



EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

**Valuación de opciones utilizando la fórmula
de Feynman-Kac**

EDGAR RODRIGO HERNÁNDEZ AVILA

PROMOCIÓN 2009-2011

ASESOR:

JOSÉ MIGUEL TORRES GONZÁLEZ

Junio 2011

Resumen

Este trabajo pretende avanzar en la formalización del modelo de Black- Scholes (1973), un modelo que si bien ha sido ampliamente estudiado en la literatura de economía financiera, la ecuación diferencial parcial subyacente sugiere que es casi imposible que algún día el modelo pueda ser considerado completamente explorado. En este trabajo se examinan tres aspectos de este modelo que han recibido poca atención en la literatura. En primer lugar, se deriva la solución de su ecuación utilizando la transformada de Fourier, y no se limita a extraer la solución de un formulario de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales; segundo, se prueba la unicidad de dicha solución, algo que si bien no es nuevo en la literatura matemática de ecuaciones diferenciales parciales, no es un tema tratado en la literatura de economía financiera; y tercero, se usa la fórmula de Feynman-Kac para hacer una pequeña extensión del modelo de Black-Scholes. En concreto el uso de la fórmula de Feynman-Kac permite valuar opciones europeas con tasa de interés variable, lo que permite realizar un análisis de sensibilidad para el precio de la opción con respecto a la especificación del modelo de la tasa de interés. Una aportación importante del uso de la fórmula de Feynman-Kac es la obtención de una ecuación estocástica para el logaritmo del precio de la opción en donde el componente tendencia de este precio parece ser sustituido por la tasa de interés del activo libre de riesgo. Si bien es cierto que en la solución original de BS este componente de tendencia no aparecía, este hallazgo lleva a un algoritmo computacional que permite valuar la opción con importantes ahorros en tiempo. Hasta donde se sabe, este último resultado no está documentado en la literatura de finanzas.

Índice General

Introducción	1
I Desarrollo Teórico	5
Ecuación de Black-Scholes	5
Solución explícita de la ecuación Black-Scholes utilizando la transformada de Fourier.	8
Fórmula de Feynman-Kac	18
II Métodos Numéricos	21
Modelos numéricos	22
Modelo 1 (FK1).....	23
Modelo 2 (FK2).....	24
Modelo 3 (FK3).....	24
III Resultados de las simulaciones numéricas	25
Tasa de Interés dependiente del tiempo	30
Modelo $2r(t)$ (FK2r(t))	30
IV Conclusiones.....	38
Bibliografía	40
Apéndice	42
A1. Opciones	42
A2. Movimiento browniano	43
A3. Lema de Itô.....	43
A4. Características	44
A5. Solución al problema de la ecuación de difusión con valor inicial.	44
A6.Teorema de la divergencia	47
A7.Paridad put- call.....	47
A8.Integral de trayectoria.....	48

Índice de Figuras

Figura 1 Trayectorias para el logaritmo del precio de la acción.....	23
Figura 2 N números generados para el precio de la acción	24
Figura 3 N números generados para el logaritmo del precio de la acción.....	25
Figura A 1 Funciones de pago para opciones de compra y opciones de venta europeas.	42
Figura A 2 Una posible trayectoria uniendo los puntos x_i	49

Índice de Tablas

Tabla 1.1 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac	26
Tabla 1.2 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac	26
Tabla 1.3 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac	26
Tabla 2 Tiempos de cómputo.....	28
Tabla 3 Comparación numérica de BS y FK2(10M).....	29
Tabla 4 .1 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac con $r(t)$	31
Tabla 4 .2 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac con $r(t)$	31
Tabla 4 .3 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac con $r(t)$	31
Tabla 5 Cambios en el error de valuación en puntos base en $T=2$	35
Tabla 6 Cambios en el error de valuación en puntos base en $m=0.04$ y $m=-0.04$	36
Tabla 7 Cambio en el error de valuación en puntos base en $(m=0.04, T=2)$ y $(m=-0.4, T=2)$	36
Tabla 8 Análisis al margen	37

Índice de Gráficas

Gráfica 1.1 Puntos base entre BS y FK para el tiempo $T=0.25$	27
Gráfica 1.2 Puntos base entre BS y FK para el tiempo $T=0.5$	27
Gráfica 1.3 Puntos base entre BS y FK para el tiempo $T=1$	27
Gráfica 2 Puntos base de la diferencia entre BS y FK2 (10M).....	29
Gráfica 3.1 Precio de la Opción con precio de la acción inicial $S=25$	32
Gráfica 3.2 Precio de la Opción con precio de la acción inicial $S=50$	32
Gráfica 3.3 Precio de la Opción con precio de la acción inicial $S=75$	32
Gráfica 4 Error de valuación en puntos base. $S=25, S=50$ y $S=75$	33
Gráfica 5.1 Puntos base con respecto a BS para precio inicial de la acción $S=25$	34
Gráfica 5.2 Puntos base con respecto a BS para precio inicial de la acción $S=50$	34
Gráfica 5.3 Puntos base con respecto a BS para precio inicial de la acción $S=75$	34

Introducción

En los últimos años la importancia de los derivados no ha menguado en los mercados financieros. Los futuros y las opciones son actualmente comercializados en las bolsas de valores de muchos países. Contratos *forward*, *swaps* y muchos tipos de opciones son regulados para su comercio, por instituciones financieras o administradores de fondos, fuera de bolsa de valores, constituyendo un mercado que lleva por nombre *over-the-counter* (OTC) (Hull, 2006).

En las últimas décadas y sobre todo en la primera década de este siglo el crecimiento del mercado OTC ha sido sobresaliente. En perspectiva, la actividad en los mercados OTC en 2009 fue de \$ 1,198 billones de dólares¹ -cifra superior a \$ 16.2 billones de dólares que era la deuda conjunta de Alemania, Francia, Italia, España, Canadá y Estados Unidos de Norteamérica en 2009² y muy superior al PIB de EUA y México de ese mismo año, con 14.1 y 0.87 billones de dólares respectivamente.

Los derivados son un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otras variables subyacentes básicas, por ejemplo, la opción sobre una acción, es un derivado cuyo valor depende del precio de la acción. En el mercado de derivados regulados, los individuos comercian con contratos estandarizados definidos por la bolsa de valores. Los derivados regulados existen desde hace mucho tiempo: en 1848 el *Chicago Board of Trade* se estableció para brindar estándares entre agricultores y comerciantes sobre la cantidad y calidad de granos que comerciaban, poco tiempo después surgió el primer contrato a futuro; y en 1919 otro futuro regulado fue establecido, por el *Chicago Mercantile Exchange* (Hull, 2006).

El *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) comenzó comercializando contratos de opciones tipo *call* sobre 16 acciones en 1973, y fue hasta 1977 cuando comenzó a comercializar opciones tipo *put*. Para 2006, la CBOE comerciaba opciones para más de 1200 acciones y muchos índices diferentes (Hull, 2006), pero las opciones son instrumentos que surgieron mucho tiempo antes, como ejemplos tenemos la descripción de Joseph de la Vega de las opciones en la bolsa de Ámsterdam en 1688 (Vega, 1688).

¹ Fuente: Estadísticas de “The Bank for International Settlements” (Banco de Pagos Internacionales), <http://www.bis.org/statistics/derstats.htm>

² Fuente: Estadísticas de “The World Bank” (Banco mundial), <http://search.worldbank.org/data>

En la actualidad existe una gama muy diversa de derivados. Hay derivados sobre créditos, seguros, electricidad y hasta derivados sobre el clima. Los dos primeros jugaron un papel muy importante en la crisis financiera del 2007, es por esta razón que muchos autores consideran que las teorías detrás de los mercados financieros son irrelevantes para las condiciones actuales de los mismos, en palabras de Fox (2009, pp. 320):

La hipótesis de los mercados eficientes, el modelo de precios de bienes de capital, el modelo de fijación de precios de opciones de Black-Scholes, y todos los demás elementos principales de las finanzas racionales modernas, surgieron hacia el final de una larga era de estabilidad de los mercados, caracterizada por una regulación gubernamental y los recuerdos de los que habían sobrevivido a la depresión. Estas teorías... eran hasta cierto punto el artefacto de un mercado regulado de una era financiera relativamente conservadora y que allanó el camino para la desregulación y la exuberancia salvaje. Ahora parece que estamos yendo en reversa.

Por otra parte existen quienes piensan que eventos como las crisis son eventos impredecibles y no necesariamente representativos del futuro, es decir, no todas las teorías trabajadas hasta el momento son irrelevantes, en palabras de Nassim (2008): “*Confundir una observación ingenua del pasado con algo definitivo o representativo del futuro es la sola y única causa de nuestra incapacidad para comprender al Cisne Negro*”.

Por el gran tamaño que en los mercados financieros tienen los derivados en general y las opciones en particular y por la relevancia de estos instrumentos en la economía y en las crisis, se considera que su precisa valuación es indispensable. De hecho, numerosos trabajos con el objetivo de valorar opciones han surgido con el paso del tiempo. En 1973 surge el trabajo de Black y Scholes y posteriormente el de Merton para valorar opciones, por estos trabajos en 1997 Scholes y Merton recibieron el premio Nobel. Pero si bien el trabajo de Black-Scholes fue considerado el primero en valorar opciones, ya existía un intento previo para el análisis cuantitativo del precio de las opciones. Tal es el caso del trabajo de Bachelier (1900), en el cual estudió las fluctuaciones de los precios en la bolsa parisina y dedujo una fórmula para valorar opciones asumiendo que el precio de las acciones seguían un movimiento browniano.

Es hasta 1988 cuando Dash (1988) utiliza la técnica de integral de trayectoria para resolver la ecuación de Black-Scholes (BS) y valorar el precio de opciones por primera vez. Si bien la solución de Dash es una solución analíticamente correcta, no es una solución directamente evaluable, debido a que se tienen que evaluar integrales multidimensionales, es por eso que una

diversa gama de trabajos recientes exploran distintas formas de evaluar este tipo de soluciones. El trabajo más completo para entender el panorama general de la valuación de opciones es quizá el realizado por Broadie y Detemple (2004), debido a que los autores realizan una revisión de la literatura de la valuación de opciones desde su origen.

El trabajo de Campolieti y Makarov (2006) utiliza el método de Monte Carlo y procesos de difusión de Bessel para evaluar la integral de trayectoria para modelos de volatilidad no lineal, en la valuación de opciones tipo europea. El trabajo de Chiarella, El-Hassan y Kucera (2007) valúa opciones tipo americanas y tipo europeas utilizando expansión de series de Fourier-Hermite para evaluar la integral de trayectoria. Ellos compararon sus resultados usando la solución particular propuesta por Black-Scholes en su trabajo original, así como, con los resultados obtenidos de los métodos binomiales, obteniendo valores muy aproximados.

En el trabajo de Devreese, Lemmens y Tempere (2009), los autores derivan una solución analítica cerrada, es decir, que se puede evaluar, para el precio de opciones asiáticas utilizando el formalismo de la integral de trayectoria, y realizan una comparación de esta solución con la obtenida vía una simulación Monte Carlo encontrando que la simulación presenta un error de 0.3%. Finalmente el trabajo de Salazar y Quimbay (2009) simulan el precio de una opción tipo europea utilizando el método de Monte Carlo para evaluar la integral de trayectoria, basándose en el modelo de Garman (1976) y Merton (1973)³.

Este trabajo pretende avanzar en la formalización del modelo de Black-Scholes (1973) y utilizar la fórmula de Feynman-Kac (FK) para valorar opciones tipo *call* europeas con tasa de interés, del activo libre de riesgo, dependiente del tiempo, cubriendo cuatro objetivos primordiales:

1. Presentar el desarrollo completo de la derivación de la solución a la ecuación de Black-Scholes (BS) utilizando la transformada de Fourier y probar la unicidad de la solución, a diferencia de la del trabajo original de Black-Scholes que únicamente la presentan.
2. Mostrar que la fórmula de Feynman-Kac es solución de la ecuación de BS.

³ Este modelo es una extensión del modelo de Black-Scholes ya que en el precio de la opción se incorpora una volatilidad estocástica.

3. Utilizar métodos numéricos para valorar opciones tipo *call* europeas con la fórmula de FK.
4. Analizar el efecto en el precio de la opción ante una tasa de interés variable y compararlo con el precio que arrojó Black-Scholes, para lo cual se realiza un análisis en el cambio del error de valuación expresado en puntos base, lo que permite identificar las distintas sensibilidades que presenta el precio de la opción.

La fórmula de FK que permite encontrar la solución a ecuaciones diferenciales parciales, surgió de resolver la ecuación de onda⁴ a través del concepto de la integral de trayectoria de Feynman (Feynman, 1948). La integral de trayectoria, no es otra cosa que la amplitud de probabilidad, es obtenida a partir de la suma de las contribuciones de todas las posibles trayectorias descritas por el movimiento estocástico de una partícula, la cual se desplaza del punto a al punto b (Feynman y Hibbs, 1965).

La similitud entre el comportamiento de una partícula y el precio de una acción comienza, cuando suponemos que la trayectoria del precio de la acción también sigue un movimiento estocástico. Así, la función de onda⁵ asociada a la partícula que depende de la posición de la partícula y del tiempo, y que satisface la ecuación de onda, presenta una analogía, desde el punto de vista matemático, al precio de la opción, el cual satisface la ecuación de BS y es función del precio de la acción y el tiempo. Debido a esta analogía pensar en el uso de la fórmula de FK para resolver la ecuación de BS es directo.

La estructura del trabajo está constituida de cuatro partes: *I Desarrollo Teórico*, *II Métodos Numéricos*, *III Resultados de las simulaciones numéricas* y *IV Conclusiones*. En el *Desarrollo Teórico* se plantea el problema de obtener una expresión para el precio de la opción, lo cual lleva a la ecuación de BS, se deriva, en este trabajo, la solución de la ecuación de BS utilizando la transformada de Fourier, también se prueba su unicidad y finalmente se demuestra, en este trabajo, que la fórmula de Feynman-Kac es solución de la ecuación de BS.

En *Métodos Numéricos* se aborda la idea detrás del método de Monte Carlo, se presentan los tres modelos de simulaciones numéricas, que se desarrollaron en este trabajo, para valorar a través de la fórmula de Feynman-Kac la opción, con tasas de interés del activo libre de riesgo,

⁴ La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

⁵ En la mecánica cuántica la función de onda, es una función de probabilidad, la cual indica la probabilidad de encontrar una partícula en la posición x al tiempo t .

contante. En los *Resultados de las simulaciones numéricas* se presentan las comparaciones numéricas de la solución explícita de la ecuación de BS *versus* la solución, utilizando los tres modelos desarrollados, con el objetivo de seleccionar el mejor modelo, para modificarlo y así valorar opciones con una tasa de interés variable.

