EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

"ESTRATEGIAS DE RECOMPRA Y FISCALES FRENTE A LA DEUDA SOBERANA"

TESIS PRESENTADA POR:

JOSUÉ MORACHIS GASTÉLUM

PROMOCIÓN 2013-2016

CIUDAD DE MÉXICO OCTUBRE DE 2020

EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

“ESTRATEGIAS DE RECOMPRA Y FISCALES FRENTE A LA DEUDA SOBERANA”

TESIS PRESENTADA POR:

JOSUÉ MORACHIS GASTÉLUM

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTOR EN ECONOMÍA

PROMOCIÓN 2013-2016

DIRECTOR DE TESIS

DR. JORGE FERNÁNDEZ RUIZ

CIUDAD DE MÉXICO OCTUBRE DE 2020

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

CONSTANCIA DE APROBACIÓN

Doctorante: Josué Morachis Gastélum

Tesis: Estrategias de recompra y fiscales frente a la deuda soberana

Director de Tesis: Dr. Jorge Fernández Ruiz

Aprobada por el Jurado Examinador:

Dr. Jorge Fernández Ruiz	Presidente	____________________
Dr. Fausto Hernández Trillo	Primer Vocal	____________________
Dra. Adriana Gama Velázquez	Vocal Secretaria	____________________
Dr. Julen Berasaluce Iza	Suplente	____________________

Ciudad de México, 29 de octubre de 2020

A Ana Bertha Gastélum Ruiz

Índice

Introducción general

La presente tesis está conformada por tres artículos que pueden leerse de manera independiente, aunque todos se sitúan dentro de la literatura sobre deuda soberana. En el primero se presenta un panorama general del endeudamiento de los países y las negociaciones de sus deudas, en esta revisión se relaciona la crisis de deuda de los años ochenta con el auge del interés en el estudio de la deuda soberana y, de la misma forma, se menciona al reciente aumento de los niveles de esta deuda y a la crisis financiera de 2008 como factores que han contribuido al resurgimiento del interés en el tema. Los datos presentados en la introducción de este artículo establecen dos hechos. En primer lugar, tanto en el pasado como en el presente la deuda soberana llega a niveles que complican el pago de la misma. En segundo lugar, las naciones recurren a diversas estrategias para resolver su incapacidad de pagarla, en particular se realizaron 186 reestructuraciones de deuda soberana con acreedores extranjeros privados entre 1950 y 2010. Además, se señala que la actual crisis económica ligada al COVID-19 tendrá un impacto negativo en la capacidad de pago de las naciones. Con base en lo anterior, se evidencia la relevancia del estudio de las estrategias de un país para aliviar sus deudas.

Los artículos 1 y 2 coinciden en el estudio de la recompra de deuda soberana, aunque tienen un enfoque distinto. En el primer artículo se analiza la conveniencia de la recompra de la deuda con reservas ante variaciones en los porcentajes de incautación; expresado de otra manera, se determina la relación entre la capacidad de los acreedores de incautar o embargar en caso de que no se les pague y los beneficios obtenidos por la recompra de deuda. Al respecto se encontraron dos resultados opuestos dependiendo de si los recursos incautables son las reservas o no. Por un lado, entre más fácil sea embargar las reservas, más conveniente es la recompra, por el otro, entre más fácil sea embargar los recursos que no incluyen a las reservas, menos conveniente es la recompra.

El segundo artículo determina cuáles serían las estrategias óptimas de un país deudor en un modelo de dos periodos. Los resultados varían con base en la relación entre la deuda heredada y los recursos del país. De manera general cuando la deuda es grande y los recursos bajos, la recompra es la mejor opción. Sin embargo dependiendo de las variables mencionadas la mejor estrategia del país deudor puede ir desde solo pagar lo que le puedan forzar a pagar en cada periodo, a recomprar en solo un periodo o en ambos, hasta liquidar sin recompra toda la deuda en el segundo periodo. Además en este artículo se encontró que cuando al país le conviene recomprar, también le conviene que esta recompra sea lo más grande posible.

En el tercer artículo se cambia la perspectiva, ya no se analiza la recompra de la deuda, sino que se estudia la relación entre la deuda soberana y las tasas impositivas con un gobierno miope. El gobierno miope tiene la característica de que solo le importa su mandato, no el futuro, o pensado en distinta forma, es un gobierno que está forzado a gastar lo más posible en el presente. Se encuentra que, con el objetivo de gastar lo más posible, este gobierno incentiva el crecimiento del sector financiero por medio de tasas impositivas más bajas o subvenciones. La intuición económica detrás de esta decisión, es que al crecer el sector financiero, también crece el costo que tendría para la economiá doméstica el no pagar la deuda, lo cual es observado por los acreedores y es tomado en cuenta para aumentar lo que están dispuestos a prestar, pues le saldría muy costoso al siguiente gobierno incumplir con sus obligaciones hacia ellos.

A continuación, se presentan los tres los artículos. La principal preocupación en cada uno de ellos es encontrar la mejor estrategia de un país frente a su deuda, en términos utilizados por economistas, se maximiza la utilidad del gobierno o de la población de un país, en palabras más simples, se buscan maneras de ayudar a mejorar las condiciones de vida.

Artículo 1

Recompra de deuda soberana con reservas y distintos porcentajes de incautación

---

Resumen

El presente artículo estudia bajo qué condiciones una recompra de deuda soberana con reservas es conveniente. Para esto, se desarrolla un modelo que deriva en un juego de suma cero entre acreedores y el país deudor. Un supuesto clave se refiere a la capacidad de los acreedores de recuperar una parte de la deuda en caso de que el país se niegue a pagarla; a esta capacidad se le llama "porcentaje susceptible de incautarse". Este trabajo supone que este porcentaje es distinto para las reservas y el resto de los recursos del país. Adoptar este supuesto arroja resultados contrastantes. Por un lado, si el porcentaje susceptible de incautarse de las reservas es grande, será más fácil que la recompra convenga. Por el contrario, si el porcentaje susceptible de incautarse del resto de los recursos es grande, será más difícil que ésta sea conveniente.

1.1 Introducción

La deuda soberana juega un papel esencial en el desempeño económico de los países. En un primer momento, los recursos obtenidos mediante préstamos pueden ayudar a los gobiernos a reanimar su economía; sin embargo, una vez adquiridos los compromisos, los países frecuentemente tienen complicaciones para pagar su deuda. En respuesta, se recurre a distintas estrategias como: postergar pagos, perdonar parte de la deuda y recomprar o reestructurar la deuda, entre otras. Es tarea de los tomadores de decisiones de cada país implementar la estrategia que maximice el bienestar de su población. Con el objetivo de aportar a esta discusión, el presente artículo estudia en qué condiciones una recompra de deuda es la estrategia por seguir.

Las tablas 1, 2 y 3 muestran un panorama general del endeudamiento de los países. En la tabla 1 se presentan las cifras de deuda total del gobierno central (% del PIB), donde se define a la deuda total del gobierno central como el saldo total de obligaciones contractuales directas a plazo fijo del gobierno, incluyendo los pasivos internos y extranjeros. En la tabla 2 se expone la deuda externa total (% del INB). Esta deuda se define como el monto adeudado a los no residentes, que se reembolsa en divisas, bienes o servicios, incluyendo la deuda pública a largo plazo, con garantía pública, y privada no garantizada, el uso del crédito del FMI y la deuda a corto plazo. Por último, la tabla 3 presenta la deuda pública bruta (% del PIB), la cual se define como la deuda nominal bruta consolidada del gobierno al final del año[1]. Estas tres tablas nos abren la puerta para definir algunos conceptos.

Las tablas 1 y 3 están reportando el porcentaje de la deuda pública. La tabla 2, por su parte, muestra el porcentaje de la deuda externa, la cual sólo considera los compromisos adquiridos con no residentes e incluye la deuda privada. Además, las tablas 1 y 2 se componen por naciones de diferentes regiones del mundo y abarcan los periodos 1990-2016 y 1970-2018 respectivamente, mientras que la tabla 3 se concentra en el continente europeo y en un periodo más reciente. En las tablas 1 y 2, para facilitar la presentación de la información, se muestra el promedio del porcentaje por década además del promedio en todo el periodo. Por último, otra diferencia visible es que el porcentaje se hace sobre el Producto Interno Bruto (PIB) en las tablas 1 y 3 y sobre el Ingreso Nacional Bruto (INB) en la tabla 2. Se considera que estos son indicadores similares y que ambos cumplen con la función de ponderar a la deuda según el tamaño de su economía.

Los criterios para seleccionar la muestra de países de la tabla 1 son: el número de observaciones registradas, el tamaño de la economía y el nivel de deuda con respecto al Producto Interno Bruto (PIB)[2]. Para ese conjunto de países, los niveles de deuda son mayores en los años más recientes, con un promedio de 72 % del PIB entre 2010 y 2016, en comparación con los porcentajes de 59 % y 60 % en las dos décadas anteriores. Este aumento del endeu-

[1] Los tres conceptos y sus definiciones correspondientes son los reportados por las fuentes de cada tabla.
[2] Al pie de la tabla 1 se detallan estos criterios.

damiento hace más relevante y apremiante el estudio de las estrategias de pago de la deuda soberana.

Tabla 1. Deuda total del gobierno central (% del PIB)

	90-99	00-09	10-16	1990-2016
Japón	61	127	186	118
Singapur	77	95	104	91
Jordania	115	78	69	90
Sri Lanka	94	96	72	89
Hungría	75	65	93	76
Irlanda	55	37	107	65
España	58	43	89	61
Marruecos	69	52	53	61
Estados Unidos	44	52	94	60
Islandia	47	57	98	60
Reino Unido	39	46	100	57
Filipinas	56	61	48	56
India	50	59	51	54
Túnez	57	51	43	53
Uruguay	25	71	46	52
Malasia	60	43	52	51
El Salvador	26	50	55	49
Perú	95	28	21	46
Turquía	36	46	36	37
Indonesia	43	32	28	36
Promedio	59	60	72	63

Fuente: Elaboración propia con base en los datos del Fondo Monetario Internacional y el Banco Mundial (Anuario de Estadísticas de las Finanzas Públicas y estimaciones del PIB).
La selección de los 20 países de la tabla es resultado de eliminar los que tienen menos de: 16 observaciones (años), promedio de PIB de 10 mil mdd y promedio de deuda de 33 por ciento del PIB en el periodo 1990-2016.

En la tabla 1 destaca el caso de Japón cuyo promedio de deuda pasó del 61 % en la década de los noventa al 186 % en el periodo 2010-2016. Este aumento tan significativo podría conducir a la idea de que Japón tiene graves problemas de deuda; sin embargo, otro factor a considerar es la capacidad de pago del país deudor, es decir, Japón sí está muy endeudado, pero dado el estado de su economía, tiene mejores condiciones para enfrentar los pagos de su deuda en comparación con países de Latinoamérica o África. Este fenómeno de aumento del endeudamiento en países llamados desarrollados se observa también en los casos del Reino Unido y Estados Unidos, que pasaron del 39 y 44 % al 100 y 94 % respectivamente. En el otro lado del espectro dentro de esta muestra, países con economías pequeñas como Jordania y Perú fueron los que redujeron en mayor medida sus porcentajes de deuda, bajando del 115 % y 95 % al 69 % y 21 % respectivamente.

Como se estableció anteriormente, la tabla 2 reporta el porcentaje de deuda externa, la cual incluye deuda externa privada y deuda externa pública; esta última es un componente común de la deuda externa y la deuda soberana, por lo que puede haber correlación entre estas deudas. Por ejemplo, en los seis países que aparecen tanto en la tabla 1 como en la tabla 2 la correlación del porcentaje de la deuda soberana y la externa es de 0.74; sin embargo, ésta es una muestra pequeña y el comportamiento de estas dos deudas puede llegar a ser muy distinto.

En la tabla 2 se observa que todos los países de la muestra promediaron un porcentaje mayor a 50 % en al menos una década, incluso, trece países promedian un porcentaje mayor al 50 % en todo el periodo. En lo que respecta al valor máximo del porcentaje de la deuda, sobresale Zambia con una deuda cuatro veces más grande que el Ingreso Nacional Bruto (INB) en 1986, al igual que Costa de Marfil, Jordania y Sudán, cuyos niveles de deuda externa fueron mayores que el doble de su INB en los años 1994, 1991 y 1992 respectivamente. Además, se aprecia que catorce países tuvieron niveles de deuda por encima de su ingreso, es decir, su porcentaje máximo es mayor a 100 % y de las veintiún naciones, ninguna tuvo un porcentaje máximo por debajo del 80 %. En definitiva, estos datos indican que es frecuente que la deuda externa represente una carga significativa para las naciones.

Por otro lado, las columnas relativas al porcentaje máximo señalan que en dieciocho de los veintiún países seleccionados el punto más alto del porcentaje de la deuda externa pertenece a los años ochenta o noventa, hecho que se acentúa si se considera que Ghana y Argentina apenas salen del periodo teniendo su porcentaje máximo en los años 2000 y 2002. Otra manera en que la tabla 2 nos indica que los niveles de deuda de los países con respecto a su ingreso son más elevados en las décadas de los ochenta y noventa es el promedio reportado en la última fila. En ella se aprecia que en estas décadas el porcentaje de la deuda es mayor, llegando al 66 y 68 % para descender hasta el 31 % del 2010 al 2018. Este hecho se reflejó en un aumento del interés en la deuda y el subsecuente aumento de la literatura relativa a ella desde finales de la década de los ochenta. Recientemente ha resurgido este interés, lo cual puede entenderse por el reciente aumento del porcentaje de la deuda con respecto al INB, como se observa en la tabla 2 donde el promedio de este porcentaje en los países aumentó de 25 % en 2011 a 39 % en 2018.

Tabla 2. Deuda externa total (% del INB)

	70-79	80-89	90-99	00-09	10-18	1970-2018	Porcentaje máximo	año
Zambia	68	192	207	92	45	122	416	1986
Costa de Marfil	39	134	174	87	38	96	231	1994
Jordania	28	81	142	103	68	85	244	1991
Sudán	26	76	167	83	34	78	251	1992
Bolivia	57	96	78	59	30	65	155	1986
Túnez	39	58	60	60	66	56	90	2018
Costa Rica	43	121	41	32	38	55	171	1982
Ghana	29	49	86	74	33	55	139	2000
Perú	51	80	62	44	33	54	131	1988
Egipto	47	108	58	30	21	53	133	1988
Indonesia	42	47	81	56	32	52	168	1998
Marruecos	34	84	66	34	39	52	112	1985
Filipinas	35	77	62	49	22	50	99	1986
Kenya	37	63	80	36	29	49	132	1993
Ecuador	19	60	78	57	28	49	104	1999
Argentina	19	56	40	77	33	45	160	2002
Tailandia	16	36	57	39	36	37	96	1998
R. Dominicana	25	53	35	26	38	35	81	1988
Argelia	36	40	65	23	3	34	84	1995
México	26	54	34	21	33	34	80	1986
Promedio	35	66	68	46	31	47		

Fuente: Elaboración propia con base en datos del Banco Mundial (Flujos Mundiales de Financiamiento y la base de datos del Programa de comparación internacional).
La selección de los 21 países de la tabla es el resultado de eliminar a aquellos con menos de: 49 observaciones (años), 55 mil mdd de INB en promedio y 33 por ciento de deuda en promedio en el periodo 1970-2018.

