ruelle (1985). Entonces podemos estudiar la dinámica del sistema $w_t = f(w_{t-1})$ mediante la función $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, Gençay (1996), definida como

$$g \left(\begin{bmatrix} x_{t-dL} \\ x_{t-(d-1)L} \\ \vdots \\ x_{t-L} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_{t+1-dL} \\ x_{t+1-(d-1)L} \\ \vdots \\ x_{t+1-L} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Nychka *et al.* (1992) y Serletis y Gogas (2000) consideran este esquema y establecen herramientas para ajustar el sistema dinámico $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$ con la serie de tiempo $\{x_t\}_{t \in T}$, aún cuando $\{x_t\}_{t \in T}$ se encuentre contaminada por ruido. Específicamente, suponen un modelo autorregresivo no lineal para x_{t+1-L} ,

$$x_{t+1-L} = v(x_{t-dL}, x_{t-(d-1)L}, \dots, x_{t-L}) + e_{t+1-L}, \quad (7)$$

donde $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\{e_t\}_{t \in T}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[e_t] = 0$ y $V[e_t] = \sigma^2$. Estas definiciones generalizan la noción de caos en el modelo dinámico $w_t = f(w_{t-1})$, veáanse Nychka *et al.* (1992) y Gençay (1996).

⁶Sean (M, d) un espacio métrico, X, Y subconjuntos no vacíos de M y $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ funciones continuas. Entonces f y g se dicen topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(f(x)) = g(h(x))$ para cada $x \in X$.

Sean (M, d_1) y (N, d_2) espacios métricos. Un homeomorfismo de M a N es una función $h : M \rightarrow N$ biyectiva tal que h y su inversa $h^{-1} : N \rightarrow M$ son funciones continuas.

⁷En otras palabras, si podemos probar que el sistema dinámico descrito por la función g presenta sensibilidad a las condiciones iniciales y existe un atractor al cual se converge conforme transcurre el tiempo, entonces la función f presenta la misma propiedad.

En este trabajo, suponemos un sistema dinámico discreto, $w_t = f(w_{t-1})$, para el tipo de cambio real y seguimos la metodología de Serletis y Gogas (2000). Es decir, analizamos el sistema dinámico $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$ mediante los residuales de un modelo autorregresivo ajustado a la serie de tipo de cambio real. Más adelante explicaremos específicamente este procedimiento.

El objetivo es indagar si existe un componente no lineal en los residuales y encontrar evidencia de sensibilidad a las condiciones iniciales en el sistema $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$ sobre un atractor al cual se converge en el espacio de fases, y así concluir que el sistema $w_t = f(w_{t-1})$ es caótico. Para ello necesitamos estimar la dimensión de inmersión d , el rezago L y la dimensión del atractor D .

Dada la serie de tiempo $\{x_t\}_{t \in T}$, la función de información mutua $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$S(L) = - \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} p_{ij}(L) \ln \left[\frac{p_{ij}(L)}{p_i(L)p_j(L)} \right],$$

donde P es una partición sobre un intervalo que contiene a los valores $\{x_t\}_{t \in T}$, p_i es la probabilidad de encontrar un valor de la serie en el i -ésimo intervalo de la partición y p_{ij} la probabilidad conjunta de que una observación x_t caiga dentro del i -ésimo intervalo y x_{t+L} caiga dentro del j -ésimo. Esta expresión no tiene una dependencia sistemática sobre el tamaño de los elementos de la partición, Fraser y Swinney (1986). Así que vamos a considerar que el L óptimo va a ser aquél que minimice la denominada información mutua. La idea general es que un rezago óptimo es aquel que dado un estado del sistema $x(t)$ provea una información máxima acerca del estado $x(t+L)$. La diferencia entre el estado real y el predicho para $x(t+L)$ da una medida de esta información⁸, ya que conforme aumenta la distancia

⁸En teoría de la probabilidad y teoría de la información, la divergencia de Kullback–Leibler (entropía relativa) es una medida "natural" entre dos distribuciones P y Q . Comúnmente, P representa datos u observaciones, y Q una teoría, modelo o aproximación a P . En este trabajo la función de información mutua busca reducir al máximo la distancia entre P y Q , véase Kullback y Leibler (1951).

temporal entre observaciones disminuye la información que la serie proporciona sobre el siguiente valor. El primer mínimo que se alcanza en la función de información será la distancia óptima, L , para aproximar el sistema dinámico $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$.

En este estudio se estima el primer mínimo local como aproximación para L mediante un algoritmo implementado y desarrollado por Hegger *et al.* (1999), y que forma parte de un conjunto de rutinas del programa TISEAN 2.1⁹.

Una vez que hemos escogido el L óptimo, debemos buscar el d óptimo. Sabemos que la dimensión de inmersión esta relacionada con la dimensión del atractor, de tal forma que para asegurarnos que estamos reproduciendo la dinámica del sistema $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$ tendremos que verificar que $d > 2D + 1$, Takens, Eckmann y Ruelle (1985). Una manera de aproximar D es calculando la dimensión de correlación del atractor, la cual es un tipo de dimensión fractal¹⁰, veáse Peitgen *et al.* (1992).