La parte de *Conclusiones* retoma los puntos más importantes obtenidos en este trabajo, en especial, destaca que el precio de la opción, presenta una sensibilidad mayor ante cambios en el término de tendencia de la tasa de interés *versus* cambios en el tiempo de ejercicio de la opción y presenta una sensibilidad negativa para el precio de la opción ante cambios en el precio inicial de la acción, además se discuten posibles extensiones al trabajo.

I Desarrollo Teórico

En esta sección se obtiene de forma intuitiva la ecuación BS a partir del planteamiento del problema de obtener una expresión para el precio de la opción, que tiene como activo subyacente una acción. Se deriva la solución de la ecuación de BS utilizando la transformada de Fourier y se prueba su unicidad. Finalmente se demuestra, en esta sección, que la fórmula de Feynman-Kac es solución de la ecuación de BS.

Ecuación de Black-Scholes

Para derivar la ecuación de BS es necesario suponer un mercado en el que tengamos una acción, una opción y un activo libre de riesgo, entonces tenemos las siguiente variables: $S(t)$ el precio de una acción de la compañía i en el tiempo t , una opción *call* con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T , la cual le da a su propietario el derecho pero no la obligación de comprar una acción de i en T a precio K (ver apéndice A1 figura A1).

Lo que necesitamos encontrar es una expresión para $C(S, t)$, donde $C(S, t)$ es el precio de la opción el día de hoy. Para esto necesitamos los siguientes supuestos adicionales:

1. Rendimiento de la acción $dS/S = \mu dt + \sigma dz$ (1)

donde $dz \sim N(0, \sqrt{dt})$, (la $\sqrt{dt}$ es la desviación estándar).

2. Es posible invertir en deuda sin riesgo, que pagan $r(t) dt$ (notemos que la tasa de interés no tiene que ser constante).

3. No es posible el arbitraje⁶.

Para encontrar la solución a nuestro problema realizamos los siguientes pasos:

1. Hay tres activos en la economía: acciones de la compañía i , opciones *call* (sobre acciones de la compañía i), y el activo libre de riesgo. Los inversionistas invierten una fracción α de su riqueza en opciones, el resto en acciones. Por tanto, el rendimiento del portafolio es $(1 - \alpha) dS/S + \alpha dC/C$.

2. Por el lema de Itô (ver apéndice A3) podemos expresar el diferencial del precio de la opción como:

$$dC = \left(C_t + \mu S C_s + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 C_{ss} \right) dt + (\sigma S) C_s dz \equiv \tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dz \quad (2)$$

Donde $\tilde{\mu} = \left(C_t + \mu S C_s + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 C_{ss} \right)$ y $\tilde{\sigma} = (\sigma S) C_s$, para aclarar la notación $C_t = \frac{\partial C}{\partial t}$, $C_s = \frac{\partial C}{\partial S}$ y $C_{ss} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ (esta será la notación a seguir para representar derivadas parciales).

Por tanto, sustituyendo (1) y (2) el rendimiento del portafolio está dado por:

$$(1 - \alpha)(\mu dt + \sigma dz) + \alpha \frac{(\tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} dz)}{C} = \left[(1 - \alpha)\mu + \alpha \frac{\tilde{\mu}}{C} \right] dt + \left[(1 - \alpha)\sigma + \alpha \frac{\tilde{\sigma}}{C} \right] dz$$

3. Elijamos α tal que $(1 - \alpha)\sigma + \alpha \frac{\tilde{\sigma}}{C} = 0$, es decir, el nuestro es un portafolio sin riesgo.

Por tanto, no-arbitraje implica que $(1 - \alpha)\mu + \alpha \frac{\tilde{\mu}}{C} = r(t)$, entonces

$$\alpha = \frac{(r(t) - \mu)C}{\tilde{\mu} - \mu C} = \frac{\sigma C}{\sigma C - \tilde{\sigma}}$$

Sustituyendo la definición de $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\sigma}$ en la ecuación anterior obtenemos

$$r(t)C - r(t)SC - \mu C + \mu S C_s = C_t + \mu S C_s + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 C_{ss} - \mu C$$

⁶ Se refiere a que nada que tenga rendimientos positivos puede valer cero (Cochrane, 2005).

$$\begin{aligned} \Rightarrow r(t)C - r(t)SC_S &= C_t + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 C_{SS} \\ \Rightarrow C_t + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 C_{SS} - r(t)C + r(t)SC_S &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación (3) es la ecuación de Black-Scholes del trabajo original de 1973 con la salvedad de que aquí la tasa de interés puede depender del tiempo ($r(t)$), mientras que en Black-Scholes es constante.

En $t=T$, el valor de la opción *call* esta dado por el pago de la opción:

$$C(S(T), T) = \max(S(T) - K, 0) \equiv \Phi(S(T)) \quad (4)$$

Esta es una condición final para la ecuación diferencial (3). Para las condiciones espaciales, es decir, las condiciones de frontera para el precio de la opción cuando el precio de la acción es $S = 0$ y cuando $S \rightarrow \infty$ son:

1. Si $S = 0$ podemos ver en la ecuación (1), que el cambio del precio $dS = 0$, lo que indica que S nunca cambia, entonces el pago de la opción es 0

$$C(S, t) = 0$$

2. Para $S \rightarrow \infty$ el valor de la opción tiende al precio de la acción.

$$C(S, t) \sim S \text{ cuando } S \rightarrow \infty$$

estas son las condiciones de frontera para una opción *call*⁷.

La ecuación de BS presentada en (3) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, que puede verse como un caso particular de la ecuación general dada por:

$$a(x, y)U_{xx} + b(x, y)U_{xy} + c(x, y)U_{yy} + d(x, y)U_x + e(x, y)U_y + f(x, y)U + g(x, y) = 0$$

Siendo U, a, b, c, d, e, f y g funciones que depende de x e y , donde el discriminante $b^2 - 4ac$ de esta ecuación general nos dice, si la ecuación es hiperbólica (con dos familias de características⁸), parabólica (una familia de características reales) o elíptica (sin características reales).

⁷ Estas condiciones de frontera aparecen en (Wilmott, 1994).

⁸ Las características son las curvas en las coordenadas de transformación (ξ, ζ) que se utilizan para transformar la ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria (ver apéndice A4).

Para la ecuación de BS tenemos que $b^2 = 0$, $a = \frac{1}{2}(\sigma S)^2$ y $c = 0$, Entonces la ecuación de BS es parabólica, hecho importante que permite transformar la ecuación de BS en la ecuación de difusión o de calor (esto será de gran ayuda en la siguiente sección), ya que esta ecuación también es parabólica, la ecuación de difusión es la ecuación más sencilla (es decir cuenta con menos términos), y su solución han sido bien estudiada.

Solución explícita de la ecuación Black-Scholes utilizando la transformada de Fourier.

Para encontrar la solución utilizando la transformada de Fourier de la ecuación de BS es indispensable primero transformar esta ecuación en la ecuación de difusión, por lo que, a continuación hacemos una breve descripción de esta ecuación y el planteamiento del problema de valor inicial.

La ecuación de difusión o también llamada ecuación de calor está dada por:

$$u_t = u_{xx} \quad (5)$$

Esta ecuación es utilizada para los problemas de flujos o de difusión principalmente de calor en un medio continuo, pero no es su único uso, también es utilizada para la difusión de sustancias en un medio soluble.

Sus principales propiedades son⁹:

1. Es una **ecuación lineal** es decir si u_1 y u_2 son soluciones entonces $au_1 + bu_2$ también lo es para cualquier constante a y b.
2. Es una **ecuación de segundo orden** debido a que el término derivado de orden superior es la segunda derivada parcial u_{xx}
3. Es una ecuación **parabólica**, el discriminante de la ecuación es igual a cero, las características están dadas por $t = constante$, entonces la información se propaga a lo largo de esta línea en el espacio (x, t) .
4. Sus soluciones son funciones **analíticas** de x , es decir, para cualquier valor t mayor al tiempo inicial, $u(x, t)$ considerada como función de x tiene una serie de potencias convergente en términos de $(x - x_0)$, para algún x_0 fuera de la frontera, para

⁹ Las propiedades de la ecuación de calor fueron tomadas Wilmott. (1994) Cap.4

propósitos prácticos podemos pensar que la solución de la ecuación $u(x, t)$ es suave¹⁰ en x pero probablemente discontinua en t a causa de las condiciones de frontera.

El problema de valor inicial en el intervalo infinito para una función $u(x, t)$ que satisface la ecuación de difusión, es el descrito a continuación.

Tomando la ecuación (5) para el intervalo infinito (Wilmott, 1994)

$$u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (6)$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (7)$$

Donde

- $u_0(x)$ es bien comportada¹¹ (8)

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) e^{-ax^2} = 0$ para toda $a > 0$ (9)

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) e^{-ax^2} = 0$ para toda $a > 0$ (10)

El problema de valor inicial está bien definido con una condición inicial y no necesita ninguna condición de frontera debido a que el dominio en x no se encuentra acotado.

La solución es

$$u(x, t) = 1/2\sqrt{\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} ds u_0(s) e^{-(x-s)^2/4t} \quad (11)$$

Con condición inicial

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds u_0(s) \delta(s - x) \quad (12)$$

La deducción de la ecuación (11) se obtendrá más adelante utilizando la transformada de Fourier, una manera alternativa para encontrar la solución del problema de valor inicial se

¹⁰ Continua y sin saltos.

¹¹ Basta una función discontinua con un número de saltos finito para decir que la función es bien comportada Wilmott. (1994) Cap.4, por tanto una función continua y diferenciable de orden 2 es bien comportada.

encuentra de manera explícita en el apéndice A5. El problema de valor inicial es relevante para nuestro análisis de la ecuación de BS como se muestra más adelante.

Retomando el problema de encontrar la solución de la ecuación de BS, a través de la transformada de Fourier, se realiza un cambio de variable que permita hacer a la ecuación diferencia adimensional¹².

Dada la ecuación de BS (3)

$$C_t + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 C_{SS} - r(t)C + r(t)SC_S = 0$$

y el siguiente cambio de variables

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad C = Kv(x, \tau)$$

Donde x, τ son las nuevas variables de las cuales depende el precio de la opción esto transforma la ecuación (3) en

$$v_\tau = v_{xx} + (k_1 - 1)v_x - k_1 v \quad (13)$$

Donde $k_1 = r/2\sigma^2$, se considera la tasa de interés r como constante, no tiene dimensiones y podemos ver que ningún término se encuentra multiplicado por ninguna variable independiente. La condición final se transforma en la condición inicial

$$v(x, 0) = m a x(e^x - 1, 0).$$

Note que esta ecuación particular sólo cuenta con un parámetro k_1 , a diferencia de la ecuación original que dependía de cuatro parámetros K, T, σ^2 ni r . La ecuación anterior se asemeja aun más a la ecuación de difusión o ecuación de calor y puede ser llevada a ésta con el siguiente cambio de variable

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau).$$

Entonces la ecuación (13) se transforma en

¹² Es decir, que sus parámetros no presenten unidades este cambio de variable se encuentra en Wilmott (1994) Cap. 5.

$$\beta u + u_\tau = \alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx} + (k_1 - 1)(\alpha u + u_x) - k_1 u \quad (14)$$

con α y β constantes que pueden ser determinadas igualando la ecuación de difusión (15) a la ecuación (14).

$$u_\tau = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \tau > 0 \quad (15)$$

Podemos obtener una ecuación sin u escogiendo el término

$$\beta = \alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1$$

y podemos obtener la ecuación sin u_x con la siguiente ecuación

$$0 = 2\alpha + (k_1 - 1)$$

entonces

$$\beta = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2 \quad y \quad \alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1)$$

sustituyendo en la función v obtenemos

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1 - 1)x - \frac{1}{4}(k_1 + 1)^2 \tau} u(x, \tau)$$

donde $u(x, \tau)$ satisface la ecuación de difusión (15) con condición inicial dada por la ecuación (16) (Wilmott, 1994)

$$u_0(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k_1 + 1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1 - 1)x}, 0). \quad (16)$$

Entonces se ha convertido el problema de Black-Scholes a un problema de valor inicial tal y como lo planteamos anteriormente. Ahora para encontrar la solución de la ecuación (15) se puede utilizar la transformada de Fourier, sea una $u(x, \tau) \mapsto \tilde{u}(\theta, \tau)$, entonces (Steele, 2001)

$$\tilde{u}(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\theta x} u(x, \tau)$$

esta transformada de Fourier tiene las siguientes propiedades¹³

¹³ Ver Levi (1995).

1. $\tilde{u}_\tau(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\theta x} u_\tau(x, \tau)$
2. $\tilde{u}_x(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\theta x} u_x(x, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N dx e^{i\theta x} u_x(x, \tau) =$
 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ [e^{i\theta x} u(x, \tau)]_{-N}^N + i\theta \int_{-N}^N dx e^{i\theta x} u(x, \tau) \right\} =$
 $0 + i\theta \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\theta x} u(x, \tau) = i\theta \tilde{u}(\theta, \tau)$
3. $\tilde{u}_{xx}(\theta, \tau) = i\theta \tilde{u}_x(\theta, \tau) = i\theta [i\theta \tilde{u}(\theta, \tau)] = -\theta^2 \tilde{u}(\theta, \tau)$

Entonces la ecuación diferencia dada en (15) queda escrita como

$$\tilde{u}_\tau(\theta, \tau) = -\theta^2 \tilde{u}(\theta, \tau) \quad (17)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial

$$\tilde{u}(\theta, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\theta x} u(x, 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\theta x} f(x) = \tilde{f}(\theta)$$

La solución general de la ecuación (17) está dada por:

$$\tilde{u}(\theta, \tau) = h(\theta) e^{-\theta^2 \tau}$$

Donde $h(\theta)$ queda determinada por las condiciones iniciales dando $h(\theta) = \tilde{f}(\theta)$.

Ahora es necesario encontrar la transformada inversa de $\tilde{u}(\theta, \tau)$, para la cual, nos basamos en dos hechos¹⁴, el primero es la convolución (definida por la siguiente ecuación) de la transformación de la multiplicación, esto es que si

$$\varphi(x) = p * q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds p(x-s)q(s) = \int_{-\infty}^{\infty} ds p(s)q(x-s)$$

donde p y q son funciones, entonces

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \tilde{p}(\theta)\tilde{q}(\theta)$$

Y el segundo hecho, es el que dice que la transformada de Fourier de la función de densidad normal con media cero y con varianza 2τ es $e^{-\theta^2 \tau}$.

