

**TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN ECONOMIA**

**CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS**

**EL COLEGIO DE MEXICO**

***DECISIONES DE CONSUMO E  
INVERSIÓN BAJO INCERTIDUMBRE***

**Leonardo Adalberto Gatica Arreola**

**Promoción 1995-1997**

Junio, 1998

**ASESOR: Dr. Francisco Venegas Martínez**

## **AGRADECIMIENTOS**

**Mi agradecimiento a Francisco Venegas, por toda su ayuda siempre generosa e incansable; igualmente a Jorge Valdéz, por la paciencia que ha implicado ser mi jefe.**

**Sin ellas este trabajo no hubiera sido posible.**

## Resumen

Durante el periodo de 1992-1994, la economía mexicana se caracterizó por un fuerte incremento en las importaciones y una caída en la inversión. En esos años la prioridad en la política económica era el control del crecimiento de los precios. Para ello se instrumentó un programa de estabilización basado en el Pacto para la Estabilidad y el Crecimiento Económico que utilizó el tipo de cambio nominal como ancla. Este trabajo propone una explicación a la respuesta negativa de la inversión frente al riesgo político, como ocurrió en México durante este periodo. La hipótesis que presentamos se sustenta en la recomposición de la cartera de los agentes económicos, sustituyendo inversión por consumo, como resultado natural de la maximización de su utilidad frente a un contexto incierto. Se propone un modelo donde la tasa de depreciación esperada sigue un movimiento dentro de una banda de ajuste que está determinado por un proceso mixto, tanto de difusión como de saltos discontinuos, donde ambos se encuentran correlacionados. Los agentes determinan la composición de su cartera entre saldos reales y un bono que se comercia internacionalmente. A partir de esto, se analiza una economía abierta y pequeña, en un ambiente estocástico, construida sobre un modelo de generaciones traslapadas. Se analizan los cambios en la composición de la cartera de los inversionistas como resultado de la formación de expectativas de riesgo, así como el comportamiento del consumo, del bienestar y de la riqueza. Para el análisis se consideran dos casos: una economía tipo Ramsey con una restricción de Clower, y una economía tipo Sidrauski.

# ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
LA DINÁMICA DEL TIPO DEL TIPO DE CAMBIO .....	5
Los Activos .....	5
La composición del Portafolio .....	8
IMPLICACIONES SOBRE EL BIENESTAR .....	11
IMPLICACIONES SOBRE LA RIQUEZA Y EL CONSUMO .....	12
DINERO DENTRO DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD .....	14
CONCLUSIONES .....	15
APÉNDICES .....	17
FIGURAS .....	24
REFERENCIAS .....	27

# 1. INTRODUCCIÓN

Entre 1988 y diciembre de 1994, México experimentó una intensa apertura comercial con una gran movilidad de capitales y la implementación de un decidido programa de privatizaciones. Después de los primeros programas de estabilización instrumentados entre 1982 y 1987, caracterizados por la eliminación del déficit fiscal, la contracción de la demanda interna y la reducción de presiones en la balanza de pagos, estas acciones formaron parte de un nuevo plan de estabilización inflacionaria que fue introducido por las autoridades mexicanas en diciembre de 1987, y en el cual, a diferencia de los anteriores, la tasa de depreciación se utilizó como ancla nominal. Un elemento novedoso y de suma importancia en este plan fue el acuerdo entre diferentes sectores sociales en virtud de reunirse periódicamente para negociar y dejar establecidas las disposiciones referentes al control de precios, incluidos los salarios y el tipo de cambio, para finalmente asumir el compromiso de sostenerlas. El Pacto se diseñó de acuerdo con los objetivos de corregir de manera permanente las finanzas públicas, para lo cual se pretendía reducir el tamaño del sector público, aplicar una política monetaria restrictiva, corregir la inercia salarial, la apertura comercial, la negociación de precios en sectores líderes y adotar medidas de control negociado de precios (vease Aspe, 1993). Así, en diciembre de 1987 se firmó el primer acuerdo para el Pacto de Solidaridad Económica, PSE, seguido de dos fases más, para dar paso a la firma del acuerdo para el Pacto para la Estabilización y el Crecimiento Económico, PECE, en enero del siguiente año. El PSE y posteriormente el PECE tuvieron como constante la lucha contra la inflación como la prioridad máxima de la política económica. Desde el inicio del PECE, el régimen de tipo de cambio fijo dio paso a un deslizamiento dentro de una banda de flotación estrecha. El objetivo prioritario de disminuir la inflación se reflejó en una política cambiaria que contuvo del crecimiento de los precios a través de la sobrevaluación del tipo de cambio, hecho que se evidenció al disminuir gradualmente la velocidad de deslizamiento del peso. En la tercera fase del PECE, a partir de enero de 1990, el deslizamiento del tipo de cambio se redujo de un peso diario, como se había fijado desde un inicio, a 80 centavos. Al renovarse el PECE el año siguiente, nuevamente se contrajo el deslizamiento, esta vez a 40 centavos diarios. Para finales de ese año la depreciación nominal del peso fue de 4.34%, mientras que la inflación alcanzó el 18.8%. En 1992, el deslizamiento se redujo aún más y finalmente el tipo de cambio empeoró tan sólo en 1.14%.

Los primeros del Pacto de Solidaridad Económica en términos de la estabilización de precios fueron extraordinarios. La inflación anualizada que en diciembre de 1987 alcanzó más de 400%, para fines del siguiente año 1988 fue algo inferior al 25%. Las siguientes fases del PSE y posteriormente del PECE continuaron obteniendo buenos resultados. La inflación de diciembre de 1988 fue de 51.7%, mientras que para 1992 había disminuido a 11.9% y a 8.0% en 1993.

La actividad económica se recuperó gradualmente a partir de 1988. A pesar del ajuste fiscal, la economía no cayó en una recesión debido a la disminución del crecimiento de los precios y a la consecuente estabilización de los salarios reales. La renegociación de la deuda externa permitió una reducción de las tasas de interés, que junto con la

puesta en marcha del PECE, reactivaron la inversión. En 1989, el PIB creció 3.3% y el déficit público disminuyó en más de un 50% como porcentaje del PIB. De esta forma, el sector público logró liberar recursos prestables para el sector privado, cuya inversión creció 9.5% en términos reales. La reactivación de la inversión generó presiones en la balanza comercial, aunque aún para 1989 se logró registrar un pequeño superávit. Sin embargo, en ese mismo año comenzó a fluir nuevamente la inversión extranjera. Con el anuncio de la reprivatización de la banca nacionalizada y la decisión de negociar un acuerdo de libre comercio en 1990, se consolidó la entrada de capital extranjero. Esto estimuló aún más la demanda agregada y por lo tanto el crecimiento económico, que en 1990 alcanzó una tasa de 4.5% en términos reales.

Este crecimiento estuvo alimentado fundamentalmente por el sector privado. Por un lado el consumo privado aumentó 6.1%, mientras que la inversión privada registró un alza de 13.3%. Este repunte de la inversión llevó consigo una fuerte demanda de importaciones, de tal forma que las importaciones reales en pesos crecieron 19.7% en ese año y continuaron creciendo en los años siguientes. Esta característica de la economía reflejaba tanto la liberalización comercial emprendida, como la sobrevaluación del tipo de cambio. Un año después, en 1991, la economía comenzó a mostrar signos de debilitamiento.

Para 1992 el PIB sólo creció 2.6%, mientras que la oferta total aumentó 5.2% en términos reales, debido a que las importaciones crecieron más de 20% ese año. Por otro lado, el consumo privado creció 3.9%, mientras que la inversión aumentó 14.4%. Es decir, el sector privado consumía e invertía más y ahorra menos. El faltante era cubierto por los flujos de capital extranjero o bien por el superávit financiero del gobierno.

A pesar de los grandes logros alcanzados durante este primer periodo, el costo de política económica, y especialmente la cambiaria, resultó alto. A partir de la sobrevaluación del tipo de cambio y la apertura comercial, la distorsión de los precios relativos entre los bienes comerciables y los no comerciables se agravó. Así, para diciembre de 1992, se calcula que los precios de los bienes no comerciables eran 16% más altos que los precios de los bienes comerciables. Esta distorsión, junto con el abaratamiento relativo de las divisas, redirigió una parte importante de la demanda hacia bienes importados. El valor de las importaciones aumentó de 28 082 millones de dólares en 1988, a 65 367 en 1993. El superávit comercial comenzó a descender y se convirtió en déficit en 1990. Desde ese momento el deterioro se aceleró; para 1992 el déficit alcanzó la cifra de 15 933 millones de dólares y para 1993 13 481 millones de dólares, incluyendo el saldo positivo de las maquiladoras.

La ligera mejoría de la balanza comercial de 1993 respecto al año anterior fue consecuencia de la la contracción de la economía, que únicamente creció 0.6% en términos reales. A partir de ese momento las presiones en la balanza de pagos y la contracción económica, comenzaron a generar dudas acerca del compromiso del gobierno por sostener la política cambiaria anunciada, con lo cual el "pacto" con los diferentes sectores comenzó a debilitarse.

