

DESAGREGACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDADES EMPLEANDO LA FUNCIÓN DE GOMPERTZ

ALEJANDRO MINA V.
El Colegio de México

1. Introducción

COMO COMPONENTE demográfico, la fecundidad se expresa fundamentalmente vía las “tasas específicas de fecundidad por edades” y de la tasa global de fecundidad (es la suma de las específicas). Esta última (TGF) se entiende como el número medio de hijos por mujer al final del período reproductivo de una cohorte hipotética de mujeres que ha estado sujeta a la fecundidad por edades de un momento determinado.

Las fuentes para obtener la información sobre fecundidad, son los registros de las estadísticas vitales, las encuestas y los censos, pero debido a la notoria insuficiencia, tanto en cantidad como en calidad de dicha información, no pueden aplicarse confiadamente los métodos tradicionales de estimación. Por ello es conveniente ajustar las irregularidades propias de la información.

Un procedimiento que puede ser de utilidad para realizar ajustes del patrón de fecundidad por edades es presentado en este trabajo; dicho procedimiento fue desarrollado por Juan Chackiel en 1979,¹ su procedimiento está basado en ideas de W. Brass² y V. Kandiah³, quienes se apoyaron en la función de Gompertz linealizada mediante una transformación logarítmica.

El objetivo del presente trabajo es presentar el modelo del doble logaritmo de la función de Gompertz, aplicándolo a información ob-

¹ Ver: Chackiel, Juan, “Estructura de la fecundidad por edades: ajuste y proyección mediante la función de Gompertz linealizada”. *Notas de Población*. No. 20, agosto 1979.

² Brass, W.: The relational Gompertz model of fertility by age of woman. (Inédito).
Brass, W.: An application of the relational Gompertz model of fertility. (Inédito).

³ Kandiah, V.: The use of the relational fertility model parameters in population projections. East-West Center, Honolulu. (Inédito).

tenida de la Encuesta Mexicana de Fecundidad levantada, a nivel nacional, en el año de 1976, y señalar el empleo de dicho modelo en la desagregación de grupos de edades quinquenales a edades individuales, de la estructura por edad de la fecundidad.

2. *Presentación y aplicación del modelo del doble logaritmo de la función de Gompertz*

a) *Presentación de la información*

Las tasas específicas de fecundidad que se ajustaron, fueron tomadas de la Encuesta Mexicana de Fecundidad;⁴ dichas tasas corresponden a los años 1973, 1974 y 1975 (nivel nacional). El modelo que se aplicará requiere una estructura de la fecundidad por edades estándar, por ello, se toma como tal a la estructura del año de 1975, sin que esto quiera decir que es el mejor o el único estándar; sólo es un estándar tomado para ejemplificar el uso del modelo.

En el cuadro 1 se dan los valores de las tasas específicas de fecundidad, correspondientes a cada año.

Cuadro 1
MÉXICO: TASAS ESPECÍFICAS DE FECUNDIDAD, 1973, 74 y 75

Grupo de edades	Tasas específicas de fecundidad		
	5fx	5fx	5fx
	1973	1974	1975
15 - 19	0.1092	0.1061	0.0989
20 - 24	0.2870	0.2872	0.2964
25 - 29	0.3300	0.2805	0.2941
30 - 34	0.2702	0.2624	0.2359
35 - 39	0.1868	0.1645	0.1840
40 - 44	0.0887	0.0820	0.0793
45 - 49	0.0175	0.0172	0.0165

Fuente: Volumen II del primer informe nacional de los resultados de la Encuesta Mexicana de Fecundidad, cuadro H.E. 1 y H.E. 2

Se calcula, para cada año, la tasa global de fecundidad (como la suma de las tasas específicas multiplicadas por cinco). En el cuadro 2 se dan los valores de las tasas globales de fecundidad (TGF) para cada año.

b) *Presentación y aplicación del modelo de J. Chackiel para ajustar la estructura por edad de la fecundidad.*

⁴ Secretaría de Programación y Presupuesto; Encuesta Mexicana de Fecundidad, primer informe nacional, Volumen I, México, febrero 1979, pp. 135-173.

Cuadro 2

MÉXICO: TASAS GLOBALES DE FECUNDIDAD 1973, 74 y 75

año	T G F
1973	6.45
1974	6.00
1975	6.03

La representación de la fecundidad acumulada mediante la función de Gompertz sería la siguiente:

$$F(x) = (TGF) A^{B^x} \quad (1)$$

donde:

x - es la variable edad

F(x) - es la fecundidad acumulada hasta la edad x (vía suma de las tasas).

(TGF) - Tasa global de fecundidad que es el valor de F(x) para la edad límite superior del período reproductivo.