Entonces como $\tilde{u}(\theta, \tau)$ puede verse como el producto de dos funciones transformadas de las cuales conocemos sus funciones de transformación inversa podemos escribir:

¹⁴ Ver Steele (2001) para más detalles.

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} ds f(x-s) \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-y^2/4\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} ds f(s) \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-(x-s)^2/4\tau}$$

Entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} ds u(s, 0) e^{-(x-s)^2/4t}$$

la solución de la ecuación de difusión dada por (15) es:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} ds u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau}. \quad (18)$$

Es fácil notar que la solución (18) y la condición inicial (16) satisfacen las condiciones del problema del valor inicial planteado en las ecuaciones (8)-(10) lo cual se demostrará más adelante. De esta manera, al mostrar que esta solución al problema de valor inicial es única equivale, dado todo el desarrollo planteado, a que la solución de la ecuación de BS es única. Para mostrar que esta solución es única se utilizará el siguiente teorema:

Teorema de unicidad

Sean $u(x, t)$ y $\hat{u}(x, t)$ soluciones del problema de valor inicial planteado en (6)-(10) y sea $v(x, t) = u(x, t) - \hat{u}(x, t)$, tal que $v(x, t)$ satisface las ecuaciones (6) y (10) así como la condición inicial $v(x, 0) = 0$ ¹⁵. Entonces $v(x, t)$ es idénticamente cero y por consecuencia $u(x, t) = \hat{u}(x, t)$, es decir, la solución es única.

Demostración

Sean f y g continuas y diferenciables de segundo orden, en $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ tal que

$$g(f_t - f_{xx}) + f(g_t + g_{xx}) = \frac{\partial}{\partial x}(f g_x - g f_x) + \frac{\partial}{\partial t}(f g) = \nabla_{x,t} \cdot F$$

donde

$$F = (f g_x - g f_x, f g),$$

¹⁵ Ver Folland G.B. (1995) cap. 4 para más detalles de esta demostración.

dato $x_0 \in (-\infty, \infty)$ y $t_0 > 0$ y $f(x, t) = v(x, t)$ y $g(x, t) = \mathcal{K}(x - x_0, t - t_0)$

$$\text{donde } \mathcal{K}(x - x_0, t - t_0) = \begin{cases} 1/2\sqrt{\pi t} e^{-(x-x_0)^2/4(t_0-t)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

obtenemos que $f_t - f_{xx} = 0$ para $t > 0$ y $g_t + g_{xx} = 0$ para $t < t_0$.

Entonces $\nabla_{x,t} \cdot F = 0$, $0 < t < t_0$

Aplicando el teorema de la divergencia¹⁶

$$\int_{\Omega} \nabla_{x,t} \cdot F d\Omega = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS$$

en la región Ω tal que $\Omega = \{(x, t) \mid |x| < r, a < t < b\}$ ($0 < a < b < t_0$), donde $\partial\Omega$ es la frontera de la región, obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS \\ &= \int_{|x| \leq r} dx v(x, b) \mathcal{K}(x - x_0, t_0 - b) - \int_{|x| \leq r} dx v(x, a) \mathcal{K}(x - x_0, t_0 - a) \\ &\quad + \int_a^b \int_{|x|=r} dt d\sigma(x) [v(x, t) \mathcal{K}_x(x, t) - \mathcal{K}(x, t) v_x(x, t)] \frac{x}{r} \end{aligned}$$

Ahora comenzamos a expandir las fronteras de la región Ω , primero hacemos que $r \rightarrow \infty$ así el ultimo término de la suma tiende a cero debido al supuesto sobre v , es decir, que satisface la ecuación (10), así obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r dx v(x, b) \mathcal{K}(x - x_0, t_0 - b) - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r dx v(x, a) \mathcal{K}(x - x_0, t_0 - a) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx v(x, b) \mathcal{K}(x - x_0, t_0 - b) - \int_{-\infty}^{\infty} dx v(x, a) \mathcal{K}(x - x_0, t_0 - a) \end{aligned}$$

por la definición de convolución

$$0 = [v(\cdot, b) * \mathcal{K}_{t-b}](x_0) - [v(\cdot, a) * \mathcal{K}_{t-a}](x_0).$$

Entonces

Cuando $b \rightarrow t_0$, $[v(\cdot, b) * \mathcal{K}_{t_0-b}](x_0) \rightarrow v(x_0, t_0)$, ya que $\mathcal{K}_{t_0-b} \rightarrow 1$

¹⁶ Para más detalle sobre el teorema de la divergencia ver apéndice A5.

y cuando $a \rightarrow 0$, $[\mathcal{V}(\cdot, a) * \mathcal{K}_{t_0-a}](x_0) = 0$ ya que $\mathcal{V}(\cdot, a) \rightarrow 0$

entonces $\mathcal{V}(x_0, t_0) = 0 \forall x_0 \in (-\infty, \infty)$ y $t_0 > 0$

$\Rightarrow u(x, t) = \hat{u}(x, t) \therefore$ la solución es única. ■

Lo que nos queda por demostrar es que v cumple con los requerimientos del Teorema de unicidad:

1. Continua y diferenciable de segundo orden: como $\mathcal{V}$ es la suma de dos funciones continuas y diferenciables de segundo orden en $x_0 \in (-\infty, \infty)$ y $t_0 > 0$, $\mathcal{V}$ es continua y diferenciable de segundo orden en el mismo dominio.
2. Condición inicial $\mathcal{V}(x, 0) = 0$, como $u(x, 0) = u_0(x) = \hat{u}_0(x) = \hat{u}(x, 0)$
 $\Rightarrow \mathcal{V}(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0$
3. La condición $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{V}(x, t) e^{-ax^2} = 0$ para toda $a > 0$ entonces

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{V}(x, t) e^{-ax^2} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} [(u(x, t) - \hat{u}(x, t))] e^{-ax^2}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow \infty} (u(x, t) e^{-ax^2} - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{u}(x, t) e^{-ax^2}) = 0 - 0$$

Por lo tanto $\mathcal{V}$ satisface los requerimientos del Teorema de Unicidad.

Para demostrar que la solución de BS es única basta demostrar que la solución (18) obtenida a partir de la transformación de la ecuación de BS en la ecuación de difusión y la condición inicial dada por la ecuación (16), satisfacen las condiciones del problema de valor inicial presentadas en las ecuaciones (8)-(10):

1. La ecuación (16) $u_0(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0)$ satisface la condición (8), es decir, es una ecuación bien comportada, ya que el término $e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}$ a lo más presenta un cambio de signo en el intervalo $x \in (-\infty, \infty)$ lo que provoca que $u_0(x)$ a lo más tenga un salto en dicho intervalo.
2. Dada la ecuación (16) para cuando el máximo es distinto de cero, la condición (9) queda de la siguiente forma:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) e^{-ax^2} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} e^{-ax^2} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} e^{-ax^2} \right] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} e^{-ax^2} \right] -$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} e^{-ax^2} \right] = 0 - 0 \quad \text{para toda } a > 0$$

Por lo tanto satisface la condición (9).

3. Y finalmente debido a la condición anterior y la forma de la solución (18), esta solución satisface la condición (10):

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, \tau) e^{-ax^2} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} ds u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} e^{-ax^2} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} e^{-ax^2} = 0 \text{ para toda } a > 0$$

Por lo tanto satisface la condición (10).

Entonces por el teorema de unicidad la solución encontrada en la ecuación (18) es única, lo que demuestra, por todo el procedimiento realizado, que la ecuación de BS tiene una solución única.

Para evaluar la solución planteada en la ecuación (18)

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} ds u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau}$$

es conveniente realizar un pequeño cambio de variable

$x^* = (x - s)/\sqrt{2\tau}$, dado esto la ecuación (18) se reescribe como.

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\sqrt{2\tau}x^* - x) e^{-x^{*2}/2} dx^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(\sqrt{2\tau}x^*-x)} e^{-x^{*2}/2} dx^* \quad . \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(\sqrt{2\tau}x^*-x)} e^{-x^{*2}/2} dx^* \quad . \\ &= I_1 - I_2 \quad . \end{aligned}$$

Reescribiendo I_1 y I_2 :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(\sqrt{2\tau}x^*-x)} e^{-x^{*2}/2} dx^*, \quad .$$

completando cuadrados y sacando de la integral las constantes

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x^* - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2} dx^*. \quad .$$

$$\text{Sea } \rho = x^* - \frac{1}{2}(k_1 + 1)\sqrt{2\tau}$$

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho, \quad .$$

entonces

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(h_1), \quad .$$

donde

$$h_1 = x/\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}(k_1 + 1)\sqrt{2\tau}, \quad y \quad N(h_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

$N(h_1)$ es la función de distribución acumulativa de la normal, el cálculo de I_2 es idéntico solamente hay que sustituir $(k_1 + 1)$ por $(k_1 - 1)$. Ahora sustituimos $u(x, \tau)$ en $v(x, \tau)$, recordando que $v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x, \tau)$ y poniendo $x = \log(S/K)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ y $C = Kv(x, \tau)$ obtenemos

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (19)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

La ecuación (19) es la solución analítica escrita de forma explícita de la ecuación de Black-Scholes, para una opción *call* europea. Para obtener la solución de la ecuación *put* europea podemos utilizar la fórmula de paridad *put-call*.

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)} \quad (20)$$

Donde P es el precio de la opción *put* europea¹⁷. Hasta el momento se ha obtenido la solución de la ecuación de BS utilizando la transformada de Fourier y se probó la unicidad de la

¹⁷ Para más información sobre esta fórmula ver apéndice A7.

solución. A continuación se presenta una prueba que permita establecer que la fórmula de Feynman-Kac es solución de la ecuación de BS.

Fórmula de Feynman-Kac

Para poder utilizar la fórmula de Feynman-Kac como solución de la ecuación de BS es necesario poder demostrar el siguiente teorema.

Teorema de Feynman-Kac

Si $V(y, t)$ satisface (21) y (22)

$$V_t + \mu V_y + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{yy} - b(y, t)V = 0 \text{ para } t < T \quad (21)$$

μ, σ pueden ser funciones que dependan de y y t para cualquier condición de frontera $\Phi(y(T))$

$$V(y(T), T) = \Phi(y(T)) \text{ para } t = T \quad (22)$$

donde

$$dy = \mu dt + \sigma dz \quad (23)$$

para dz proceso de Wiener, es decir, $dz \sim N(0, \sqrt{dt})$, con media 0 y desviación estándar $\sqrt{dt}$,

y si $V(y, t)$ es única, entonces la solución está dada por la siguiente fórmula.

$$V(y, t) = E \left[e^{-\int_t^T b(y, \tau) d\tau} \Phi(y(T)) \right] \quad (24)$$

Demostración

Sea $f(s) \equiv e^{-\int_t^s b(y(\tau), \tau) d\tau}$, $g(s) \equiv V(y(s), s)$

Entonces

$$df = -fbds \quad y \quad dg = \left(V_t + \mu V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} \right) ds + \sigma V_x dz = bVds + \sigma V_x dz$$

Lo anterior es gracias al lema de Itô y por la ecuación (21), entonces

$$d(fg) = gdf + fdg + dfdg = -Vfbds + (fbVds + f\sigma Vdz) + 0 = f\sigma V_x dz$$

entonces

$$E[f(T)g(T) - f(t)g(t)] = E\left[\int_t^T d(fg)\right] = E\left[\int_t^T f\sigma V_x dz\right]$$

Como dz es un proceso de Wiener

$$E\left[\int_t^T f\sigma V_x dz\right] = 0$$

Entonces

$$E[f(T)g(T)] = E[f(t)g(t)]$$

$$E\left[e^{-\int_t^T r_\tau d\tau} V(y(T), T)\right] = E\left[e^{-\int_t^T r_\tau d\tau} V(y(t), t)\right]$$

$$E\left[e^{-\int_t^T r_\tau d\tau} \Phi(y(T))\right] = V(y, t) \quad \blacksquare \quad (25)$$

Por lo que queda demostrado el teorema de Feynman-Kac. Este teorema se deriva del concepto de la integral de trayectoria (ver Feynman, 1948, Kac 1951)¹⁸.

Para poder utilizar el teorema de Feynman-Kac en la ecuación de BS (3)

$$C_t + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 C_{SS} - r(t)C + r(t)SC_S = 0, \text{ donde } C(S, t)$$

es necesario realizar un cambio de variable.

Sea $X = \log S$

$$\Rightarrow S = e^X \Rightarrow S_X = S_{XX} = S$$

$$\Rightarrow C_X = C_S S_X = C_S S, y \quad C_{XX} = C_S S_{XX} + C_{SS} (S_X)^2 = C_S S + C_{SS} S^2 = C_X + C_{SS} S^2$$

$$\Rightarrow C_{SS} S^2 = C_{XX} - C_X$$

Retomando la ecuación de BS presentada en (3) y su condición inicial (4)

¹⁸ Ver Apéndice A8 integral de trayectoria

$$C_t + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 C_{SS} - r_t C + r_t S C_S = 0$$

$$C(S_T, T) = \Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

y sustituyendo las expresiones anteriores, obtenemos la ecuación de BS modificada para el precio de la opción para el logaritmo del precio de la acción (21).

$$C_t + (r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)C_x + \frac{1}{2}\sigma^2 C_{xx} - r(t)C = 0 \text{ para } t < T \quad (26)$$

Con condición final

$$\Phi(X(T)) = C(X, T) = \max(e^{X(T)} - K, 0) \quad (27)$$

con lo que ahora tenemos que el precio de la opción *call* europea depende de X y t .

Aplicando Feynman-Kac a la ecuación (26) con condición final (27) obtenemos

$$C(X, t) = E \left[e^{-\int_t^T r(t) dt} \Phi(X(T)) \right] \quad (28)$$

Lo cual sigue que

$$dX = (r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz \quad (29)$$

Esta ecuación estocástica que satisface el logaritmo del precio de la acción, depende únicamente del a tasa de interés del activo libre de riesgo y la volatilidad de la acción, dejando de lado la tendencia de la acción, la cual aparece si únicamente aplicamos el lema de Itô directamente al logaritmo del precio de la acción:

$$dX = (\mu S X_S + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 X_{SS})dt + \sigma S X_S dz$$

donde $X_S = \frac{1}{S}$ y $X_{SS} = -\frac{1}{S^2}$

obtenemos que

$$dX = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

Esto no significa que la tendencia del precio de la acción (μ) es igual a la tasa de interés del activo libre de riesgo (r). El resultado de la ecuación (29) es importante ya que permitirá valuar de forma eficiente la opción en las secciones siguientes.

La ecuación (28) es la fórmula de Feynman-Kac (FK), para valuar el precio de la opciones tipo *call* europea. En la siguiente sección se desarrollan tres modelos de simulación numérica para evaluar la fórmula de Feynman-Kac.