Sin embargo, para entender este revitalizado interés es indispensable incluir en la discusión a la crisis financiera mundial del 2008, en particular sus consecuencias en Europa. La tabla

3 muestra los porcentajes de la deuda soberana con respecto al PIB del 2008 al 2019 en este continente, en ella se puede identificar esta crisis financiera. En su conjunto, al observar el cambio del promedio a lo largo de los años, el mayor aumento se ubica entre el 2008 y 2010, en específico, Irlanda, Grecia, Portugal, Reino Unido y España tuvieron los mayores incrementos de sus porcentajes de deuda en este periodo. Tambien destacan Italia, Bélgica y Francia que, aunque sus aumentos de deuda son menores a los países mencionados, tuvieron niveles elevados de deuda.

Tabla 3. Deuda pública bruta (% del PIB)

	2008	2010	2012	2014	2016	2019	2008-2019
Grecia	109	146	160	179	179	177	158
Italia	106	119	127	135	135	135	126
Portugal	76	100	129	133	132	118	114
Bélgica	93	100	105	107	105	99	101
France	69	85	91	95	98	98	89
Chipre	46	56	80	109	103	96	82
España	40	61	86	101	99	96	80
Irlanda	42	86	120	104	74	59	81
Reino Unido	49	75	83	86	87	85	78
Austria	69	83	82	84	83	70	78
Hungría	72	81	79	77	76	66	75
Alemania	66	82	81	76	69	60	72
Croacia	39	58	70	85	81	73	68
Malta	63	68	68	63	56	43	60
Países Bajos	55	59	66	68	62	49	60
Eslovenia	22	38	54	80	79	66	56
Finlandia	33	47	54	60	63	59	53
Polonia	47	54	54	51	54	46	51
Promedio	61	78	88	94	91	83	82

Fuente: Elaboracón propia con base en datos de Eurostat.
Se seleccionaron los países con promedio de deuda de 2008 a 2019 mayor a 50 por ciento. El dato reportado en la columna 2008-2019 corresponde al promedio de los doce porcentajes dentro del periodo.

En esta tabla 3 se observa que en el año 2019 la deuda de Grecia, Italia y Portugal ha sido mayor a su producción y que en otros cuatro países esta deuda prácticamente iguala a su producción, en el periodo el caso más crítico es el de Grecia, con una deuda soberana promedio, entre los años 2008 y 2019, que representa el 158 % de su PIB. Debido a que fue la primer crisis de deuda en la región despues de un largo periodo, el caso griego tiene un lugar especial, tanto por su influencia en las crisis de otros países de Europa, como por el precedente que establecieron las medidas tomadas para enfrentar su debacle financiera.

Congruentemente, las particularidades del caso griego y sus renegociaciones han sido un recurrente objeto de estudio, en particular, han recibido atención las medidas adoptadas en el año 2012. Al respecto en el artículo de Zettelmeyer, Trebesch y Gulati (2013) se realiza un estudio obligado para los interesados en el tema. En este trabajo se caracteriza al intercambio de deuda de Grecia como histórico, afirmando que fijó un récord mundial en términos de volumen de deuda reestructurada y pérdidas agregadas de los acreedores. Además, subrayan que es la primer gran restructuración de deuda en Europa desde antes de la Segunda Guerra Mundial. Señalan también que esta restructuración contradice las declaraciones de los tomadores de decisiones o dirigentes políticos que, meses antes de que ésta se llevara a cabo, aseguraban que un impago de deuda soberana era impensable en los países de la Unión Europea.

Según Zettelmeyer, Trebesch y Gulati (2013) desde el año 2010 se acordó un paquete de ayuda a Grecia por 80 mil millones de euros en préstamos de la Unión Europea más 30 mil millones de euros por parte del Fondo Monetario Internacional. Además, se tomaron otras medidas de rescate como la creación del Fondo Europeo de Estabilidad Financiera (EFSF por sus siglas en inglés) y un programa de recompra en el mercado secundario por parte del Banco Central Europeo.

Después de un largo proceso acompañado de distintas propuestas, en marzo de 2012 se anuncia que el 82.3 % de los bonos soberanos emitidos fueron intercambiados. En abril la deuda griega renegociada alcanzó una participación total de 199.2 mil millones de euros, es decir, se logró renegociar el 96.9 % de la deuda. El valor nominal de la deuda se redujó en 108 mil millones de euros, lo cual representó el 52.5 % de su deuda original. Los acreedores que se negaron a renegociar poseían el 3.1 % de la deuda, equivalente a 6.4 mil millones de dólares en valor nominal, esta deuda se pagó íntegramente (Zettelmeyer, Trebesch y Gulati (2013).

Posteriormente, como lo señala Baglioni (2015), en diciembre del mismo año se llevó a cabo un proceso de recompra, con el apoyo de un préstamo de 11.3 mil millones de euros otorgado por el EFSF, como resultado se redujó la deuda en 31.9 mil millones de euros, donde el precio de recompra fue de .338 por euro.

Existe un debate sobre la conveniencia de las recompras de deuda soberana, Bulow y Rogoff (1988) califican a la recompra realizada por Bolivia en 1988 como un despilfarro. En continuación de este debate en parte iniciado por estos autores, Zettelmeyer, Trebesch y Gulati (2013) discuten si la recompra de deuda soberana realmente benefició a Grecia y concluyen que sí ayudó a solucionar los problemas de deuda, sin embargo, añaden que el beneficio habría sido aún mayor con una mejor conducción de ésta.

Esta breve revisión del panorama de la deuda establece que las deudas suelen llegar a niveles altos y que, incluso actualmente, en Japón y en Europa son elevadas. Aunado a esto, en el año 2020 se atraviesa una crisis económica agravada por la pandemia del COVID-19, crisis que tendrá un efecto negativo en la capacidad de los países de pagar sus deudas, razón de más para analizar y diseñar las estrategias más convenientes en la renegociación de la deuda soberana.

Estas renegociaciones de las condiciones de la deuda son persistentes a través del tiempo. Das, Papaioannou, y Trebesch (2012) hacen un recuento de 633 reestructuraciones de deuda soberana en 95 países entre 1950 y 2010, dentro de las cuales identifican 186 intercambios de deuda con acreedores privados y 447 acuerdos bilaterales de reestructuración de la deuda con el Club de París. De las 186 reestructuraciones con acreedores privados, encuentran que en 26 de ellas hubo recompras de deuda con efectivo. Además, estos últimos autores añaden que, con algunas excepciones, la mayoría de las negociaciones de la deuda se han tornado más rápidas y menos disputadas desde la década de los noventa.

Un caso de reestructuración con disputa es el de Perú. En 1996 esta nación reprogramó su deuda con los acreedores del Club de París y en 1997, en el marco del Plan Brady, redujo su deuda en 50.6 % según Bonicelli (2014). Al llevarse a cabo la reestructura de deuda, Elliot Associates, L. P. compró con un descuento sustancial parte de la deuda, pagando \$11.4 millones de dólares y se rehusó a participar en esta reestructura. En cambio, recurrió a instancias legales internacionales exigiendo el pago completo de la parte de la deuda que compró. Después de tres años, la Corte de Bruselas falló a favor de Elliot Associates, L. P. y Perú terminó pagándoles \$56.3 millones de dólares. Una descripción más detallada del proceso se encuentra en Gulati y Klee (2000) y, ubicada en un contexto más general, en Fernández (2016).

Otra característica peculiar de este proceso es la existencia previa de una recompra de deuda unilateral en el mercado secundario por parte del gobierno de Perú, lo cual describen brevemente Das, Papaioannou, y Trebesch (2012). Se resalta esta recompra debido a que en el modelo que se desarrolla aquí se supone la existencia de un mercado secundario de deuda.

Como se ha afirmado, demandas como la de Elliot Associates, L. P. contra Perú o casos como el de Argentina y los fondos buitre son excepciones; sin embargo, permiten tener una mejor comprensión de la dinámica de las negociaciones de la deuda soberana. Diversos autores como Gulati y Klee (2000) discuten y proponen medidas necesarias para evitar que algunos acreedores enturbien las negociaciones de la deuda soberana.

Después de esta breve revisión del estado de la deuda soberana y sus reestructuraciones, se presenta el origen y aportación de este artículo. El modelo que se desarrolla en el presente trabajo parte del de Baglioni (2015), el cual es un juego de suma cero entre el país deudor y los acreedores, donde se recompra deuda con reservas. Baglioni encuentra que, si el porcentaje de recursos embargables es suficientemente alto, la recompra mejora la situación del país.

La diferencia entre el modelo que se desarrolla aquí y el de Baglioni es el supuesto de que la capacidad de incautación de los acreedores es distinta para las reservas y el resto de los recursos. Baglioni implícitamente supone que es igual de fácil o difícil embargar reservas y otros recursos del país. En este artículo se adopta un enfoque que busca ajustarse más a la realidad, abriendo la posibilidad de que exista diferencia entre la capacidad de embargo sobre las reservas y la de otros recursos.

Baglioni pone especial atención en dos casos: en uno se pueden embargar el total de los recursos y en consecuencia resulta conveniente la recompra para el país deudor, en el otro no se puede embargar nada, lo que resulta en que la recompra ya no es conveniente. Con base en lo anterior, entre más se pueda incautar más conviene recomprar la deuda. En contraste, en el presente modelo cada una de las dos tasas de incautación tiene un efecto distinto en la conveniencia de la recompra: entre más fácil sea confiscar las reservas, será más probable que la recompra mejore la situación del país. En sentido inverso, entre mayor sea la capacidad de los acreedores de embargar los recursos que no incluyen reservas, menos probable será que la recompra represente una ganancia para el país.

Dos investigaciones fundacionales del fenómeno de la deuda soberana son las de Krugman (1989) y Bulow y Rogoff (1988). En ellas se discute la conveniencia de la recompra y la existencia de un mercado secundario. El trabajo de Baglioni (2015) es la continuación de lo planteado por los autores anteriores, incluso propone un modelo que es una generalización de los modelos de Krugman y Bulow y Rogoff. Por lo tanto, el artículo de Baglioni es un buen de punto de partida para ahondar en el análisis de la recompra de deuda.

Bulow y Rogoff (1988) nutren el análisis con el caso de la recompra de Bolivia de 1988 y concluyen que es muy posible que la recompra solo beneficie a los acreedores. En contraste, Eltrudis, Bailey y Monfardini (2019) afirman que, si se amplía la perspectiva incluyendo elementos sociopolíticos, la recompra sí resulta benéfica, pues permite mantener estabilidad y evitar programas de austeridad. Rotemberg (1991) también dialoga y difiere con Bulow y Rogoff, sosteniendo que cuando los costos de renegociación son altos, la recompra es benéfica tanto para los acreedores como para el país deudor. Como se mencionó líneas arriba, Bagloni (2015) sostiene que la recompra de deuda soberana sí puede mejorar la situación del deudor.

La literatura relativa a la recompra es nutrida y diversa. Por ejemplo, Prokop y Wang (2012) indagan sobre las consecuencias del carácter público o privado de la información de la dotación inicial del país para el mercado secundario, estos autores encuentran que la recompra de deuda soberana es aún más conveniente cuando esta información es conocida. Fernández-Ruiz (2000) también explora escenarios con asimetría de información, en su artículo este autor extiende el análisis incluyendo otras alternativas a la recompra, como lo son la recalendarización y la reducción de la deuda, encuentra que la recompra de la deuda surge naturalmente como parte del remplazo de un modelo basado en la recalendarización de la deuda por otro basado en su reducción.

1.2 Modelo

El modelo que a continuación se desarrolla es una extensión del que Baglioni (2015) presenta en su apéndice A. Se considerará que hay dos estados de la naturaleza; en uno se incurre en impago y en el otro se paga la deuda. Al primero se le llama estado malo de la naturaleza. En este estado, los recursos susceptibles de incautarse no son suficientes para pagar la totalidad de sus deudas. El segundo es el estado bueno de la naturaleza donde ocurre lo contrario y se paga la totalidad de la deuda del país. Se denota por π a la probabilidad de caer en el estado malo y $(1-\pi)$ a la probabilidad de caer en el bueno.

Lo que cambia entre los dos estados de la naturaleza es la dotación W, la cual puede tomar los valores W_G o W_B, con $W_G > W_B$. El valor que tome W define si los recursos son suficientes o no para pagar la deuda y, por lo tanto, si se cae en impago o no. Con probabilidad π los recursos del país son la dotación W_B más las reservas R, y con probabilidad $(1-\pi)$ los recursos son W_G más las reservas R. Una posible interpretación de esta variable binaria W, es que refleja el desempeño económico del país, tomando el valor W_G cuando este desempeño es favorable y W_B cuando no lo es.

A continuación se introduce una diferencia importante entre los dos recursos del país, las reservas y una dotación inicial: el porcentaje que se puede incautar de las reservas será λ y el de la dotación β. Por lo tanto $\beta W + \lambda R$ son los recursos incautables[3].

El país deudor decide qué cantidad de su deuda pagar en función del castigo o embargo que puede enfrentar en caso de impago. Cuando lo incautable es mayor a la deuda, el país preferirá pagarla totalmente, ya que de cualquier manera podría ser obligado a pagar mediante el embargo. En caso contrario, pagará solamente una parte de su deuda, igual al monto que le pueden incautar. Por lo tanto, los recursos incautables siempre son inferiores a la deuda en el estado malo de la economía y mayores a la deuda en el bueno. Siguiendo esta lógica, en un escenario sin recompra $\beta W_B + \lambda R < D$, donde D es la deuda inicial del país. es decir, los recursos que se le pueden incautar al país en el estado malo de la naturaleza son menores a la deuda. En contraste, $\beta W_G + \lambda R > D$, lo que indica que en el estado bueno de la naturaleza los recursos incautables son mayores. Lo discutido en este párrafo da lugar a la siguiente condición.

$$\beta W_G + \lambda R > D \geq \beta W_B + \lambda R. \tag{1}$$

Con base en lo anterior se define el valor de la deuda inicial:

$$V(D) = (1-\pi) D + \pi(\beta W_B + \lambda R). \tag{2}$$

El segundo término representa lo que los acreedores incautarían en caso de impago multiplicado por la probabilidad de impago. El primer término es el pago total de la deuda multiplicado por la probabilidad de que se pague toda la deuda. De esta manera se define el precio de mercado de una unidad de la deuda inicial como:

[3] $\beta \in (0,1]$,$\lambda \in [0,1]$

$$P_{\mathrm{i}} = \frac{V\,(D)}{D} = \frac{(1-\pi)\,D + \pi(\beta W_B + \lambda R)}{D}. \tag{3}$$

El precio P_i es lo que se espera que los acreedores recuperen por cada unidad de la deuda inicial. Para mejorar su situación el país puede recomprar una parte de su deuda tomando ventaja del precio de mercado de su deuda, el cual es inferior a uno.