A y B - Son parámetros que varían alrededor de 0 y 1 respectivamente.

La distribución relativa acumulada adopta entonces la siguiente forma:

$$\frac{F(x)}{(TGF)} = A^{B^x} \quad (2)$$

Aplicando logaritmo natural a (2) se tiene:

$$\ln \frac{F(x)}{(TGF)} = B^x \ln A \quad (3)$$

Dado que los miembros de la igualdad son negativos, se multiplica por (-1) y se le aplica nuevamente logaritmo natural:

$$\ln \left[-\ln \frac{F(x)}{TGF} \right] = x \ln B + \ln (-\ln A) \quad (4)$$

lo que constituye una recta de la forma:

$$V(x) = a_0 + b_0 x \quad (5)$$

en donde:

$$V(x) = \ln \left[-\ln \frac{F(x)}{TGF} \right] \quad (6)$$

$$a_0 = \ln (-\ln A) \quad (7)$$

$$b_0 = \ln B \quad (8)$$

Considérese una distribución estándar (modelo) $\frac{F^S(x)}{(TGF)^S}$, en este caso:

$$V^S(x) = a_s + b_s x \quad (9)$$

en donde:

$$V^S(x) = \ln \left[-\ln \frac{F^S(x)}{(TGF)^S} \right]$$

Si $V(x)$ y $V^S(x)$ se comportan linealmente con respecto a la edad x , también habrá una relación lineal entre ellos, ya que de (9) se obtiene:

$$x = \frac{1}{b_s} V^S(x) - \frac{a_s}{b_s} \quad (10)$$

que sustituyendo en (5):

$$V(x) = a_0 - a_s \frac{b_0}{b_s} + \frac{b_0}{b_s} V^S(x) \quad (11)$$

y siendo:

$$a = a_0 - a_s \frac{b_0}{b_s} \text{ y } b = \frac{b_0}{b_s} \quad (12)$$

se tiene que:

$$V(x) = a + bV^S(x)$$

En el cuadro 3 se aprecia el proceso de cálculo de las funciones $V(x)$ y $V^S(x)$, para los años 1973, 1974 y 1975.

Cuadro 3

MÉXICO: CÁLCULO DEL DOBLE LOGARITMO DE LA ESTRUCTURA DE FECUNDIDAD ACUMULADA. 1973, 1974 y 1975

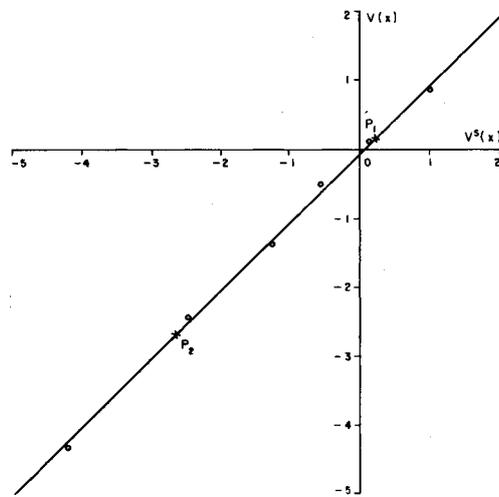
Grupo de edades	5fx	$\frac{F(x)}{TGF}$	V(x)
<u>año 1973</u>			
15 - 19	0.1092	--	--
20 - 24	0.2870	0.0847	0.9037
25 - 29	0.3300	0.3073	0.1655
30 - 34	0.2702	0.5632	-0.5549
35 - 39	0.1868	0.7728	-1.3556
40 - 44	0.0887	0.9176	-2.4539
45 - 49	0.0175	0.9864	-4.2929
TGF	6.45		
<u>año 1974</u>			
15 - 19	0.1061	--	--
20 - 24	0.2872	0.0884	0.8861
25 - 29	0.2805	0.3278	0.1092
30 - 34	0.2624	0.5615	-0.5498
35 - 39	0.1645	0.7802	-1.3937
40 - 44	0.0820	0.9173	-2.4500
45 - 49	0.0172	0.9857	-4.2379
TGF	6.00		
<u>año 1975</u>			
15 - 19	0.0989	--	--
20 - 24	0.2964	0.0821	0.9164
25 - 29	0.2941	0.3280	0.1086
30 - 34	0.2359	0.5721	-0.5825
35 - 39	0.1840	0.7678	-1.3310
40 - 44	0.0793	0.9205	-2.4909
45 - 49	0.0165	0.9863	-4.2841
TGF	6.03		

Los valores de a y b se obtienen ajustando los 6 puntos (que se obtienen al graficar los valores de $V^S(x)$, en el eje de las abscisas, y $V(x)$, en el eje de las ordenadas (ver gráficas 1 y 2) por el método de promedios,⁵ en que se plantean las siguientes ecuaciones.