Durante 1993 inicia un debate en torno a la conveniencia o no de seguir manteniendo el objetivo de bajar la inflación a niveles internacionales, o bien relajar el tipo de cambio para disminuir las presiones en la cuenta corriente aunque ello significara un mayor aumento en el nivel de precios. En el debate se emplearon por una parte argumentos tradicionales

del modelo de ajuste excesivo de Dornbush-Rodríguez para insistir en una devaluación (Dornbusch y Werner, 1994), y por otra se empleó la idea de ajustes que permitieran recobrar el equilibrio inducidos por la reforma estructural como argumentos para defender la política cambiaria entonces vigente (Sachs, 1995). Las autoridades decidieron sostener el objetivo de disminuir el crecimiento de los precios, sin embargo, iniciaron una ampliación de la banda de flotación para reducir gradualmente la sobrevaluación. Durante febrero y marzo de 1994, el peso se depreció alrededor de un 8%. Es también en el mes de marzo que Dornbush y Werner (1994) plantean la necesidad de una depreciación del 20%. Bajo este contexto, la percepción del posible abandono de la política cambiaria anunciada comenzó a crecer.

Es durante este periodo que se dan sucesos inesperados: las ya mencionadas recomendaciones de especialistas por devaluar, la aparición del Ejército Zapatista de Liberación Nacional, los asesinatos de Luis Donaldo Colosio y Francisco Ruíz Massieu y el inicio de la crisis del sistema bancario, que junto con la debilidad que para ese momento había acumulado el pacto y la proximidad de las elecciones, se conforman en un riesgo político no previsto. Frente a este panorama, se previó que la política cambiaria hasta entonces vigente no pudiera ser sostenida. Los inversionistas perdieron confianza en el compromiso del gobierno por defender la política cambiaria, y percibieron futuras desviaciones, incluidas devaluaciones bruscas. La anticipación de los agentes al plan para estabilizar el tipo de cambio causó una sustitución de la inversión por consumo que conllevó a un empeoramiento de la balanza comercial debido al insostenible crecimiento de las importaciones.

Este trabajo examina el impacto que sobre la inversión y el consumo tiene un aumento en las expectativas, no sólo de abandono de la política cambiaria, sino de una variación en la velocidad de depreciación. Proponemos una hipótesis que vincula el riesgo de devaluación bajo un escenario de comportamiento estocástico y del rendimiento de un bono internacionalmente comerciable, con la composición de cartera de los agentes entre consumo e inversión. La percepción de una mayor depreciación o del aumento de probabilidad de devaluación elevan el costo de oportunidad esperado para el consumo futuro, lo cual produce que los agentes redistribuyan sus recursos hacia el consumo presente. En el caso mexicano, si bien este comportamiento no basta para explicar el colapso de diciembre de 1994, si podemos afirmar que ahondó las presiones ya existentes en la balanza de pagos, debido a la alta composición de consumo por importaciones, al descenso en los niveles de ahorro interno y a las corridas contra los activos financieros que también precipitaron la crisis del sistema bancario.

A diferencia de otros trabajos que han abordado este tema, no desarrollamos un modelo de crisis balanza de pagos o de ataques especulativos con equilibrios múltiples, que se basan en la composición óptima de cartera como una forma de maximizar el rendimiento esperado de los activos. En nuestro análisis mostramos que las estampidas de inversionistas se deben a una recomposición de su portafolio hacia el consumo, como resultado natural de la maximización de su utilidad frente al riesgo. Se trata de un modelo basado en el microfundamento de maximización de la utilidad de los agentes como punto de partida para explicar las condiciones iniciales que llevan a las corridas de los activos financieros. Aunque la naturaleza de este trabajo es muy diferente, nuestros resultados coinciden con los puntos de vista propuestos por Calvo (1995) o Cole y Kehoe (1996), ya que el comportamiento

que predice nuestro modelo inside no sólo en los desequilibrios de los flujos de la balanza de pagos, sino también en los desequilibrios de los saldos reales. Al igual que otros trabajos recientes, consideramos que la crisis no necesariamente se origina por un déficit fiscal, como ocurre en los modelos clásicos de crisis de balanza de pagos, sino en la percepción de un riesgo creciente que induce a la recomposición de cartera que proponemos y que bajo un contexto propicio puede desencadenar una crisis. El riesgo bien puede ser de carácter político y no necesariamente económico, lo cual no se descarta en el caso mexicano tal y como lo plantean Gil-Díaz y Carstens(1997).

Hemos modelado una tasa de retorno en un ambiente estocástico para un bono internacional, por medio de un proceso de difusión (proceso de Markov), y las variaciones aleatorias en la tasa de depreciación esperada por medio de un proceso mixto, tanto de difusión como de saltos discontinuos. Esto último se ha construido a partir de un componente Brawniano que determina la tasa de depreciación, y un componente de Poisson que caracteriza la posibilidad de devaluaciones bruscas.

El experimento central del trabajo, consiste en establecer una tasa inicial de depreciación (*i.e.*, deslizamiento) y una probabilidad inicial de ocurrencia de devaluaciones bruscas (*i.e.*, saltos en la tasa de cambio), ambas en un nivel bajo. Posteriormente debido al clima de incertidumbre política, se forman expectativas en torno al abandono de la política cambiaria y por lo tanto la tasa esperada de depreciación y la probabilidad de devaluación aumentan. Se evalúa entonces el efecto del incremento en el riesgo sobre la composición de portafolio entre consumo e inversión.

La aplicación de procesos mixtos, de difusión y discontinuos, para caracterizar la dinámica del tipo de cambio en problemas de maximización de utilidad esperada, ha ido en aumento en la literatura sobre finanzas internacionales. Ejemplos de esto son Svensson (1992) y Penati y Pennacchi (1989). Otras aplicaciones de los procesos mixtos en finanzas pueden encontrarse en Ahn y Thompson (1988), Jarrow y Rosenfeld (1984), Malliaries y Brock (1982), y Merton (1976) y (1971).

A continuación presentamos un modelo para una economía abierta y pequeña del tipo de Ramsey-Cass-Koopmans en un ambiente estocástico, sujeta a una restricción de Clower, donde se analiza el impacto del riesgo sobre la inversión y el consumo. Posteriormente, en la sección 3, se hace un breve análisis sobre las implicaciones del riesgo en el nivel de bienestar. En la cuarta sección, se plantea el comportamiento del consumo bajo una elección óptima del agente representativo. En la sección 5, extendemos el modelo a una economía tipo Sidrauski para introducir el dinero en la función de utilidad del agente. Finalmente, en la última sección, hacemos un recuento de los resultados obtenidos.



## 2. LA DINÁMICA DEL TIPO DE CAMBIO Y DE LA TASA DE RENDIMIENTO

Con el fin de que nuestro modelo sea lo más manejable posible, simplificaremos al máximo la estructura de la economía. El principal supuesto de este modelo para una economía estocástica es que los inversionistas perciben que: 1) la tasa esperada de devaluación sigue un proceso mixto de difusión y saltos discontinuos, y 2) que la tasa de rendimiento de un bono internacional sigue un proceso de difusión; ambos procesos suponemos que se encuentran correlacionados.

### 2.1 Los Activos

Tomemos una economía pequeña y abierta, con ambiente estocástico y compuesta por generaciones traslapadas con  $p$  inversionistas naciendo y  $p$  inversionistas que mueren en cada periodo. La probabilidad de morir es constante durante la vida de los inversionistas y es igual a  $p$ , por lo tanto la población permanece constante en el tiempo. Si un inversionista vive, deberá pagar a una compañía de seguros un premio actuarial de  $p$  sobre el monto de su deuda corriente. En caso de que un inversionista muriera endeudado, el seguro de vida salda por completo su deuda.

Suponemos también que en nuestra economía existe un único bien de consumo. Este bien de consumo es peresedero y se comercia libremente a un precio doméstico  $P_t$ , determinado por la condición de paridad de poder de compra,  $P_t = P_t^* E_t$ , donde  $P_t^*$  es el precio del bien en dólares vigente en el resto del mundo y  $E_t$  es el tipo nominal de cambio. Para simplificar suponderemos que el precio del bien en dólares es igual a uno, por lo tanto el nivel de precios doméstico,  $P_t$ , es igual al tipo de cambio nominal,  $E_t$ . Supondremos también que el valor inicial del tipo de cambio nominal,  $E_t$ , es conocido.

En nuestra economía, la política cambiaria permite un deslizamiento del tipo de cambio dentro de una banda de ajuste. Sin embargo, si bien existe una tendencia de deslizamiento, se dan movimientos aleatorios alrededor de esta, cuidando que no rebacen los límites de la banda de flotación. El compromiso de las autoridades es mantener esta política. Sin embargo, puede existir algún riesgo de saltos discontinuos del tipo de cambio que rebacen la banda de flotación, es decir, la posibilidad de devaluaciones bruscas.

Así, las expectativas sobre la dinámica de la tasa de depreciación está generada por un proceso mixto, de difusión y saltos discontinuos. Suponemos entonces que el inversionista percibe que la tasa esperada de inflación,  $dP_t/P_t$ , y por lo tanto la tasa esperada de devaluación,  $dE_t/E_t$ , siguen un movimiento geométrico de tipo Browniano con saltos tipo Poisson:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{dE_t}{E_t} = \epsilon dt + \sigma dz_t + \nu dq_t \quad (1)$$

dentro de una banda ajustable:

$$E_0(1 + \nu)^{qt} B_t \leq E_t \leq E_0(1 + \nu)^{qt} A_t, \quad (2)$$

donde la tendencia  $\epsilon$  es la tasa media esperada de depreciación condicionada a que no ocurran saltos;  $\sigma$  es la volatilidad instantánea de la tasa esperada de depreciación;  $z_t$  es un

proceso de Wiener estandar, es decir,  $dz_t$  es una variable aleatoria con distribución normal temporalmente independiente, con  $E\{dz_t\} = 0$  y  $\text{Var}\{dz_t\} = dt$ . Además, el número de devaluaciones por unidad de tiempo ocurre de acuerdo a un proceso de Poisson  $q_t$  con una intensidad  $\lambda$ , de tal forma que:  $\text{Pr}\{\text{ocurra un salto de una unidad durante } dt\} = \text{Pr}\{dq_t = 1\} = \lambda dt + 0dt$ ,  $\text{Pr}\{\text{no ocurre ningún salto en } dt\} = \text{Pr}\{dq_t = 0\} = (1 - \lambda)dt + 0dt$ ,  $q_0 = 0$ . Por último,  $\nu$  es la magnitud porcentual media esperada de una devaluación brusca (*i.e.*, saltos hacia arriba del tipo de cambio), es decir, ya  $dq_t$  puede tomar valor de una unidad o de cero unidades,  $\lambda$  es la probabilidad de que ocurra un brinco hacia arriba en el tipo de cambio de magnitud de  $100\nu$  por ciento y  $(1 - \lambda)$  la probabilidad de que no ocurra una devaluación brusca. Para simplificar el análisis, y sin riesgo de alterar nuestros resultados, tomamos  $\nu$  como constante. Suponemos además que  $dz_t$  y  $dq_t$  están correlacionados.