El país utiliza S reservas para recomprar una parte de su deuda inicial. La reducción nominal de la deuda inicial es X, por lo cual la deuda remanente es $D - X$. Dado que no se puede recomprar un monto mayor a la deuda que se debe, se cumple que $D \geq X$. De igual manera que en el escenario sin recompra, con recompra los recursos incautables son menores o mayores a la deuda remanente después de la recompra dependiendo del estado de la naturaleza dando lugar a la condición:

$$\beta W_G + \lambda R - \lambda S > D - X \geq \beta W_B + \lambda R - \lambda S. \tag{4}$$

A partir de lo presentado, se definen tres funciones centrales del modelo: el valor de la deuda remanente después de la recompra $V\,(D - X)$, las reservas utilizadas en la recompra S y el precio de recompra P.

$$V\,(D - X) = (1-\pi)\,(D - X) + \pi(\beta W_B + \lambda R - \lambda S), \tag{5}$$

$$S = PX, \tag{6}$$

$$P = \frac{(1-\pi)\,(D - X) + \pi(\beta W_B + \lambda R - \lambda S)}{D - X}. \tag{7}$$

Se recompra al precio P ya que en equilibrio los acreedores son indiferentes entre vender o no vender sus derechos sobre la deuda, en consecuencia, se puede definir a P como el precio de la deuda después de la recompra. La ganancia o pérdida que el país obtiene con la recompra $Y = V\,(D) - V\,(D - X) - S$ resulta de restar a la ecuación (2) la suma de las ecuaciones (5) y (6), obteniendo $Y = X\,(1-\pi) - PX + \pi\lambda S$, además usando de nuevo (6) y factorizando se llega a (8).

$$Y = X\left((1-\pi) - P(1-\pi\lambda)\right). \tag{8}$$

Entonces, la función (8) es una comparación entre los escenarios con y sin recompra, de manera que, si el valor de la deuda sin recompra $V(D)$ es mayor a la suma del valor de la deuda con recompra y el pago que se haría en la recompra $V(D-X)+S$, Y sería positiva, lo que indicaría que los pagos que haría el país sin recompra son mayores a los que haría con recompra; por lo tanto, cuando Y es positivo el país gana con la recompra.

Proposición 1. $\exists\, \tilde{\beta}$ tal que $Y \geq 0$ si y solo si $\beta \leq \tilde{\beta}$.

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\lambda}{W_B}\left(\left(\frac{1-\pi}{1-\lambda\pi}\right)D - R\right).$$

Según esta proposición, β debe estar por debajo de cierto umbral para que el país gane con la recompra, mientras que λ eleva el valor del umbral. Por lo tanto, se observan efectos opuestos al variar los porcentajes susceptibles de incautarse β y λ. Al aumentar el porcentaje susceptible de incautarse de las reservas λ, es más probable que el país gane con la recompra. Contrariamente un aumento del porcentaje susceptible de incautarse de la dotación β, disminuye la probabilidad de que la recompra sea benéfica para el país. Este resultado es distinto al de Baglioni puesto que él sostiene que siempre es conveniente para la recompra que la parte susceptible de incautarse sea alta. Una aportación del modelo de este artículo es que al diferenciar los recursos, dependiendo del tipo de recursos afectados, puede ser conveniente o no para la recompra que el porcentaje de incautación sea bajo.

Además, la proposición 1 implica una relación negativa entre las reservas R y la ganancia del país Y. Es decir, entre más reservas, menos conviene la recompra. La dinámica detrás es que al aumentar las reservas, es más grande la cantidad susceptible a incautarse, por lo tanto, el pago esperado de la deuda inicial será mayor. En consecuencia, el precio de la deuda inicial después de la recompra P aumenta, encareciéndose la recompra de la deuda. Por su parte, la deuda inicial D tiene un efecto positivo en las ganancias del país, es decir, entre mayor sea el monto de la deuda heredada, más probable será que al país le convenga recomprar.

Corolario 1. $P < P_i$ si y solo si $Y > 0$.

El corolario 1 pone de relieve que los países deudores recompran solo cuando existe un precio de recompra que represente un descuento. El modelo de este artículo puede verse como una generalización, donde el modelo del apéndice A de Baglioni (2015) es un caso particular en el que β es igual a λ. Este punto se aborda en el apéndice 1.B de este artículo, donde se verifica que cuando $\beta = \lambda$ se obtiene la misma $\bar{\theta}$ de Baglioni.

La proposición 6 de Baglioni afirma que: $\exists \bar{\theta} \in (0,1)$ tal que $Y \geq 0$ si y solo si $\theta \geq \bar{\theta}$. El umbral $\bar{\theta}$ depende del valor de θ y es positivo y menor a uno. En este artículo se encuentra otro umbral $\hat{\theta}$ que no depende de θ y puede ser negativo y mayor a uno, esto último se concreta en la siguiente proposición:

Proposición 2. Cuando $\beta = \lambda = \theta$, $\exists \hat{\theta}$ tal que $Y \geq 0$ si y solo si $\theta \geq \hat{\theta}$.

$$\hat{\theta} \equiv \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{(1-\pi)\,D}{R + W_B}\right).$$

La ventaja de la proposición 2 del presente trabajo reside en el hecho de que $\hat{\theta}$ no está en función de θ, contrariamente a lo que pasa con $\bar{\theta}$ en Baglioni (2015), por lo tanto, cuando cambia θ también varía $\bar{\theta}$ dificultando la comparación entre ellos, lo que no sucede con $\hat{\theta}$, que permanece constante cuando cambia θ, siendo así más fácil observar su dinámica. Esta ventaja también está presente en la proposición 1 ya que $\tilde{\beta}$ no está en función de β.

Nótese que a diferencia del modelo Baglioni, donde $\bar{\theta}$ se encuentra entre cero y uno, $\hat{\theta}$ puede ser negativo y mayor a uno. Sin embargo, nótese también que $\hat{\theta} < 0$ no significa que siempre convendrá la recompra, es decir, no se puede afirmar que θ se pueda reducir todo lo que se desee y que la recompra seguirá siendo conveniente, porque al reducir θ se dejan de cumplir las condiciones del modelo. Esto aplica tanto para θ como para β. Más precisamente, en el caso en que $\beta = \lambda = \theta$ una condición necesaria[4] para que la recompra sea conveniente y al mismo tiempo se cumpla (1) es $\theta \geq (W_B + R) \,/\, ((1-\pi)\,(W_G + R) + \pi\,(W_B + R))$, esta desigualdad muestra claramente que para que se cumplan las condiciones del modelo θ debe alejarse de cero, un fenómeno similar ocurre si θ se aproxima a uno.

[4] Ver apéndice 1.B para más detalles.

1.3 Conclusiones

Con la diferencia entre las reservas y el resto de los recursos se observa que un cambio en la capacidad de incautación de los acreedores puede afectar de distinta forma a la recompra. Entre más fácil se puedan incautar las reservas, más probable será que la recompra mejore la situación del país deudor. Mientras que, en sentido contrario, si los recursos que no son reservas son más fáciles de incautar, será menos probable que la recompra represente un beneficio.

Estos resultados contrastan en parte con los de Baglioni (2015). Este autor encuentra que, si el porcentaje de incautación está por encima de cierto umbral, la recompra conviene al país deudor. Por su parte, si en el modelo que se desarrolla en este artículo se pone atención solo en las reservas, también se encontraría que entre más fácil sea incautar, más convendrá al país la recompra. Sin embargo, al considerar otros recursos, el resultado es inverso al de Baglioni, puesto que, como se estableció anteriormente, entre más fácil sea incautar estos recursos, menos conveniente es la recompra para el país deudor.

Algunas de las posibles extensiones al modelo son: plantear la existencia de varios periodos; proponer más de dos estados de la naturaleza; desligar la probabilidad de impago y el desempeño económico del país; contrastar la recompra con otras alternativas como la recalendarización y la reducción de la deuda; definir los montos de recompra; introducir más de dos sectores de la economía; permitir que en la recompra se utilicen tanto recursos propios como recursos obtenidos mediante un nuevo préstamo. Otra extensión puede encaminarse a la definición de una probabilidad de impago endógena; en el apéndice 1.D se explora este supuesto.

Referencias

Baglioni, A. (2015). Leveraged buybacks of sovereign debt: A model and an application to greece, *Contemporary Economic Policy*, 33(1), p. 87-103.

Bulow, J., Rogoff, K. y Dornbusch, R. (1988). The buyback boondoggle. *Brookings Papers on Economic Activity,* 1988(2), p. 675-704.

Das, U. S., Papaioannou, M. G., & Trebesch, C. (2012). Sovereign debt restructurings 1950-2010: Literature survey, data, and stylized facts (p. 12). Washington, DC: International Monetary Fund.

Eltrudis, D., Bailey, S. J. y Monfardini, P. (2019). Sub-sovereign bond buyback: A way forward for debt-laden regions in austerity. *Public Money & Management,* 39(8), p. 571-580.

Fernández-Ruiz, J. (2000). Debt buybacks, debt reduction, and debt rescheduling under asymmetric information. *Journal of Money, Credit and Banking*, p. 13-27.

Fernández, J. (2016). Propuestas de un nuevo enfoque para afrontar las crisis de deuda soberana. *Estudios sociológicos,* 34(101), p. 273-294.

Gulati, M., y Klee, K. N. (2001). Sovereign Piracy. *The Business Lawyer*, 56(2), p. 635-651.

Krugman, P. R. (1989). Market-based debt-reduction schemes and welfare. *Analytical Issues in Debt, International Monetary Fund*.

Otero Bonicelli, C. (2014). Perú: gestión del Estado en el período 1990-2000 (No. 14). Naciones Unidas Comisión Económica para América Latina y el Caribe.

Rotemberg, J. J. (1991). Sovereign debt buybacks can lower bargaining costs. *Journal of International Money and Finance*, 10(3), p. 330-348.

Wang, R., y Prokop, J. (2012). Strategic buybacks of sovereign debt. *Frontiers of Economics in China*, 7(1), p. 1-21.

Zettelmeyer, J., Trebesch, C., y Gulati, M. (2013). The Greek debt restructuring: an autopsy. *Economic Policy*, 28(75), p. 513-563.

Apéndice 1.A Demostraciones

Demostración de la proposición 1

$\beta < \tilde{\beta} \Leftrightarrow \beta < \frac{\lambda}{W_B}\left(\left(\frac{1-\pi}{1-\lambda\pi}\right)D - R\right) \Leftrightarrow \beta W_B + \lambda R < \left(\frac{1-\pi}{1-\lambda\pi}\right)\lambda D \Leftrightarrow$
$\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) < \pi\left(\frac{1-\pi}{1-\lambda\pi}\right)\lambda D \Leftrightarrow \pi\left(\beta W_B + \lambda R\right)$
$< \left(\frac{1-\pi}{1-\lambda\pi}\right)\left(\pi\lambda D + (D - X + \lambda\pi X) - (D - X + \lambda\pi X)\right) \Leftrightarrow$
$\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) < \left(\frac{1-\pi}{1-\lambda\pi}\right)\left(D - X + \lambda\pi X - (D-X)(1-\lambda\pi)\right) \Leftrightarrow$
$\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) + (1-\pi)(D-X) < \left(\frac{1-\pi}{1-\lambda\pi}\right)(D - X + \lambda\pi X) \Leftrightarrow$
$\frac{\pi(\beta W_B+\lambda R)+(1-\pi)(D-X)}{D-X+\lambda\pi X}(1-\lambda\pi) < (1-\pi) \Leftrightarrow$
$0 < X\left((1-\pi) - (1-\lambda\pi)\left(\frac{\pi(\beta W_B+\lambda R)+(1-\pi)(D-X)}{D-X+\lambda\pi X}\right)\right) \Leftrightarrow$
$0 < X\left((1-\pi) - (1-\lambda\pi)P\right) \Leftrightarrow 0 < Y$

Demostración del corolario 1

$Y < 0 \Leftrightarrow X\left((1-\pi) - (1-\lambda\pi)\left(\frac{\pi(\beta W_B+\lambda R)+(1-\pi)(D-X)}{D-X+\lambda\pi X}\right)\right) < 0 \Leftrightarrow$
$(1-\pi)(D - X + \lambda\pi X) - (1-\lambda\pi)\left(\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) + (1-\pi)(D-X)\right)$
$< 0 \Leftrightarrow$
$(1-\pi)(D-X) + (1-\pi)(\lambda\pi X) - \pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) - (1-\pi)(D-X)$
$+\lambda\pi\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) + \lambda\pi(1-\pi)D - \lambda\pi(1-\pi)X < 0$
$\Leftrightarrow X\left(-\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) + \lambda\pi\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) + \lambda\pi(1-\pi)D\right)$
$< 0 \Leftrightarrow D(1-\pi)(D-X) + D\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) >$
$D(1-\pi)(D-X) + D\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) - X\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right)$
$+X\lambda\pi\left(\pi\left(\beta W_B + \lambda R\right) + (1-\pi)D\right) \Leftrightarrow$
$D\left((1-\pi)(D-X) + \pi\left(\beta W_B + \lambda R\right)\right) >$
$(D - X + X\pi\lambda)\left((1-\pi)D + \pi\left(\beta W_B + \lambda R\right)\right) \Leftrightarrow$
$\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi(\beta W_B+\lambda R)}{D-X+X\pi\lambda} > \frac{(1-\pi)D+\pi(\beta W_B+\lambda R)}{D} \Leftrightarrow P > P_i$

Demostración de la proposición 2

Con base en (6) y (7), y con $\theta = \beta = \lambda$,
$P = \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_B+R-PX)}{D-X}$
despejando P se obtiene $P = \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_B+R)}{D-X+\theta\pi X}$,
sustituyendo en (8) $Y = X\left((1-\pi) - (1-\theta\pi)\left(\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_B+R)}{D-X+\theta\pi X}\right)\right)$
$Y \geq 0 \Leftrightarrow (1-\pi) \geq (1-\theta\pi)\left(\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_B+R)}{D-X+\theta\pi X}\right)$