Consideremos una serie de tiempo $\{x_t\}_{t \in T}$, y $\varepsilon > 0$, entonces la integral de correlación al suponer un espacio de dimensión n se define como

$$C_n(\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} f, \quad (8)$$

donde f es el número de pares (i, j) para los cuales $|x_i - x_j| < \varepsilon$. La dimensión de correlación D es el exponente que satistace $C_n(\varepsilon) \sim \varepsilon^D$ para n superior a D , Brock *et al.*, (1996).

En un sistema caótico, la estimación de la dimensión de correlación no crece al aumentar la dimensión de inmersión por encima de cierto valor. Si es aleatorio, la dimensión de correlación crecerá de forma indefinida ante variaciones de la dimensión de inmersión, es decir, la estimación de un valor finito para D nos ofrece evidencia de la existencia de un atractor, ya que para un proceso aleatorio D es infinito, veáse Grassberger y Procaccia (1983). En

⁹Nonlinear Time Series Analysis (TISEAN) es un conjunto de rutinas (free software) cuyo objetivo es estudiar sistemas dinámicos no lineales, Hegger *et al.* (1999).

¹⁰No existe una única definición de dimensión fractal, pero la más empleada en el análisis de series de tiempo es la dimensión de correlación.

este trabajo estimamos D mediante las recomendaciones y procedimientos, implementados por Hegger *et al.* (1999) en TISEAN 2.1.

Para reforzar la elección del parámetro d , empleamos el método de los falsos vecinos cercanos. Este procedimiento funciona de la siguiente manera: dado un punto en un espacio de dimensión d , se buscan sus puntos vecinos más cercanos. Si la distancia entre estos puntos en el espacio de dimensión $d + 1$ es mayor que un determinado factor, entonces el punto se marca como un falso vecino cercano.

La fracción de falsos vecinos cercanos indica entonces si el proceso es determinístico en d dimensiones o no. De esta forma, elegimos d de manera que el número de falsos vecinos cercanos sea lo más pequeño posible.

Sin embargo, si seguimos las recomendaciones de Hegger *et al.* (1999) debemos ser cuidadosos porque podríamos sobrestimar el valor de d en una serie con perturbaciones aleatorias. Para reducir el riesgo de esta posibilidad hemos elegido un rango posible de valores para la dimensión de inmersión, de esa forma tenemos muchas combinaciones de d y L , las cuales vamos a descartar utilizando el algoritmo de Fernández *et al.* (2003).

Mediante esta prueba es posible encontrar evidencia de un exponente dominante de Lyapunov positivo, lo cual implica sensibilidad a las condiciones iniciales en el sistema dinámico $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$ y por tanto en el sistema $w_t = f(w_{t-1})$ donde se encuentra inmerso el tipo de cambio real.

Una vez que hayamos estimado los valores de d y L podemos estudiar si existe evidencia de un atractor. Para ello definimos

$$x_0 = x(0), x_1 = x(L), x_2 = x(2L), \dots$$

Empleando los datos disponibles $\{x_t\}_{t \in T}$ de cualesquiera de las variables u_1, u_2, \dots, u_m y el valor de d podemos construir los siguientes vectores

$$m(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+L) \\ \vdots \\ x(t+(d-1)L) \end{bmatrix} \quad (9)$$

para $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Los vectores así formados se les llama d -historias y tienen una estructura que dibuja una trayectoria similar a la que posee la órbita del sistema $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$ salvo por perturbaciones aleatorias, lo que permite tener una aproximación gráfica de la estructura del atractor. No obstante, si $d > 3$ debemos conformarnos con proyectar sobre un espacio de dimensión menor para buscar indicios de un atractor, Peitgen *et al.* (1992).

3.3. Estimación del exponente dominante de Lyapunov

El procedimiento que empleamos para estimar el exponente dominante de Lyapunov es sencillo de implementar y funciona bien en series cortas y con ruido, ya que se puede obtener la distribución muestral del exponente dominante de Lyapunov $\lambda_{máx}$, Fernández *et al.* (2005), pues se utilizan técnicas bootstrapping, Gençay (1996).

Consideremos una sucesión de variables aleatorias estacionarias¹¹ débilmente dependientes¹² $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ cuya realización es $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$. Definimos $B_t^d = \{x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+d-1}\}$ como un bloque de d observaciones consecutivas, donde $t \leq T - d + 1$. Para una serie de T elementos podemos formar un conjunto $\{B_1^d, B_2^d, \dots, B_{T-d+1}^d\}$ de bloques de longitud d . Sea k la parte entera de T/d , entonces por muestreo con reemplazo de k bloques denotados por $\{B_{i_1}^d, B_{i_2}^d, \dots, B_{i_k}^d\}$ podemos formar una muestra bootstrap.

¹¹En este trabajo un proceso estocástico $\{x_t\}_{t \in T}$ es estacionario, si es estrictamente estacionario o es covarianza-estacionario, veáse Hamilton (1994).