En cuanto a la banda de flotación, tomamos  $A_t$  y  $B_t$  como procesos estocásticos relacionados con la política monetaria que satisfacen  $B_t < A_t$  y  $A_t < 0$  con probabilidad de uno. Hemos caracterizado estos elementos de la banda de flotación como procesos estocásticos a diferencia de Svensson (1992), quien los toma como parámetros al suponer que existe certidumbre en la política monetaria para mantener la banda alrededor de una paridad central en cierto porcentaje  $b$  constante.

La tendencia del tipo de cambio y de su tasa de variación dependerá únicamente del lugar, dentro de la banda de flotación, en que se encuentre, es decir, dependerá de:

$$\frac{E_t}{E_0(1 + \nu)^{q_t}}.$$

Llamaremos a esto el tipo de cambio normalizado,  $e_t$ , que se moverá dentro de una banda  $B_t \leq e_t \leq A_t$ . Así, la tasa del tipo de cambio normalizado será:

$$\frac{de_t}{e_t} = \frac{dE_t}{E_t} - \nu dq_t$$

y por lo tanto:

$$\frac{de_t}{e_t} = \epsilon dt + \sigma dz_t. \quad (3)$$

Ya que el interés de nuestro análisis se centra en cambios en la tasa esperada de devaluación que ocurren una sola vez y para siempre, suponemos que  $\epsilon$ ,  $\sigma$ , y  $\lambda$  son constantes positivas.

Para simplificar, no incorporaremos activos sin riesgo. De esta forma, consideraremos que existe un agente representativo que invierte en dos activos: saldos reales,  $m_t = M_t/P_t$ , donde  $M_t$  es el acervo nominal de dinero, y un bono internacional,  $b_t$ . De esta forma la riqueza real del inversionista esta definida por:

$$W_t = m_t + b_t, \quad (4)$$

donde la riqueza nominal,  $W_0$ , está determinada exogenamente. Además, suponemos que el resto del mundo no es demandante de moneda doméstica. Supondremos también que

nuestro inversionista representativo percibe que la tasa de rendimiento de los bonos sigue una dinámica estocástica que evoluciona de acuerdo con:

$$dr_t = (r_0 + p)r_t dt + \sigma_0 r_t dx_t, \quad (5)$$

donde la tendencia  $r_0 + p$  es la tasa media efectiva de rendimiento, condicionada a que el inversionista esté vivo,  $\sigma_0$  es el grado de volatilidad instantánea de la tasa esperada de rendimiento, y  $x_t$  es un proceso Wiener estandar, es decir,  $dx_t$  es una variable aleatoria con distribución normal temporalmente independiente, con  $E\{dx_t\} = 0$  y  $\text{Var}\{dx_t\} = dt$ . Es decir, al igual que el tipo de cambio, el rendimiento de los bonos sigue una tendencia sobre la cual existen movimientos aleatorios.

Plantaremos también que las perturbaciones en la tasa de rendimiento de los bonos y las desviaciones en el tipo de cambio se encuentran correlacionadas, de esta forma supondremos que  $dz_t$  y  $dx_t$  están correlacionados, por lo que:

$$dz_t dx_t = \frac{\text{Cov}(dx_t, dz_t)}{\sigma_0 \sigma} dt, \quad (6)$$

donde  $\text{Cov}(dx_t, dz_t)$  es la covarianza entre  $dx_t$  y  $dz_t$ . Supondremos que esta correlación es positiva, tal y como se observó en México durante el periodo 1992-1994.

Bajo el supuesto de perfecta movilidad de capital, la tasa de interés real doméstica,  $dR_t/R_t - dE_t/E_t$ , será igual a la tasa de retorno del bono internacional en todo momento, esto es:

$$\frac{dR_t}{R_t} - \frac{dE_t}{E_t} = \frac{dr_t}{r_t},$$

por lo tanto, la tasa de interés nominal esperada está dada por:

$$\frac{dR_t}{R_t} = i dt + \sigma dz_t + \sigma_0 dx_t + \nu dq_t,$$

donde

$$i = r_0 + p + \epsilon, \quad (7)$$

y la definimos como la tasa media de interés nominal esperada, condicional a que no haya devaluaciones bruscas (*i.e.*, condicionada a que no haya saltos en el tipo de cambio). De esta forma, el inversionista representativo espera que la tasa de interés siga los movimientos del tipo de cambio nominal.

En nuestro modelo la demanda de dinero estará insentivada por una restricción tipo Clower. Simplemente supondremos que los agentes requieren tener en cada periodo suficiente liquidez para financiar su consumo en ese periodo, la única función del dinero es como medio de cambio. Introducimos entonces la siguiente restricción:

$$m_t \geq \alpha c_t,$$

donde  $c_t$  es el nivel de consumo y  $\alpha > 0$  es el tiempo que se requiere mantener dinero para financiar el consumo en ese periodo. Dado que  $i > 0$ , el inversionista tendrá insetivos a

mantener únicamente la cantidad de dinero justamente requerida para realizar su consumo en el tiempo  $t$ :

$$m_t = \alpha c_t. \quad (8)$$

Es claro que la tasa de rendimiento por mantener saldos reales,  $dR_M$ , es simplemente el cambio porcentual del recíproco del nivel de precios,  $P_t d(1/P_t)$ . Es decir, mantener dinero implica tener una pérdida igual a la tasa de inflación:

$$dR_M = P_t d\left(\frac{1}{P_t}\right)$$

Aplicando el lema de Ito generalizado para procesos mixtos a  $P_t d(1/P_t)$  con (1) como el proceso relevante (ver Apéndice I), obtenemos:

$$dR_M = (-\epsilon + \sigma^2) dt - \sigma dz_t - \left(\frac{1}{1+\nu} - 1\right) dq_t \quad (9).$$

## 2.2 La Composición del Portafolio

En esta parte analizaremos la toma de decisión del agente representativo en cuanto a la composición de su portafolio y los efectos que el riesgo produce sobre esta elección. Consideramos que el inversionista es averso al riesgo y que su utilidad depende de su nivel de consumo. Así, el inversionista busca maximizar el valor presente de su utilidad (descontada a una tasa  $r_0 + p$ ) acumulada hacia el futuro. El problema del agente se reduce a uno del tipo Ramsey-Cass-Koopmans. Además, tratándose de un problema bajo incertidumbre, tomaremos una función de utilidad von Neumann-Morgenstern. De esta manera, el inversionista buscará maximizar

$$V_0 = E_0 \int_0^{\infty} \log(c_t) e^{-(r_0+p)t} dt, \quad (10)$$

donde  $E_0$  es la esperanza condicionada a utilizar toda la información disponible en  $t = 0$ . Por simplicidad y para obtener soluciones analíticas, hemos utilizado una función de utilidad logarítmica.

Pero además, el problema de maximización de utilidad esperada del inversionista está sujeto a un proceso estocástico de acumulación de riqueza. Para plantear esto, definamos inicialmente  $\omega_t$  como la proporción de la riqueza total del inversionista destinada a la tenencia de dinero en el periodo  $t$ ,  $m_t/W_t$ , y  $1 - \omega_t$  como la proporción de riqueza invertida en bonos en el periodo  $t$ ,  $b_t/W_t$ . El proceso estocástico de acumulación de riqueza del inversionista está determinado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned}
\frac{dW_t}{W_t} &= \omega_t \frac{dQ_t}{Q_t} + (1 - \omega_t) \frac{dr_t}{r_t} - \frac{c_t}{W_t} dt, \\
\frac{dQ_t}{Q_t} &= (-\epsilon + \sigma^2) dt - \sigma dz_t - \left( \frac{1}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t, \\
\frac{dr_t}{r_t} &= (r_0 + p) dt + \sigma_0 dx_t, \\
\frac{c_t}{W_t} &= \alpha^{-1} \omega_t,
\end{aligned} \tag{11}$$

donde  $Q_t = 1/P_t$  es el precio del dinero en términos de bienes. Con el fin de simplificar el análisis, excluiremos del modelo el ingreso por salario que pudiera recibir nuestro agente representativo.