⁵ Ver: Brass, W.: Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados. CELADE, Serie E, No. 14, página 135.

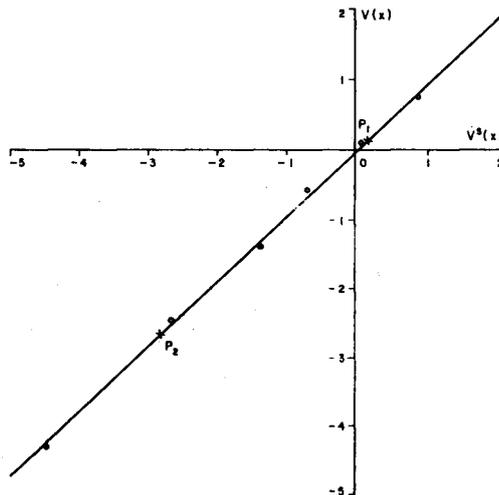
Gráfica 1

MÉXICO: DOBLE LOGARITMO DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD ACUMULADA DEL AÑO 1973, CON RESPECTO AL AÑO 1975 CONSIDERADO COMO ESTÁNDAR



Gráfica 2

MÉXICO: DOBLE LOGARITMO DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD ACUMULADA DEL AÑO 1974, CON RESPECTO AL AÑO 1975 CONSIDERADO COMO ESTÁNDAR



$$\bar{V}_1(x) = a + b \bar{V}_1^s(x) \quad (13)$$

$$\bar{V}_2(x) = a + b \bar{V}_2^s(x) \quad (14)$$

donde:

$$\bar{V}_1 = \frac{V(20) + V(25) + V(30)}{3} \quad y \quad (15)$$

$$\bar{V}_2 = \frac{V(35) + V(40) + V(45)}{3} \quad (16)$$

\bar{V}_1^s y \bar{V}_2^s son los mismos conceptos para la distribución estándar.

En el cuadro 4 se resume el procedimiento anterior con los datos provenientes de la Encuesta.

Cuadro 4

PUNTOS MEDIOS OBTENIDOS A PARTIR DEL MÉTODO DE PROMEDIOS

año	puntos medios
1973	$P_1 = (\bar{V}_1, \bar{V}_1^s) = (0.1475, 0.1714)$
	$P_2 = (\bar{V}_2, \bar{V}_2^s) = (-2.7020, -2.7008)$
1974	$P_1 = (\bar{V}_1, \bar{V}_1^s) = (0.1475, 0.1485)$
	$P_2 = (\bar{V}_2, \bar{V}_2^s) = (-2.7020, -2.6939)$

A partir de los datos del cuadro 4 obtenemos los valores de a y b, los cuales nos servirán para ajustar las estructuras de la fecundidad por edades.

Antes de presentar los ajustes se da a continuación una breve explicación del significado de los parámetros a y b.

a y b son los parámetros que diferencian la estructura observada del estándar. El parámetro a representa la diferencia en la edad media de la fecundidad y b está ligado con la dispersión de las tasas de fecundidad por edades.

Tomando $b = 1$ constante y variando a, se observa que un $a < 0$ traslada la curva hacia la izquierda, señalando una menor edad media de la fecundidad, mientras una $a > 0$ conduce a lo contrario (ver gráfica 3).

Si se mantiene constante $a = 0$ y se varía el valor de b, se observa que una $b > 1$ significa mayor concentración de las tasas con respecto al estándar y una $b < 1$ representa una menor concentración (ver gráfica 4).

En los cuadros 5 y 6 se resume el procedimiento para la obtención de los objetos.

Cuadro 5

MÉXICO: AJUSTE DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDADES 1973

Grupo de edad	Estructura observada	V(x)	V ^s (x)	$\hat{V}(x)$	$\frac{\hat{F}(x)}{TGF}$	Estructura ajustada
15 - 19	0.1092	--	--	--	--	0.0980
20 - 24	0.2870	0.9036	0.9164	0.9464	0.0760	0.3138
25 - 29	0.3300	0.1655	0.1086	0.1322	0.3194	0.3184
30 - 34	0.2702	-0.5549	-0.5825	-0.5644	0.5663	0.2566
35 - 39	0.1868	-1.3556	-1.3610	-1.3189	0.7653	0.1999
40 - 44	0.0887	-2.4539	-2.4909	-2.4880	0.9203	0.0854
45 - 49	0.0175	-4.2929	-4.2841	-4.2955	0.9865	0.0174
		a = 0.0227	b = 1.0080	$\hat{V}(x) = a + b V^s(x)$		