¹²Un proceso estocástico estacionario $\{x_t\}_{t \in T}$ es débilmente dependiente si para cada $t \in T$ la correlación entre x_t y x_{t+h} tiende a cero, cuando $h \rightarrow \infty$.

Con el objeto de obtener la distribución muestral de $\lambda_{m\acute{a}x}$, repetimos este procedimiento para construir una sucesión de subfamilias de k bloques tomados con reemplazo de la familia $\{B_1^d, B_2^d, \dots, B_{T-d+1}^d\}$ que puede generarse con la serie de tiempo $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$. Para cada subfamilia, se puede aplicar algún procedimiento estándar para calcular el exponente dominante de Lyapunov $\widehat{\lambda}_{m\acute{a}x}$, y repitiendo el proceso un gran número de veces es posible obtener la distribución empírica de $\widehat{\lambda}_{m\acute{a}x}$.

En este trabajo seguimos este esquema de estimación y empleamos el algoritmo de Rosenstein *et al.* (1993) como procedimiento para estimar $\widehat{\lambda}_{m\acute{a}x}$, ya que es un método robusto para muestras pequeñas¹³.

El procedimiento de Rosenstein para calcular $\widehat{\lambda}_{m\acute{a}x}$ en conjunto con las técnicas bootstrapping actúa de la siguiente manera: dada la serie de tiempo $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ es posible reconstruir el espacio fase mediante los bloques $\{B_1^d, B_2^d, \dots, B_{T-d+1}^d\}$ descritos anteriormente, Fernández *et al.* (2003). Para cada punto en B_t^d es posible encontrar un punto, vecino más cercano, tal que se minimiza la distancia euclidiana al punto de referencia en B_t^d . Rosenstein señala que la separación temporal entre este par de vecinos cercanos debe ser mayor que el periodo medio de la serie, en este trabajo el periodo medio es uno, ya que suponemos un sistema dinámico discreto.

La divergencia entre vecinos más cercanos ocurre a una tasa aproximada por el exponente dominante de Lyapunov

$$d_t(i) \cong d_t(0) \exp(\lambda_{m\acute{a}x} i \Delta t) \quad (10)$$

donde i es el número de pasos discretos antes del siguiente vecino más cercano, Δt es el periodo muestral de la serie de tiempo y $d_j(i)$ es la distancia entre el par j -ésimo de vecinos

¹³No empleamos un método indirecto, como el propuesto por Nychka *et al.* (1992) con el fin de evitar complicaciones en el producto de las matrices jacobianas al utilizar las técnicas de bootstrapping, véase Fernández *et al.* (2003).

más cercanos después de i pasos discretos. Si tomamos logaritmo natural tenemos

$$\ln(d_t(i)) \cong \ln(d_t(0)) + \lambda_{m\acute{a}x} i \Delta t. \quad (11)$$

Para cada valor de $t = 1, 2, \dots, T - d + 1$ la ecuación (13) representa un conjunto de líneas aproximadamente paralelas, cada una con una pendiente que es aproximadamente proporcional a $\lambda_{m\acute{a}x}$, por tanto mediante mínimos cuadrados es posible estimar $\hat{\lambda}_{m\acute{a}x}$.

Existen varios parámetros en el algoritmo de Rosenstein que deben determinarse. Ya hemos descrito como estimar el rezago L para aproximar el espacio fase y la dimensión de inmersión d para el sistema dinámico, la cual coincide con la longitud de los bloques $\{B_1^d, B_2^d, \dots, B_{T-d+1}^d\}$. El periodo medio es igual a uno, ya que nuestra hipótesis asume un sistema dinámico discreto, y el número de pasos discretos i permitidos para la divergencia entre vecinos más cercanos se fija en tres, siguiendo el procedimiento y las recomendaciones de Fernández *et al.* (2003).

3.4. Un test para el exponente dominante de Lyapunov

En esta parte describimos la prueba para distinguir entre caos y comportamiento estrictamente aleatorio presentada en Fernández *et al.* (2005). Este test se basa en la estabilidad del exponente dominante de Lyapunov para diferentes tamaños de muestra. Se ha encontrado evidencia para procesos determinísticos de que $\hat{\lambda}_{m\acute{a}x}$ se estabiliza o decrece cuando el tamaño de muestra se incrementa, no obstante, para procesos estocásticos el exponente dominante de Lyapunov se incrementa con el tamaño de muestra. La estabilidad de $\hat{\lambda}_{m\acute{a}x}$ con el tamaño de muestra para procesos caóticos versus la relación positiva para procesos estocásticos puede explicarse por el teorema de Oseledec (1968), el cual garantiza la estabilidad de $\hat{\lambda}_{m\acute{a}x}$ en procesos caóticos por la "infinita dimensionalidad" del ruido presente en procesos estocásticos, Fernández *et al.* (2003).