Resolviendo el sistema en términos de  $dW_t/W_t$  (ver Apéndice II) obtenemos

$$\frac{dW_t}{W_t} = (r_0 + p - \rho \omega_t) dt - \omega_t (\sigma dz_t + \sigma_0 dx_t) + \sigma_0 dx_t + \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t, \tag{12}$$

donde  $\rho = \alpha^{-1} + i - \sigma^2$ . Para nuestro análisis únicamente consideraremos valores pequeños en  $\sigma^2$  y  $\sigma_0^2$ , de tal forma que

$$\beta \equiv \epsilon - \sigma^2 - \sigma_0^2 > 0, \tag{13}$$

esto es, suponemos que las desviaciones esperadas sobre la media, tanto del tipo de cambio como de la tasa de retorno, son relativamente bajas, es decir, el inversionista percibe un tipo de cambio y una tasa de rendimiento bastante estables.

Podemos entonces plantear el problema como

$$\max E_0 \int_0^{\infty} \log(\alpha^{-1} W_t \omega_t) e^{-(r_0 + p)t} dt$$

sujeto a la restricción (12).

La condición de primer orden para una solución interior es (ver Apéndice III):

$$\frac{r_0 + p}{\omega} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - \omega)} = A + \omega B, \tag{14}$$

donde  $A = \rho - \sigma_0^2 - \text{Cov}(dx_t, dz_t)$ , y  $B = \sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\text{Cov}(dx_t, dz_t) > 0$ . En adelante, y sin sacrificar la generalidad de nuestro análisis, supondremos que la  $\text{Cov}(dx_t, dz_t)$  está acotada de la siguiente forma:

$$0 < \text{Cov}(dx_t, dz_t) < \beta \tag{15}$$

De acuerdo con lo anterior es claro que  $A > 0$ . Podemos ver que la ecuación (14) es una ecuación cúbica con una raíz negativa y dos raíces positivas, de las cuales sólo una satisfase  $0 < \omega^* < 1$ . Esta raíz indica la composición óptima del portafolio del inversionista.

Para poder ver esto graficamente, definamos el lado izquierdo de la ecuación (14) como:

$$f(\omega) = \frac{r_0 + p}{\omega} - \frac{\lambda\nu}{1 + \nu(1 - \omega)} \quad (16)$$

Analizando la función  $f(\omega)$  podemos observar que tiene las siguientes propiedades:

$$f'(\omega) > 0, \quad f(0^+) = +\infty, \quad f(0^-) = -\infty, \quad f(+\infty) = 0, \quad f(-\infty) = 0, \quad f(1) = r_0 + p - \lambda\nu,$$

$$f\left(\frac{r_0 + p}{r_0 + p + \lambda} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right) = 0, \quad f\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^+\right) = +\infty, \quad f\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^-\right) = -\infty.$$

Con esta información podemos bosquejar la gráfica de  $f(\omega)$  como lo muestra la figura 1 (ver Figuras al final de los anexos). El lado derecho de la ecuación (14) es una recta con pendiente positiva  $B$  y ordenada en el origen  $A$ . Apartir de la condición (15) y de las definiciones de  $A$ ,  $\beta$ ,  $i$  y  $\rho$ , se puede probar que  $A > r_0 + p - \lambda\nu$  (ver Apéndice IV). La recta  $A + \omega B$  intersecta a la gráfica de la función  $f(\omega)$  en tres puntos, y ya que  $A > r_0 + p - \lambda\nu$ , entonces existe una raíz  $\omega^* \in (0, 1)$ . La otras dos raíces quedan descartadas del análisis; una raíz negativa implica un consumo negativo lo cual no tiene sentido alguno, mientras que tampoco sería posible una raíz con valor mayor a la unidad ya que el inversionista tiene incentivos a minimizar sus saldos reales, además que también implicaría un consumo negativo. Así, obtenemos una  $\omega^*$  óptima que indica la proporción de riqueza que se invertirá en bonos y aquella que se destinará al consumo, y que al ser invariante en el tiempo, mantiene la composición del portafolio constante. Debido a que  $A > 0$  siempre, aún cuando  $r_0 + p - \lambda\nu < 0$ ,  $\omega^*$  seguirá estando en el intervalo  $(0, 1)$ .

A continuación recogemos dos importantes resultados:

**Proposición 1.** Un aumento en la tasa de depreciación, que ocurre una sola vez y para siempre, y conlleva un aumento en el costo de oportunidad del consumo de bienes, tiene como resultado un aumento en la proporción de riqueza destinada al consumo en ese punto en el tiempo y por lo tanto una disminución de la inversión presente.

Esto es claro si observamos que  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  implica que  $A_1 < A_2$ , lo cual trasladaría la recta  $A + \omega B$  hacia arriba, reduciendo el valor de equilibrio  $\omega^*$ , como se muestra en la figura 2. De igual forma podemos diferenciar la ecuación (14) (ver Apéndice VI) para obtener

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} = - \left( \frac{r_0}{(\omega^*)^2} + \frac{\lambda\nu^2}{(1 + \nu(1 - \omega^*))^2} + B \right)^{-1} < 0$$

**Proposición 2.** Un aumento, que ocurre de una vez por todas, en el número esperado de devaluaciones por unidad de tiempo, aumentará el costo de oportunidad del consumo de bienes, que a su vez aumentará la proporción de riqueza dedicada al consumo en ese

punto en el tiempo. El efecto en la inversió es similar al que se enunció en la Proposición 1.

Como se muestra en la figura 3, un aumento en  $\lambda$ , de  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ , trasladará la curva de la función  $f(\omega)$  hacia abajo, con lo que el valor de  $\omega^*$  óptima disminuirá. Si diferenciamos la ecuación (14) (ver Apéndice VI) obtenemos

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \lambda} = \frac{\nu}{1 + \nu(1 - \omega^*)} \left( \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} \right) < 0,$$

lo cual es congruente con la Proposición 2.

Así, la elasticidad de la tasa de devaluación respecto a la probabilidad de devaluación será mayor a uno:

$$\frac{\frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon}}{\frac{\partial \omega^*}{\partial \lambda}} > 1.$$

### 3. IMPLICACIONES SOBRE EL BIENESTAR

A continuación analizaremos el impacto que sobre el bienestar tienen los cambios que ocurren de una vez por todas, tanto de la tasa de depreciación como de la probabilidad de devaluación. Como ya es común, el criterio que emplearemos sobre el bienestar de nuestro agente representativo,  $\Omega$ , será el de su utilidad maximizada partiendo de la riqueza inicial,  $W_0$ . Así, el bienestar económico está dado por (ver Apéndice III, fórmula (III.3))

$$\begin{aligned} \Omega(\epsilon, \lambda; W_0) = & \frac{1}{r_0 + p} [1 + \log(W_0) + \log(\alpha^{-1} \omega^*)] \\ & - \frac{1}{(r_0 + p)^2} \left[ A\omega^* + \frac{1}{2} [(\omega^*)^2 B + \sigma_0^2] - \lambda \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Derivando respecto a  $\epsilon$  (ver Apéndice VII) obtenemos

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} = - \frac{\omega^*}{(r_0 + p)^2}$$

Así, el bienestar es una función decreciente de la tasa media esperada de depreciación. Realizando el mismo análisis sobre el impacto que tiene el incremento de la probabilidad de devaluación,  $\lambda$ , en el bienestar económico, encontramos también

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \frac{1}{(r_0 + p)^2} \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right)$$

donde debido a que

$$\frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} < 0$$

la relación entre el bienestar y la probabilidad de devaluación es negativa:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} < 0$$

De esta manera, tal y como era de esperarse, el aumento del riesgo de una mayor depreciación y/o de devaluaciones bruscas disminuye los niveles de bienestar de los agentes.

#### 4. IMPLICACIONES SOBRE LA RIQUEZA Y EL CONSUMO

Tal y como lo indica el sistema de ecuaciones (11) y la función (12), los cambios instantáneos en la riqueza de nuestro agente representativo y su proceso de acumulación obedecen a un proceso estocástico que se desprende de la propia dinámica del tipo de cambio y de la tasa de rendimiento de los bonos. Aún cuando nuestro agente determine la composición óptima de su portafolio, es decir una  $\omega^*$  que como se ha demostrado es invariante en el tiempo, la trayectoria de su riqueza no sería determinista sino estocástica. Es de esperar entonces, que su consumo siga también un comportamiento de este tipo ya que con la elección óptima de nuestro inversionista tan solo se determina la proporción de riqueza que se dedicará al consumo y a la inversión.

Una vez determinadas las proporciones de riqueza que se dedicarán al consumo y a la inversión,  $\omega^*$ , y sustituyendo  $\omega^*$  en la ecuación (12), obtenemos la tasa de cambio de la riqueza como la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dW_t = W_t \left[ \left( \frac{\lambda \nu \omega^*}{1 + \nu(1 - \omega^*)} + B(\omega^*)^2 - [\sigma_0^2 + \text{Cov}(dx_t, dz_t)] \omega^* \right) dt \right. \\ \left. - \omega^* \sigma dz_t + (1 - \omega^*) \sigma_0 dx_t + \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

La solución para la ecuación anterior, condicionada a  $W_0$ , es (ver Apéndice I, fórmula (I.1))

$$W_t = W_0 e^{\delta_t(\omega^*)}, \quad (21)$$

donde

$$\delta_t(\omega^*) = \eta_t(\omega^*) + \gamma_t(\omega^*), \quad \eta_t \sim N[F(\omega^*)t, G(\omega^*)t], \quad \gamma_t = H(\omega^*)q_t, \quad \text{y } q_t \sim P(\lambda t), \quad (22)$$

y los componentes estacionarios de los parámetros de las distribuciones anteriores son:

$$F(\omega^*) = \frac{\lambda \nu \omega^*}{1 + \nu(1 - \omega^*)} + \frac{1}{2} [B(\omega^*)^2 - \sigma_0^2],$$

$$G(\omega^*) = B(\omega^*)^2 + \sigma_0^2 - 2\omega^* [\sigma_0^2 + \text{Cov}(dx_t, dz_t)] > 0,$$



y

$$H(\omega^*) = \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right) < 0.$$