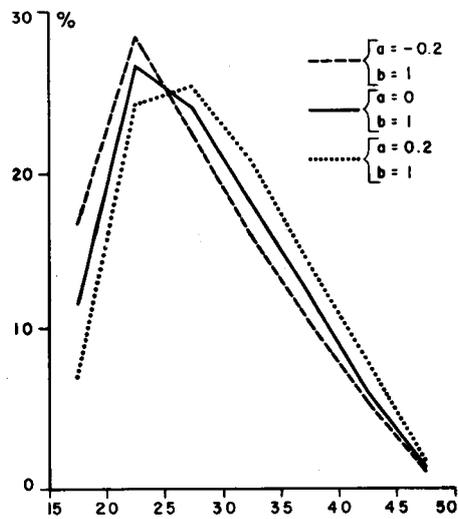
Cuadro 6

MÉXICO: AJUSTE DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDADES 1974

Grupo de edad	Estructura observada	V(x)	V ^s (x)	$\hat{V}(x)$	$\frac{\hat{F}(x)}{TGF}$	Estructura ajustada
15 - 19	0.1061	--	--	--	--	0.0988
20 - 24	0.2872	0.8861	0.9164	0.9155	0.0823	0.2943
25 - 29	0.2805	0.1092	0.1086	0.1097	0.3276	0.2923
30 - 34	0.2624	-0.5498	-0.5825	-0.5797	0.5712	0.2348
35 - 39	0.1645	-1.3937	-1.3937	-1.3263	0.7669	0.1836
40 - 44	0.0820	-2.4500	-2.4909	-2.4833	0.9199	0.0794
45 - 49	0.0172	-4.2379	-4.2841	-4.2721	0.9861	0.0167
		a = 0.0014	b = 0.09975	$\hat{V}(x) = a + b V^s(x)$		

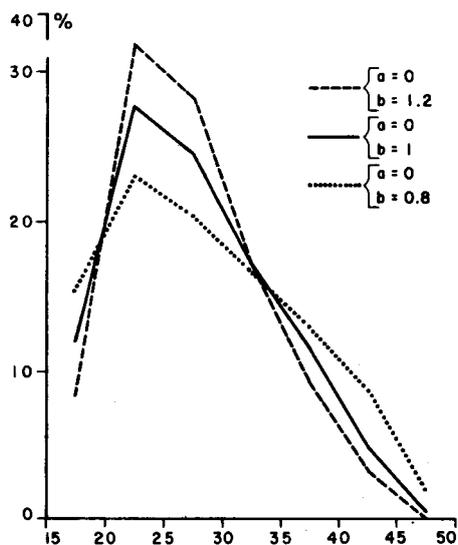
Observación: A continuación se describe el procedimiento de ajuste de esta información mediante las ideas desarrolladas anteriormente.

Gráfica 3
MODIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD TOMANDO $b = 1$
Y HACIENDO VARIAR a MEDIANTE LA RELACIÓN $V(x) = a + b V^s(x)$



Fuente: Chackiel, J., *op. cit.*, pág. 19.

Gráfica 4
MODIFICACIONES DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD TOMANDO $a = 0$
HACIENDO VARIAR b MEDIANTE LA RELACIÓN $V(x) = a + b V^s(x)$



Fuente: Chackiel, J., *op. cit.*, pág. 20.

Dada una estructura estándar $V^S(x)$ y estimados los parámetros a y b se está en condiciones de obtener los valores $V(x)$ ajustados mediante la relación:

$$\hat{V}(x) = a + b V^S(x) \quad (17)$$

y luego:

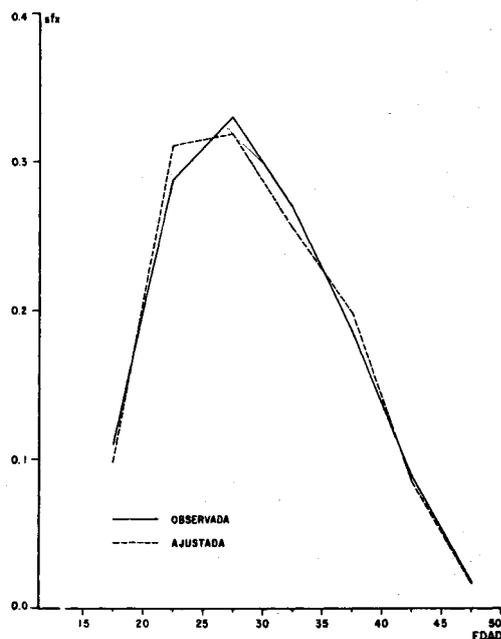
$$\frac{F(x)}{TGF} = e^{-e^{\hat{V}(x)}} \quad (18)$$

que desacumulando conduce a la estructura ajustada.