Con el objeto de mejorar la estimación del exponente dominante de Lyapunov se emplea un procedimiento conocido como "bagging", que se basa en muestras bootstrap, y que reduce el error cuadrático medio de las estimaciones, véase Hastie *et al.* (2001). Consideremos una serie de tiempo de longitud T , $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$, dividimos la serie en diferentes submuestras, cada una de las cuales contiene a la precedente $\{x_1, x_2, \dots, x_{T_1}, \dots, x_{T_2}, \dots, x_{T_{r-1}}, \dots, x_{T_r} = x_T\}$, y consideremos una distribución empírica del exponente dominante de Lyapunov obtenida mediante cien bloques bootstrap para cada una de las diferentes submuestras $\{x_1, x_2, \dots, x_{T_i}\}$ para $i = 1, 2, \dots, r$. Entonces tenemos una estimación del exponente dominante de Lyapunov $\widehat{\lambda}(T_i)$ para cada T_i , la media de la distribución empírica de los cien exponentes de Lyapunov calculados mediante los cien bloques bootstrap para la submuestra T_i .

Sabemos que el exponente dominante de Lyapunov se estabiliza o decrece, para un proceso determinístico, cuando el tamaño de la muestra se incrementa, por tanto podemos correr el modelo de regresión lineal

$$\widehat{\lambda}(T_i) = \alpha + \beta T_i + \psi_i, \quad (12)$$

donde $E[\Psi_i | T_i] = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ y utilizar el parámetro $\widehat{\beta}$ para verificar si el exponente de Lyapunov crece con el tamaño de muestra. La prueba de hipótesis¹⁴ es:

$$H_0 : \beta \leq 0 \quad (w_t = f(w_{t-1}) \text{ es un proceso determinístico con } \lambda_{máx} > 0) \quad (13)$$

$$H_1 : \beta > 0 \quad (w_t = f(w_{t-1}) \text{ es un proceso estocástico})$$

Es importante señalar que seguimos la recomendación de Fernández *et al.* (2005) y realizamos la prueba sobre β empleando la matriz de varianza-covarianza propuesta por Newey y West (1987), la cual es robusta a heteroscedasticidad y autocorrelación para las estimaciones en modelos de mínimos cuadrados ordinarios.

¹⁴Es importante comentar que la estimación de la función de distribución muestral de $\widehat{\lambda}_{máx}$ reduce el sesgo en la estimación de $\lambda_{máx}$, por tanto estamos realizando el test con el valor esperado de $\widehat{\lambda}_{máx}$.

4. Resultados

Este trabajo aplica un nuevo test al sistema dinámico $x_{t+1}^d = g(x_t^d)$ para probar la existencia de un exponente de Lyapunov positivo en el sistema $w_t = f(w_{t-1})$ donde se encuentra inmerso el TCR, una de las variables u_1, u_2, \dots, u_m , y donde sin pérdida de generalidad podemos establecer u_1 igual al tipo de cambio real. Los datos empleados de u_1 para encontrar evidencia de dinámica caótica son la serie mensual del Índice del Tipo de Cambio Real Multilateral, $\{z_t\}_{t \in T}$, reportada por el Banco de México con respecto a 111 países, y cuyo periodo comprende de enero de 1996 a noviembre de 2005.



Figura 1. Índice del Tipo de Cambio Real Multilateral (1996-2005)

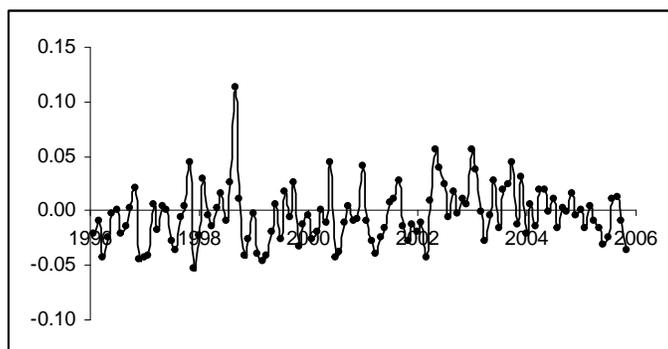


Figura 2. Primera diferencia, Δy_t , del logaritmo natural de la serie TCR.

Como primer paso, siguiendo la metodología en Bajo-Rubio *et al.* (1992) y Serletis y Zimonopoulos (1997) trabajamos con el logaritmo natural, $y_t = \ln(z_t)$, de la serie de tipo de cambio real $\{z_t\}_{t \in T}$. Realizamos una prueba de raíz unitaria al logaritmo natural, $\{y_t\}_{t \in T}$, de la serie del TCR para evitar estimar una regresión espuria¹⁵. Específicamente, efectuamos la prueba de Dickey-Fuller aumentada a la serie $\{y_t\}_{t \in T}$, para ello estimamos la regresión

$$\Delta y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (14)$$

donde $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ y el rezago k se elige mediante el criterio de información de Akaike (AIC). En este caso encontramos que no existe evidencia para rechazar la existencia de una raíz unitaria, veáse tabla 1.1. Por tanto aplicamos la prueba de Dickey-Fuller aumentada a la primera diferencia de $\{y_t\}_{t \in T}$, y en ese caso rechazamos la existencia de una raíz unitaria para la serie Δy_t , veáse tabla 1.2, por lo cual elegimos trabajar con la primera diferencia de la serie $\{y_t\}_{t \in T}$, la cual es una de las variables u_1, u_2, \dots, u_m que se encuentra inmersa en el sistema $w_t = f(w_{t-1})$, y que sin pérdida de generalidad podemos establecer como u_2 .