Cabe señalar que

$$E[\delta(\omega^*)] = [F(\omega^*) + H(\omega^*)\lambda]t \quad y \quad \text{Var}[\delta_t(\omega^*)] = [G(\omega^*) + [H(\omega^*)]^2\lambda]t. \quad (23)$$

El valor presente de la riqueza agregada para el periodo  $t$ ,  $\widehat{W}_t$ , se obtiene sumando los niveles riqueza total en cada periodo poderados por el número de inversionistas vivos en cada periodo de acuerdo con una función de distribución exponencial, y está dada por

$$\widehat{W}_t = pW_0 \int_{-\infty}^t e^{\delta_{t-s}(\omega^*)} e^{-p(t-s)} ds.$$

De acuerdo con la ecuación anterior la riqueza agregada depende, tal y como esperabamos, tanto de la probabilidad de morir,  $p$ , como del proceso estocástico  $\delta_t(\omega^*)$ . El proceso estocástico del consumo, de acuerdo con las ecuaciones (8) y (20), estará definido como

$$c_t^* = \alpha^{-1} \omega^* W_0 e^{\delta_t(\omega^*)}. \quad (24)$$

Por lo tanto, el consumo agregado estará dado por

$$C_t^* = pW_0 \alpha^{-1} \omega^* \int_{-\infty}^t e^{\delta_{t-s}(\omega^*)} e^{-p(t-s)} ds.$$

Bajo esta estructura estocástica, no podemos determinar el nivel del consumo. Únicamente podemos obtener la probabilidad de que en cierto periodo, se de un determinado nivel de consumo. Además, el supuesto de que la tasa de preferencia intertemporal del inversionista sea igual que la tasa de interés real efectiva,  $r_0 + p$ , no asegura que se alcance un estado estable para el consumo.

## 5. DINERO DENTRO DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

La condición tipo Clower representa un supuesto en cierto grado restrictivo, ya que únicamente se considera al dinero como medio de cambio. En este apartado relajamos este supuesto incluyendo el dinero dentro de la función de utilidad, pudiendo interpretarlo como cierta preferencia por los servicios de liquidez. En ese caso, la acumulación de riqueza en términos de las proporciones en la composición del portafolio y del consumo, estaría dada por (ver Apéndice VIII)

$$dW_t = W_t [(r_0 + p - \phi\omega_t)dt - \omega_t(\sigma dz_t + \sigma_0 dx_t) + \sigma_0 dx_t + \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t] - c_t dt, \quad (25)$$

donde  $\phi = i - \sigma^2$ .

En este caso la utilidad esperada en el periodo  $t = 0$ ,  $V_0$ , será

$$V_0 = E_0 \int_0^{-\infty} [\theta \log(c_t) + \log(m_t)] e^{-(r_0+p)t} dt, \quad (26)$$

Hemos escogido nuevamente una función de utilidad logarítmica con el fin de obtener soluciones analíticas.

Las condiciones de primer orden para una solución interior a partir de la maximización de (26) sujeta a (25) están dadas por (ver Apéndice V)

$$c_t = \frac{\theta(r_0 + p)}{1 + \theta} W_t \quad \text{y} \quad \frac{r_0 + p}{(1 + \theta)\omega} - \frac{\lambda\nu}{1 + \nu(1 - \omega)} = D + \omega B, \quad (27)$$

donde  $D = \phi - \sigma_0^2 - \text{Cov}(dx_t, dz_t)$  y  $B$  se define igual que en la sección 2. La segunda ecuación en (27) es similar a la ecuación (14), excepto por el factor  $1/(1 + \theta)$  que ahora aparece en el primer término del lado izquierdo. Además es claro que  $D > (r_0 + p)(1 + \theta)^{-1} - \lambda\nu$ . No obstante que  $\omega$  tiene un significado distinto ahora, el análisis sobre  $\omega^*$  óptima realizado en secciones atrás, se aplica íntegramente para este caso y arroja los mismos resultados. De esta manera tenemos  $\partial\omega^*/\partial\epsilon < 0$  y  $\partial\omega^*/\partial\lambda < 0$ , tal y como se obtuvo en secciones anteriores.

Para obtener el proceso estocástico de acumulación de riqueza óptimo, simplemente sustituimos  $\omega^*$  óptima y  $c_t$  en la ecuación (25). El resultado es nuevamente la ecuación (20). Así, el consumo individual está dado por

$$c_t = \frac{p\theta(r_0 + p)}{1 + \theta} W_0 e^{\delta_{t-s}(\omega^*)} \quad (28)$$

y el consumo agregado por

$$C_t^* = \frac{p\theta(r_0 + p)}{1 + \theta} W_0 \int_{-\infty}^t e^{\delta_{t-s}(\omega^*)} e^{-p(t-s)} ds. \quad (29)$$

Al igual que en el apartado anterior, encontramos que aún cuando el inversionista tenga una tasa de preferencia intertemporal igual a la tasa de interés mundial, no se

asegura un nivel de estado estable para el consumo. Finalmente, un resultado importante que hay que señalar, es que aún cuando existe independencia Pareto-Edgeworth en la función de utilidad, la política cambiaria no es neutral debido a que el consumo óptimo,  $c_t$ , depende de la riqueza del agente,  $W_t$ , que a su vez depende explícitamente de la tasa de cambio, y por lo tanto de  $\epsilon$  y de  $\lambda$ .

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha utilizado un modelo estocástico de una economía abierta para analizar la respuesta de la inversión y el consumo frente a cambios en la percepción que los agentes tienen sobre el riesgo de abandono de una determinada política cambiaria. En el modelo, los agentes no sólo responden a la posibilidad de abandono de la política cambiaria que implicaría una devaluación brusca, como es el caso de los modelos de reputación y credibilidad, sino que también tienen respuestas frente a posibles movimientos en la tasa de deslizamiento del tipo de cambio que podrían ocurrir aún bajo contextos de continuidad en la política cambiaria. La expectativa de una depreciación más rápida bajo un esquema de deslizamiento del tipo de cambio dentro de una banda de ajuste, induce a los agentes a percibir un costo de oportunidad mayor para el consumo futuro. Esto provoca que el agente maximizador de utilidad asigne en el presente una proporción mayor de su riqueza hacia el consumo y disminuya aquella parte dedicada a la inversión. Este es el resultado enunciado en la Proposición 1. De igual forma, tal y como esperábamos, el fortalecimiento de las expectativas sobre probables devaluaciones bruscas, arroja resultados similares. El aumento en la probabilidad de una devaluación brusca produce también un incremento del costo de oportunidad del consumo futuro, por lo que ocurre una recomposición en la cartera del inversionista como se enuncia en la proposición 2. Los resultados obtenidos en este análisis nos permiten explicar la reducción sostenida en la inversión que ocurrió en México, fundamentalmente durante los dos años previos al colapso de 1994, cuando la posibilidad de una mayor depreciación se hizo evidente, no sólo por el manejo de la política económica sino por el riesgo político. A partir de las distorsiones causadas por la sobrevaluación del peso y la consecuente presión sobre la balanza de pagos, así como la desaceleración de la economía, era natural esperar una depreciación más rápida de la moneda. La intervención de las autoridades a través de la política cambiaria para corregir las distorsiones, tal y como ocurrió en los primeros meses de 1994 al ampliar la banda de flotación y acelerar la depreciación del peso en 8%, fue percibida como una respuesta lógica dentro del contexto. Los elementos de inestabilidad y riesgo político alimentaron aún más las expectativas, ya no únicamente de desviaciones en la tendencia de la tasa de depreciación sino también en la probabilidad de una devaluación brusca. El modelo desarrollado en este trabajo explica el incremento en el consumo, que se reflejó en un aumento en las importaciones, y la disminución de la inversión ocurrida durante este periodo, como un resultado de un comportamiento maximizador de utilidad bajo un contexto de riesgo.

En cuanto al bienestar de los agentes, el aumento en la probabilidad de devaluación y la expectativa de un incremento en la velocidad de depreciación de la moneda, contraen su nivel ya que la capacidad de consumo intertemporal se reduce debido a la disminución en la proporción de riqueza dedicada a la inversión. Bajo el ambiente estocástico que hemos empleado, el comportamiento tanto del consumo como de la riqueza de los individuos no

nos permite determinar sus niveles en un punto en el tiempo; tan solo podemos obtener la probabilidad de que en cierto periodo estas variables alcancen un nivel determinado. Si bien inicialmente se empleó una restricción de Clower, posteriormente se introdujo el dinero en la función de utilidad para relajar el supuesto inicial de su función exclusiva como medio de cambio. Los resultados obtenidos bajo este segundo enfoque concuerdan con los primeros y reafirman las proposiciones que hemos planteado. Así, el resultado central de este análisis, aún cuando únicamente se haya demostrado para una función de utilidad específica, es que si se genera incertidumbre sobre el sostenimiento de una política cambiaria con deslizamiento del tipo de cambio, o sobre la tendencia de la tasa de depreciación, los inversionistas se anticiparán al abandono del plan de estabilización incrementando su consumo y con ello las importaciones, causando a su vez una reducción en la inversión.