$\Leftrightarrow (1-\pi)(D-X) + (1-\pi)\,\theta\pi X \geq$
$(1-\pi)(D-X) + \pi\theta(W_B + R) - \theta\pi\left((1-\pi)(D-X) + \pi\theta(W_B + R)\right)$
$\Leftrightarrow (1-\pi)\,X \geq (W_B + R)(1-\pi\theta) + (1-\pi)\,X - (1-\pi)\,D$
$\Leftrightarrow (1-\pi)\,D \geq (W_B + R)(1-\pi\theta) \Leftrightarrow \theta \geq \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{D(1-\pi)}{W_B+R}\right) \equiv \hat{\theta}$

Apéndice 1.B Comparación de los modelos

Obtención de $\hat{\theta}$ en el modelo de Baglioni

En la ecuación que define a P_1 en el apéndice 1.A de Baglioni se sustituye C por P_1X y se despeja P_1, obteniendo que $P_1 = \frac{(1-\pi_d)(D-X)+\pi_d\theta W_L}{D-X+\theta\pi_d X}$, En la ecuación A2 de Baglioni se sustituye C y P_1, resultando que $Y = (1-\pi_d)\,X - C\,(1-\theta\pi_d) = (1-\pi_d)\,X - P_1X\,(1-\theta\pi_d)$
$= X\left((1-\pi_d) - (1-\theta\pi_d)\left(\frac{(1-\pi_d)(D-X)+\pi_d\theta W_L}{D-X+\theta\pi_d X}\right)\right)$,
entonces si
$Y \geq 0 \Leftrightarrow (1-\pi_d) \geq (1-\theta\pi_d)\left(\frac{(1-\pi_d)(D-X)+\pi_d\theta W_L}{D-X+\theta\pi_d X}\right) \Leftrightarrow (1-\pi_d)(D-X) + (1-\pi_d)\,\theta\pi_d X \geq$
$(1-\pi_d)(D-X) + \pi_d\theta W_L - \theta\pi_d\left((1-\pi_d)(D-X) + \pi_d\theta W_L\right)$
$\Leftrightarrow (1-\pi_d)\,X \geq W_L\,(1-\pi_d\theta) + (1-\pi_d)\,X - (1-\pi_d)\,D$
$\Leftrightarrow (1-\pi_d)\,D \geq W_L\,(1-\pi_d\theta) \Leftrightarrow \theta \geq \frac{1}{\pi_d}\left(1 - \frac{D(1-\pi_d)}{W_L}\right) \equiv \hat{\theta}$.

Tanto π como π_d son la probabilidad de impago, en consecuencia $\pi_d = \pi$. Por su parte W_L y W_B representan diferentes valores. W_L en el modelo de Baglioni es la totalidad de los recursos del país en caso de impago, mientras que W_B en este artículo es solo una parte de los recursos. En caso de impago se dividen los recursos entre las reservas R y el resto W_B, en otras palabras, la totalidad de los recursos es la suma de R y W_B. Por lo tanto, para comparar ambos modelos se debe considerar que $W_L = W_B + R$. Con base en estas igualdades podemos establecer que $\frac{1}{\pi_d}\left(1 - \frac{D(1-\pi_d)}{W_L}\right) = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{D(1-\pi)}{W_B+R}\right) \equiv \hat{\theta}$.

Obtención de $\bar{\theta}$ en el modelo de este artículo

En este artículo también se puede encontrar un valor idéntico al umbral $\bar{\theta}$ si $\beta = \lambda = \theta$ donde,

$$\bar{\theta} \equiv (1/\pi_d)\left(1 - (1-\pi_d)/P\right),$$

este umbral se encuentra en la prueba de la proposición 6 de Baglioni. Para esto, se recuerda que la proposición 1 establece que si y solo si $\beta \leq \tilde{\beta}$ entonces $Y \geq 0$. Ahora, con base en la ecuación (8) si $Y \geq 0$ entonces $(1-\pi) - P(1-\pi\lambda) \geq 0$, se está considerando también que $\beta = \lambda = \theta$, lo cual permite asegurar que $Y \geq 0$ implica:

$(1-\pi) - P(1-\pi\theta) \geq 0$
$\Leftrightarrow \frac{(1-\pi)}{P} \geq (1-\pi\theta)$
$\Leftrightarrow \pi\theta \geq 1 - \frac{(1-\pi)}{P}$
$\Leftrightarrow \theta \geq \left(\frac{1}{\pi}\right)\left(1 - \frac{(1-\pi)}{P}\right)$

Como se estableció en este mismo apéndice $\pi_d = \pi$,

$\Rightarrow Y \geq 0 \Leftrightarrow \theta \geq \left(\frac{1}{\pi}\right)\left(1 - \frac{(1-\pi)}{P}\right) = \left(\frac{1}{\pi_d}\right)\left(1 - \frac{(1-\pi_d)}{P}\right) \equiv \bar{\theta}$,

así se confirma que el modelo de este artículo es una generalización del desarrollado por Baglioni.

Apéndice 1.C Ejercicios Numéricos

En cada ejercicio se evalúa si se cumplen las condiciones del modelo. Al respecto se recuerda que cuando β es cero o muy cercana a cero no se cumplen todas las condiciones ya que, igualando a cero, la tercer condición presentada sería $\lambda R > D \geq \lambda R$. Para que se cumplan estas desigualdades el valor de β debe alejarse de cero, lo mismo aplica para θ. Como se afirmó anteriormente, cuando $\beta = \lambda = \theta$, una condición necesaria para que se cumpla (1) y $Y_1 > 0$ es:

$$\theta \geq (W_B + R) / ((1-\pi)(W_G + R) + \pi (W_B + R)).$$

Esto se demuestra a continuación, segun la proposición 2
$Y \geq 0$ si y solo si $\theta \geq \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{(1-\pi)D}{R+W_B}\right)$
$\theta \geq \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{(1-\pi)D}{R+W_B}\right) \Leftrightarrow (1-\pi\theta) \leq (1-\pi) D / (R + W_B)$
$\Leftrightarrow D \geq (1-\pi\theta)(R + W_B) / (1-\pi)$

Además con base en (1) $D < \theta (W_G + R)$ por lo tanto:
$\theta (W_G + R) \geq (1-\pi\theta)(R + W_B) / (1-\pi)$

$\Leftrightarrow \frac{\theta(W_G+R)(1-\pi)}{(1-\pi)} \geq \frac{(W_B+R)}{(1-\pi)} - \frac{\pi\theta(W_B+R)}{(1-\pi)}$
$\Leftrightarrow \theta \geq \frac{(W_B+R)}{(W_G+R)(1-\pi)+\pi(W_B+R)}$

En cada uno de los ejercicios numéricos 5, 6 y 7 se verifica cuando $Y \geq 0$ y se cumple (1) la desigualdad $\theta \geq \frac{(W_B+R)}{(W_G+R)(1-\pi)+\pi(W_B+R)}$ es cierta.

En los ejercicios donde varía β o θ se indica cuál es el valor mínimo que cumple con las condiciones. Este valor se obtiene despejando la desigualdad de la izquierda de la condición (1) y en el caso de θ sutituyendo a β y λ por θ, el valor mínimo de $\theta = D/(W_G + R)$ y el valor mínimo de $\beta = (D - \lambda R)/W_G$.

En el ejercicio 6, donde se analiza el caso en que $\hat{\theta}$ es mayor uno, se pone en evidencia que conforme θ se acerca a uno, no se cumplen las condiciones, en este ejercicio 6 se reporta el rango de θ que cumple con las condiciones, esto se puede obtener de manera general de la siguiente manera:

$\hat{\theta} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\pi_d}\left(1 - \frac{D(1-\pi_d)}{W_B+R_L}\right) > 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{D(1-\pi_d)}{W_B+R_L}\right) > \pi_d$
$\Leftrightarrow -(1-\pi_d)\frac{D}{W_B+R_L} > -(1-\pi_d) \Leftrightarrow \frac{D}{W_B+R_L} < 1$
$\Leftrightarrow D < W_B + R_L.$

Dada esta última desigualdad, en algún punto, conforme θ se acerque a uno, no se cumplirá la condición $D > \theta(W_B + R_L)$. Despejando la desigualdad derecha de la condición (4) y tomando en cuenta que $\lambda = \beta = \theta$ se obtiene que el valor máximo que puede tomar θ es $(D - X)/(W + R - X)$, como se muestra enseguida:

$D - X \geq \beta W_B + \lambda R - \lambda S \Leftrightarrow D - X \geq \theta W_B + \theta R - \theta S$
$\Leftrightarrow D - X \geq \theta W_B + \theta R - \theta P X$
$\Leftrightarrow D - X \geq \theta W_B + \theta R - \theta\left(\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_B+R)}{D-X+\theta\pi X}\right)X$
$\Leftrightarrow (D-X)(D-X+\theta\pi X) \geq$
$(\theta W_B + \theta R)(D - X + \theta\pi X) - \theta((1-\pi)(D-X) + \pi\theta(W_B+R))X$
$\Leftrightarrow (D-X)(D-X) \geq$
$\theta(W_B+R)(D-X) + \theta^2(W_B+R)\pi X - \theta X(1-\pi)(D-X)$
$-\pi\theta^2(W_B+R)X + (\theta\pi X)(D-X)$
$\Leftrightarrow (D-X)(D-X) \geq$
$\theta(W_B+R)(D-X) - \theta X(1-\pi)(D-X) + (\theta\pi X)(D-X)$
$\Leftrightarrow (D-X) \geq \theta(W+R-X)$

$\Leftrightarrow \frac{(D-X)}{(W+R-X)} \geq \theta.$

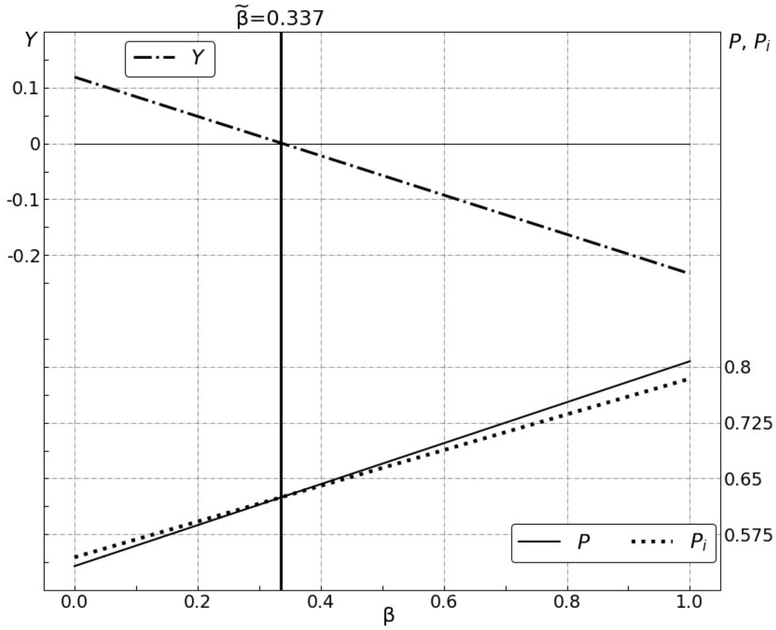
A pesar de que para ciertos valores no se cumplen las condiciones es posible llevar a cabo el análisis, dado que son solo algunos valores extremos, lo cual se observa en los siguientes ejercicios.

Ejercicio numérico 1

En este ejercicio se varía el valor de β para observar el comportamiento de la ganancia resultado de la recompra Y, el precio sin recompra P_i y el precio de recompra P. Se proponen los valores $R = 4$, $W_B = 4$, $W_G = 160$, $\pi = 0.6$, $D = 10$, $X = 2$, $\lambda = 0.6$ y se obtiene $\tilde{\beta} = 0.3375$. A partir de estos datos se elabora la gráfica 1 donde se observa que, tal como lo establece la proposición 1, cuando β es menor al umbral $\tilde{\beta}$ la recompra conviene ($Y > 0$) y que cuando es mayor no conviene ($Y < 0$). También se verifica lo establecido por el corolario 1 ya que cuando conviene la recompra, el precio de recompra es mayor al precio sin recompra y viceversa. En este ejercicio se cumplen las condiciones del modelo cuando $\beta \geq (D - \lambda R)/W_G = 0.0475$.

Gráfica 1. Proposición 1 y corolario 1 ante cambios en β

Parámetros: R=4.0 W_B=4.0 W_G=160.0 π=0.6 λ=0.6



Ejercicio numérico 2

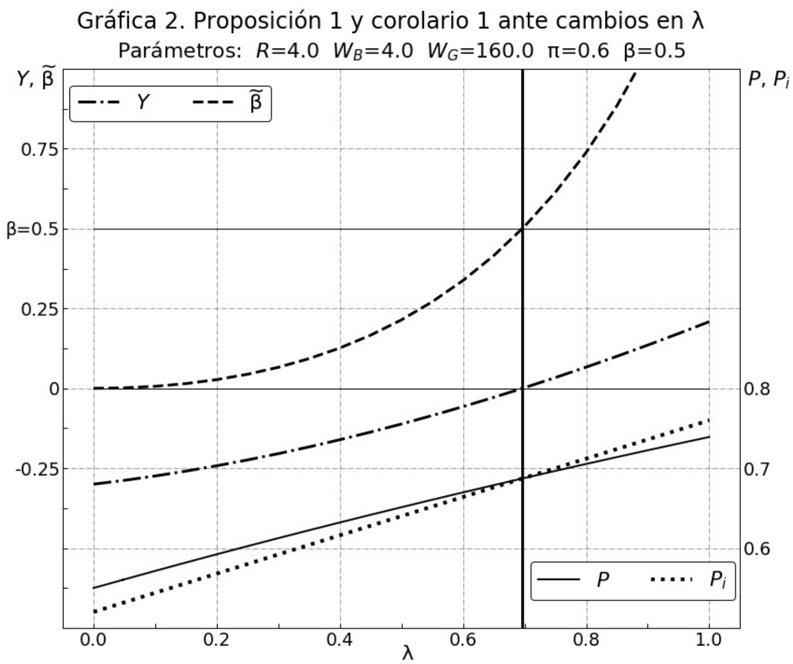
Este ejemplo verifica que $\tilde{\beta}$ puede ser mayor a uno. Para esto, se proponen los valores $R = 4$, $W_B = 4$, $W_G = 200$, π= 0.3, $D = 10$, $X = 2$, λ= 0.8, con los que se obtiene $\tilde{\beta}$= 1.0421. Las afirmaciones de la proposición 1 y el corolario 1 se cumplen ya que, ante cambios en β, la recompra siempre conviene y el precio sin recompra es mayor al precio de recompra. En este ejercicio se cumplen las condiciones del modelo cuando $\beta > (D - \lambda R)/W_G = 0.034$.