Finalmente, en las gráficas 5 y 6 se presentan los ajustes obtenidos al aplicar el modelo del doble logaritmo de la función de Gompertz. Nótese que para el caso de la estructura de la fecundidad del año 1974, el ajuste que se obtiene es más adecuado que el obtenido para 1973, lo cual se debe al estándar que se emplea —estructura de la fecundidad del año 1975— el cual se asemeja más al del año 1974 que al de 1973.

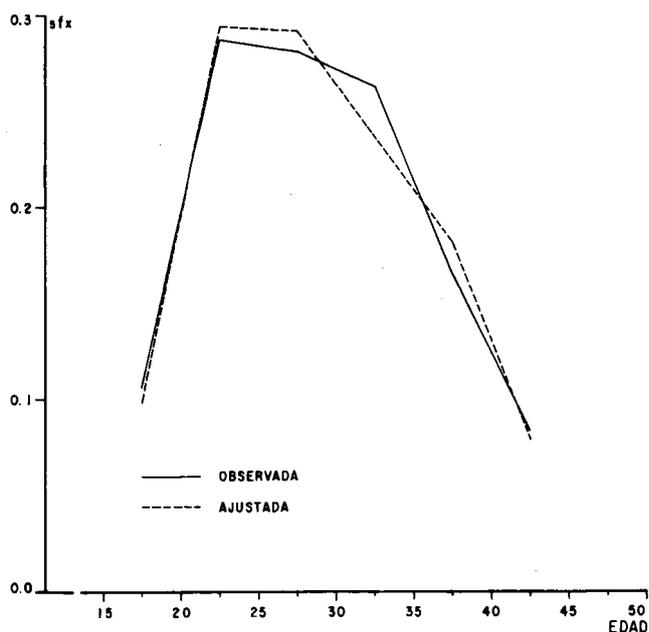
Gráfica 5

MÉXICO: ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD OBSERVADA Y AJUSTADA, 1973



Gráfica 6

MÉXICO: ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD OBSERVADA Y AJUSTADA, 1974



Cabe señalar que los valores de los parámetros a y b para la estructura de la fecundidad del año 1973 (0.0227 y 1.0080 respectivamente) denotan por un lado, que existe en 1973 una edad media de la fecundidad mayor a la de la estructura estándar de 1975 (29.33 años contra 29.22 años) y por otro lado, que hay una mayor concentración en las tasas en 1973 con respecto al estándar. Lo contrario ocurre para el caso del ajuste de la estructura por edad de la fecundidad de 1974, ya que para dicho caso los valores de a y b son: 0.0014 y 0.9975, respectivamente, lo que indica que existe en 1974 una edad media de la fecundidad mayor a la de la estructura estándar de 1975 (29.23 años contra 29.22 años) y una mayor concentración en las tasas.

c) Desagregación de la estructura por edad de la fecundidad

Obtenido el ajuste de las tasas específicas de fecundidad, se puede emplear el modelo del doble logaritmo de la función de Gompertz,

para desagregar en edades individuales la estructura por edad de la fecundidad, la cual se tiene para grupos de edad quinquenales.

El procedimiento para desagregar la estructura de la fecundidad, se ilustra tomando la estructura corregida para el año 1973, la cual se muestra en el cuadro 5; en él aparecen los valores $\hat{V}(x)$ para $x = 20, 25, 30, 35, 40$ y 45 . Graficando los valores $\hat{V}(x)$ se observa la tendencia lineal de ellos (ver gráfica 7) la cual era de esperarse debido a que:

De (4):

$$\ln \left[-\ln \frac{F(x)}{TGF} \right] = x \ln B + \ln (-\ln A) \quad (19)$$

la cual es una recta de la forma vista en (5):

$$\hat{V}(x) = a_0 + b_0 X \quad (20)$$

Los valores de a_0 y b_0 se obtienen de la misma forma en que se obtuvieron los valores a y b [$V(x) = a + b V^S(x)$], es decir, ajustando los 6 puntos $\hat{V}(x)$ por el método de promedios.