## APÉNDICES

### APÉNDICE I

El lema de Ito generalizado para procesos mixtos puede enunciarse como sigue (ver Gihman y Skorohod, 1972, c. 3): Dada la ecuación diferencial lineal homogénea estocástica

$$dy_t = y_t(\mu dt + \sigma_1 dz_{1t} + \sigma_2 dz_{2t} + \gamma dq_t)$$

y una función  $g(y_t)$  diferenciable continuamente dos veces, entonces la diferencial estocástica de  $g(y_t)$  está dada por:

$$\begin{aligned} dg(y_t) = & \{g_y(y_t)\mu y_t + \frac{1}{2}g_{yy}(y_t)[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\text{Cov}(dz_{1t}, dz_{2t})]y_t^2\}dt \\ & + g_y(y_t)[\sigma_1 dz_{1t} + \sigma_2 dz_{2t}]y_t + [g(y_t(1 + \gamma)) - g(y_t)]dq_t. \end{aligned}$$

De acuerdo con nuestro problema tenemos

$$dP_t = P_t(\epsilon dt + \sigma dz_t + \nu dq_t),$$

$$g(P_t) = \frac{1}{P_t}$$

y aplicando el lema de Ito,

$$dg(P_t) = \left(-\frac{1}{P_t^2}\right) P_t \epsilon + \frac{1}{2} \frac{1}{P_t^3} P_t^2 (2\sigma^2) dt + \left(-\frac{1}{P_t^2}\right) P_t (\sigma dz_t) + \left(\frac{1}{P_t(1+\nu)} - \frac{1}{P_t}\right) dq_t$$

por lo tanto:

$$d\frac{1}{P_t} = \frac{1}{P_t} \left[ (-\epsilon + \sigma^2) dt - \sigma dz_t + \left(\frac{1}{1+\nu} - 1\right) dq_t \right]$$

La solución para la ecuación diferencial estocástica homogénea

$$dy_t = y_t(\mu dt + \sigma_1 dz_{1t} + \sigma_2 dz_{2t} + \gamma dq_t)$$

está dada por

$$\begin{aligned} y_t = & y_0 \exp \left\{ \left[ \mu - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\text{Cov}(dz_{1t}, dz_{2t})) \right] t \right. \\ & \left. + \sigma_1 \int_0^t dz_{1u} + \sigma_2 \int_0^t dz_{2u} + \log(1 + \gamma) \int_0^t dq_u \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

## APÉNDICE II

Si tomamos el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas y sustituyendo las tres últimas ecuaciones en la primera obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_t}{W_t} &= \omega_t(\sigma^2 - \epsilon)dt - \omega_t\sigma dz_t + \omega_t \left( \frac{1}{1+\nu} - 1 \right) dq_t + (1-\omega_t)(\nu_0+p)dt + (1-\omega_t)\sigma_0 dx_t - \frac{\omega_t}{\alpha} dt \\
 &= [\omega_t(\sigma^2 - \epsilon) + (1-\omega_t)(\nu_0+p)]dt - \omega_t\sigma dz_t + \left( \frac{\omega_t - \omega_t(1-\nu)}{1+\nu} \right) dq_t + \sigma_0 dx_t - \omega_t\alpha^{-1} dt \\
 &= [\nu_0 + p - (\alpha^{-1} + i - \sigma^2)\omega_t]dt - \omega_t(\sigma dz_t + \sigma_0 dx_t) + \sigma_0 dx_t + \left( \frac{1+\nu(1-\omega_t)}{1+\nu} - 1 \right) dq_t.
 \end{aligned}$$

## APÉNDICE III

La ecuación de Bellman-Jacobi-Hamilton para el problema de control óptimo estocástico de maximizar la ecuación (13) sujeta a la restricción (11) es

$$\begin{aligned}
 \max_{\omega} H(\omega_t; W_t, t) &\equiv \max_{\omega} \left\{ \log(\alpha^{-1}W_t\omega_t)e^{-(r_0+p)t} + I_t(W_t, t) + I_W(W_t, t)W_t(r_0 + p - \rho\omega_t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} I_{WW}(W_t, t)W_t^2[\omega_t^2\sigma^2 + (1-\omega_t)^2\sigma_0^2 - 2\omega_t(1-\omega_t) \text{Cov}(dx_t, dz_t)] \right. \\
 &\quad \left. + \lambda \left[ I \left( W_t \left( \frac{1+\nu(1-\omega_t)}{1+\nu} \right), t \right) - I(W_t, t) \right] \right\} = 0, \tag{III.1}
 \end{aligned}$$

donde

$$I(W_t, t) = \max_{\omega} E_t \int_t^{\infty} \log(\alpha^{-1}W_t\omega_t) e^{-(r_0+p)s} ds$$

es la función de utilidad indirecta del agente, e  $I(W_t, t)$  es la variable de estado. La condición de primer orden para una solución interior es:

$$H_{\omega} = 0. \tag{III.2}$$

Dada la forma la forma exponencial del descuento temporal en la función (13) podemos plantear  $I(W_t, t)$  como una ecuación separable en cuanto al tiempo:

$$I(W_t, t) = e^{-(r_0+p)t} (\delta_1 \log(W_t) + \delta_0), \tag{III.3}$$

donde los parámetros  $\delta_0$  y  $\delta_1$  se determinarán a partir de la ecuación (III.1). Sustituyendo (III.3) en (III.1), podemos desarrollar la condición de primer orden (III.3):

$$\begin{aligned}
& e^{-(r_0+p)t} \frac{1}{\alpha^{-1}W_t \omega_t} (\alpha^{-1}W_t) + \frac{e^{-(r_0+p)t} \delta_1}{W_t} W_t (-\rho) + \\
& \frac{1}{2} \left( -\frac{e^{-(r_0+p)t} \delta_1}{W_t^2} \right) W_t^2 [2\omega_t \sigma^2 - 2\sigma_0^2 + 2\omega_t \sigma_0^2 - 2\text{Cov}(dx_t, dz_t) + 4\omega \text{Cov}(dx_t, dz_t)] \\
& + \lambda e^{-(r_0+p)t} \delta_1 \left( -\frac{\nu}{1 + \nu(1 - \omega_t)} \right) = \\
& \frac{1}{\omega_t} - \rho \delta_1 - \delta_1 [\omega_t \sigma^2 - \sigma_0^2 + \omega_t \sigma_0^2 - \text{Cov}(dx_t, dz_t) + 2\omega_t \text{Cov}(dx_t, dz_t)] - \lambda \delta_1 \left( -\frac{\nu}{1 + \nu(1 - \omega_t)} \right) = 0
\end{aligned}$$

A partir de lo anterior podemos observar que  $\omega$  no depende del tiempo, y finalmente llegamos a la condición

$$\frac{1}{\delta_1 \omega} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - \omega)} = A + \omega B. \quad (\text{III.4})$$

Los valores para los coeficientes  $\delta_0$  y  $\delta_1$  se determinan a partir de la ecuación (III.1). Sustituyendo  $\omega^*$  en (III.1) tenemos

$$\begin{aligned}
& \log(\alpha^{-1}W_t \omega^*) - (r_0 + p)\delta_1 \log W_t - (r_0 + p)\delta_0 + \delta_1(r_0 + p - \rho \omega^*) \\
& - \frac{1}{2} \delta_1 [(\omega^*)^2 \sigma^2 + (1 - \omega^*)^2 \sigma_0^2 - 2\omega^*(1 - \omega^*) \text{Cov}(dx_t, dz_t)] \\
& + \lambda \delta_1 \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right) = 0,
\end{aligned}$$

reagrupando términos

$$\begin{aligned}
& \log W_t (1 - (r_0 + p)\delta_1) + [\log(\alpha^{-1} \omega^*) - (r_0 + p)\delta_0 \\
& + \delta_1 \left( r_0 + p - \rho \omega^* - \frac{1}{2} (\omega^*)^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma_0^2 + \omega^* \sigma_0^2 - \frac{1}{2} (\omega^*)^2 \sigma_0^2 \right. \\
& \left. + \omega^* \text{Cov}(dx_t, dz_t) - (\omega^*)^2 \text{Cov}(dx_t, dz_t) - \lambda \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right) \right] = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto, se debe cumplir que tanto la primera parte de la ecuación como la que se

$$\log W_t(1 - (r_0 + p)\delta_1) = 0$$

y

$$(r_0 + p)\delta_0 = \log(\alpha^{-1}\omega^*) + \delta_1 \left( r_0 + p - \rho\omega^* - \frac{1}{2}(\omega^*)^2\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma_0^2 + \omega^*\sigma_0^2 - \frac{1}{2}(\omega^*)^2\sigma_0^2 \right. \\ \left. + \omega^* \text{Cov}(dx_t, dz_t) - (\omega^*)^2 \text{Cov}(dx_t, dz_t) - \lambda \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right) \right)$$

de donde obtenemos finalmente

$$\delta_1 = (r_0 + p)^{-1}$$

y

$$\delta_0 = \frac{1}{r_0 + p} [1 + \log(\alpha^{-1}\omega^*)] \\ - \frac{1}{(r_0 + p)^2} \left[ A\omega^* + \frac{1}{2} [(\omega^*)^2 B + \sigma_0^2] - \lambda \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right) \right]$$

La ecuación (III.4) es una ecuación cúbica con una raíz positiva y dos negativas, y únicamente una raíz satisface la condición  $0 < \omega^* < 1$ , tal como se presenta en al figura 1. Existe además una condición de transversalidad,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(W_t, t) = 0,$$

que se satisface.