Ejercicio numérico 3

Este ejemplo verifica que $\tilde{\beta}$ puede ser menor a cero. Con este objetivo, se proponen los valores $R = 6$, $W_B = 4$, $W_G = 200$, π= 0.7, $D = 10$, $X = 2$, λ= 0.3, con los que se obtiene $\tilde{\beta}$= -0.1652. Se verifican las afirmaciones de la proposición 1 y el corolario 1 ya que, ante cambios en β, la recompra nunca conviene y el precio sin recompra es menor al precio de recompra. En este ejercicio se cumplen las condiciones del modelo cuando $\beta \geq (D - \lambda R)/W_G = 0.041$.

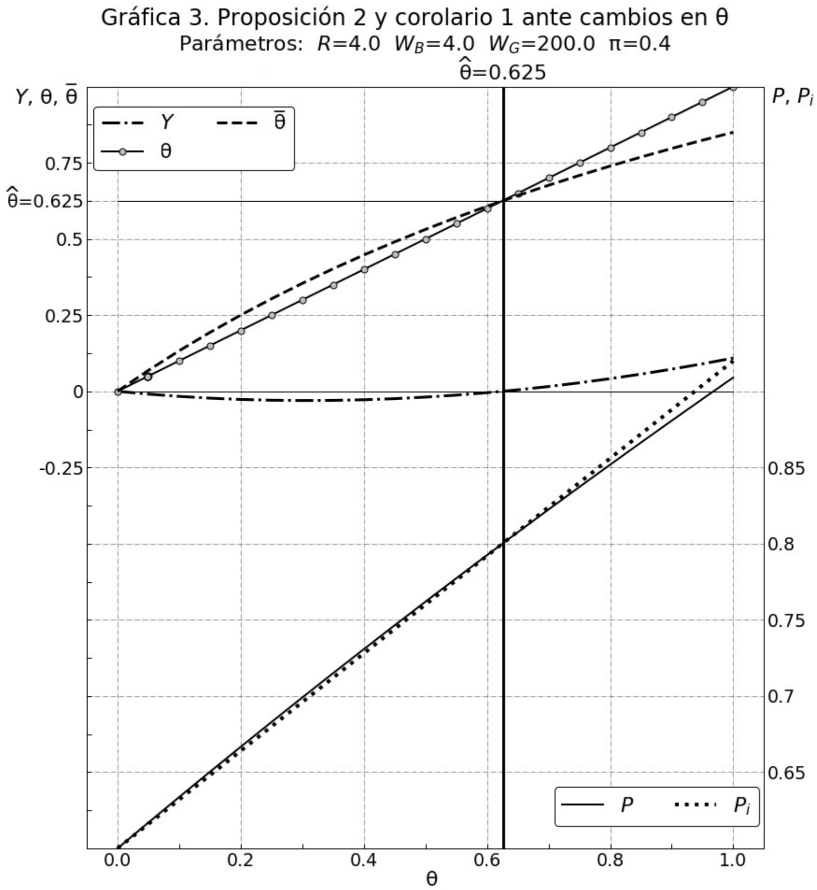
Ejercicio numérico 4

En este ejercicio se varía el valor de λ para observar el comportamiento de la ganancia resultado de la recompra Y, el precio sin recompra P_i y el precio de recompra P. Se proponen los valores $R = 4$, $W_B = 4$, $W_G = 160$, π= 0.6, $D = 10$, $X = 2$, β= 0.5 y a partir de estos datos se elabora la gráfica 2. Se observa que la proposición 1 se verifica: cuando la curva $\tilde{\beta}$ es mayor a β= 0.5 la recompra conviene ($Y > 0$) y cuando es menor no conviene ($Y < 0$). También se verifica lo establecido por el corolario 1 ya que cuando conviene la recompra el precio de recompra es mayor al precio sin recompra y viceversa. En este ejercicio siempre se cumplen las condiciones del modelo.



Ejercicio numérico 5

En este ejercicio se varía el valor de θ para observar el comportamiento de la ganancia resultado de la recompra Y, el precio sin recompra P_i y el precio de recompra P. Se proponen los valores $R = 4$, $W_B = 4$, $W_G = 200$, $\pi = 0.4$, $D = 10$, $X = 2$, y se obtiene $\hat{\theta} = 0.625$. A partir de estos datos se elabora la gráfica 3 donde se observa que, tal como lo establece la proposición 2, cuando θ es mayor al umbral $\hat{\theta}$ la recompra conviene ($Y > 0$) y que cuando es menor no conviene ($Y < 0$). También se verifica lo establecido por el corolario 1 ya que cuando conviene la recompra el precio de recompra es mayor al precio sin recompra y viceversa. Además, verifica la proposición 6 de Baglioni, donde se asegura que la recompra conviene solo cuando θ es mayor a $\overline{\theta}$. En este ejercicio se cumplen las condiciones del modelo cuando $\theta > D/(W_G + R) = 0.04902$. Como lo indica $\hat{\theta} = 0.625$, solo cuando θ es mayor a 0.625 sucede que $Y > 0$, y $(W_B + R) / ((1 - \pi)(W_G + R) + \pi (W_B + R)) = 0.064$, por lo cual es cierto que $\theta \geq (W_B + R) / ((1 - \pi)(W_G + R) + \pi (W_B + R))$ cuando $Y > 0$ y se cumple (1).



Ejercicio numérico 6

Este ejemplo verifica que $\hat{\theta}$ puede ser mayor a uno. Con este propósito se asignan los valores $R = 4$, $W_B = 4$, $W_G = 200$, $\pi = 0.2$, $D = 7.9$, $X = 2$, con los que se obtiene $\hat{\theta} = 1.05$. Las afirmaciones de la proposición 2 y del corolario 1 son verificadas ya que, ante cambios en θ, la recompra nunca conviene y el precio sin recompra es mayor al precio de recompra. En este ejercicio se cumplen las condiciones del modelo cuando $(D - X) / (W + R - X) = 0.98333 > \theta > D/(W_G + R) = 0.03873$. Dado que Y nunca es positivo no es posible verificar que es cierto que $\theta \geq (W_B + R) / ((1 - \pi)(W_G + R) + \pi (W_B + R))$ cuando $Y > 0$ y se cumple (1).

Ejercicio numérico 7

Este ejemplo verifica que $\hat{\theta}$ puede ser menor a cero. Para esto se proponen los valores $R = 4$, $WB = 4$, $WG = 500$, $\pi = 0.5$, $D = 20$, $X = 2$, con los que se obtiene $\hat{\theta} = -0.5$. Calculando las distintas variables se confirman las afirmaciones de la proposición 2 y del corolario 1 dado que, ante cambios en θ, la recompra siempre conviene y el precio sin recompra es menor al precio de recompra. En este ejercicio se cumplen las condiciones del modelo cuando $\theta > D/(W_G + R) = 0.0397$. Como se ha establecido, solo cuando θ es mayor a 0.0397 se cumplen todas las condiciones del modelo incluyendo (1), además si $\theta > 0$ la recompra es conveniente ($Y > 0$), por otro lado, $(W_B + R) / ((1-\pi)(W_G + R) + \pi (W_B + R)) = 0.031$, por lo cual es cierto que $\theta \geq (W_B + R) / ((1-\pi)(W_G + R) + \pi (W_B + R))$ cuando $Y > 0$ y se cumple (1).

Apéndice 1.D Probabilidad de impago endógena

En este apéndice[5] se explora cuánto se esforzaría el país deudor para caer en el estado bueno de la naturaleza, con este objeto se adopta el supuesto de que la probabilidad de impago es endógena, ésta se modela de manera similar a Fernández-Ruiz (1996). En este sentido, se analizan las consecuencias en un modelo de recompra con nueva deuda teniendo como base a Baglioni (2015).

El modelo de recompra con nueva deuda es parecido al presentado anteriormente en este artículo; pueden suceder dos estados de la naturaleza, en uno se incurre en impago y en el otro se paga la deuda. De nuevo π es la probabilidad de caer en el estado malo y $(1-\pi)$ la probabilidad de caer en el bueno.

Con probabilidad π los recursos del país son la dotación W_L y con probabilidad $(1-\pi)$ los recursos son W_H. El cambio de notación tiene por propósito simplificar el apéndice, sin embargo, se podría continuar con la notación anterior con las igualdades $W_L = W_B + R$ y $W_H = W_G + R$. El porcentaje que se puede incautar es θ, en consecuencia θW_L son los recursos incautables[6]. Se define el valor de la deuda inicial como:

[5] La adopción del supuesto de probabilidad de impago endógena se presenta en un apéndice debido a su caracter exploratorio.
[6] $\theta \in (0, 1]$

$$V(D) = (1-\pi) D + \pi(\theta W_L). \tag{9}$$

Donde D es la deuda inicial del país. El precio de la deuda sin recompra es:

$$P_{\mathrm{i}} = \frac{V(D)}{D} = \frac{(1-\pi) D + \pi(\theta W_L)}{D}. \tag{10}$$

Al país le prestan la cantidad C, la cual utiliza para reducir su deuda. La reducción de la deuda inicial es X, por lo cual, la deuda remanente es $D - X$. La recompra no puede ser mayor al monto total de la deuda, por lo tanto $D \geq X$.

El valor nominal del nuevo préstamo es F y k es una variable que mide la proporción de esta nueva deuda F que los prestamistas recuperan en el estado malo, y refleja la estructura de prioridades de pago. Esta variable puede tomar tres valores: si k es igual a uno, primero se pagará la nueva deuda, es decir, la nueva deuda es *senior*. Cuando k sea igual a cero la deuda inicial tendrá la prioridad, en otras palabras, la nueva deuda será *junior*. En el tercer caso, los recursos del país se reparten a los acreedores de la deuda inicial y la nueva proporcionalmente al monto de la deuda que a cada uno se le deba, para esto k es igual a $k^* = \theta W_L/(D - X + F)$, valor que resulta de dividir los recursos susceptibles de incautarse entre el total de las deudas. El valor de la nueva deuda es:

$$V(F) = (1-\pi) F + \pi k F. \tag{11}$$

El valor de la deuda inicial después de la recompra es[7]:

$$V(D-X) = (1-\pi)(D-X) + \pi(\theta W_L - kF). \tag{12}$$

El precio de recompra es $P(k)$, con este precio los acreedores son indiferentes entre vender y no vender sus derechos sobre la deuda, ya que si no los venden se quedarían con un título que valdría $P(k)$ y, si los venden, obtendrían este mismo precio.

$$P(k) = \frac{V(D-X)}{D-X} = \frac{(1-\pi)(D-X) + \pi(\theta W_L - kF)}{D-X}. \tag{13}$$

[7] Las funciones (9) y (12) implican que $\theta W_H > D > \theta W_L$ y $\theta(W_H - \theta V(F)) > D - X > \theta(W_L - \theta V(F))$

Ya definido $P(k)$ se establece que

$$C = P(k)\,X, \tag{14}$$

suponiendo que el nuevo préstamo se hace a precio de mercado,

$$V(F) = C. \tag{15}$$

En este punto se adopta el supuesto de que la probabilidad de impago es endógena, introduciendo el costo en que incurre el país deudor por esforzarse para que el estado de la naturaleza sea aquel en que se pagan las deudas en su totalidad, este costo $\frac{e^2}{2}$ se incluye en la esperanza de la utilidad del país deudor de la siguiente manera:

$$EU_b = R + (1-a-e)(W_L - \theta W_L) + (e+a)(W_H - D) - \frac{e^2}{2},$$

donde EU_b es la utilidad esperada sin recompra del país deudor y e es el esfuerzo[8], maximizando esta función se obtiene:

$$e_b = W_H - D - W_L + \theta W_L. \tag{16}$$

En el caso de recompra con nueva deuda, la utilidad esperada y el esfuerzo óptimo son:

$$EU = R + (1-a-e)(W_L - \theta W_L) + (e+a)(W_H - D + X - F) - \frac{e^2}{2},$$

$$e(k) = W_H - D - W_L + \theta W_L + X - F. \tag{17}$$

$e(k)$ es el esfuerzo con recompra que maximiza EU, este esfuerzo puede tomar tres valores dependiendo del valor de k, de tal forma $1-a-e(k)$ es la probabilidad de impago endógena con recompra, definimos al precio de recompra como:

[8]El subíndice b hace referencia a un escenario sin recompra.

$$P\left(k\right)=\frac{\left(1-\pi\right)\left(D-X\right)+\pi(\theta W_L-kF)}{D-X}. \tag{18}$$

Proposición 3. $e\left(1\right)>e\left(k^*\right)=e_b>e\left(0\right)$

La proposición 3 indica que cuando el pago de la nueva deuda tiene prioridad el país se esfuerza más si hay recompra. En cambio, en el caso en que todos los acreedores tienen la misma prioridad se esfuerza lo mismo con y sin recompra. Mientras que cuando la deuda nueva deuda no es la prioridad el esfuerzo será menor con la recompra.

Demostración de la proposición 3.