II Métodos Numéricos

El método numérico utilizado para evaluar la fórmula de Feynman-Kac es la simulación de Monte Carlo. Esta simulación es un método estadístico que permite aproximar de forma numérica el valor de expresiones matemáticas difíciles de evaluar directamente. A continuación se presenta el desarrollo de la simulación de Monte Carlo utilizada para evaluar los tres modelos que se desarrollan posteriormente en el apartado, de esta sección, *Modelos numéricos*.

La simulación de Monte Carlo se utiliza para calcular un valor esperado de una función $f(x)$ con una función de densidad $\psi(x)$, para $x \in \mathbb{R}^n$

$$v = E_{\psi(x)}[f(x)] = \int dx f(x)\psi(x)$$

para encontrar un estimador de v seguimos los siguientes pasos (Jäckel, 2002):

1. Se generan números aleatorios x_i con base a la función de densidad $\psi(x)$, a través, de la función de la distribución asociada a esta $\Psi(x)$.
2. Cada x_i se evalúa en la función $f_i = f(x_i)$.
3. Entonces el estimador de Monte Carlo es:

$$\hat{v}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Para encontrar un estimador del error de estimación de $\hat{v}_N$ podemos utilizar el teorema del límite central que dice:

$$\hat{v}_N \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

Es decir que el estimador $\hat{v}_N$ convergen en distribución a una normal donde σ^2 es la varianza de la variable estocástica x , entonces el error estándar está dado por:

$$\epsilon_N = \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}} \quad (30)$$

donde

$$\hat{\sigma}_N = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)^2\right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)\right)^2}$$

Modelos numéricos

En este apartado se presenta el desarrollo de tres modelos de simulación numérica que permiten evaluar la fórmula de FK, a través de la simulación de Monte Carlo. Esto con el objetivo de seleccionar, en la siguiente sección, al modelo más eficiente desde el punto de vista computacional, es decir, seleccionar al modelo que tarde un tiempo menor de cómputo.

Dada la forma de la trayectoria para el logaritmo del precio de la acción (X) dada por la ecuación (29):

$$dX = \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz$$

donde $dz \sim N(0, \sqrt{dt})$, es posible desarrollar tres formas distintas de modelación que requieren los siguientes parámetros.

- S precio inicial de la acción
- X logaritmo del precio inicial de S
- K precio de ejercicio
- T fecha de vencimiento
- t fecha de inicio (cero por comodidad)
- σ volatilidad (constante)
- r tasa de interés (constante en esta primera etapa)

En el primer modelo se generan trayectorias con la ayuda de la ecuación estocástica (29) para evaluar los puntos finales de las mismas y así obtener el estimador del precio de la opción; en el segundo modelo se resuelve la ecuación estocástica (29) y se generan números aleatorios a partir de esta solución que permiten obtener un estimador del precio de la opción; en el tercer modelo se generaron números aleatorios con ayuda de la función de distribución que surge de la solución a la ecuación (29), obtenida en el segundo modelo.

Modelo 1 (FK1)

En este primer modelo utilizamos el concepto de integral de trayectoria, para generar indirectamente la función de densidad del logaritmo del precio de la opción (ver apéndice A8). Se generan N trayectorias utilizando dX como el incremento de X , para cada incremento infinitesimal del tiempo (dt), el cual comienza en t y termina en T (ver figura 1), entonces para cada incremento dX se genera un número aleatorio¹⁹ dz que se distribuye $N(0, \sqrt{dt})$, por lo que para cada trayectoria obtenemos $X(T)$. Este $X(T)$ es evaluado en la ecuación (28) tal y como se muestra a continuación.

$$C(X, t) = E \left[e^{-\int_t^T r \, d\tau} \Phi(X(T)) \right] = e^{-rT} E[\Phi(X(T))]$$

Generar N trayectorias para el logaritmo del precio de la opción $X(T)$ es equivalente a conocer la función de densidad del $X(T)$. Por el método de Monte Carlo podemos encontrar su estimador para el precio de la opción:

$$\hat{C}(X, t) = e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(X(T)_i) \right) = e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(e^{X(T)_i} - k, 0) \right) \quad (31)$$

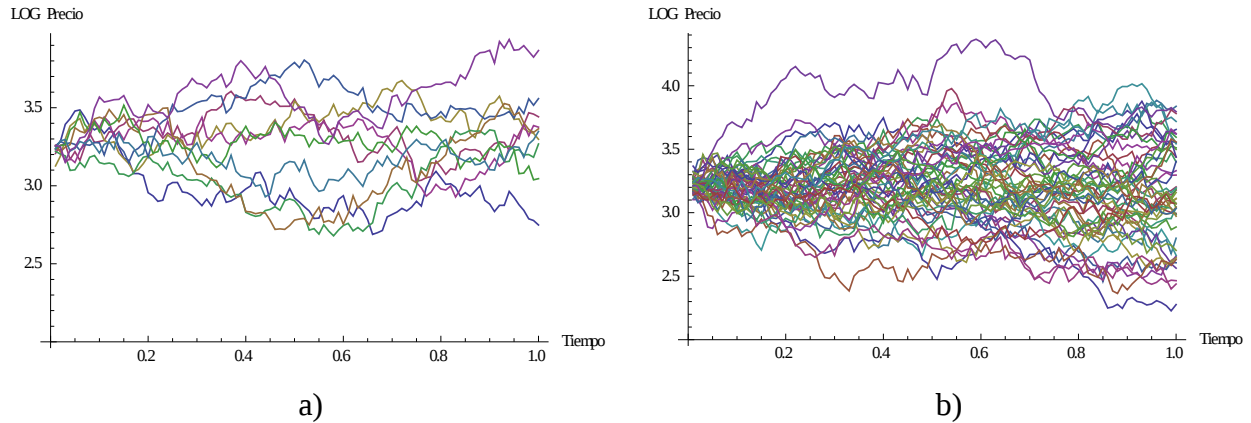


Figura 1 Trayectorias para el logaritmo del precio de la acción $X(t)$, con $T = 1$, $t = 0$, y $dt = 0.01$.

a) Corresponde a 10 trayectorias b) Corresponde a 50 trayectorias.

Figuras únicamente de ilustración del modelo

¹⁹ En realidad son números pseudoaleatorios, aunque de aquí en adelante les llamaremos aleatorios, generados utilizando el comando *RandomVariate*, con una distribución normal, del software Wolfram Mathematica.

Modelo 2 (FK2)

Partimos de la solución de la ecuación (29), para lo cual integramos de 0 a T entonces²⁰

$$\int_t^T dX = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_t^T dt + \sigma \int_t^T dz = \text{Log}S(T) = \text{Log}S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma Z$$

donde Z es un proceso de Wiener $Z \sim N(0, \sqrt{T})$, despejando $S(T)$,

$$S(T) = Se^{((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma Z)}$$

ahora que ya tenemos una expresión para el precio de la acción, se generan N números aleatorios (Z) para evaluarlos en la expresión anterior y obtener N números $S(T)$ (ver figura 2). Por el método de Monte Carlo podemos encontrar un estimador para el precio de la opción:

$$\hat{C}(S, t) = e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(S(T)_i) \right) = e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(S(T)_i - k, 0) \right) \quad (32)$$

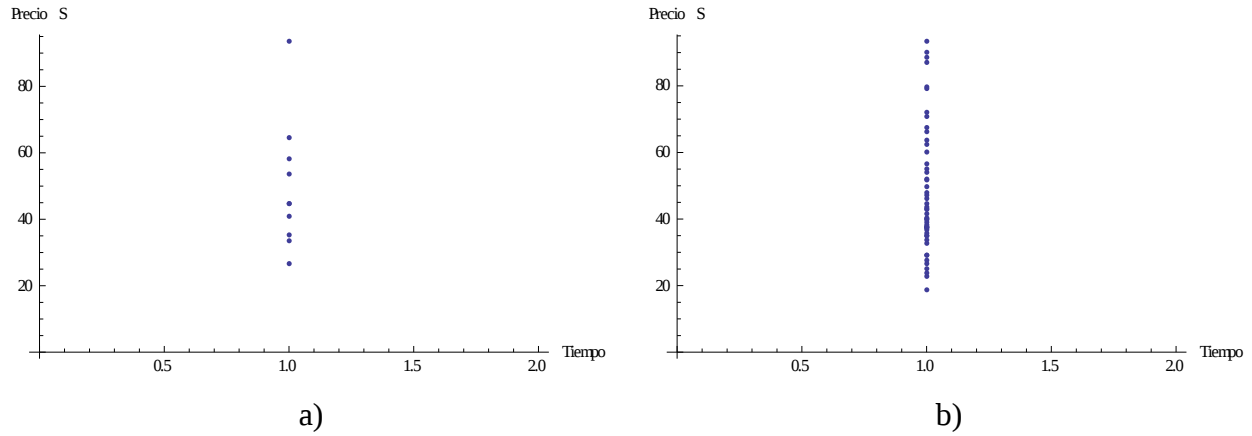


Figura 2 N números generados para el precio de la acción $S(T)$, con $T = 1$,

a) Corresponde a 10 números b) Corresponde a 50 números.

Figuras únicamente ilustrativa del modelo.

Modelo 3 (FK3)

Partiendo de la solución de la ecuación estocástica planteada en el modelo 2

$$\text{Log}S(T) = \text{Log}S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma Z$$

²⁰ Ver Cochrane (2005)

Es posible establecer que $\text{Log}S(T) \sim N(\text{Log}S + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma\sqrt{T})$ ²¹, entonces se generan N números aleatorios y se obtiene N valores de $\text{Log}S(T) = X(T)$, cada $X(T)$ es evaluado tal como en el Modelo 1 (ver figura 3).

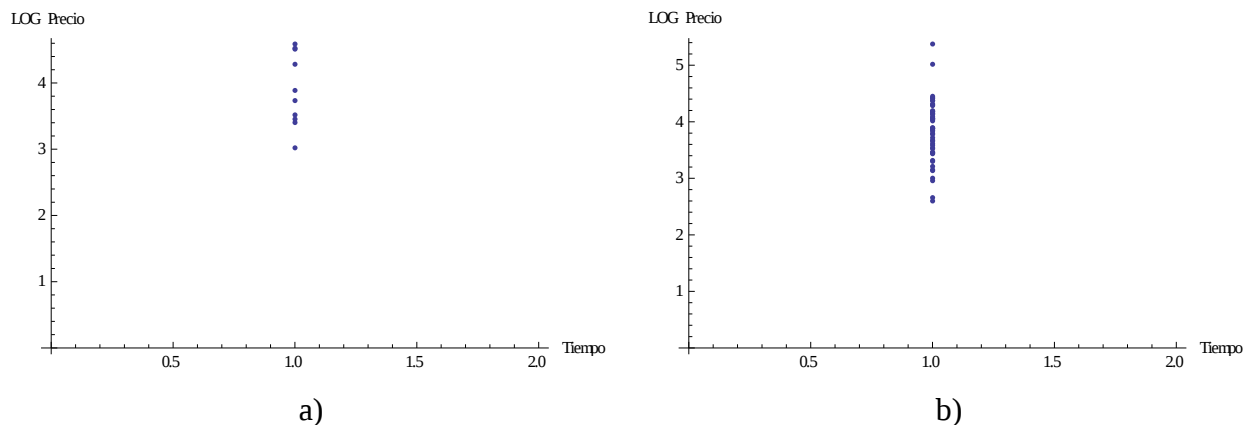


Figura 3 N números generados para el logaritmo del precio de la acción $X(T)$, con $T = 1$,
a) Corresponde a 10 números b) Corresponde a 50 números.
Figuras únicamente ilustrativa del modelo.

Los resultados de estos 3 modelos se presentan en la siguiente sección donde se realiza una comparación con el valor de BS, se selecciona el mejor modelo y se modifica para que pueda valuar el precio de opciones con tasa de interés variable.

III Resultados de las simulaciones numéricas

En esta sección se presentan las comparaciones numéricas de la solución explícita de la ecuación de BS *versus* la solución utilizando la fórmula de Feynman-Kac, para los tres modelos desarrollados en la sección anterior. Esto con el objetivo de calibrar y mostrar que la solución utilizando FK es una buena aproximación, así como para seleccionar el mejor modelo. Éste será modificado para que valúe opciones con tasas de interés dependientes del tiempo.

Para la calibración se realizó un mapeo para 3 valores de S y T con el objetivo de exponer numéricamente la sensibilidad del estimador ante distintos valores de S y T , tal como se muestra en las Tablas 1.1, 1.2 y 1.3, con los siguientes parámetros.

²¹ Ver Cochrane (2005)

- $S = 25, 50$ y 75 (para mostrar efectos de un precio inicial mayor, menor e igual a K)
- $K = 50$ (en todos los casos)
- $T = 0.25, 0.5$ y 1 (pensando en $1 = \text{un año}$)
- $t = 0$ (en todos los casos)
- $\sigma = 0.5$ (se tomo una volatilidad equivalente al 50% del precio de la acción con el propósito de mostrar que el estimador es bueno)
- $r = 0.1$ (recordando que en BS la tasa de interés es constante)

Los valores de S y K son elegidos con la únicamente restricción de pertenecer al espacio $[0, \infty)$, los valores de T , fueron pensados para contratos trimestrales semestrales y anuales.

Tabla 1.1 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac

S	T=0.25	T=0.25	T=0.25	T=0.25
	BS	FK1 (100m)	FK2 (1,000m)	FK3 (1,000m)
25	0.0100517	0.0103707 (0.00085779)	0.00979139 (0.0002741)	0.010121 (0.00027848)
50	5.55409	5.57728 (0.0280599)	5.54079 (0.00885772)	5.55715 (0.00887671)
75	26.4951	26.4573 (0.0589733)	26.492 (0.0186374)	26.4802 (0.018615)

Tabla 1.2 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac

S	T=0.50	T=0.50	T=0.50	T=0.50
	BS	FK1 (100m)	FK2 (1,000m)	FK3 (1,000m)
25	0.163876	0.163401 (0.00488153)	0.164585 (0.00154112)	0.162742 (0.0015191)
50	8.1316	8.12134 (0.0428623)	8.13268 (0.0135303)	8.13526 (0.0135524)
75	28.4136	28.3423 (0.0825339)	28.4087 (0.0261196)	28.3997 (0.0261464)

Tabla 1.3 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac

S	T=1	T=1	T=1	T=1
	BS	FK1 (100m)	FK2 (1,000m)	FK3 (1,000m)
25	0.950101	0.950789 (0.0154822)	0.950928 (0.00495371)	0.949909 (0.00495584)
50	11.9634	11.9516 (0.0675457)	11.966 (0.0212553)	11.9629 (0.0212466)
75	32.0878	32.1208 (0.119439)	32.0679 (0.0376137)	32.1051 (0.0376439)

En las tres tablas se presentan los errores estándar entre paréntesis calculados a partir de la expresión del error estándar de la ecuación (30) BS Black-Scholes.