$H_0 : y_t$ tiene una raíz unitaria		
	Estadístico t	Valor p
Dickey-Fuller aumentada	-2.4341	0.1347

Tabla 1.1 Prueba aumentada de Dickey-Fuller

$H_0 : \Delta y_t$ tiene una raíz unitaria		
	Estadístico t	Valor p
Dickey-Fuller aumentada	-8.3561	0.0000

Tabla 1.2 Prueba aumentada de Dickey-Fuller

¹⁵La especificación correcta del modelo lineal es de suma importancia para aislar el componente no lineal determinístico de la serie en los residuos.

Ahora, si es el caso que $\{\Delta y_t\}_{t \in T}$ es una variable que está inmersa en un sistema dinámico $w_t = f(w_{t-1})$ caótico ruidoso, entonces al estimar un modelo lineal autorregresivo esperaríamos que los residuos capturaran un componente no lineal del sistema $w_t = f(w_{t-1})$, el cual sin pérdida de generalidad podemos establecer como u_3 , y que se encontraría contaminado por ruido, Serletis y Gogas (2000).

Específicamente estimamos el modelo

$$\Delta y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i \Delta y_{t-i} + \theta_t,$$

donde $\theta_t | I_{t-1} \sim N(0, \tau_0)$, siendo I_{t-1} el conjunto de información en $t - 1$.

El rezago q se elige de tal forma que el estadístico Q de Ljung-Box (1978) no sea significativo al nivel de 5 %, de esta manera los residuos de este modelo no están correlacionados. En nuestro caso, el rezago q es igual a uno.

Este componente no lineal, u_3 , que puede encontrarse en los residuos $\{\theta_t\}_{t \in T}$ proporcionaría evidencia sobre todo el sistema $w_t = f(w_{t-1})$, por ello aplicamos el test de Fernández *et al.* (2005) a $\{\hat{\theta}_t\}_{t \in T}$ para encontrar evidencia de un exponente dominante de Lyapunov positivo, y concluir que el sistema dinámico $w_t = f(w_{t-1})$, donde se encuentra inmerso el TCR presenta sensibilidad a condiciones iniciales.

Siguiendo la metodología de Serletis y Gogas (2000) se realiza una prueba ARCH¹⁶ a la serie $\{\hat{\theta}_t\}_{t \in T}$, donde no fue posible rechazar la hipótesis nula de que la varianza de $\{\hat{\theta}_t\}_{t \in T}$ es constante.

Finalmente, la prueba de Fernández *et al.* (2005) se aplica a $\{\hat{\theta}_t\}_{t \in T}$ para probar si existe un componente no lineal en los residuos e indagar si el sistema dinámico $\hat{\theta}_{t+1}^d = g(\hat{\theta}_t^d)$ es caótico ruidoso.

¹⁶ Aplicamos la prueba ARCH-LM que ejecuta la regresión $\hat{\theta}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\theta}_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \hat{\theta}_{t-q}^2 + \xi_t$, donde $\{\xi_t\}_{t \in T}$ es un ruido blanco, Engle (1982). El punto clave es remover, en caso de existir, cualquier dependencia no lineal estocástica (*time-varying*) en la varianza.

$H_0 : \widehat{\theta}_t$ no presenta correlación serial en los residuos

	Estadístico Q	Valor p
Ljung-Box	0.0555	0.814

Tabla 2. Estadístico Q de Ljung-Box

Asumimos que la serie $\{\widehat{\theta}_t\}_{t \in T}$ tiene como proceso generador un modelo autorregresivo no lineal

$$\widehat{\theta}_{t+1-L} = v(\widehat{\theta}_{t-dL}, \widehat{\theta}_{t-(d-1)L}, \dots, \widehat{\theta}_{t-L}) + e_{t+1-L},$$

donde v es una función desconocida diferenciable y $\{e_t\}_{t \in T}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[e_t] = 0$ y $V[e_t] = \sigma^2$. Necesitamos estimar los valores de d y L que permitan estudiar el sistema $\widehat{\theta}_{t+1}^d = g(\widehat{\theta}_t^d)$ para calcular una aproximación del exponente dominante de Lyapunov, y aproximar la dimensión de correlación D para sustentar la existencia de un atractor para el sistema $\widehat{\theta}_{t+1}^d = g(\widehat{\theta}_t^d)$.