## APÉNDICE IV

De la condición (15) y la definición (12) tenemos

$$0 < \text{Cov}(dx_t, dz_t) < \epsilon - \sigma^2 - \sigma_0^2$$

y apartir de la definición de  $A$  obtenemos

$$A = \rho - \sigma_0^2 - \text{Cov}(dx_t, dz_t) > \rho - \sigma_0^2 - \epsilon + \sigma^2 + \sigma_0^2$$

por lo tanto  $A > \rho - \epsilon + \sigma^2$ , y sustituyendo en esta condición las definiciones de  $i$  y  $\rho$ , se llega a

$$A > r_0 + p - \lambda\nu$$



## APÉNDICE V

La ecuación de Bellman-Jacobi-Hamilton para el problema de control óptimo estocástico para maximizar la ecuación (26) sujeta a la restricción (25) es:

$$\begin{aligned} \max_{c, \omega} H(c_t, \omega_t; W_t, t) \equiv \max_{c, \omega} & \left\{ [\theta \log(c_t) + \log(W_t \omega_t)] e^{-(r_0+p)t} + \right. \\ & + I_W(W_t, t) W_t (r_0 + p - \phi \omega_t) + I_W(W_t, t) c_t + I_t(W_t, t) + \\ & \left. + \frac{1}{2} I_{WW}(W_t, t) W_t^2 [\omega_t^2 \sigma_t^2 + (1 - \omega_t)^2 \sigma_0^2 - 2\omega_t(1 - \omega_t) \text{Cov}(dx_t, dz_t)] + \right. \\ & \left. \lambda \left[ I \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega_t)}{1 + \nu}, t \right) - I(W_t, t) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

Las condiciones de primer orden para una solución interior son:

$$H_c = 0 \quad \text{y} \quad H_\omega = 0.$$

Planteamos  $I(W_t, t) = e^{-(r_0+p)t} [\delta_1 \log(W_t) + \delta_0]$ , donde  $\delta_0$  y  $\delta_1$  están determinadas por (V.1). Sustituyendo  $I(W_t, t)$  en (V.1), y resolviendo para las condiciones de primer orden, encontramos que  $\omega_t \equiv \omega$  es constante en el tiempo,

$$c_t = \frac{\theta W_t}{\delta_1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\delta_1 \omega} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - \omega)} = D + \omega B \quad (\text{V.3})$$

donde la segunda ecuación tiene las mismas propiedades que (III.4).

De igual forma que se hizo en el apéndice III, los coeficientes  $\delta_0$  y  $\delta_1$  se determinan a partir de la ecuación (V.1). Así obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1 + \theta}{(r_0 + p)^{-1}} \\ &\quad \text{y} \\ \delta_0 &= \frac{1}{r_0 + p} \left[ 1 + \theta \log \left( \frac{\theta(r_0 + p)}{1 + \theta} \right) + \log(\omega^*) \right] \\ &\quad - \frac{1 + \theta}{(r_0 + p)^2} \left[ D\omega^* + \frac{1}{2} [(\omega^*)^2 B + \sigma_0^2] - \lambda \log \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega^*)}{1 + \nu} \right) \right] \end{aligned}$$

## APÉNDICE VI

A partir de la ecuación (14) y la definición de  $A$  y  $B$ , tenemos

$$\frac{r_0 + p}{\omega} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - \omega)} = \alpha^{-1} + r_0 + p + \epsilon - \sigma_0^2 - \text{Cov}(dx_t, dz_t) + \omega (\sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\text{Cov}(dx_t, dz_t)), \quad (\text{VI.3})$$

y diferenciando respecto a  $\epsilon$ , obtenemos

$$-\frac{r_0 + p}{\omega^2} d\omega - \frac{\lambda \nu^2}{(1 + \nu(1 - \omega))^2} d\omega = d\epsilon + B d\omega,$$

y reacomodando términos, llegamos finalmente a

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} = - \left( \frac{r_0}{(\omega^*)^2} + \frac{\lambda \nu^2}{(1 + \nu(1 - \omega^*))^2} + B \right)^{-1} < 0.$$

Nuevamente partiendo de (VI.3), y diferenciando respecto a  $\lambda$ , obtenemos

$$-\frac{r_0 + p}{\omega^2} d\omega - \nu(1 + \nu(1 - \omega)) d\lambda - \frac{\lambda \nu^2}{(1 + \nu(1 - \omega))^2} d\omega = +B d\omega,$$

y finalmente

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \lambda} = \frac{\nu}{1 + \nu(1 - \omega^*)} \left( \frac{r_0}{(\omega^*)^2} + \frac{\lambda \nu^2}{(1 + \nu(1 - \omega^*))^2} + B \right)^{-1} < 0,$$

## APÉNDICE VII

Derivando la función (17) respecto a  $\epsilon$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} &= \frac{1}{r_0 + p} \left( \frac{1}{\omega^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} \right) \\ &\quad - \frac{1}{(r_0 + p)^2} \left[ \omega^* + A \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} + \frac{1}{2} 2\omega^* B \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} - \lambda \left( \frac{1 + \nu}{1 + \nu(1 - \omega^*)} \right) \left( \frac{-\nu}{1 + \nu} \right) \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{(r_0 + p)^2} \frac{r_0 + p}{\omega^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} - \frac{1}{(r_0 + p)^2} \left[ \omega^* + \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} \left( A + \omega^* B + \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - \omega^*)} \right) \right], \end{aligned}$$

y ya que

$$A + \omega^* B + \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - \omega^*)} = \frac{r_0 + p}{\omega^*},$$

tenemos

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} = \frac{1}{(r_0 + p)^2} \frac{r_0 + p}{\omega^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon} - \frac{\omega^*}{(r_0 + p)^2} - \frac{1}{(r_0 + p)^2} \frac{r_0 + p}{\omega^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon},$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} = - \frac{\omega^*}{(r_0 + p)^2} < 0$$

## APÉNDICE VIII

A partir del sistema de ecuaciones (11) pero sin considerar la restricción de Clower, podemos resolver sustituyendo la segunda y tercera ecuaciones en la primera:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_t}{W_t} &= \omega_t(\sigma^2 - \epsilon)dt - \omega_t\sigma dz_t + \omega_t \left( \frac{1}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t + (1 - \omega_t)(\nu_0 + p)dt + (1 - \omega_t)\sigma_0 dx_t - \frac{c_t}{W_t} dt \\
 &= [\omega_t(\sigma^2 - \epsilon) + (1 - \omega_t)(\nu_0 + p)]dt - \omega_t\sigma dz_t + \left( \frac{\omega_t - \omega_t(1 - \nu)}{1 + \nu} \right) dq_t + \sigma_0 dx_t - \frac{c_t}{W_t} dt \\
 &= [\nu_0 + p - (\epsilon + r_0 + p - \sigma^2)\omega_t]dt - \omega_t(\sigma dz_t + \sigma_0 dx_t) + \sigma_0 dx_t + \left( \frac{1 + \nu(1 - \omega_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t - \frac{c_t}{W_t} dt.
 \end{aligned}$$

# FIGURAS

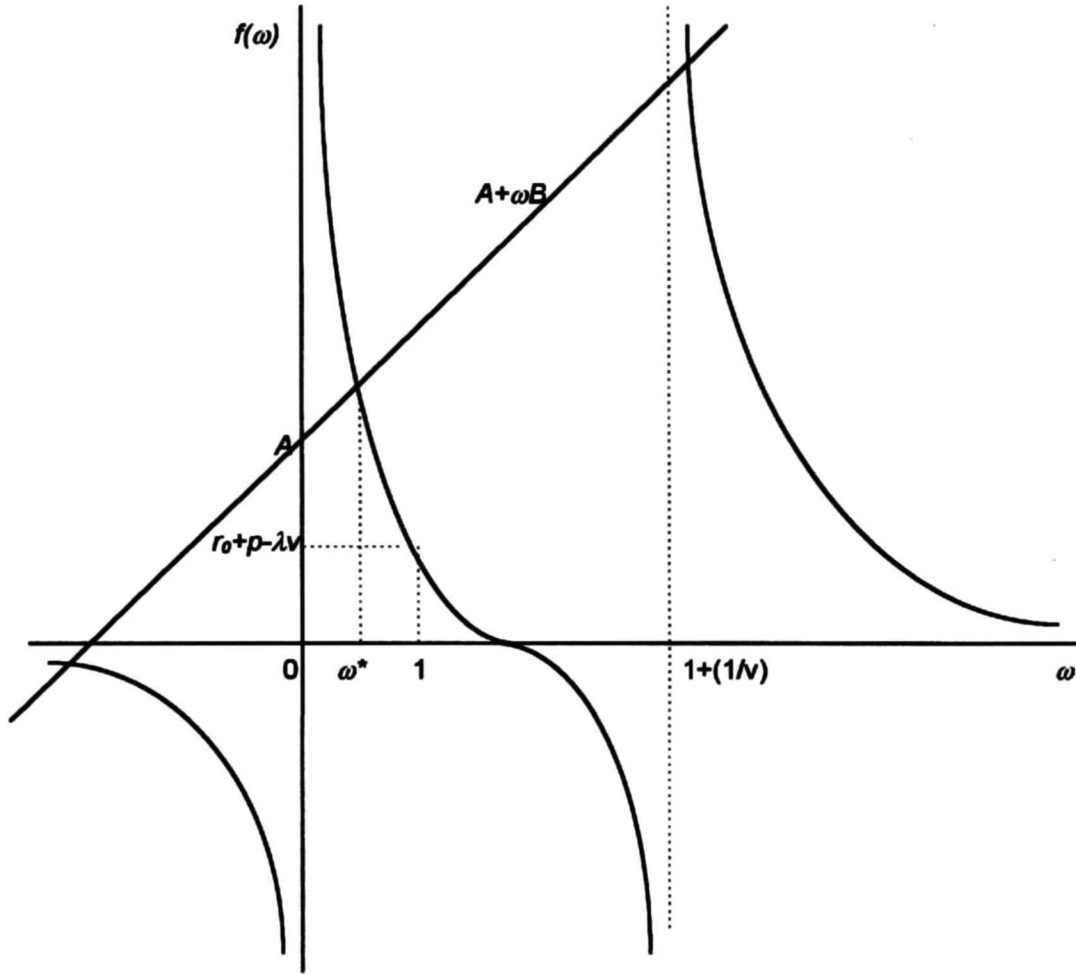


Fig. 1. Determinación de  $\omega^*$  óptima.