La proposición 3 afirma que $e\left(1\right)>e\left(k^*\right)=e_b>e\left(0\right)$, se divide su demostración en tres partes.

a)$e\left(1\right)>e_b$
b)$e\left(k^*\right)=e_b$
c)$e_b>e\left(0\right)$

a) Por demostrar que: $e\left(1\right)>e_b$

Con base en (11) Si $k=1\Rightarrow V\left(F\right)=\left(1-\pi\right)F+\pi F$
sustituyendo (11) y (14) en la (15) se obtiene: $\left(1-\pi\right)F+\pi F=P\left(1\right)X\Rightarrow F=P\left(1\right)X$
sustituyendo en (17) $e\left(1\right)=W_H-D-W_L+\theta W_L+X\left(1-P\left(1\right)\right)$
según (18) si $k=1\Rightarrow P\left(1\right)=\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi(\theta W_L-F)}{D-X}$
$\Rightarrow P\left(1\right)=\frac{D-X}{D-X}-\frac{\pi(D-X))}{D-X}+\frac{\pi\theta(W_L-F)}{D-X}$
$\Rightarrow P\left(1\right)=1+\frac{\pi(\theta(W_L-F)-(D-X))}{D-X}$
se ha establecido que $D-X>\theta\left(W_L-\theta V\left(F\right)\right)$
$\Rightarrow D-X>\theta\left(W_L-F\right)$
$\Rightarrow P\left(1\right)<1\Rightarrow 1-P\left(1\right)>0$
$\Rightarrow e\left(1\right)>e_b$

b) Por demostrar que: $e\left(k^*\right)=e_b$

$P\left(k^*\right)=\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi(\theta W_L-kF)}{D-X}=\left(1-\pi\right)+\frac{\pi\theta W_L\left(\frac{D-X+F-F}{D-X+F}\right)}{D-X}=\left(1-\pi\right)+\frac{\pi\theta W_L}{D-X+F}$
Sustituyendo las ecuaciones (11) y (14) en la (15) se obtiene: $\left(1-\pi\right)F+\pi kF=P\left(k^*\right)X$, si $k=\frac{\theta W_L}{D-X+F}\Rightarrow\left(1-\pi\right)F+\pi\frac{\theta W_L}{D-X+F}F=P\left(k^*\right)X$

$\Rightarrow F\left((1-\pi)+\frac{\pi\theta W_L}{D-X+F}\right)=X\left((1-\pi)+\frac{\pi\theta W_L}{D-X+F}\right)\Rightarrow F=X$
sustituyendo en (17) $e(k^*)=W_H-D-W_B+\theta W_L=e_b$

c) Por demostrar que $e_b>e(0)$

Sustituyendo las ecuaciones (11) y (14) en la (15) se obtiene:
$(1-\pi)F+\pi kF=P(0)X$, si $k=0\Rightarrow(1-\pi)F=P(0)X\Rightarrow F=\frac{P(0)X}{(1-\pi)}$
$P(0)=\frac{(a+e(0))(D-X)+(1-e(0)-a)\theta W_L}{D-X}=(a+e(0))+\frac{(1-e(0)-a)\theta W_L}{D-X}$
$\Rightarrow P(0)=(a+e(0))+\frac{(1-e(0)-a)\theta W_L}{D-X}$
$\frac{(1-e(0)-a)\theta W_L}{D-X}>0$
$\Rightarrow P(0)>(a+e(0))$
$\Rightarrow 1-\frac{P(0)}{a+e(0)}<0$
$\Rightarrow W_H-D-W_L+\theta W_L+X\left(1-\frac{P(0)}{a+e(0)}\right)<W_H-D-W_L+\theta W_L$
$\Rightarrow e_b>e(0)$

Artículo 2

Recompra, impago o liquidación de la deuda soberana en dos periodos

---

Resumen

En este artículo se exploran las opciones y decisiones de un país frente a su deuda soberana en un modelo de dos periodos. Dependiendo de variables como el nivel de la deuda y las consecuencias de su impago, se obtienen distintas respuestas óptimas que incluyen: pago parcial, liquidación total, recompra de deuda soberana en los dos periodos, recompra solo en el periodo inicial o solo en el final. Además, se encuentra que cuando la recompra es conveniente el país deudor busca que el monto a recomprar sea lo más grande posible.

2.1 Introducción

En un contexto donde se dificulta el pago de la deuda soberana, el país deudor sopesará sus opciones, entre las cuales está la recompra. En este artículo se analiza bajo qué condiciones esta recompra representa una mejora para el país. Con este propósito se propone un modelo a partir del desarrollado por Baglioni (2015), el cual es un modelo *marked-based* de deuda soberana donde un país puede recomprar con recursos propios parte de su deuda; resultando en un juego de suma cero entre el país deudor y los acreedores.

Con respecto al modelo de Baglioni, se realizaron dos modificaciones. En la primera se extiende el horizonte temporal a dos periodos; de esta manera se hace un acercamiento a la realidad, ya que en la práctica una nación deudora se enfrenta, en diferentes periodos, a la pregunta de qué hacer con su deuda. La segunda modificación consiste en que la probabilidad de que suceda el estado malo de la naturaleza no implica que el país optará por el impago de la deuda. Además, se extiende el análisis, encontrando el monto que al país le convendría recomprar.

La estructura temporal del modelo permite observar que, dependiendo del nivel de la deuda, el porcentaje que se puede forzar a pagar al país y los recursos con los que cuente, pueden haber distintos resultados: recompra en los dos periodos, solo en el inicial, solo en el final o en ninguno.

En consonancia con lo que sostiene Baglioni, se encontró que, entre mayor sea el porcentaje embargable de los recursos del país, es más probable que le convenga la recompra. Baglioni no menciona ninguna relación entre el monto de la deuda y la conveniencia de recomprar. Por el contrario, en este artículo sí hay un resultado al respecto, puesto que se encontró que, si la deuda se encuentra por encima de cierto umbral, será conveniente para el país la recompra.

Además, se encontró que cuando al país le conviene recomprar, también le conviene gastar el máximo de recursos posibles, lo cual puede derivar en que se recompre el total de la deuda. Por otro lado, el haber liberado la probabilidad de impago de la probabilidad de caer en el estado malo de la naturaleza permitió observar que, aún si en los dos periodos se cae en el estado malo de la naturaleza, si la deuda es suficientemente grande al país le convendrá recomprar en lugar de caer en impago. Las dos modificaciones mencionadas nos permiten analizar un abanico más amplio de escenarios con sus respectivos resultados. En este sentido, nuestro modelo es uno general, donde el de Baglioni es un caso particular.

Baglioni (2015) recoge elementos de dos artículos fundacionales sobre el estudio de deudas soberanas: el de Bulow y Rogoff (1988) y el de Krugman (1989). Este último argumenta que la recompra le conviene tanto al país deudor como a los acreedores cuando la deuda se encuentra en el lado incorrecto de la curva de Laffer; es decir, cuando el país se encuentra tan endeudado que una reducción en las reclamaciones de los acreedores aumenta el valor de mercado de la deuda.

La lógica detrás de este argumento es que, cuando la deuda es muy alta, se eleva la probabilidad de que no se pueda pagar la deuda o se pague muy poco. Ante esto, el acreedor prefiere renunciar a una parte de la deuda nominal para, así, aumentar la posibilidad de que la deuda se pague, aunque ello signifique no recuperar el total de la deuda. En este sentido, según el modelo de Krugman, sucede que, a partir de cierto umbral del monto de la deuda nominal, la recompra resulta realizable y benéfica para ambos lados. El modelo que se presenta en este artículo coincide en que entre mayor sea la deuda, es más probable que la recompra sea conveniente y realizable. A diferencia del modelo de Krugman, el que se desarrolla en este artículo es un juego suma cero entre los acreedores y el deudor, donde no existe una curva de Laffer y los recursos con los que cuenta el país deudor no son una variable endógena.

Krugman (1989) sostiene que cuando conviene recomprar deuda en el mercado secundario, es bajo las mismas condiciones en que conviene implementar un mecanismo más ortodoxo de tratamiento de la deuda como, por ejemplo, la recalendarización, el refinanciamiento, el perdón de la deuda o una combinación de las anteriores. Por lo mismo, considera que la solución más lógica es la adopción de un mecanismo ortodoxo en vez de uno basado en el mercado, como lo es la recompra.

Por su parte, Bulow y Rogoff (1988) sostienen que los países altamente endeudados pierden con la recompra en el mercado secundario, a menos que reciban concesiones o compensaciones significativas por parte de los acreedores, como lo son nuevos préstamos para cubrir parte del costo de la recompra. Estos autores señalan dos razones por las cuales no conviene la recompra: en primer lugar, afirman que se reduce muy poco el valor de mercado de la deuda cuando es elevado el monto nominal de la misma y, en segundo, sostienen que el porcentaje de los recursos que el país puede ser forzado a pagar es muy bajo. Con base en estas dos razones los autores afirman que la recompra es un despilfarro de los recursos del país los cuales, al final, se estarían utilizando para subsidiar a sus acreedores.

Bulow y Rogoff ilustran la primera razón con el caso de recompra realizada por Bolivia en 1988. En esta recompra el valor de mercado de la deuda antes de la recompra era de 40.2 millones de dólares y, después de la recompra, el valor de mercado bajó solamente a 39.8 millones. De esta manera, el país gastó 34 millones de dólares para reducir el valor de mercado de su deuda tan solo en 0.4 millones de dólares, presentando una pérdida neta para el país de 33.6 millones de dólares.

En un plano más general, los autores señalan que, cuando las deudas son muy grandes, es difícil que la recompra sea favorable para el país deudor, ya que, a mayor deuda, mayor tendrá que ser la reducción de la deuda para obtener un impacto significativo en su valor de mercado. A esta diferencia entre el valor de mercado de la deuda antes y después de la recompra Bulow y Rogoff le llaman el valor marginal de la deuda.

Según los autores, la segunda razón por la cual no conviene la recompra es que el monto que se puede forzar a pagar es muy pequeño, y por lo tanto, la respuesta óptima del país deudor es no pagar ni recomprar. Con respecto a la primera razón sobre la dificultad de reducir el valor de mercado de la deuda en un marco donde el valor nominal de la deuda es elevado, en este estudio se considera que existen recursos suficientes para alcanzar un nivel de recompra que reduzca significativamente el valor de mercado de la deuda.

Sobre la segunda razón que sostiene que el porcentaje de los recursos que se puede forzar a pagar al país o que se le embargan en caso de impago es muy bajo, en esta investigación se propone una definición más amplia y flexible. Por ejemplo, el embargo se puede entender también como el pago voluntario de un país dado que existe algún mecanismo que lo forzaría a pagar de cualquier manera. Incluso, puede interpretarse como el porcentaje de la deuda que un país está dispuesto a pagar para evitar caer en mayores costos para su economía nacional. Una de las vías por las cuales se pueden producir estos costos es que el impago sea tan elevado que deteriore significativamente al mercado financiero doméstico, originando una crisis económica nacional, la cual resultaría más perjudicial que haber pagado una parte de la deuda.

También se puede interpretar al embargo como la disposición o voluntad de un país a honrar su deuda, la cual no solo está en función de variables económicas, sino que considera también afinidades, posiciones políticas o compromisos internacionales a cumplir para el mantenimiento de buenas relaciones con ciertos acreedores lo que, a la larga, le traería más beneficios que el costo que implica honrar la deuda. Al definir al embargo de esta manera más amplia, es posible que sea mayor al que estiman Bulow y Rogoff y, en consecuencia, la recompra sí puede ser favorable.

Se ha desarrollado una discusión sobre la conveniencia de la recompra con base en tres artículos, sin embargo la literatura sobre deuda soberana es más amplia. Hace cuatro décadas Eaton y Gersovitz (1981) buscaban explicar el pago de la deuda soberana sosteniendo que los países pagan para que les sigan prestando. Ante la misma discusión, Acharya y Rajan (2013) señalan que se paga la deuda por que se quiere evitar el costo económico de una crisis financiera doméstica resultado del impago. En está misma línea, Gennaioli, Martin y Rossi (2018) encuentran que el impago de la deuda soberana tiene un impacto negativo en los bancos domésticos. Por su parte, Amador (2004) se enfoca en factores políticos y encuentra que la incertidumbre política puede ser un elemento de explicación del pago de la deuda externa.

Con respecto al estudio específico de la recompra de deuda soberana, Prokop y Wang (2012) analizan la cuestión tomando en cuenta las consecuencias del carácter público o privado de la información. En esta línea, aunque de distinta forma, Fernández-Ruiz (2000) introduce el supuesto de asimetría de información en un análisis que incluye alternativas a la recompra. Por su parte, Eltrudis, Bailey y Monfardini (2019) sostienen que la recompra es benéfica cuando se incluyen elementos sociopolíticos al análisis.

2.2 Modelo

En cada uno de los dos periodos del modelo el país deudor puede recomprar deuda soberana. En ambos periodos existen dos estados de la naturaleza: un estado bueno de la naturaleza donde los recursos del país son mayores y un estado malo de la naturaleza donde son menores. Por simplicidad, se supone que el factor de descuento es igual a uno y la tasa de interés libre de riesgo es cero. La resolución del modelo se lleva a cabo por inducción hacia atrás, es decir, primero se resuelve el último periodo y luego, desde el primer periodo, se encuentra la solución considerando que los jugadores conocen los posibles pagos del periodo final, por lo tanto, se inicia la presentación del modelo con el periodo final.

Periodo final

En el periodo final se parte de la existencia de un país con una deuda D y recursos W. Los recursos son iguales a W_L con probabilidad π y a W_H con probabilidad $1 - \pi$. Se puede considerar que W_L son los recursos con los que el país ya cuenta y que, en caso de caer en el estado bueno de la naturaleza, estos recursos aumentan a W_H, por lo tanto, $W_H > W_L$. El gobierno del país puede recomprar parte de su deuda, para lo cual destina los recursos C, con los que recompra el monto nominal de la deuda X. Por practicidad, al parámetro θ se le llamará porcentaje de incautación, sin embargo, representa un concepto más amplio tal como se explica en la introducción[1].