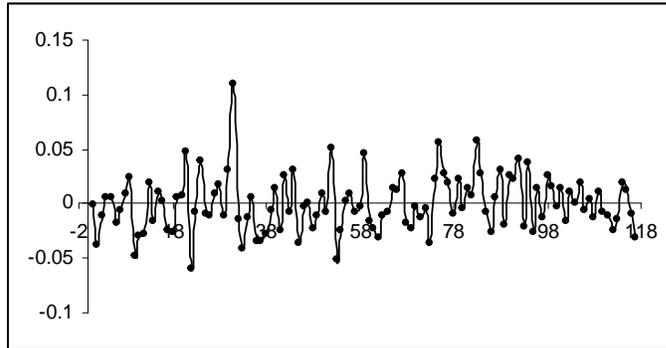


Figura 3. Residuales $\{\widehat{\theta}_t\}_{t \in T}$ del modelo lineal ajustado a Δy_t .

Para estimar la dimensión de inmersión d , empleamos el método de los falsos vecinos cercanos. Este procedimiento elige un valor del parámetro de manera que el número de falsos

vecinos cercanos sea lo más pequeño posible. El proceso de estimación se realiza a través de una rutina presente en TISEAN 2.1, Hegger *et al.* (1999).

Dado el número de observaciones con que contamos para emplear este algoritmo, solamente es posible estimar la fracción de falsos vecinos cercanos para d menor o igual a tres, por ello realizaremos nuestro análisis dentro de todo el rango factible para la dimensión de inmersión que nos permiten nuestros datos, es decir, $2 \leq d \leq 6$.

La dimensión de correlación estimada a través de TISEAN es $D = 1.46$, y sabemos que debe cumplirse que $d > 2D + 1$, por tanto la dimensión de inmersión debe ser mayor o igual a cuatro. No obstante, aplicaremos el test de Fernández *et al.* (2005) sobre todo el rango posible de valores para d , el objetivo es obtener los resultados más confiables posibles.

En cuanto al rezago óptimo, la función de información alcanza su primer mínimo local en $L = 1$, sería deseable realizar los cálculos para algunos valores de L superiores a uno, pero el número de observaciones disponibles no lo permiten, así que es un hecho sumamente relevante el que la función de información alcanzara su primer mínimo local en $L = 1$.

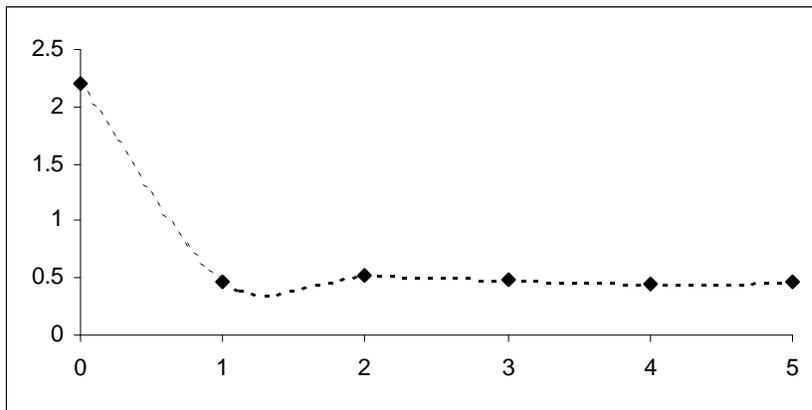


Figura 4. La función de información S .

Con el objeto de obtener la distribución muestral de $\widehat{\lambda}_{m\acute{a}x}$, tomamos la serie de tiempo $\{\widehat{\theta}_t\}_{t \in T}$ de longitud 118, y formamos el conjunto $\{B_1^d, B_2^d, \dots, B_{T-d+1}^d\}$ de bloques de longitud d para $d = 2, 3, \dots, 6$ y $L = 1$. Empleando esta familia de bloques construimos una sucesión de subfamilias de bloques tomados con reemplazo de las 118 observaciones de los residuos $\{\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \dots, \widehat{\theta}_{118}\}$. Dividimos la serie en diferentes submuestras, cada una de las cuales contiene a la precedente $\{\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \dots, \widehat{\theta}_{T_1}, \dots, \widehat{\theta}_{T_2}, \dots, \widehat{\theta}_{T_{r-1}}, \dots, \widehat{\theta}_{T_r} = \widehat{\theta}_{118}\}$. La primera submuestra, T_1 , abarca de enero de 1996 a agosto de 1999 e incluye 46 observaciones, un tamaño de muestra pequeño.

El tamaño de las submuestras T_2, T_3, \dots, T_{10} se va incrementando en siete observaciones, y estimando la distribución empírica del exponente dominante de Lyapunov mediante cien bloques bootstrap para cada T_i , $i = 1, 2, \dots, 10$ encontramos $\widehat{\lambda}(T_i)$. Finalmente, estimamos el modelo de regresión lineal

$$\widehat{\lambda}(T_i) = \alpha + \beta T_i + \psi_i,$$

donde $E[\Psi_i | T_i] = 0$, $i = 1, 2, \dots, 10$ y empleamos el parámetro $\widehat{\beta}$ para verificar si el exponente de Lyapunov crece con el tamaño de muestra.