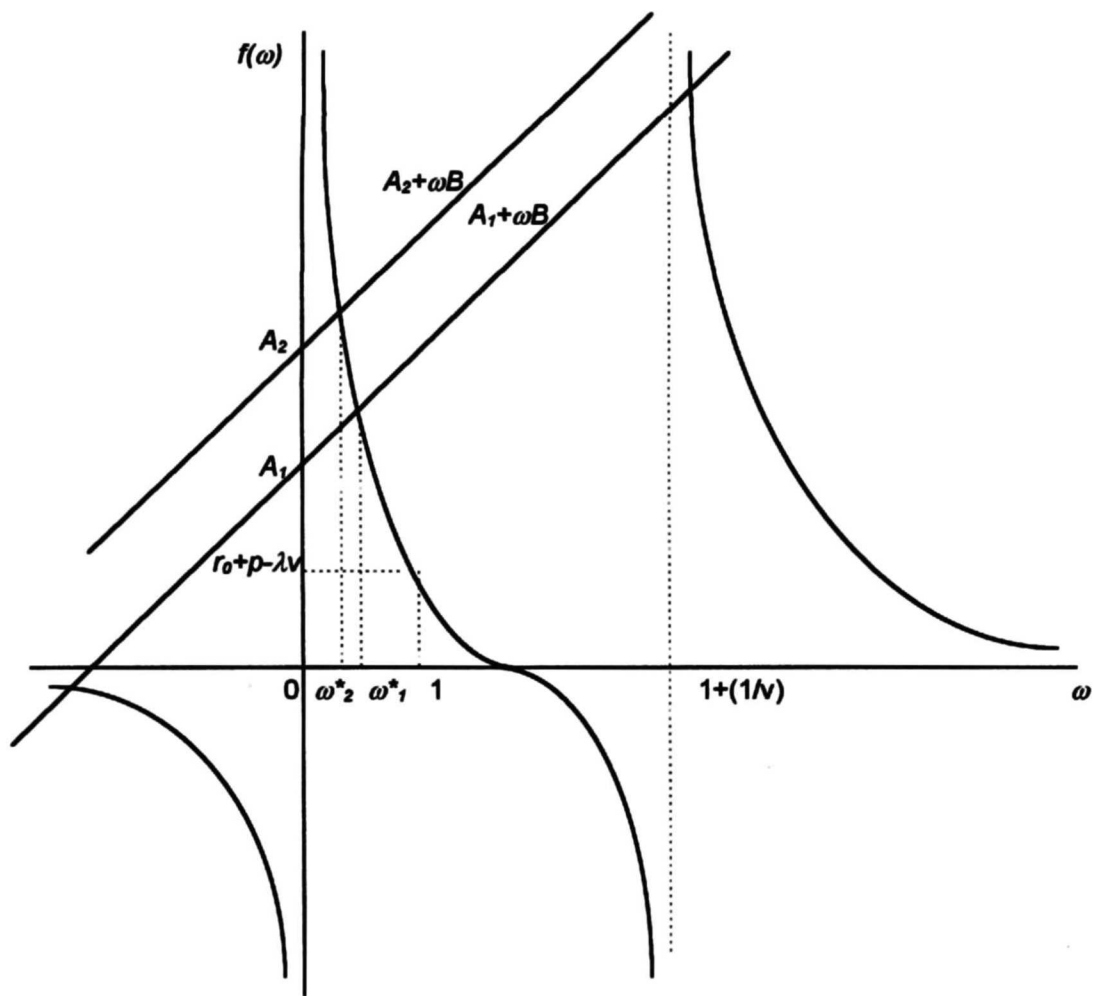
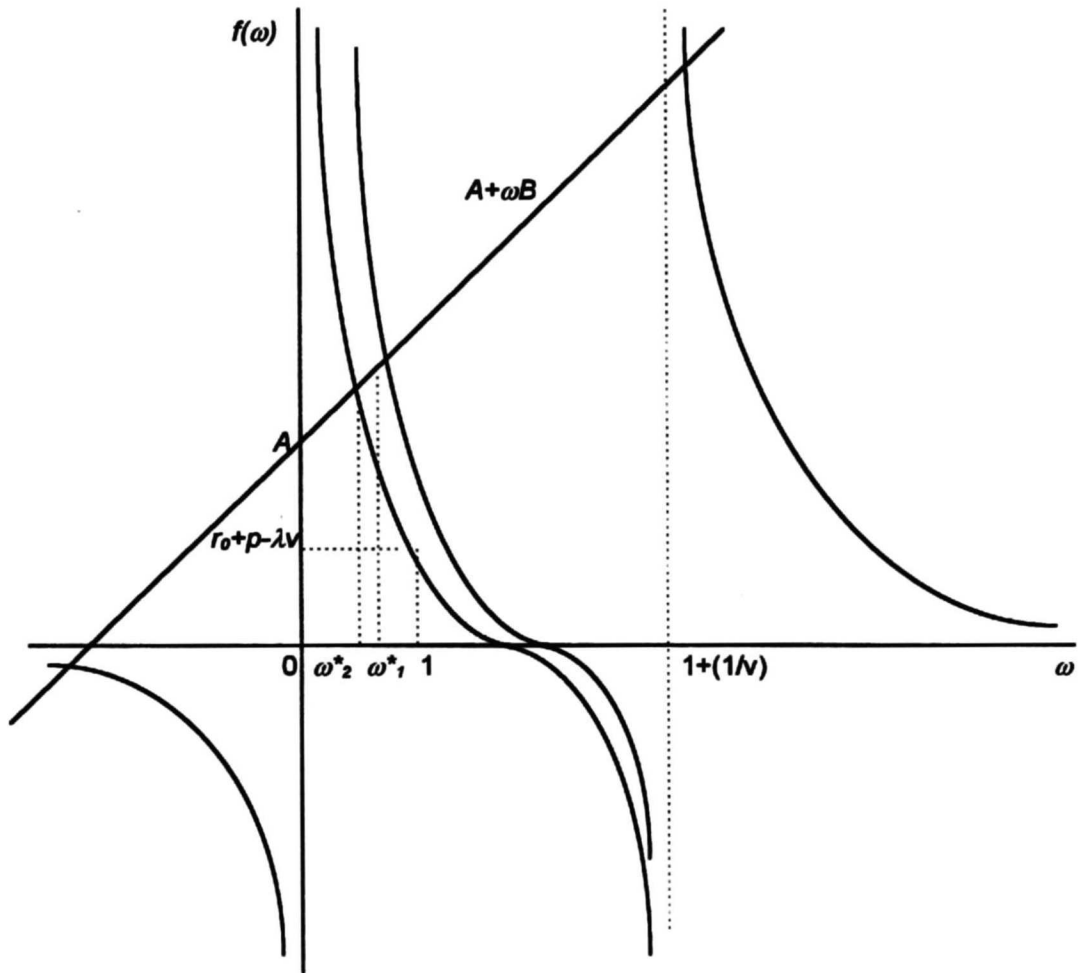


Fig. 2. Respuesta de  $\omega^*$  óptima frente a un cambio de una vez por todas en  $\epsilon$ .



**Fig. 1. Respuesta de  $\omega^*$  óptima frente a un cambio de una vez por todas en  $\lambda$ .**

## REFERENCIAS

- Ahn, C. M. y H. E. Thompson, (1988). "Jump Diffusion Processes and the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 43, pp. 155-174.
- Aspe, P., (1993). *El Camino Mexicano de la Transformación Económica*, Fondo de Cultura Económica.
- Calvo, G. y E.G. Mendoza, (1995). "La Crisis de Balanza de Pagos de México: Crónica de una Muerte Anunciada", *Investigación Económica*, vol. Y, VII:219, pp. 13-51.
- Cole, H. y T. J. Kehoe, (1996). "Self Fulfilling Debt Crises", mimeo., Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- Gihman, Y. Y. y A. V. Skorohod, (1972). *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag.
- Gil-Díaz, F. y A. Carstens, (1996). "One Year of Solitude: Some Pilgrim Tales About Mexico's 1994-1995 Crisis", *AEA Papers and Proceedings*, vol. 86, no. 2, pp. 164-169.
- Jarrow, R. A. y E. R. Rosenfeld, (1984). "Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Journal of Business*, 57, pp. 337-351.
- Malliari, A. G. y W. A. Brock, (1982). *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland.
- Merton, R. C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 125-144.
- Merton, R. C. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model", *Journal of Economic Theory*, 3, pp. 373-413.
- Penati, A. y G. Pennacchi, (1989). "Optimal Portfolio Choice and the Collapse of Fixed-Exchange Rate Regime", *Journal of International Economics*, 27, pp. 1-24.
- Sach, J., A. Tronell y A. Velasco, (1995). "The Collapse of the Mexican Peso: What Have we Learned?", Working Paper no. 5142, National Bureau of Economic Research.
- Svensson, L. E. O., (1992). "The Foreign Exchange Risk Premium in a Target Zone with Devaluation Risk", *Journal of International Economics*, 33, pp. 21-40.