[1] $W_L \geq 0, X \geq 0, D > 0, 1 > \pi > 0, 1 \geq \theta > 0$

El país deudor, para decidir pagar o no el total de su deuda, tiene un criterio muy simple: si el pago que tiene que hacer es mayor a lo que le pueden embargar, paga solamente un monto igual a lo que le pueden embargar. En cambio, si el pago que tiene que hacer es menor al posible embargo, preferirá pagar su deuda puesto que, de cualquier manera, voluntariamente o por embargo, terminaría pagando su deuda. Con base en este párrafo se puede definir el valor de la deuda sin recompra $V(D)$.

$$V\left(D\right)=\begin{cases} D & D\leq\theta W_L<\theta W_H \\ \left(1-\pi\right)D+\pi\theta W_L & \theta W_L\leq D<\theta W_H \\ \left(1-\pi\right)\theta W_H+\pi\theta W_L & \theta W_L<\theta W_H\leq D. \end{cases} \tag{1}$$

Como se observa en (1), cuando la deuda es menor a lo embargable en ambos estados de la naturaleza, el valor de la deuda es igual a la deuda misma. Contrariamente, cuando la deuda es mayor a lo embargable en ambos casos de la naturaleza, lo que se espera es que el pago sea θW_L o θW_H, es decir, se espera un pago inferior a D. De manera análoga a (1), con recompra el país no pagará el remanente de la deuda $(D-X)$ si es mayor a los recursos embargables después de la recompra, es decir, no se paga $D-X$ cuando $D-X>\theta\left(W-C\right)$, como se puede observar en la función (2) donde se define el valor de la deuda con recompra.

$$V\left(D-X\right)=$$

$$\begin{cases} D-X & D-X\leq\theta\left(W_L-C\right)<\theta\left(W_H-C\right) \\ \left(1-\pi\right)\left(D-X\right)+\pi\theta\left(W_L-C\right) & \theta\left(W_L-C\right)\leq D-X<\theta\left(W_H-C\right) \\ \left(1-\pi\right)\theta\left(W_H-C\right)+\pi\theta\left(W_L-C\right) & \theta\left(W_L-C\right)<\theta\left(W_H-C\right)\leq D-X. \end{cases} \tag{2}$$

La ganancia que obtiene el país por la recompra es:

$$Y=V\left(D\right)-V\left(D-X\right)-C. \tag{3}$$

Al calcular Y se están comparando las opciones del país. A lo que pagaría sin recompra $V\left(D\right)$ se le resta lo que pagaría con recompra $V\left(D-X\right)$ y el pago por la recompra C, si esta resta es positiva indicaría que las obligaciones del país deudor son menores con la recompra, de tal forma que $Y > 0$ indica que el país mejora su situación recomprando. En esta resta, C es igual a la reducción nominal de la deuda X multiplicada por el precio al que ésta se recompra P. En forma de ecuación se tiene:

$$C = PX, \tag{4}$$

donde

$$P = V\left(D - X\right) / \left(D - X\right). \tag{5}$$

P es igual al precio de la deuda después de la recompra. Se recompra a este precio ya que en equilibrio los acreedores son indiferentes entre vender o no vender sus derechos sobre la deuda. Por otro lado, se denota por $V^R\left(D\right)$ al valor de la deuda suponiendo recompra óptima. La recompra óptima se refiere a que $X = X^*$, donde X^* es el monto de recompra que maximiza Y. El valor $V^R\left(D\right)$ considera dos opciones: comprar o no recomprar y se define como[2]:

$$V^R\left(D\right) = \begin{cases} V\left(D - X^*\right) + C & Y \geq 0 \\ V\left(D\right) & Y \leq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Proposición 1. Existe una recompra X con la que el país deudor obtiene una ganancia positiva si y solo si se cumple la condición (7), es decir, $\exists X$ tal que $Y > 0 \Leftrightarrow$(7) se cumple.

$$min\left(\theta W_H, D\right) > \frac{W_L\left(1 - \pi\theta\right)}{\left(1 - \pi\right)}. \tag{7}$$

La función (7) se separará en dos desigualdades para su análisis. La primera es $\theta W_H > W_L\left(1 - \pi\theta\right) / \left(1 - \pi\right)$, la cual se puede reescribir como $\theta > W_L / \left(W_H\left(1 - \pi\right) + \pi W_L\right)$ para mostrar que, entre más grande sea el porcentaje de incautación θ, más probable es que la recompra sea conveniente. La lógica económica detrás de este resultado es que, si el monto que le pueden forzar a pagar al país es alto y, por lo tanto, es elevado el porcentaje de

[2] $V^R\left(D\right)$ también puede ser considerada como la utilidad esperada del conjunto de los acreedores.

los recursos comprometidos, le convendrá al país una recompra, pues los utilizados en esta recompra de cualquier manera serían destinados a pagar la deuda.

Este resultado es consistente con Krugman, quien sostiene que la recompra es conveniente. Este autor considera implícitamente que $\theta = 1$, dicho de otra forma, adopta el supuesto de que todos los recursos pueden ser embargables. Si en el modelo desarrollado en este artículo se adopta este supuesto se obtendría: $\theta = 1 > W_L / \left(W_H (1 - \pi) + \pi W_L\right)$, relación que siempre se cumple ya que el denominador del lado derecho es una media ponderada entre W_L y un valor mayor W_H, reafirmándose así la coincidencia con Krugman. Este resultado también es consistente con Bulow y Rogoff ya que sostienen que la recompra puede funcionar para un país deudor si θ tiene un valor suficientemente alto.

La segunda desigualdad es $D > W_L (1 - \pi\theta) / (1 - \pi)$ y nos indica que entre más grande sea la deuda del país, más probable es que la recompra convenga. La explicación de este resultado deriva del hecho de que deudas elevadas son más difíciles de pagar y, por lo tanto, hay un alto riesgo de que no se paguen completas, lo que baja su precio en el mercado secundario y, en consecuencia, se realiza la recompra con un descuento. Esta afirmación coincide con el modelo de Krugman y, dejando de lado el tamaño de la recompra, también coincide con Bulow y Rogoff si se considera un porcentaje de incautación suficientemente alto[3].

Proposición 2. Si al país le conviene recomprar, recompra toda la deuda y se gasta los recursos correspondientes al estado malo de la naturaleza, en otros términos, $Y > 0 \Rightarrow X^* = \frac{W_L}{P} = D$.

La proposición 2 no solo indica que cuando conviene la recompra el país liquida el total de la deuda. También implica que los recursos del estado malo de la naturaleza alcanzan para pagar toda la deuda. Más adelante, cuando se resuelva el modelo tomando en cuenta los dos periodos, los recursos no siempre alcanzarán para pagar toda la deuda, aunque hacerlo sea conveniente para el país deudor.

Corolario 1. Una reducción del monto recomprado puede convertir una recompra conveniente en no conveniente, es decir, puede pasar que $X > \widehat{X} \Rightarrow Y > 0$ y $X < \widehat{X} \Rightarrow Y < 0$.

El corolario 1 describe la dinámica descrita por Bulow y Rogoff donde una recompra muy

[3]En el apéndice 2.B se muestra la coincidencia con Bulow y Rogoff.

pequeña no conviene. Además, a partir de este corolario y la proposición 1 se afirma que existe un nivel de recompra suficientemente grande en el cual la recompra mejora la situación del país. Esto sucede solo en el caso B. En la tabla 1 se presentan cada uno de los casos en los que puede derivar el periodo final[4]. Esta tabla se elabora con base en la proposición 1 y analizando los escenarios posibles[5].

Las condiciones de la tabla 1 definen el caso, el pago $V^R(D)$ y la estrategia, de forma tal que contextos económicos definidos por los valores de los parámetros y variables producen distintas respuestas. Estos pagos y estrategias son parte de la información que define la respuesta óptima en el periodo inicial. En las condiciones de esta tabla se observa la relación positiva entre la deuda y el monto de la recompra descrita en la proposición 1, ya que en las condiciones de los casos A y B la deuda es grande y la recompra conviene. Sin embargo, en el caso D las condiciones también requieren una deuda grande y no se recompra, lo cual evidencia que no basta con que la deuda sea alta, sino que, para que la recompra convenga, además se debe cumplir que los recursos incautables en el estado bueno de la naturaleza sean suficientemente altos, tal cual lo establece la proposición 1.

Tabla 1. Casos del periodo final

Caso	Condiciones	Pagos $V^R(D)$	Estrategia
A	$\theta W_L \leq D \leq \theta W_H$ $(1-\pi\theta)W_L / (1-\pi) \leq D$	W_L	Recomprar toda la deuda
B	$\theta W_L \leq \theta W_H \leq D$ $(1-\pi\theta)W_L / (1-\pi) \leq \theta W_H$	W_L	Recomprar toda la deuda
C	$\theta W_L \leq D \leq \theta W_H$ $D \leq (1-\pi\theta)W_L / (1-\pi)$	$(1-\pi)D + \pi\theta W_L$	$\begin{cases} \text{Pagar lo incautable si } W=W_L \\ \text{Pagar toda la deuda si } W=W_H \end{cases}$
D	$\theta W_L \leq \theta W_H \leq D$ $\theta W_H \leq (1-\pi\theta)W_L / (1-\pi)$	$(1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L$	Pagar lo incautable
E	$D \leq \theta W_L \leq \theta W_H$	D	Pagar toda la deuda

[4]Estos casos se obtienen en la demostración de la proposición 1.
[5]El cálculo de los pagos presentados en la tabla 1 se encuentra el apéndice 2.C

Periodo inicial

En este periodo inicial existe una deuda D_1 y se supone que toda la deuda vence en el mismo primer periodo. Además, se establecen dos condiciones:

$$\theta W_H \leq D_1, \tag{8}$$

$$\theta W_L < D_1 - \theta W_L < \theta W_H. \tag{9}$$

A partir de los casos del periodo final y las condiciones (8) y (9), se encuentran los valores de la deuda que toman en cuenta los dos periodos, que son $V_1(D_1)$ y $V_1(D_1 - X_1)$ sin recompra y con recompra en el primer periodo respectivamente, se denotará con el subíndice 1 a la variables que correspondan al periodo inicial y con el subíndice 2 a las del periodo final.

$$V_1(D_1) = U(D_1) + (1-\pi) V^R(D_2 \mid W_1 = W_H) + \pi V^R(D_2 \mid W_1 = W_L), \tag{10}$$

$$V_1(D_1 - X_1) = U(D_1 - X_1) + \pi V^R(D_2 \mid W_1 = W_H) + \pi V^R(D_2 \mid W_1 = W_L). \tag{11}$$

Las ecuaciones (10) y (11) se componen de los pagos en el primer periodo[6] expresados en el primer término y el valor de la deuda en el segundo periodo considerando las probabilidades de que suceda un estado u otro, este valor de la deuda en el segundo periodo corresponde al segundo y tercer término. En ambas ecuaciones aparece D_2, sin embargo, no necesariamente será el mismo valor, ya que D_2 es la deuda remanente, es decir, es la parte de la deuda D_1 que no se pagó en el periodo inicial. Por ejemplo, si el país no recompra en el periodo inicial y sucede el estado bueno, la deuda remanente sería de $D_1 - \theta W_H$. Por otro lado, si el país recompra, la deuda remanente D_2 sería $D_1 - X_1 - \theta(W_H - C_1)$, donde C_1 son los recursos que se utilizan para recomprar en el periodo inicial, W_1 son los recursos que tendrá el país en el periodo inicial y X_1 es el monto que se recompra en el periodo inicial.

[6] Los pagos en el primer periodo $U(D_1)$ y $U(D_1 - X_1)$ corresponden al valor de la deuda en el periodo inicial si no hubiera un periodo siguiente, dicho de otra forma, al valor de la deuda si el modelo solo considerará un periodo, por lo tanto, se puede encontrar el valor de estos pagos mediante las ecuaciones (1) y (2), de tal forma que $U(D_1) = V(D_1)$ y $U(D_1 - X_1) = V(D_1 - X_1)$.

La función del valor de la deuda sin recompra (10) toma una forma más específica en la función (12), según la ecuaciones (1) y (8), sin recompra, en el primer periodo el país paga θW_H en el estado bueno y θW_L en el estado malo, ya que, no existe incentivo alguno para pagar la deuda completa D_1, dado que la cantidad que puede ser forzado a pagar siempre es menor. En consecuencia, en el primer periodo nunca se paga el total del adeudo, lo que implica que la deuda en el periodo final D_2 es igual a $D_1 - \theta W_H$ en el estado bueno y a $D_1 - \theta W_L$ en el estado malo, con base en lo anterior, se reescribe $V_1(D_1)$ como:

$$V_1(D_1) = (1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L + (1-\pi)V^R(D_1 - \theta W_H) + \pi V^R(D_1 - \theta W_L). \tag{12}$$

Ahora, para el análisis del valor de la deuda con recompra, la función (11) también toma una forma más específica dando lugar a (13). Se supondrá que $D_1 - X_1 > (1-\pi)\theta(W_H - C_1)$ para facilitar la presentación del modelo[7], con base en este supuesto y la ecuación (2), cuando se recompra en el primer periodo el país paga $\theta(W_H - C_1)$ en el estado bueno y $\theta(W_L - C_1)$ en el estado malo, de esta manera, el remanente de la deuda D_2 sería igual a $D_1 - \theta(W_H - C_1)$ en el estado bueno y a $D_1 - \theta(W_L - C_1)$ en el estado malo, por lo tanto $V_1(D_1 - X_1)$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$V_1(D_1 - X_1) = (1-\pi)\theta(W_H - C_1) + \pi\theta(W_L - C_1) +$$

$$(1-\pi)V^R(D_1 - \theta(W_H - C_1)) + \pi V^R(D_1 - \theta(W_L - C_1)). \tag{13}$$

En las funciones (12) y (13) los dos primeros términos corresponden al embargo del periodo inicial, el tercero es la probabilidad de caer en el estado bueno multiplicada por el valor de la deuda en el periodo final, dado que en el periodo inicial sucedió el estado bueno. El cuarto término es similar al tercero, solo cambia el estado de la naturaleza a malo.

El precio al que se recompra la deuda en el periodo inicial es:

$$P_1 = \frac{V_1(D_1 - X_1)}{D_1 - X_1}, \tag{14}$$

y al igual que en el periodo final:

[7]En el apéndice 2.D se demuestra que los resultados se mantienen cuando $D_1 - X_1 > (1-\pi)\theta(W_H - C_1)$ no se cumple.

$$C_1 = P_1 X_1. \tag{15}$$

La ganancia que obtiene el país por recomprar un monto X_1 de deuda en el primer periodo es:

$$Y_1 = V_1\left(D_1\right) - V_1\left(D_1 - X_1\right) - C_1. \tag{16}$$

De igual manera que en el periodo final, Y_1 es una comparación entre las obligaciones del país deudor con y sin recompra, se obtiene su valor mediante las resta entre el valor de la deuda sin recompra $V_1\left(D_1\right)$ menos la suma del valor de la deuda con recompra $V_1\left(D_1 - X_1\right)$ y los recursos invertidos en la recompra C_1. Por lo tanto cuando $Y_1 > 0$ la recompra mejora la situación del país deudor.

Proposición 3. Existe una recompra X_1 con la que el país deudor obtiene una ganancia positiva si y solo si la deuda es suficientemente grande para que se cumpla la condición (17), es decir, $\exists X_1$ tal que $Y_1 > 0 \Leftrightarrow$ se cumple (17).

$$\frac{\left(1 - \pi\theta\right)\left(1 + \theta\right) W_L}{\left(1 - \pi\right)\theta} < D_1. \tag{17}$$

La proposición 3 es consistente con la proposición 1, dado que en ambas la conveniencia de la recompra depende de que la deuda este por encima de cierto umbral. Al comparar estos umbrales se encuentra que en el de la proposición 3 es mayor, lo que significa que al considerar los dos periodos se exige que la deuda sea más grande para que la recompra sea conveniente en comparación a cuando solo se analiza un periodo.