En este caso las ecuaciones que se plantean son:

$$\hat{V}_1(x) = a_0 + b_0 \bar{X}_1 \quad (21)$$

$$\hat{V}_2(x) = a_0 + b_0 \bar{X}_2 \quad (22)$$

donde:

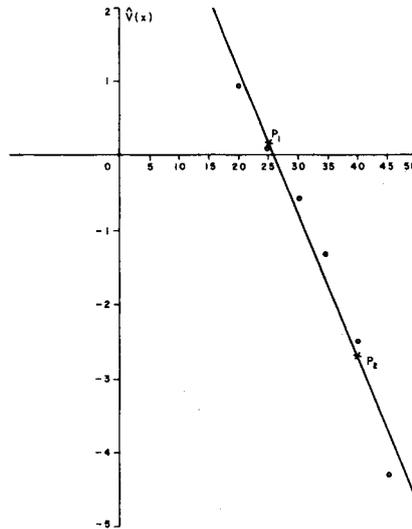
$$\hat{V}_1 = \frac{V(20) + V(25) + V(30)}{3} \quad (23)$$

$$\hat{V}_2 = \frac{V(35) + V(40) + V(45)}{3} \quad (24)$$

$$\bar{X}_1 = \frac{20 + 25 + 30}{3} = 25 \quad (25)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{35 + 40 + 45}{3} = 40 \quad (26)$$

Gráfica 7
MÉXICO: DISTRIBUCIÓN DE LOS VALORES $\hat{V}(x)$, 1973



Para los valores $\hat{V}(x)$ del año 1973 se tiene:

$$\hat{V}_1 = 0.1714 \quad ; \quad \hat{V}_2 = -2.7008$$

Con los dos puntos, $P_1 = (25, 0.1608)$ y $P_2 (40, -2.6945)$, se obtienen los valores de a_0 y b_0 , estimando la recta que pasa por esos puntos, la cual es:

$$\hat{V}(x) - \hat{V}_1 = \frac{\hat{V}_2 - \hat{V}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1} (X - \bar{X}_1) \quad (27)$$

Para los valores $\hat{V}(x)$ de 1973 se tiene:

$$\hat{V}(x) = 4.95840 - 0.19148 x \quad (28)$$

donde: $a_0 = 4.95840$ y $b_0 = -0.19148$

Evaluando la ecuación 28 para $x = 10, 11, 12, \dots, 50$ se obtienen los valores $\hat{V}(x)$ para dichas edades y empleando (18) se estiman los valores $\hat{F}(x)/TGF$ y conocida la tasa global de fecundidad (6.45

para 1973) se calculan los valores $\hat{F}(x)$ para esas edades. En el cuadro 7 se dan los valores obtenidos para el año 1973.

Cuadro 7

MÉXICO: VALORES DE $\hat{V}(x)$, $\hat{F}(x)/TGF$ Y $\hat{F}(x)$, POR EDADES INDIVIDUALES, 1973

x	$\hat{V}(x)$	$\frac{\hat{F}(x)}{TGF}$	$\hat{F}(x)$
10	3.0436	0.0000000008	0.0000000052
11	2.8521	0.0000000299	0.0000001929
12	2.6606	0.0000006130	0.0000039539
13	2.4692	0.0000074077	0.0000477797
14	2.2777	0.0000580492	0.0003744173
15	2.0862	0.0003177484	0.0020494772
16	1.8947	0.0012933068	0.0083418289
17	1.7032	0.0041216897	0.0265848986
18	1.5118	0.0107281275	0.0691964224
19	1.3203	0.0236463958	0.1525192529
20	1.1288	0.0454135872	0.2929176374
21	0.9373	0.0778416385	0.5020785683
22	0.7458	0.1214652261	0.7834507083
23	0.5544	0.1753631813	1.1310925190
24	0.3629	0.2375226948	1.5320213810
25	0.1714	0.3051458438	1.9681906930
26	-0.0201	0.3752733226	2.4205129310
27	-0.2116	0.4451747630	2.8713772210
28	-0.4030	0.5125730204	3.3060959820
29	-0.5945	0.5758901109	3.7144912150
30	-0.7860	0.6340269548	4.0894738580
31	-0.9775	0.6864303261	4.4274756030
32	-1.1690	0.7329502410	4.7275290540
33	-1.3604	0.7737100150	4.9904295970
34	-1.5519	0.8090900276	5.2180678020
35	-1.7434	0.8395202808	5.4149058110
36	-1.9349	0.8655079561	5.5825263170
37	-2.1264	0.8875717826	5.7248379980
38	-2.3178	0.9062047315	5.8450205180
39	-2.5093	0.9218938917	5.9462156010
40	-2.7008	0.9350532777	6.0310936410
41	-2.8923	0.9460607122	6.1020915940
42	-3.0838	0.9552473729	6.1613455550
43	-3.2752	0.9628965414	6.2106826920
44	-3.4667	0.9692624219	6.2517426210
45	-3.6582	0.9745505653	6.2858511460
46	-3.8497	0.9789388292	6.3141554480
47	-4.0412	0.9825771952	6.3376229090
48	-4.2326	0.9855902256	6.3570569550
49	-4.4241	0.9880865410	6.3731581890
50	-4.6156	0.9901525628	6.3864840300

Finalmente, para obtener la estructura por edad de la fecundidad, por edades individuales, se desagrega la función $\hat{F}(x)$ ya que:

$$\hat{f}(x) = \hat{F}(x + 1) - \hat{F}(x) \quad (29)$$

En el cuadro 8 se dan los valores de las tasas específicas de fecundidad, por edad individual, y en la gráfica 8 la distribución de dichas tasas.