FK1(100m) Modelo 1 con 100,000 trayectorias generadas con un $(dt = 1/2880^{22})$

FK2(1,000m) Modelo 2 con 1 Millón de $S(T)$ generados.

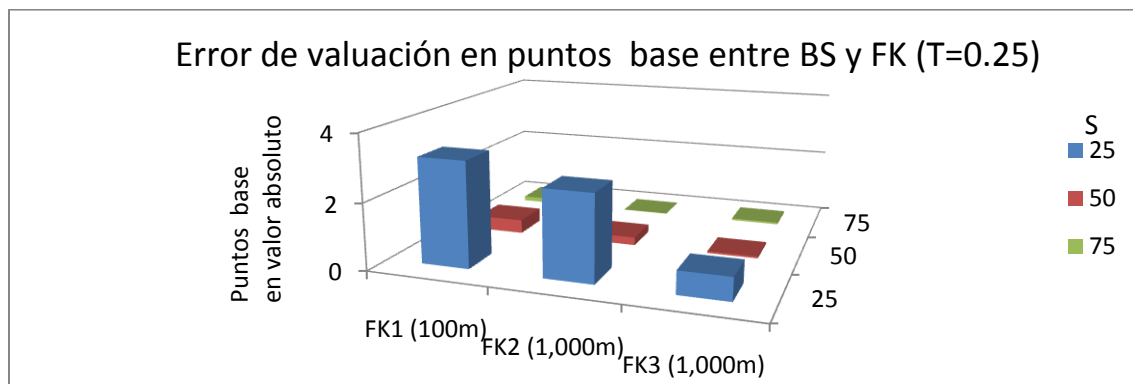
FK3(1,000m) Modelo 3 con 1 Millón de $X(T)$ generados.

²² Se escogió así para emular información cada hora durante ocho horas al día por un año ($8 * 360 = 2880$).

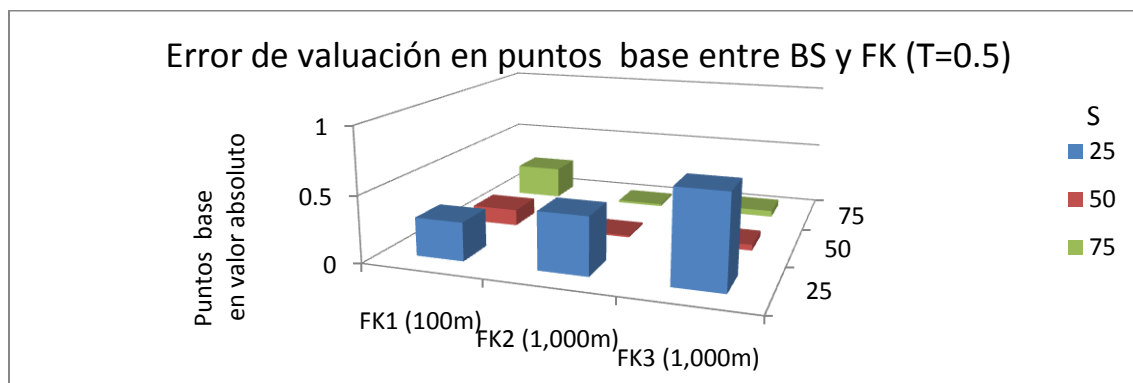
En las tablas anteriores se puede ver que en general los estimadores se aproximan al valor de BS al grado de contener este valor dentro de su error estándar. Para comparar entre los tres métodos es útil realizar un análisis en el error de valuación a nivel de puntos base:

$$PB_i = 100 \left(\frac{FK_i - BS}{BS} \right) \text{ con } i = 1, 2, 3 \quad (33)$$

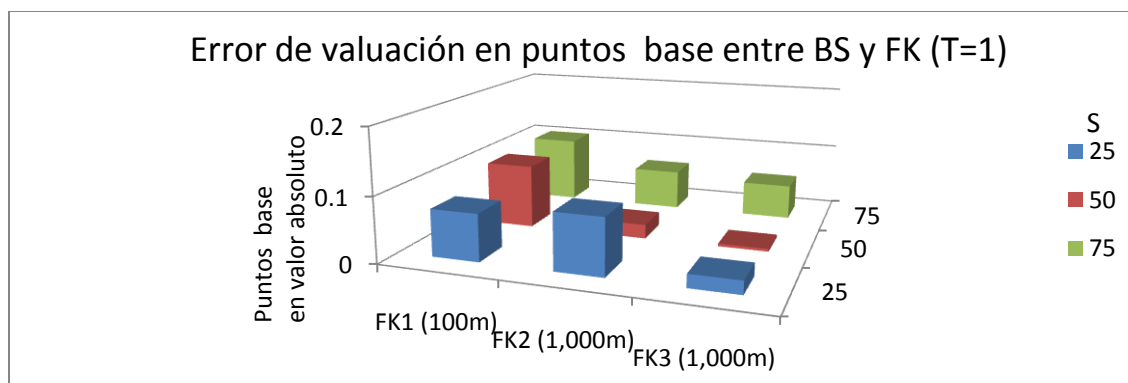
Donde PB_i corresponde a los puntos base de cada modelo, FK_i corresponde al estimado de cada modelo y BS corresponde al valor de Black-Scholes, recordando que 1 punto base es equivalente a 0.01%, para ello es útil revisar las gráficas 1.1, 1.2 y 1.3.



Gráfica 1.1 Error de valuación en puntos base entre BS y FK para el tiempo T=0.25



Gráfica 1.2 Error de valuación en puntos base entre BS y FK para el tiempo $T = 0.5$



Gráfica 1.3 Error de valuación en puntos base entre BS y FK para el tiempo $T = 1$

Las Gráficas 1.1, 1.2 y 1.3 muestran los errores de valuación entre el valor de BS y el valor utilizando FK expresado en puntos base para los distintos valores del precio inicial de la acción S y para los distintos valores de la fecha de vencimiento T . Se puede apreciar que los estimadores son mejores, es decir, presentan un error de valuación menor, cuando se tienen precios iniciales S mayores o iguales al precio de ejercicio K , que cuando, son menores. A continuación la Tabla 2 presenta los tiempos estimados de cómputo para los tres modelos²³.

Tabla 2 Tiempos de cómputo

	FK1 (100m)	FK2 (1,000m)	FK3 (1,000m)
Tiempo aproximado de cómputo (seg.)	11687.9	37.7	46.1

Por las Gráficas 1.1, 1.2 y 1.3 podemos apreciar que el Modelo 1 (FK1) es superado por los Modelos 2 y 3 (FK2 y FK3), cosa que no era difícil de esperar ya que FK1 sólo genera 100,000 X_T que se utilizan para estimar el precio de la opción mientras que FK2 y FK3 generan 1,000,000 de $S(T)$ y $X(T)$ respectivamente. Por lo anterior y por la Tabla 2, que muestra que el modelo con menos tiempo de cómputo es FK2, se decidió que el modelo a utilizar para analizar los efectos que tendría una tasa de interés dependiente del tiempo, sobre el precio de la opción, es FK2. Pero antes de proseguir consideramos necesario una refinación del estimador $\hat{C}(S, t)$, esto con el objetivo de tener un estimador más preciso, es decir, con un error estándar menor, para lo cual se incrementó el número de $S(T)$ generados, de 1 millón a 10 millones, los resultados aparecen en la Tabla 3 así como en la Gráfica 2.

²³ Utilizando un equipo de cómputo hp pavilion dv4, modelo dv4-1622la con procesador intel Celeron T3 100, 2 GB en Ram y 320 GB disco duro.

Tabla 3 Comparación numérica de BS y FK2(10M)

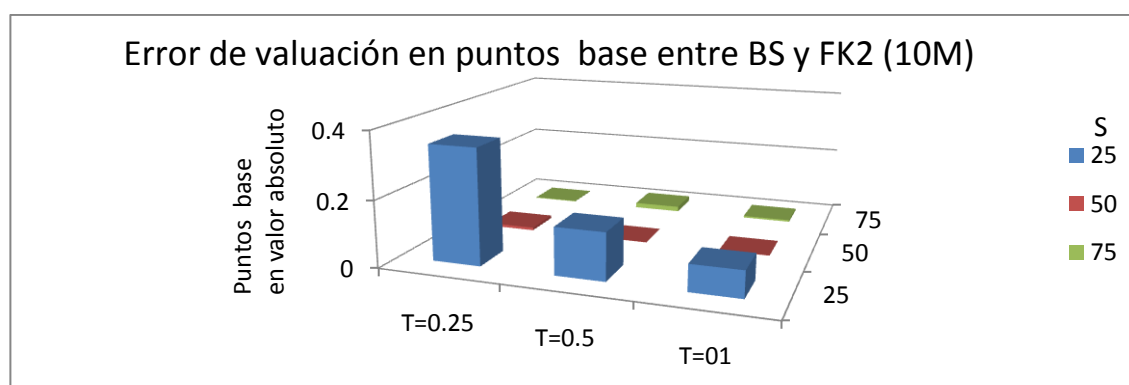
S	T=0.25	T=0.25	T=0.5	T=0.5	T=1	T=1
	BS	FK2 10M	BS	FK2 10M	BS	FK2 10M
25	0.0100517	0.0100867 (8.7675E-05)	0.163876	0.164109 (0.00048528)	0.950101	0.950856 (0.00157102)
50	5.55409	5.55456 (0.00280609)	8.1316	8.13154 (0.00428211)	11.9634	11.9633 (0.00672987)
75	26.4951	26.4946 (0.00589133)	28.4136	28.418 (0.00826461)	32.0878	32.0895 (0.0119011)

Errores estándar entre paréntesis

BS Black-Scholes.

FK2(10M) Modelo 2 con 10 Millones de S(T) generados.

Todos los demás parámetros son los mismos utilizados para generar la Tabla 1.



Gráfica 2 Puntos base de la diferencia entre BS y FK2 (10M)

El tiempo estimado de cómputo para cada pareja de S y T es de 354.17 segundos, alrededor de 6 minutos²⁴, un tiempo razonablemente bajo para realizar estimaciones prácticas. En la Tabla 3 podemos apreciar que el refinamiento permitió un estimador más preciso, en comparación con los estimadores correspondientes de las tablas 1.1, 1.2 y 1.3, es decir, el error estándar es menor y aún contiene al valor de BS. Lo anterior también es apreciado en la Gráfica 2, ya que los puntos base disminuyeron para todas las parejas de S y T . Esto permite tener confianza en el estimador del precio de la opción, ante tasas de interés dependientes del tiempo.

²⁴ Utilizando un equipo de computo hp pavilion dv4, modelo dv4-1622la con procesador intel Celeron T3 100, 2 GB en Ram y 320 GB disco duro.

Tasa de Interés dependiente del tiempo

En este apartado se realiza la modificación al Modelo 2, para valuar el precio de la opción con una tasa dependiente del tiempo, se realiza un análisis de sensibilidad y se muestran y discuten los resultados.

Suponemos para fines de análisis cualitativo una tasa de interés dependiente del tiempo lineal, específicamente, suponemos una forma funcional lineal dada por:

$$r(t) = mt + r(0) \quad (34)$$

donde m es la pendiente t el tiempo y $r(0)$ la ordenada al origen, de esta forma es necesario volver al Modelo 2 para tomar en cuenta el supuesto sobre $r(t)$.

Modelo 2r(t) (FK2r(t))

Partimos de nueva cuenta de la solución de la ecuación (29), para lo cual integramos de 0 a T entonces,

$$\int_t^T dX = \int_t^T (r_t - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma \int_t^T dz = \text{Log}S(T) = \text{Log}S + (r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \frac{m}{2}T^2 + \sigma Z$$

donde Z es un proceso de Wiener $Z \sim N(0, \sqrt{T})$, se despeja $S(T)$,

$$S(T) = S e^{\left((r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \frac{m}{2}T^2 + \sigma Z\right)}$$

Ahora que ya tenemos una expresión para el precio de la acción, se generan N números aleatorios (Z) para evaluarlos en la expresión anterior y obtener N números $S(T)$. Evaluando en Feynman-Kac por el método de Monte Carlo estos N números podemos encontrar un estimador para el precio de la opción con tasa de interés dependiente del tiempo.

$$\hat{C}(S, t) = e^{-r(0)T - mT^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(S(T)_i) \right) = e^{-r(0)T - mT^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(S(T)_i - k, 0) \right) \quad (35)$$

Proseguimos a estimar el precio de la opción utilizando la ecuación (35), para ello se realizó un mapeo para 3 valores de S y tres valores de T , tal como se muestra en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3, con los siguientes parámetros:

- $S = 25, 50$ y 75 (para mostrar efectos de un precio inicial mayor , menor e igual a K)
- $K = 50$ (en todos los casos)
- $T = 0.25, 0.5, 1, 1.25, 1.5, 1.75$ y 2 (pensando en $1 = \text{un año}$)
- $t = 0$ (en todos los casos)
- $\sigma = 0.5$
- $r(0) = 0.1$
- $m = 0.02, 0$ y -0.02 (con el fin de mostrar tendencias a la alza y a la baja y compararlo con BS al ser $m = 0$)²⁵

Tabla 4 .1 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac con $r(t)$

	FK2rt 10M	BS	FK2rt 10M
S	m=-0.01, T=0.25	m=0, T=0.25	m=0.01, T=0.25
25	0.0100288 (8.8592E-05)	0.0100517	0.0102495 (8.9861E-05)
50	5.53826 (0.00280218)	5.55409	5.5666 (0.00280893)
75	26.471 (0.00589037)	26.4951	26.5182 (0.00589267)

Tabla 4.2 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac con $r(t)$

	FK2rt 10M	BS	FK2rt 10M
S	m=-0.01, T=0.5	m=0, T=0.5	m=0.01, T=0.5
25	0.161663 (0.00048107)	0.163876	0.167618 (0.00049051)
50	8.07369 (0.0042693)	8.1316	8.18858 (0.0042964)
75	28.3208 (0.00826049)	28.4136	28.5147 (0.00827128)