La tabla 3 presenta la estimación del parámetro $\widehat{\beta}$, así como el exponente dominante de Lyapunov para $d = 2, 3, \dots, 6$. Entre paréntesis se muestra el estadístico t para realizar la prueba de Fernández *et al.* (2005) a un nivel de 1%. El valor crítico para rechazar la hipótesis nula de que $\widehat{\theta}_{t+1}^d = g(\widehat{\theta}_t^d)$ es un proceso determinístico con $\lambda_{m\acute{a}x} > 0$ es 2.9.

Observamos en la tabla 3 que no podemos rechazar que $\widehat{\theta}_{t+1}^d = g(\widehat{\theta}_t^d)$ sea un proceso determinístico con $\lambda_{m\acute{a}x} > 0$ cuando la dimensión de inmersión es mayor o igual a cuatro. Esto nos dice que existe evidencia para afirmar que el exponente dominante de Lyapunov positivo no crece con el tamaño de muestra, y por tanto $\{\widehat{\theta}_t\}_{t \in T}$ arroja indicios de que el sistema dinámico $w_t = f(w_{t-1})$ en el cual se encuentra inmerso el TCR es caótico ruidoso, en el sentido definido por Nychka *et al.* (1992).

Dimensión de inmersión, L=1 (Bloques)	Exponente dominante de Lyapunov estimado (muestra completa)	Coefficiente estimado (test de Fernández)
2	0.57	0.021 (14.40)
3	0.34	0.018 (5.30)
4	0.12	-0.019 (-4.09)
5	0.10	0.041 (2.01)
6	0.11	0.050 (1.98)

Tabla 3. Test para el exponente de Lyapunov estimado

En un sistema caótico, la estimación de la dimensión de correlación no crece al aumentar la dimensión de inmersión por encima de cierto valor. Si es aleatorio, la dimensión de correlación crecerá de forma indefinida ante variaciones de la dimensión de inmersión, es decir, la estimación de un valor finito para D , en este caso $D = 1.46$, nos ofrece evidencia de la existencia de un atractor para el sistema $\hat{\theta}_{t+1}^d = g(\hat{\theta}_t^d)$, ya que para un proceso aleatorio D es infinito. No obstante, debemos señalar que el número reducido de observaciones disponibles no permite calcular D para valores elevados de d .

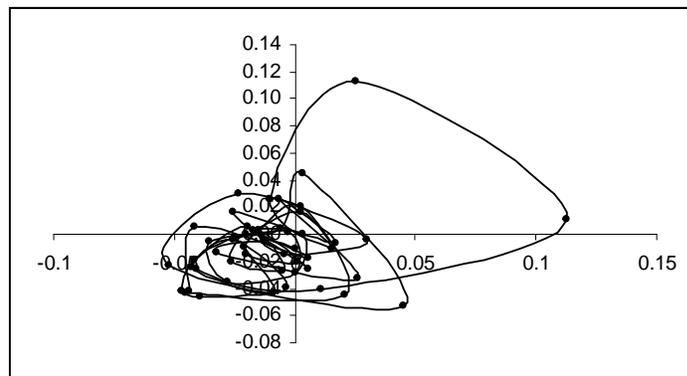


Figura 5. Aproximación al atractor del sistema descrito por la función g .

De igual forma, aunque el test de Fernández se realizó con pocas observaciones, nos motiva a seguir trabajando en esta dirección, ya que hemos encontrado evidencia de dinámica caótica para el sistema dinámico $w_t = f(w_{t-1})$ del tipo de cambio real. En la figura 5 se presenta una aproximación al atractor en \mathbb{R}^2 tomando como dimensión de inmersión $d = 4$ y $L = 1$.

5. Conclusiones

En este trabajo analizamos la serie mensual del Índice del Tipo de Cambio Real Multilateral, entre enero de 1996 y noviembre de 2005. Empleamos un nuevo test, propuesto por Fernández *et al.* (2005). Esta prueba ha sido robusta cuando se comparan procesos estocásticos y determinísticos ya conocidos, se basa en la estabilidad del exponente dominante de Lyapunov estimado para diferentes tamaños de muestra, y permite probar la existencia de un exponente dominante de Lyapunov positivo.

Este test junto con la estimación de la dimensión de correlación D sugieren que el sistema dinámico $w_t = f(w_{t-1})$ en el que se encuentra inmerso el tipo de cambio real es caótico¹⁷, en el sentido descrito por Nychka *et al.* (1992).

Este sistema dinámico, $w_t = f(w_{t-1})$, el cual presenta sensibilidad a las condiciones iniciales y cuyas trayectorias convergen a un atractor nos dice que el pronóstico del TCR es factible sólo en el corto plazo y que, aunque existen puntos de equilibrio para el sistema $w_t = f(w_{t-1})$, la evolución del TCR se ve drásticamente afectada por cualquier perturbación, ya que lo desvía de su valor inicial en forma permanente.

La evidencia encontrada bajo este test sugiere que es posible modelar los movimientos del tipo de cambio real mediante herramientas de la teoría de sistemas dinámicos. No obstante, estimar de manera consistente la función g mediante la función v para aproximar el comportamiento del tipo de cambio real es una tarea pendiente. En ese sentido, este trabajo busca

¹⁷Es importante señalar que los valores de d y L que hemos estimado se encuentran dentro del rango empleado por Serletis y Gogas (2000) para otros países de la OCDE.

ser el comienzo de investigaciones futuras que generen modelos de pronóstico para estudiar la influencia del TCR en el funcionamiento global de la economía.