Cuadro 8

MÉXICO: TASAS ESPECÍFICAS DE FECUNDIDAD, POR EDADES
INDIVIDUALES, 1973

x	f(x)	x	f(x)
10	0.0000001877	30	0.3380017450
11	0.0000037610	31	0.3000534510
12	0.0000438258	32	0.2629005430
13	0.0003266376	33	0.2276382050
14	0.0016750599	34	0.1968380090
15	0.0083418289	35	0.1676205060
16	0.0182430697	36	0.1423116810
17	0.0426115238	37	0.1201825200
18	0.0833228305	38	0.1011904210
19	0.1403983845	39	0.0848780400
20	0.2091609309	40	0.0709979530
21	0.2813721400	41	0.0592539610
22	0.3476418107	42	0.0493371370
23	0.4009288620	43	0.0410599290
24	0.4361693120	44	0.0341085250
25	0.4523222380	45	0.0283043020
26	0.4508642900	46	0.0234674610
27	0.4347187610	47	0.0194340460
28	0.4083952330	48	0.0161012340
29	0.3749826430	49	0.0133258410

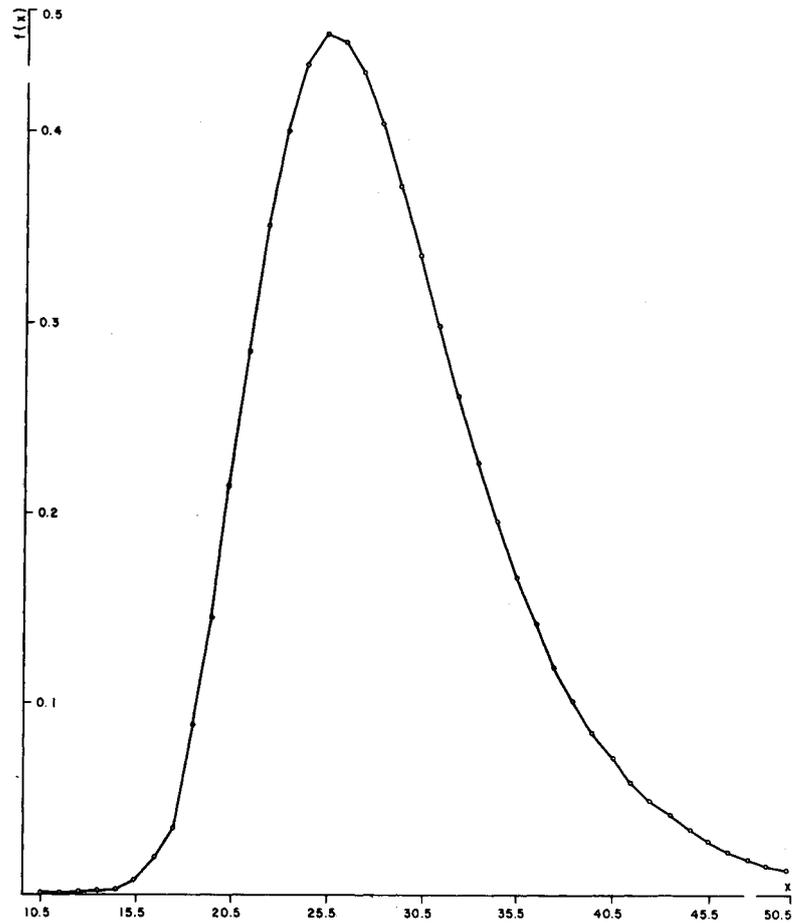
A manera de conclusión se puede decir que el modelo del doble logaritmo de la función de Gompertz sirve para realizar ajustes en la estructura por edad de la fecundidad y que el éxito que se tenga al aplicarlo depende de la adecuada estructura por edad estándar utilizada. Para el caso de México queda por encontrar el estándar adecuado (en este trabajo se tomó como estructura por edad estándar la del año de 1975, únicamente para ejemplificar el uso del modelo).