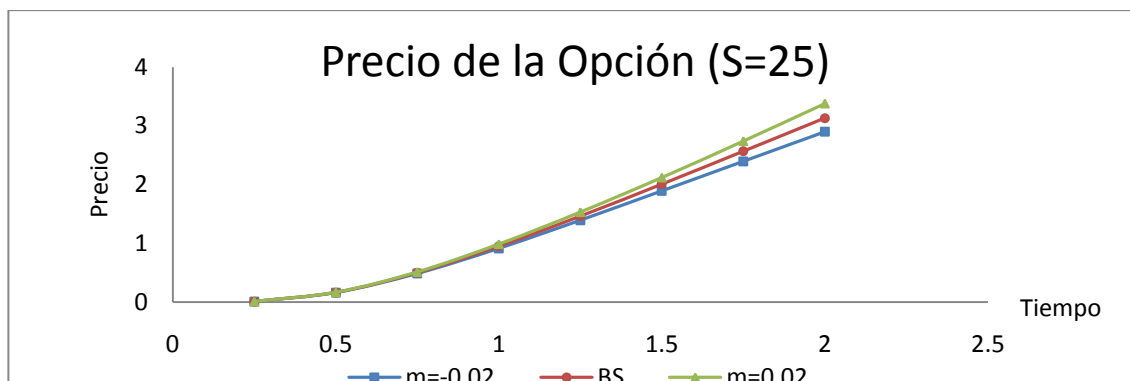
Tabla 4.3 Comparación numérica de Black-Scholes y Feynman-Kac con $r(t)$

	FK2rt 10M	BS	FK2rt 10M
S	m=-0.01, T=1	m=0, T=1	m=0.01, T=1
25	0.913957 (0.00154003)	0.950101	0.987182 (0.0015949)
50	11.7515 (0.00668694)	11.9634	12.1723 (0.00676735)
75	31.7162 (0.011867)	32.0878	32.4484 (0.0119348)

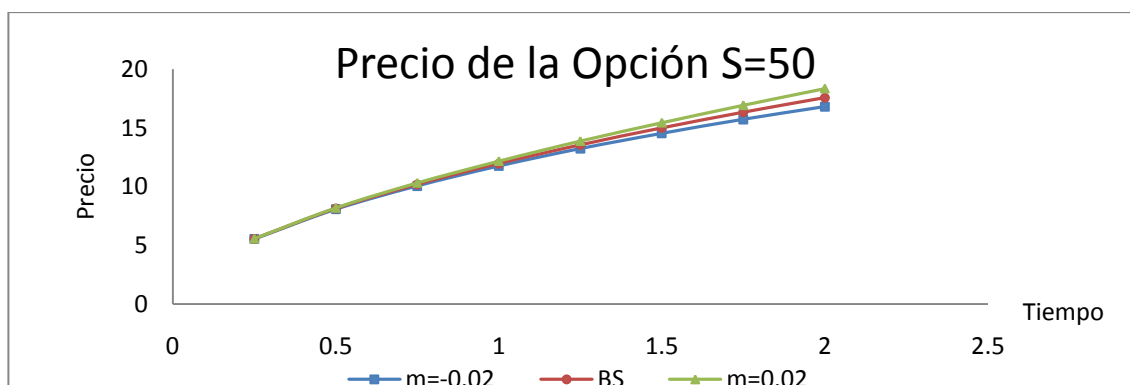
Errores estándar entre paréntesis, BS Black-Scholes., FK2r_t(10M) Modelo 2r(t) con 10 millones de $S(T)$ generados.

²⁵ Es importante notar que una pendiente $m = -0.02$ solamente es razonable en un intervalo que permita $r(t) \geq 0$.

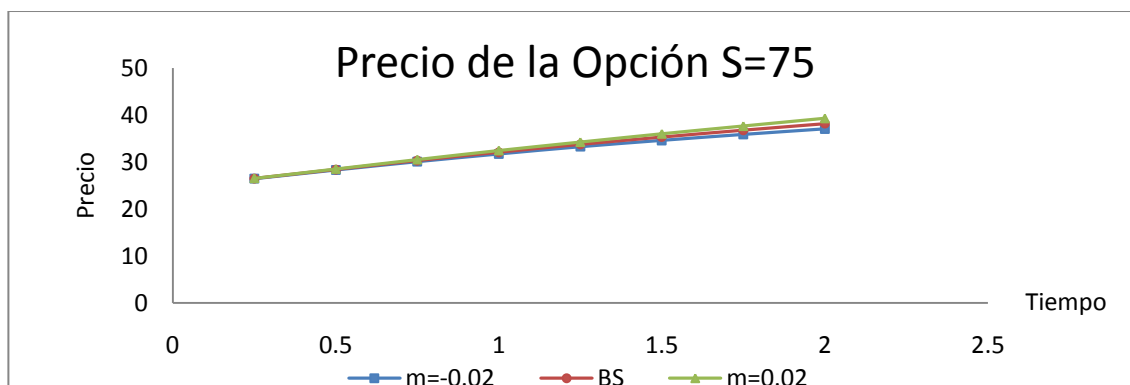
A continuación se presentan las Gráficas 3.1, 3.2 y 3.3 generadas a partir de las tablas anteriores, las cuales muestran el precio de la opción (C) ante cambios en el tiempo (T).



Gráfica 3.1 Precio de la Opción con precio de la acción inicial $S = 25$



Gráfica 3.2 Precio de la Opción con precio de la acción inicial $S = 50$



Gráfica 3.2 Precio de la Opción con precio de la acción inicial $S = 75$

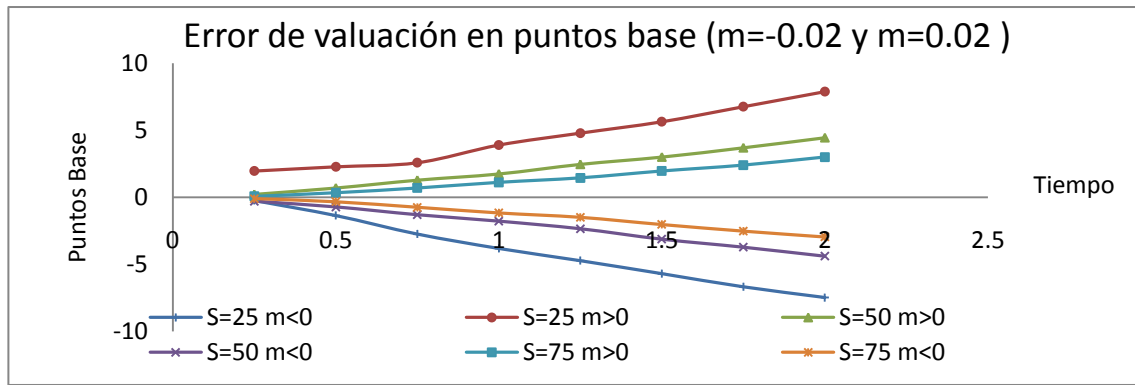
Las Gráficas anteriores muestran el precio de la opción para dos tendencias m (en la tasa de interés) una positiva y la otra negativa en las distintas fechas de vencimiento T y para los distintos valores de S . En las Gráficas anteriores, así como en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3, se puede

observar que para m positivas (negativas) el precio de la opción aumenta (disminuye) conforme aumenta T , es decir, las implicaciones de una tasa de interés dependiente del tiempo son mayores en la valuación de opciones, cuando la fecha de vencimiento del contrato es mayor.

Para darse una idea más clara de la magnitud del cambio debida al término de tendencia (m) en la tasa de interés, se pueden analizar los cambios en los puntos base que ahora están definidos por:

$$PB = 100 \left(\frac{FK2r(t) - BS}{BS} \right) \quad (36)$$

La expresión anterior es válida tanto para m negativa como para positiva, podemos graficar los puntos base para cada tiempo con respecto al valor BS (Gráfica 4.1).

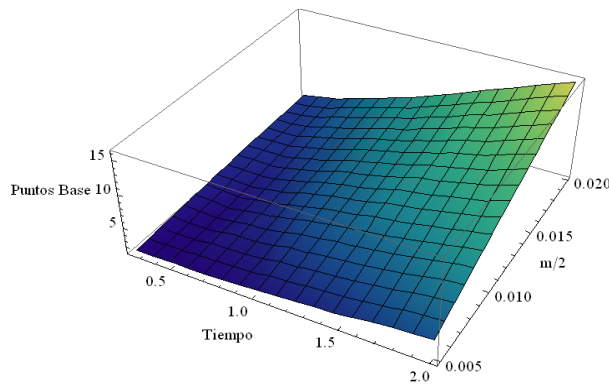


Gráfica 4 Error de valuación en puntos base. $S=25, S=50$ y $S=75$.

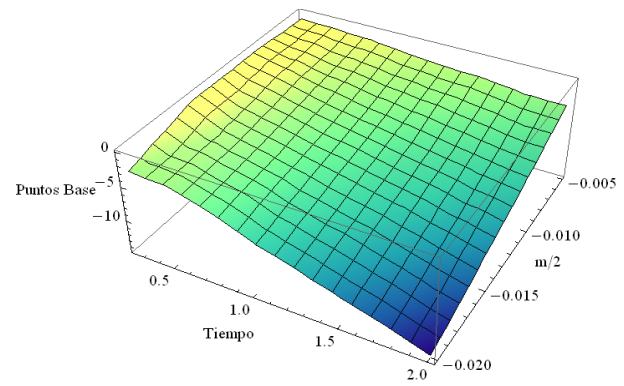
Se puede apreciar que existe un mayor error de valuación expresado en puntos base a medida que el precio inicial de la acción es menor. Para analizar más afondo la relación que existe entre el precio de la opción (C) con respecto a la pendiente de la tasa de interés (m), es conveniente hacer un análisis de sensibilidad, es decir, analizar los cambios en C ante cambios de m , para ello, se presentan las siguientes Gráficas 5.1, 5.2 y 5.3, las cuales muestran los cambios en el error de valuación expresado en puntos base con respecto a cambios en el tiempo y a cambios en la pendiente, para los siguientes valores de los parámetros.

- $T = 0.25, 0.5, 1, 1.25, 1.5, 1.75$ y 2
- $m = -0.04, -0.03, -0.02, -0.01, 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$
- $r(0) = 0.1$

Todos los demás parámetros con los valores mencionados anteriormente, en el Modelo 2rt (FK2rt).

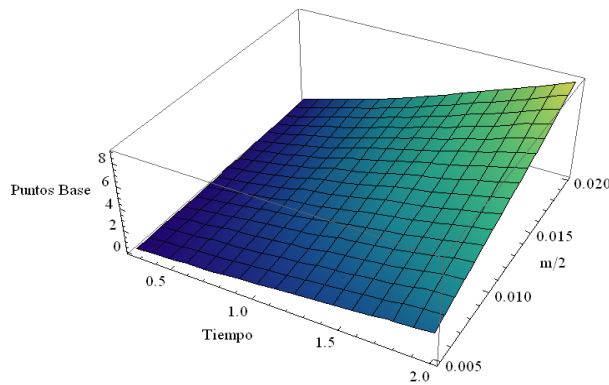


a) $m > 0$

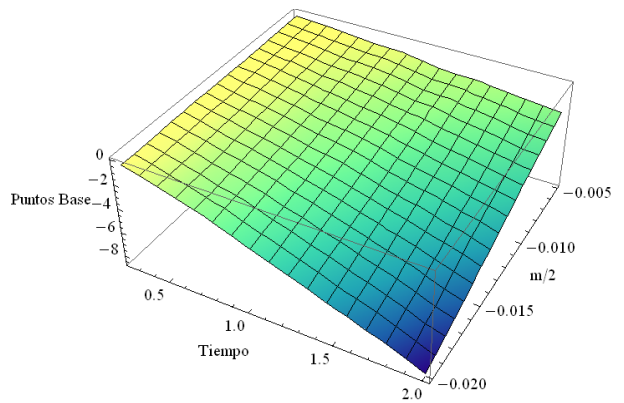


b) $m < 0$

Gráfica 5.1 Puntos base con respecto a BS para precio inicial de la acción $S=25$

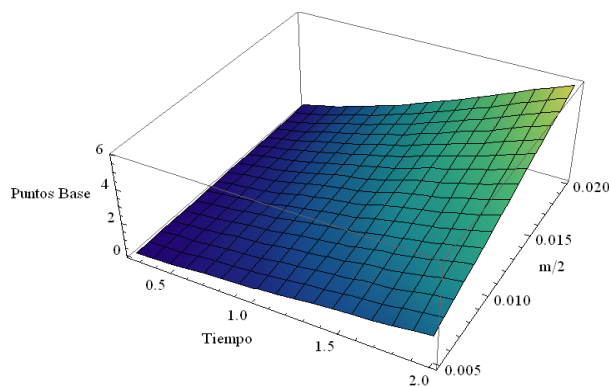


a) $m > 0$

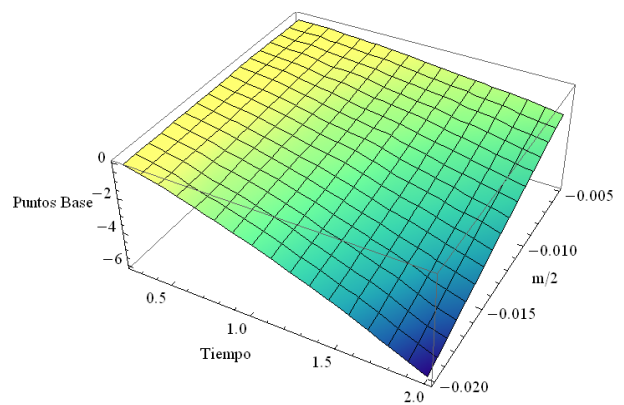


b) $m < 0$

Gráfica 5.2 Puntos base con respecto a BS para precio inicial de la acción $S = 50$



a) $m > 0$



b) $m < 0$

Gráfica 5.3 Puntos base con respecto a BS para precio inicial de la acción $S = 75$

Podemos decir que los cambios, en el error de valuación expresado en puntos base, son positivos a mayor sea el tiempo de ejercicio (T) de la opción, el mismo efecto ocurre para incrementos de la pendiente (m), estos dos efectos eran de esperarse por la relación que existe entre estos dos parámetros (T y m) y el precio de la opción, el efecto sobresaliente es el cambio positivos aún mayor, en el error de valuación expresado en puntos base, con los incrementos simultáneos en ambos parámetros, esto es apreciable en todas las Gráficas 5a. Para cambios en la pendiente negativa el análisis cualitativo es similar al anterior, se observan disminuciones mayores a medida que aumenta el tiempo y a medida que disminuye la pendiente, pero la disminución es aún mayor cuando los dos parámetros cambian conjuntamente, esto también puede apreciarse en todas la Gráficas 5b.