6. Bibliografía

Abarbanel, H.D.I.(1996): *Analysis of observed chaotic data*, Institute for nonlinear Science. Springer-Verlag, New York, U.S.A.

Bajo-Rubio, O., Fernández-Rodríguez F. y Sosvilla-Rivero, S. (1992): “Chaotic behavior in exchange-rate series: First results for the Peseta-U.S. Dollar case”, *Economic Letters* 39, 207-211.

Bask, M. (1998): “Deterministic chaos in exchange rates?”, *Umea Economic Studies* No. 465c, Department of Economics, Umea University, Sweden.

Bask, M. y Gençay, R. (1998): “Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents”, *Physica D* 114, 1-2.

Brock, W.A, Dechert, W.D. y Scheinkmam, J.A., LeBaron, B. (1996): “A test for independence based on the correlation dimension”, *Econometric Review*, 15(3), 197-235.

Dechert, W. y Gençay, R. (1992): “Lyapunov exponents as a nonparametric diagnostic for stability analysis”, *Journal of Applied Econometrics*, 7, S41-S60.

Devaney, R.L. (1989): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, U.S.A.

Eckmann, J.P. y Ruelle, D. (1985): “Ergodic theory of chaos and strange attractors”, *Reviews of Modern Physics* 57, 617-650.

Engle, R. F. (1982): “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation”, *Econometrica*, 50, 987–1008.

Farmer, J. D. y Sidorowich, J. (1987): “Predicting chaotic time series”, *Phys. Rev. Lett.* 59, 845-853.

Fernández F., Sosvilla, S. y Andrada J. (2003): “A new Test for Chaos Dynamics Using Lyapunov Exponents”, Documento de trabajo, FEDEA.

Fernández F., Sosvilla, S. y Andrada J. (2005): “Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents”, *Journal of Applied Econometrics*, 20, 7, 911-930.

Fraser, A. M. y Swinney, H. L. (1986): “Independent coordinates for strange attractors from mutual information”, *Phys. Rev. A* 33, 1134-1149.

Gençay, R. (1996): “A statistical framework for testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents”, *Physica D* 89, 261-266.

Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983): “Characterization of Strange Attractors”, *Physical Review Letters* 50, 346-394.

Hamilton, James D. (1994): *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New York, U.S.A.

Hastie, T., Tibshirani, R. y Friedman, J. (2001): *The elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference and Prediction*, Springer-Verlag, New York, U.S.A.

Hegger, R., Kantz, H. y Schreiber, T. (1999): “Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package”, *Chaos* 9, 413-435.

- Holden Arun V. (1986): *Chaos*, Princeton University Press, New Jersey, U. S. A.
- Kullback, S. y Leibler, R. A. (1951): “On information and sufficiency”, *Annals of Mathematical Statistics*, 22: 79-86.
- Ljung, G. M. y Box, G.E.P. (1978): “On a measure of lack of fit in time series models”, *Biometrika* 65, 297-303.
- Mankiw N. Gregory (2000): *Macroeconomía*, Antoni Bosch Editor, Barcelona, España.
- Newey, W. y West, K. (1987): “A simple positive definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix”, *Econometrica* 55, 703-705.
- Nychka, D. et al (1992): “Finding Chaos in Noisy Systems”, *Journal of Royal Statistical Society*, B, 54, 399-426.
- Oseledec, V. (1968): “A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems”, *Transactions of the Moscow Mathematical Society* 19, 197-221.
- Peitgen, Heinz-Otto et al (1992): *Chaos and Fractals*, Springer –Verlag, New York, U.S.A.
- Pagan, Adrian y Ullah, Aman (1999): *Nonparametric Econometrics*, Cambridge University Press, New York, U.S.A.
- Rosenstein, M. T. et al. (1993): “A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets”, *Physica D* 65, 117-134.
- Ruelle, D. (1989): *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, Cambridge.

Serletis, A. y Periklis, Gogas (2000): “Purchasing power parity, nonlinearity and chaos”, *Applied Financial Economics* 10, 615-622.

Serletis, A. y Zimonopoulos, G. (1997): “Breaking trend functions in real exchanges rates: evidence from seventeen OECD countries”, *Journal of macroeconomics*, 19, 781-802.

Shintani, M. and O. Linton (2004): “Nonparametric neural network estimation of Lyapunov exponents and a direct test for chaos”, *Journal of Econometrics*, 120, 1-33.

Shintani, M. and O. Linton (2003): “Is there chaos in the world economy? A Nonparametric test using consistent standard errors”, *International Economic Review* 44, 1, 331-358

Takens, F. (1981): *Detecting strange attractors in turbulence*, Springer-Verlag, Berlin.

Wolf, A. et al (1985): “Determining Lyapunov exponents from a time series”, *Physica D*, 16, 285-317.