Otra de las ventajas del modelo, es la de poder desagregar la estructura por edad de la fecundidad (la cual se tiene en tasas específicas de fecundidad por grupos quinquenales de edades), en edades individuales.

Cabe señalar que otro uso del modelo es para proyectar la estructura por edad de la fecundidad, observando la tendencia de los parámetros a y b , de la expresión $\hat{V}(x) = a + b V^S(x)$ a través del tiempo, o bien los parámetros a_0 y b_0 de la expresión $\hat{V}(x) = a_0 + b_0 x$, también en diferentes momentos.

Gráfica 8

MÉXICO: DISTRIBUCIÓN, POR EDADES INDIVIDUALES, DE LAS TASAS ESPECÍFICAS DE FECUNDILAD, 1973



ANEXO

Uno de los esfuerzos hechos para dar una ley matemática que describa la mortalidad experimentada por una población dada, fue el hecho por Gompertz. La ley que desarrolló (Ley de Gompertz) supone que la resistencia del hombre a la muerte decrece en una tasa proporcional a sí misma.

Si se denota como M_x (tasa instantánea de mortalidad) a la sus-

ceptibilidad del hombre a la muerte, y al recíproco de ella, $\frac{1}{M_x}$, como la resistencia del hombre a la muerte, entonces, el supuesto de la ley de Gompertz se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d}{d_x} (1/M_x) = -h \left(\frac{1}{M_x} \right) \quad (1)$$

donde h es la tasa proporcional a la cual decrece la resistencia del hombre a la muerte.

Desarrollando (1), obtenemos:

$$\int \frac{d}{d_x} \left(\frac{1}{M_x} \right) = -h \int d_x \quad (2)$$

$$\ln (1/M_x) + \ln B = -hx \quad (3)$$

$$\ln \frac{B}{M_x} = -hx \quad (4)$$

$$\frac{B}{M_x} = e^{-hx} \quad (5)$$

$$M_x = Be^{hx} \quad (6)$$

Se denota a e^h como C , entonces (6) se puede expresar como:

$$M_x = BC^x \quad (7)$$

La tasa instantánea de mortalidad M_x se define como:

$$M_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l_{(x)} - l_{(x+h)}}{hl_{(x)}} \quad (8)$$

$$= \frac{-1}{l_{(x)}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l_{(x+h)} - l_{(x)}}{h} \quad (9)$$

$$= - \frac{1}{l_{(x)}} \frac{d}{d_x} l_{(x)} \quad (10)$$

$$M_x = - \frac{d}{d_x} \ln l_x \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (7) se obtiene:

$$-\frac{d}{d_x} l_n l_x = BC^x \quad (12)$$

$$\int \frac{d}{d_x} l_n l_x d_x = - \int BC^x d_x \quad (13)$$

$$\int \frac{d}{d_x} l_n l_x d_x = - \int \frac{B}{l_n C} C^x l_n C d_x \quad (14)$$

$$l_n l_x = - \frac{BC^x}{l_n C} + l_n K \quad (15)$$

se denota a $-\frac{B}{l_n C}$ como $l_n g$, entonces (15) se puede expresar como:

$$l_n l_x = C^x l_n g + l_n K \quad (16)$$

$$l_n l_x = l_n K g^{C^x} \quad (17)$$

$$l_x = K g^{C^x} \quad (18)$$

Cuando se habla de la *función* de Gompertz se entiende como tal a:

$$Y(x) = K g^{C^x} \quad (19)$$

En el caso de la aplicación de la *función* de Gompertz al fenómeno fecundidad, se tiene que (19) toma la expresión:

$$F(x) = (TGF) A^{B^x} \quad (20)$$

BIBLIOGRAFÍA

- Brass, W., The relational Gompertz model of fertility by age of woman. (Inédito).
- Brass, W., An application of the relational Gompertz model of fertility. (Inédito).
- Camisa, Z., Introducción al estudio de la fecundidad. CELADE, Serie B, No. 1007, San José, Costa Rica, 1975.
- Carrasco, E., Modelos matemáticos para ajustar curvas acumulativas de fecundidad. CELADE, Serie C, No. 137, Santiago de Chile, 1972.
- Chackiel, J., Estructura de la fecundidad por edades. Ajuste y proyección mediante la función de Gompertz linealizada. En *Notas de Población* No. 20, agosto 1979.
- Kandiah, V., The use of the relational fertility model parameters in population projections. East-West Center, Honolulu.
- Martin, P., Une application des fonctions de Gompertz a l'étude de la fecondité d'une cohorte. En *Population* No. 6, 1967.
- Spielman, E., Notas sobre la utilización de la función de Gompertz en el estudio de la fecundidad. En *Notas de Población* No. 12. CELADE, diciembre 1972.