En cuanto a las magnitudes del los cambios, podemos ver que los cambios, en los errores de valuación expresado en puntos base, son mayor para precios iniciales de la acción que están por debajo del precio de ejercicio ($S < K$), en comparación con los cambios, en el error de valuación ,expresado en puntos base, para precios iniciales de la acción iguales al precio de ejercicio ($S = K$), y aún mayor en comparación con los cambios, en el error de valuación expresado en puntos base, para precios iniciales de la acción mayores al precio de ejercicio, esto se resume en la Tabla 5, presentada a continuación:

Tabla 5 Cambios en el error de valuación en puntos base en $T=2$

S	m=-0.01	m=-0.02	m=-0.03	m=-0.04
25	-3.596578	-7.465324	-11.12220	-14.61157
50	-2.272856	-4.378976	-6.625655	-8.728361
75	-1.525147	-2.945491	-4.456228	-6.077271
S	m=0.01	m=0.02	m=0.03	m=0.04
25	3.907354	7.881713	12.04783	16.04452
50	2.177253	4.443281	6.552246	8.913308
75	1.513357	3.000513	4.500246	5.886791

Otro hecho sobresaliente que podemos apreciar gracias a la Tabla 5, consiste en que, la magnitud de los cambios en el error de valuación expresado en puntos base, para $S = 25$, es considerablemente menor para $m < 0$ que para $m > 0$, mientras que para los otros valores de S es ambiguo. Para continuar con este análisis podemos comparar los cambios anteriores con los cambios en el tiempo en $m = 0.04$ y $m = -0.04$ (Tabla 6).

Tabla 6 Cambios en el error de valuación en puntos base en $m=0.04$ y $m=-0.04$

m=0.04								
S	T=0.25	T=0.5	T=0.75	T=1	T=1.25	T=1.5	T=1.75	T=2
25	1.872320	3.845590	5.585759	7.25491	9.372799	11.66931	13.88960	16.04452
50	0.538702	1.519504	2.507680	3.626059	4.874160	6.247624	7.496386	8.913308
75	0.192110	0.721133	1.404663	2.16437	3.033965	3.961966	4.958513	5.886791
m=-0.04								
S	T=0.25	T=0.5	T=0.75	T=1	T=1.25	T=1.5	T=1.75	T=2
25	-2.903289	-3.217066	-4.898982	-7.218074	-8.966653	-10.83458	-12.59470	-14.61157
50	-0.565169	-1.412883	-2.414145	-3.653643	-4.854970	-6.094901	-7.313891	-8.72836
75	-0.212114	-0.69368	-1.41687	-2.157206	-3.044334	-3.921474	-5.013430	-6.07727

Podemos apreciar en la Tabla 6, al igual que en la Gráfica 4, que los cambios en el error de valuación expresado en puntos base son mayores para el precio inicial de la acción menor al precio de ejercicio ($S < K$) en comparación con los cambios en el error de valuación expresado en puntos base, para precios de la acción igual o mayor al precio de ejercicio ($S = K$ o $S > K$), por ultimo falta analizar los cambios en el error de valuación expresado en puntos base en ($m = 0.04, T = 2$) y ($m = -0.4, T = 2$), ante cambios en el precio inicial de la acción, aunque este análisis está implícito en las Tablas 5 y 6, lo presentamos de forma explícita en la Tabla 7.

Tabla 7 Cambio en el error de valuación en puntos base en ($m=0.04, T=2$) y ($m=-0.4, T=2$).

	S=25	S=50	S=75
($m=-0.04, T=2$)	-14.611577	-8.7283612	-6.07727135
($m=0.04, T=2$)	16.0445297	8.91330822	5.88679166

Podemos observar una tendencia negativa, es decir, a mayor sea el precio inicial de la acción menor es el error de valuación expresado en puntos base del precio de la opción, en magnitud, un análisis al margen, como primera aproximación, de estos valores nos permiten establecer:

$$\frac{\partial PB_C}{\partial S} = 0.17068612 \text{ para } (m = -0.04, T = 2) \quad (37)$$

$$\frac{\partial PB_C}{\partial S} = -0.2031547 \text{ para } (m = 0.04, T = 2) \quad (38)$$

Donde PB_C son los puntos base del precio de la opción, la ecuación (37) se leería como, un aumento de una unidad en el precio inicial de la acción (S) provoca un aumento de 0.17 puntos base del precio de la opción (PB_C), mientras que la ecuación (38) se leería como, un aumento en una unidad de S provocaría una disminución en 0.2 en (PB_C), esto no significa que el precio de la opción C disminuya (aumente) con un aumento (disminución) del precio inicial de la acción, simplemente dice que el cambio será más lento, en otras palabras, el incremento (disminución) será cada vez más pequeño a medida que aumente (disminuya) S , para valores iguales de T y m .

Un análisis al margen, como primera aproximación, similar al realizado para S , es posible hacerlo para m y T , la Tabla 8 muestra los cambios en el error de valuación expresado en puntos base que sufre el precio de la opción ante cambios en m y T .

Tabla 8 Análisis al margen				
S	$m=-0.04$	$T=2 \ m<0$	$m=0.04$	$T=2 \ m>0$
	$\frac{\partial PB_C}{\partial T}$	$\frac{\partial PB_C}{\partial m}$	$\frac{\partial PB_C}{\partial T}$	$\frac{\partial PB_C}{\partial m}$
25	-7.06674192	367.018816	8.08543238	405.776477
50	-4.70909448	216.131933	4.80831378	223.171301
75	-3.38360825	151.671086	3.31386505	146.200363

Para entender mejor lo que representa la Tabla 8, se describe un ejemplo para cada columna, tomando para cada ejemplo $S=50$, entonces:

La segunda columna dice que en $m=-0.04$, un incremento en una unidad en la fecha de vencimiento ($\Delta T = 1$) provoca una disminución de 4.7 unidades en los puntos base, esto quiere decir, que a medida que aumenta el tiempo, aumenta la velocidad con la que disminuye el precio de la opción ya que tenemos una pendiente negativa, es decir, el precio de la opción será menor cada vez, con respecto al valor de BS, a medida que aumenta el tiempo.

La tercer columna indica que en $T = 2$ y $m < 0$, una disminución, de una centésima parte de unidad de m provoca una disminución en 2.16 unidades de puntos base, es decir que si la pendiente negativa aumenta su magnitud, la velocidad con la que disminuye el precio de la opción aumenta a medida que disminuye m .

La cuarta columna nos indica que en $m=-0.04$ y un aumento en una unidad del tiempo, los puntos base aumentan 4.8 unidades, lo que indica, que el precio de la opción será mayor cada vez, con respecto al valor BS, a medida que aumenta el tiempo.

Finalmente, en la quinta columna, en $T=2$ y $m>0$, un aumento de una centésima parte de unidad de m , provoca un incremento en 2.23 unidades de puntos base, es decir, se incrementa, la velocidad con la que aumenta el precio de la opción con respecto al valor de BS.

Estos resultados muestran que el precio de la opción es más sensible a cambios en la pendiente en comparación a cambios en el tiempo.

IV Conclusiones

Este trabajo realizó un avance en la formalización del modelo de Black-Scholes (1973) y utilizó la fórmula de Feynman-Kac para valorar opciones tipo *call* europeas. Se presentó el desarrollo completo que se utilizó para derivar la solución explícita de la ecuación de Black-Scholes, de una forma alternativa a la presentada en el trabajo original de Black y Scholes, esta solución explícita es para el caso particular de una tasa de interés constante, utilizando la transformada de Fourier, no antes de haber convertido la ecuación de Black-Scholes, a través de dos cambios de variable, en la ecuación de difusión o también llamada ecuación de calor. Se muestra la unicidad de esta solución con el fin de poder utilizar la fórmula de Feynman-Kac.

Se demostró que la fórmula de Feynman-Kac también es solución de la ecuación de Black-Scholes y por unicidad equivalente a la solución explícita de Black-Scholes. La fórmula de Feynman-Kac, permite extender los parámetros de la ecuación de forma importante, es decir, en particular permite valorar el precio de opciones con tasas de interés del activo libre de riesgo dependiente del tiempo.

La fórmula de Feynman-Kac permitió encontrar la ecuación estocástica que satisface el logaritmo de la acción, dependiente únicamente de la tasa de interés y la volatilidad de la acción, dejando de lado la tendencia de la acción. Este es un resultado importante que permite valorar de forma eficiente la opción.

Se generaron tres modelos (FK1, FK2 y FK3) de simulaciones numéricas para evaluar la fórmula de Feynman-Kac para una tasa de interés constante, y así poder realizar una

comparación con el valor obtenido de la solución explícita de Black-Scholes. Esto se hizo con el objetivo de calibrar los modelos y seleccionar el mejor, bajo el criterio del tiempo de cómputo, para valuar opciones con tasas de interés dependientes del tiempo. Los resultados permitieron seleccionar al Modelo 2 (FK2), para dicha tarea.

De esta forma se realizó una modificación a FK2 para que pudiera valuar tasas de interés dependientes del tiempo de la forma $r(t) = mt + r(0)$. El análisis en el cambio en el error de valuación en puntos base permitió identificar las sensibilidades del precio de la opción con respecto a los tres parámetros de interés –tiempo de ejercicio (T), la pendiente de la tasa de interés (m) y el precio inicial de la acción (S). Obteniendo una mayor sensibilidad para el precio de la opción ante cambios en la pendiente *versus* cambios en el tiempo y una sensibilidad negativa para el precio de la opción ante cambios en el precio inicial de la acción.

Los alcances de la fórmula de Feynman-Kac para valuar opciones son aún mayores de lo que aquí se mostró, las posibles extensiones a este trabajo son muy diversas, sólo para mencionar algunas, la fórmula con sus debidas modificaciones puede valuar opciones tipo *put* europeas. También puede valuar el precio de las opciones con tasas de interés dependientes del tiempo que presenten otra forma funcional $r = f(t)$, esto se debe a que la fórmula de Feynman-Kac, utilizada en este trabajo, permite formas funcionales más complejas tanto para la tasa de interés como para la volatilidad, es decir, no necesariamente tiene que ser lineal, puede ser un polinomio de orden N en t , logarítmica, exponencial u otro tipo de función del tiempo, también pueden incorporarse tasas de interés que satisfagan cierta ecuación estocástica, en todos estos casos deben de tomarse en cuenta sus debidas restricciones para evitar tasas de interés negativas. Otra posible extensión al modelo es suponer la volatilidad (σ) como dependiente del precio de la opción y del tiempo ($\sigma = \sigma(S, t)$).

Bibliografía

Bachelier, L. 1990. “Théorie de la speculation” , *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3, Paris: Gaunthier-Villiers. (Traducción al Inglés en Coortner, P.H., ed. *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge, MA: MIT Press, 1964).

Black, F. and M.S. Scholes. 1973. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” *Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.

Broadie, Mark and Jerome B. Detemple. 2004. "Option Pricing: Valuation Models and Applications" *Management Science*, 50(9): pp. 1145-1177.

Campolieti, Giuseppe and Roman Makarov. 2008. "Path Integral Pricing of Asian Options on State-Dependent Volatility Models" *Quantitative Finance*, 8(2): 147-161.

Chiarella, Carl, Nadima El-Hassan, and Adam Kucera. 1999. "Evaluation of American Option Prices in a Path Integral Framework using Fourier–Hermite Series Expansions" *Journal of Economic Dynamics and Control*, 23(9-10): 1387-1424.

Cochrane, J. H. 2005. “Asset Pricing” *Princeton University Press* Princeton, New Jersey, Estados Unidos de America.

Dash, J. 1988. “Path integrals and options, Part I”. *CNRS Preprints*. 52.

Devreese, J. P. A., D. Lemmens, and J. Tempere. 2010. "Path Integral Approach to Asian Options in the Black–Scholes Model" *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(4): 780-788.

Feynman, R.P. 1948. “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, *Reviews of Modern Physics* 20: 367-387.

Feynman, R.P., A.R. Hibbs. 1965.” *Quantum Mechanics and Path Integrals*” McGraw-Hill, New York, N.Y, Estados Unidos de America.

Folland, G. B. 1995 “Introduction to partial differential equations” *Princeton University Press* Princeton, New Jersey, Estados Unidos de America.

Fox, J. 2009. “The Myth of the Rational Market: A History of Risk, Reward, and Delusion on Wall Street” Harper Collins” New York, NY, Estados Unidos de America.

Garman, M. 1976. “General theory of asset valuation under diffusion state processes” *University of California, Berkley*, Documento de trabajo No. 50 del programa de investigación financiera.

Hull, J.C. 2006. “Options, Futures and Other Derivatives” *Prentice Hall*, sexta edición.

Jäckel, P. 2002 “Monte Carlo Methods in Finance” John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex. Inglaterra.

Kac, M. 1951. “On some connections between probability theory and differential and integral equations”. In *Proc. 2nd Berkeley Symposium on Math. Stat. & Probability*, 189–215.

Levi. E. 1995 “ Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas” Universidad Nacional Autónoma de México, D.F. México.

Merton, Robert C. 1973. "Theory of Rational Option Pricing" *Bell Journal of Economics & Management Science*, 4(1): 141-183.

Salazar, L. P. and C. J. Quimbay. 2009. "Valoración De Una Opción Europea Con Volatilidad Estocástica Usando La Integral De Camino De Feynman. (Spanish)" *Revista Colombiana de Física*, 41(2): 487-490.

Steele M.J. 2001 “Stochastic Calculus and Financial Applications” Springer-Verlag, New York, N.Y, Estados Unidos de America.

Taleb, N. 2007. “The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable” *Random House*, New York, N.Y, Estados Unidos de America.

Vega. J. 1688. “Confusion de Confusiones” *Digitale Bibliotheek voor de Nederlandse Letteren*, editores. M.F.J. Smith. Martinus Nijhoff, Den Haag 1939.

Wilmott, P., J. Dewyne, S.Howison. 1994 “Option Pricing: Mathematical Models and Computatio” Oxford Financial Press.

Apéndice

A1. Opciones

Una opción es un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender el activo subyacente (como acciones o bonos) a un precio determinado (precio de ejercicio “K”) en una fecha establecida (fecha de maduración “T”) o antes de la misma dependiendo del tipo de opción. Las opciones de compra reciben el nombre de opciones *call* y las opciones de venta reciben el nombre de opciones *put*.

Las opciones tipo europeas son aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento, mientras que las opciones tipo americana pueden ser ejercidas en cualquier momento dentro de la fecha de maduración. La función de pago para una opción europea asumiendo una posición larga está dada por (1).

$$\Phi(S(T), T) = \Phi(S(T)) = \max(S(T) - K, 0)$$

Donde $S(T)$ es el precio spot de la acción, es decir el precio del mercado de la acción, la figura A1 muestra gráficamente los pagos para las opciones *call* y *put*.

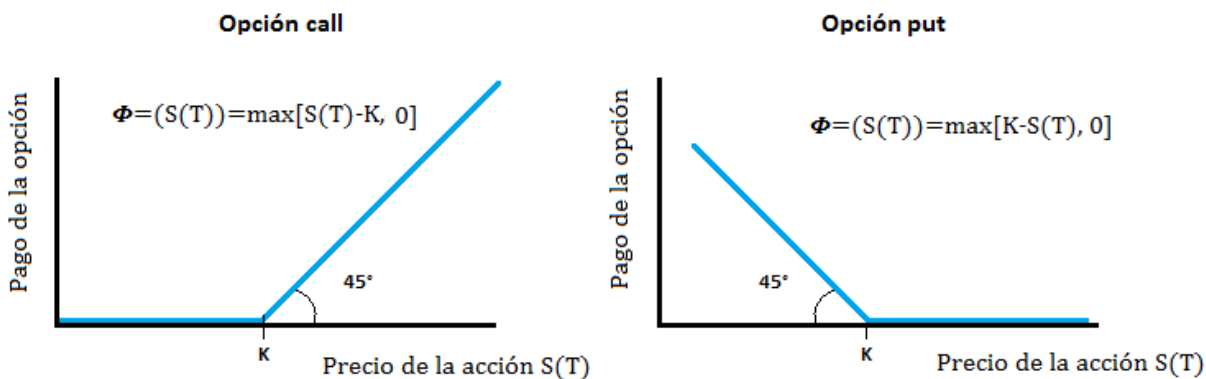


Figura A 1 . Funciones de pago para opciones de compra y opciones de venta europeas.

En este trabajo utilizamos opciones tipo *call* europeas debido a que son las opciones más sencillas de estudiar, desde el punto de vista matemático, además sirven como base para el análisis de opciones más complicadas.

A2. Movimiento browniano

Un movimiento browniano estándar es a menudo conocido como un proceso de Wiener estándar, debido al hecho de que N. Wiener en la década de 1920s analizó el movimiento browniano. Un proceso de Wiener es a menudo representado formalmente por el incremento diferencial dz . Un proceso Wiener estándar tiene las siguientes propiedades (Jäckel, 2002):

1.-La esperanza del incremento diferencial dz en cualquier punto en el tiempo t es cero:

$$E[dz] = 0$$

2.-La varianza del incremento diferencial dz en cualquier punto en el tiempo t es igual al incremento diferencial del tiempo asociado:

$$V[dz] = E[(dz)^2] - E[dz]^2 = dt$$

La forma de caracterizar el proceso de Wiener ($dz \sim N(0, \sqrt{dt})$), es decir, media cero varianza dt .

A3. Lema de Itô

Uno de los trucos matemáticos más importantes del cálculo estocástico que se usa con la finalidad de transformar las ecuaciones diferenciales estocásticas es el lema de Itô. En términos generales, es la consecuencia directa de la varianza de un incremento de un proceso de Wiener sobre cualquier intervalo de tiempo infinitesimal dada por la ecuación (3) (Jäckel, 2002). El lema de Itô nos permite calcular la diferencial total de una función determinada, sea $f(x, t)$ diferenciable con x una variable estocástica que satisface $dx = \mu dt + \sigma dz$, donde dz es un proceso de Wiener entonces .

$$\begin{aligned} df &= f_t dt + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} (dx)^2 + \frac{1}{2} f_{tt} (dt)^2 + f_{xt} dx dt \\ &= (f_t + \mu f_x + \frac{1}{2} \sigma^2 f_{xx}) dt + \sigma f_x dz \end{aligned}$$

Debido a que $(dx)^2 = \sigma^2 dt$, y $(dt)^2$ y $dt dx \rightarrow 0$ en particular

si $f(x, t) = xt$, entonces $d(xt) = t dx + x dt + dx dt$.

A4. Características

Para entender el concepto de las características se realiza el siguiente desarrollo.

Supongamos que $u(S, t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial parcial

$$a \frac{\partial u}{\partial S} + b \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (A1)$$

donde a y b son constantes, la interpretación de esta ecuación es sencilla, ya que el lado derecho de la ecuación es la derivada direccional a lo largo del vector (a, b) en el plano (S, t) , en la dirección, es decir a lo largo de cualquier línea con ecuación $bS - at = \text{constante}$ la ecuación diferencial parcial (A1) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, para ver esto se realiza el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \xi &= bS + at \\ \zeta &= bS - at \end{aligned}$$

Esto es una rotación del plano (S, t) al plano (ξ, ζ) , con estas nuevas variables (A1) se transforma:

$$a \frac{\partial u}{\partial S} + b \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial S} + b \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} b + b \frac{\partial u}{\partial \xi} a = 2ab \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{du}{d\xi} = 0 \quad (A2)$$

La solución a esta ecuación diferencial ordinaria es una función independiente de ξ , es decir $u = f(\zeta)$.

La línea $bS - at = \text{constante}$, a lo largo de la cual u es determinada solucionando la ecuación diferencial ordinaria es llamada característica (Wilmott, 1994).

A5. Solución al problema de la ecuación de difusión con valor inicial.

Para resolver este problema primero hay que encontrar la solución fundamental del problema del intervalo semi-infinito, es decir restringir $x > 0$.

$$u_t = u_{xx} \quad x, t > 0 \quad (A3)$$

Con las siguientes condiciones iniciales y de frontera.

$$u(x, 0) = 0 \quad (\text{A4})$$

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{A5})$$

También requerimos que

$$u \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (\text{A6})$$

Esta ecuación modela la evolución de la temperatura a lo largo de una barra, la temperatura inicializa en cero, después la temperatura al inicio de la barra crece hasta 1 y se mantiene así.

La clave para encontrar la solución fundamental es darse cuenta de que las condiciones iniciales y de frontera permanecen invariantes ante escalamientos $x \mapsto \lambda x$, $t \mapsto \lambda^2 t$ para cualquier número real λ , así realizando el cambio de variable $\xi = x/\sqrt{t}$ da como resultado que $u(x, t) = U(\xi)$ la solución de este cambio de variable recibe el nombre de solución similar²⁶.

Para encontrar la solución fundamental se utiliza la siguiente igualdad

$$u_\delta(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} U_\delta(\xi) \quad (\text{A7})$$

Donde el subíndice δ indica que estamos ante el cambio de variable que permite obtener la solución fundamental, el término $t^{-\frac{1}{2}}$ que multiplica a $U_\delta(\xi)$ es el que permite mantener constante $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ para todo tiempo²⁷, usando (A7) y (A3) obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria.

$$U_\delta'' + (\frac{1}{2}\xi U_\delta)' = 0$$

La solución general de esta ecuación se obtiene integrando dos veces, la segunda integración con ayuda del factor de integración $e^{\xi^2/4}$, entonces

$$U_\delta(\xi) = C e^{-\xi^2/4} + D$$

²⁶ Las soluciones similares son las obtenidas de reducir a la ecuación diferencial parcial a una ordinaria con un cambio de variable.

²⁷ Ver Wilmott,(1994) Cap.5

Tomando $D = 0$ y $C = 1/2\sqrt{\pi}$, este valor de C es el que normaliza $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 1$ y sustituyendo en (A7) obtenemos como resultado.

$$u_{\delta}(x, t) = \begin{cases} 1/2\sqrt{\pi t} e^{-x^2/4t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A8})$$

Esta es la solución fundamental la cual se puede extender al caso $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Utilizamos esta solución para derivar una solución explícita para el problema de valor inicial planteado a continuación planteado en las ecuaciones (8)-(12).

La clave para encontrar la solución es el hecho de que podemos escribir la condición inicial (ecuación 9) $u(x, 0) = u_0(x)$ como

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \delta(\xi - x) d\xi$$

Donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac. Reescribiendo la solución fundamental como

$$u_{\delta}(\xi, t) = 1/2\sqrt{\pi t} e^{-\xi^2/4t}$$

Con valor inicial

$$u_{\delta}(\xi, 0) = \delta(\xi)$$

$$\Rightarrow u_{\delta}(\xi - x, t) = 1/2\sqrt{\pi t} e^{-(\xi-x)^2/4t} = 1/2\sqrt{\pi t} e^{-(x-\xi)^2/4t} = u_{\delta}(x - \xi, t)$$

Donde ξ o x pueden ser utilizadas como variables espaciales independientes y el valor inicial de la función esta dado por

$$u_{\delta}(\xi - x, t) = \delta(\xi - x)$$

Así con ξ fija la función

$$u(x, t; \xi) = u_0(\xi) u_{\delta}(\xi - x, t)$$

Satisface la ecuación de difusión (5) con condición inicial

$$u_0(x, 0; \xi) = u_0(\xi) \delta(\xi - x)$$

Como la ecuación de difusión (5) es lineal, la suma sobre ξ también es solución, en el límite de la suma, tenemos que la solución es

$$u(x, t) = 1/2\sqrt{\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4t} d\xi$$

Con condición inicial

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \delta(\xi - x) d\xi = u_0(x)$$

A6. Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia en forma integral establece que:

$$\int_{\Omega} \nabla_{x,t} \cdot F d\Omega = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS$$

donde F es un vector variable en la región Ω , la cual se encuentra limitada por S , en tres dimensiones la región de integración Ω es el volumen V y S es la superficie que delimita ese volumen, en dos dimensiones la región Ω es un plano y S es una recta, $\nabla_{x,t} \cdot F$ es la divergencia del vector que depende de x y t , es decir, $\nabla_{x,t} \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$ donde F_j es la entrada j -ésima del vector, finalmente n es el vector normal unitario a S .

A7. Paridad put- call

Para entender la ecuación de paridad se hace el siguiente desarrollo:

Supongamos la formación de un portafolio que cuanta con una acción (S) una opción tipo call (C) y una put (P) europea, estas opciones tiene como activo subyacente la acción y ambas tiene la misma fecha de vencimiento (T), se adoptan posiciones largas para la acción y para la opción put y posición corta para la opción call, entonces el valor del portafolio (Π) esta dado por:

$$\Pi = S + P - C$$

El pago del portafolio en la fecha de expiración esta dado por

$$S + \max(E - S, 0) - \max(S - E, 0)$$

que se puede escribir como

$$S + E - S - 0 = E \text{ si } S \leq E$$

$$S + 0 - (S - E) = E \text{ si } S \geq E$$

Entonces el valor del portafolio traído a valor presente y que evita la posibilidad de arbitraje es $Ee^{-r(T-t)}$ donde r es la tasa de interés libre de riesgo y t es el tiempo inicial con lo que podemos concluir que

$$Ee^{-r(T-t)} = S + P - C$$

Esta expresión es llamada la paridad *put-call*.

A8. Integral de trayectoria

La Integral de trayectoria es una herramienta utilizada principalmente en la física para resolver problemas con variables estocásticas.

Consideremos una partícula que en el tiempo inicial t_a se encuentra en la posición x_a y se mueve a la posición x_b al tiempo t_b , es decir, la partícula se desplaza del punto a al punto b como función del tiempo $x(t)$, con la propiedad de que $x(t_a) = x_a$ y $x(t_b) = x_b$. En mecánica cuántica, se dice que se tiene una amplitud (de probabilidad) o también llamada Kernel (de probabilidad), que podemos escribir como $\mathcal{K}(b, a)$, para describir el movimiento del punto a al punto b . Esta amplitud no es otra cosa que la suma de las contribuciones de cada trayectoria para ir del punto a al punto b . (Feynman y Hibbs, 1965).

Entonces la probabilidad de que la partícula pase del punto a al punto b está dada por $P(b, a) = |\mathcal{K}(b, a)|^2$ donde

$$\mathcal{K}(b, a) = \sum_{\text{sobre todas las trayectorias de } a \text{ a } b} \Theta[x(t)],$$

Donde la contribución de la trayectoria $\Theta[x(t)]$ tiene una fase proporcional a la acción S , es decir,

$$\Theta[x(t)] = C_1 e^{C_2 S[x(t)]}$$

Con C_1 y C_2 constantes y la acción $\mathcal{S}[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt$, y $L(\dot{x}, x, t)$ es el Lagrangiano del sistema, esta acción es la que permite calcular la trayectoria “clásica” a través del principio de mínima acción ver (Feynman y Hibbs, 1965 Cap. 1 y 2),

Para realizar la suma sobre todas la trayectorias, seleccionamos primero un subconjunto de todas las posibles trayectorias, para ello se divide la variable independiente (tiempo) en pasos de largo ε , entonces para cada tiempo t_i se puede seleccionar un punto x_i . Entonces construyendo una trayectoria uniendo estos puntos, es posible definir la suma sobre las trayectorias como el producto de las integrales sobre x_i entre 1 y $N - 1$ (Figura 2) donde

$$N_\varepsilon = t_b - t_a \quad y \quad \varepsilon = t_{i+1} - t_i$$

$$t_b = t_N \quad y \quad t_a = t_0$$

$$x_b = x_N \quad y \quad x_a = x_0$$

La ecuación resultante es

$$\mathcal{K}(b, a) \sim \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_{N-1} \Theta[x(t)] \quad (A9)$$

Nótese que la integral es sobre x y únicamente abarca desde $i = 1$ hasta $N - 1$ ya que x_0 y x_N están fijos (Feynman y Hibbs, 1965).

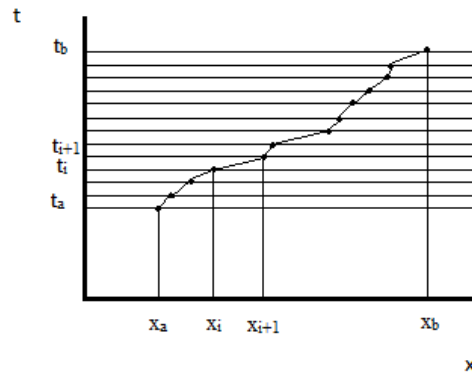


Figura A 2 Una posible trayectoria uniendo los puntos x_i (Modificado de Feynman y Hibbs, 1965).

Podemos obtener una muestra más representativa del conjunto de todas las trayectorias haciendo que $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir, obtener la igualdad en la ecuación (A9). Pero desafortunadamente no podemos garantizar que este límite exista, para poder garantizar la existencia del límite, es necesario dar algún factor de normalización (A) que esperamos dependerá de ε , lamentablemente no podemos dar una expresión general para dicho factor, dependerá de cada problema que se está analizando así la ecuación (28) toma la forma (Feynman y Hibbs, 1965)

$$\mathcal{K}(b, a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \frac{dx_1}{A} \int \frac{dx_2}{A} \dots \int \frac{dx_{N-1}}{A} \Theta[x(t)] ,$$

donde la notación más usual es

$$\mathcal{K}(b, a) = \int_a^b \mathcal{D}x(t) e^{C_2 \int_a^b L(\dot{x}, x, t) dt} \quad (\text{A10})$$

donde esta forma de representación es la llamada integral de trayectoria.