Proposición 4. Si al país le conviene recomprar en el periodo inicial, se gasta los recursos correspondientes al estado malo de la naturaleza, pero no le alcanza para cubrir toda su deuda. Además, el monto de recompra que maximiza Y_1 es X_1^*, expresado de otra manera $Y_1 > 0 \Rightarrow X_1^*$ donde:

$$X_1^* = \frac{\left[W_L\left(1 + \pi\right) + \left(1 - \pi\right) D_1\right] - \sqrt{\left[W_L\left(1 + \pi\right) + \left(1 - \pi\right) D_1\right]^2 - 4\left(1 - \pi\right) W_L D_1}}{2\left(1 - \pi\right)},$$

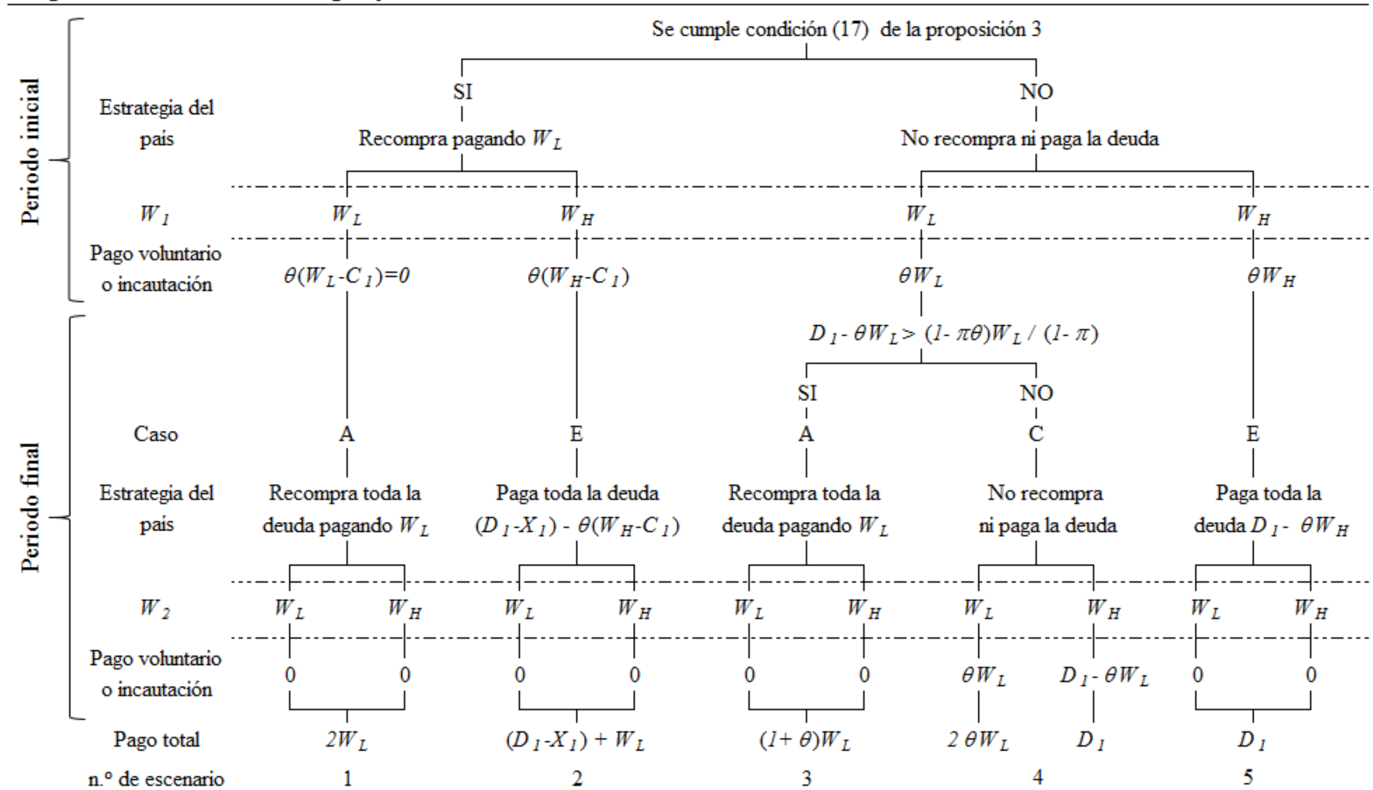
$$C_1 = P_1 X_1^* = W_L.$$

La proposición 4 al igual que la proposición 2 nos indica el monto de la deuda que se recompra, con la diferencia de que en esta proposición 4, donde se están tomando en cuenta ambos periodos, a pesar de que el país gasta todos sus recursos correspondientes al estado malo de la naturaleza no logra recomprar el total de su deuda, lo cual deriva en la existencia de varios escenarios tal cual se aprecia en el diagrama 1. Este diagrama se organiza en forma de árbol de decisión y presentan los escenarios del modelo, estos escenarios son cinco y se pueden identificar en la última fila, para su obtención se tomaron como base los casos del periodo final y las proposiciones 3 y 4. Además en él se observan las estrategias óptimas a través de los dos periodos.

El diagrama 1 sirve de apoyo para observar y enumerar los resultados que arroja el modelo para los distintos escenarios posibles. Cuando se cumple la condición (17) se recompra en el periodo inicial, esto sucede solo en los escenarios 1 y 2. Si el país tiene un mal desempeño económico en el periodo inicial, es decir si $W = W_L$, recomprará toda la deuda en el periodo final, como se muestra en escenario 1. Si por el contrario, el país tiene un buen desempeño, es decir, si $W_1 = W_H$, pagará el total de la deuda en el periodo final sin necesidad de recompra, como se observa en el escenario 2.

Cuando no se cumple la condición (17) no hay recompra en el periodo inicial, estos escenarios corresponden a los resultados del 3 al 5. A continuación, suponiendo que el país tiene un mal desempeño económico en el periodo inicial ($W_1 = W_L$), habría que observar si se cumple la condición $D_1 - \theta W_L > (1 - \pi\theta) W_L / (1 - \pi)$; si es así, se recomprará toda la deuda en el periodo final, tal cual lo describe el resultado 3. Si, por el contrario, no se cumple esta condición, se obtienen dos resultados distintos dependiendo del periodo final: si el país tiene un mal desempeño económico en el periodo final ($W_2 = W_L$) no se paga ni recompra la deuda; pero, si el país tiene un buen desempeño económico en el periodo final ($W_2 = W_H$), se paga toda la deuda sin recompra, esto se observa en el escenario 4. En caso de que el país tenga un buen desempeño económico en el periodo inicial ($W_1 = W_H$) y no se cumpla la condición (17) pagará toda la deuda sin recomprar en el segundo periodo, tal cual lo describe el escenario 5.

Diagrama 1. Escenarios, estrategias y árbol de decisión



Recapitulando: en el escenario 1 se recompra en ambos periodos cubriendo toda la deuda en el final. En el 2 se recompra en el periodo inicial y sin recomprar se paga el remanente de la deuda en el final. En el 3 no hay pago ni recompra en el periodo inicial, pero se recompra toda la deuda en el final. El escenario 4 es el único que tiene dos resultados posibles, si en el periodo final ocurriera el estado malo de la naturaleza, se paga solo la parte incautable en cada periodo. En caso contrario, si ocurre el estado bueno de la naturaleza en el periodo final, se paga lo incautable en el primer periodo y en el segundo se liquida la deuda remanente. Por último, en el escenario 5 el país no paga ni recompra en el periodo inicial y paga toda su deuda sin recomprar en el final.

Con base en lo anterior, se puede decir que, si la deuda está por encima de cierto umbral al país le conviene recomprar. La intuición económica detrás de este hecho es que al ser la deuda tan elevada existen pocas expectativas de que ésta sea pagada. En consecuencia baja el valor de esta deuda y su precio en el mercado secundario, lo que hace conveniente recomprar.

2.3 Conclusiones

La principal aportación del modelo se deriva de su estructura de dos periodos, con base en la cual se encontró que, cuando la deuda es alta y en el primer periodo se cae en el estado malo de la naturaleza, conviene recomprar en ambos periodos. En cambio, si ocurriera el bueno, solo recompraría en el periodo inicial y en el final pagaría su deuda sin precio de descuento. Por otro lado, si la deuda fuera baja no se recompra en el primer periodo, pero existe la posibilidad de que sí lo haga en el segundo si la deuda remanente es suficientemente grande y en ambos periodos sucede el estado malo de la naturaleza.

Las modificaciones al modelo de Baglioni consistentes en inclusión de dos periodos y el hecho de desligar la probabilidad de caer en el estado malo de la naturaleza del impago de la deuda, permitieron un análisis más amplio, con distintos escenarios y sus respectivos resultados.

Se coincide con Baglioni en que entre menor sea el porcentaje de la deuda que se puede forzar a pagar, más atractivo será para el país deudor no recomprar ni pagar la deuda. Aunado a esto, en el modelo que aquí se desarrolla se aborda la relación entre el monto de la deuda y la conveniencia de la recompra encontrando que, cuando la deuda está por encima de cierto umbral, será conveniente la recompra. Así mismo, se demuestra que, cuando al país le conviene recomprar, también le conviene gastar el máximo de recursos disponibles y, en algunos casos, recomprar el total de la deuda.

Más allá de los resultados aquí presentados, se proponen las siguientes extensiones para futuras investigaciones. Un primer escenario sería ponerle límite a los recursos que se pueden destinar para la recompra. De igual manera, se podrían encontrar resultados interesantes con el caso continuo, esto es, en vez de tener dos estados de la naturaleza, encontrar una función que permita tener infinitos estados de la naturaleza, es decir, que ésta sea una variable continua en vez de discreta. Y, por último, que en vez de tener solo dos periodos, se podrían considerar más periodos.

Referencias

Acharya, V. V., y Rajan, R. G. (2013). Sovereign debt, government myopia, and the financial sector. *The Review of Financial Studies*, 26 (6), p. 1526-1560.

Amador, M. (2004). A Political Model of Sovereign Debt Repayment, *2004 Meeting Papers*, (762). Society for Economic Dynamics.

Baglioni, A. (2015). Leveraged buybacks of sovereign debt: A model and an application to Greece, *Contemporary Economic Policy*, 33(1), p. 87-103.

Bulow, J., Rogoff, K. y Dornbusch, R. (1988). The buyback boondoggle. *Brookings Papers on Economic Activity,* 1988(2), p. 675-704.

Eaton, J. y Gersovitz, M. (1981). Debt with Potential Repudiation: Theoretical and Empirical Analysis, *The Review of Economic Studies*, 48(2), p. 289-309.

Eltrudis, D., Bailey, S. J. y Monfardini, P. (2019). Sub-sovereign bond buyback: A way forward for debt-laden regions in austerity. *Public Money & Management,* 39(8), p. 571-580.

Fernández-Ruiz, J. (2000). Debt buybacks, debt reduction, and debt rescheduling under asymmetric information. *Journal of Money, Credit and Banking*, p. 13-27.

Fernández-Ruiz, J. (1996). Debt and incentives in a dynamic context. *Journal of International Economics*, 41(1-2), p. 139-151.

Gennaioli, N., Martin, A., y Rossi, S. (2018). Banks, government bonds, and default: What do the data say?. *Journal of Monetary Economics*, 98, p. 98-113.

Krugman, P. R. (1989). Market-based debt-reduction schemes and welfare. *Analytical Issues in Debt, International Monetary Fund.*

Wang, R., y Prokop, J. (2012). Strategic buybacks of sovereign debt. *Frontiers of Economics in China*, 7(1), p. 1-21.

Apéndice 2.A Demostraciones

Demostración de la proposición 1

Existen cinco casos posibles. En los casos A y C se cumple que $\theta W_L \leq D \leq \theta W_H$. Si además $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \leq D$ se está en caso A, en caso contrario se está en el C. En los casos B y D se cumple $\theta W_L < \theta W_H \leq D$ y también $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \leq W_H$ se está en el caso B, en caso contrario se está en el D. Por último, si $D \leq \theta W_L \leq \theta W_H$ se está en el caso E. Enseguida se muestra que en los casos A y B donde se cumple (7) existe una recompra X tal que la recompra conviene ($Y > 0$), mientras que en los casos C, D y E donde no se cumple (7) nunca conviene ($Y \leq 0$).

Caso A

Condiciones[8]:

$$\frac{(1-\pi\theta)\,W_L}{(1-\pi)} < D < \theta W_H. \tag{18}$$

El cociente $\frac{(1-\pi\theta)}{(1-\pi)}$ es mayor a uno, por lo tanto, basándonos en la condición (18) se afirma que $\theta W_L \leq D < \theta W_H$, entonces con base en la ecuación (1):

$V\left(D\right) = \left(1-\pi\right) D + \pi\theta W_L.$

Las desigualdades de la ecuación (19) siempre se cumplen en este caso A como se demuestra a continuación:

$$\theta\left(W_L - C\right) \leq D - X < \theta\left(W_H - C\right). \tag{19}$$

Por definición $W_L < W_H \Rightarrow \theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right)$, por lo tanto las únicas dos alternativas a (19) son: $D - X \leq \theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right)$ y $\theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right) \leq D - X$.

La segunda no es posible por su parte derecha $\theta\left(W_H - C\right) \leq D - X$, la cual se puede reescribir como $\theta\left(W_H - PX\right) \leq D - X \Rightarrow X\left(1-\theta P\right) \leq D - \theta W_H$ donde $X\left(1-\theta P\right) > 0$ y dadas las condiciones de la ecuación (18) $D - \theta W_H < 0$. En consecuencia, se asegura que $\theta\left(W_H - PX\right) \leq D - X$ nunca se cumple.

[8] La ecuación (18) es una manera más simple de suponer las condiciones $\theta W_L \leq D \leq \theta W_H$ y $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \leq D$ ya que $\theta W_L \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$

En la primer alternativa

$D-X \leq \theta\left(W_L-C\right) \Rightarrow V\left(D-X\right)=D-X$

$\Rightarrow P=\frac{V(D-X)}{D-X}=\frac{D-X}{D-X}=1,$

entonces, la desigualdad $D-X \leq \theta\left(W_L-C\right)$ da lugar a $D-X \leq \theta\left(W_L-X\right) \Rightarrow D \leq X\left(1-\theta\right)+\theta W_L$, el lado derecho de esta última desigualdad es la suma ponderada de dos valores inferiores a D, en consecuencia, tampoco existe la primer alternativa en este caso A.

Habiendo establecido que ninguna de las alternativas es compatible con las condiciones del caso, se afirma que (19) siempre se cumple, entonces según la ecuación (2):

$V\left(D-X\right)=\left(1-\pi\right)\left(D-X\right)+\pi\theta\left(W_L-C\right),$

y usando (5):

$P=\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_L-C)}{D-X}.$

Con base en la ecuación (4) se sustituye C por PX de forma que:

$P=\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_L-PX)}{D-X}.$

Ahora se despeja P:

$P=\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_L-PX)}{D-X} \Rightarrow P\left(\frac{D-X+\pi\theta X}{D-X}\right)=\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X} \Rightarrow$

$$P=\frac{\left(1-\pi\right)\left(D-X\right)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X}. \tag{20}$$

Usando (3):

$Y=V\left(D\right)-V\left(D-X\right)-C$

$Y=\left(1-\pi\right)D+\pi\theta W_L-\left[\left(1-\pi\right)\left(D-X\right)+\pi\theta\left(W_L-C\right)\right]-C$

$=X\left(1-\pi\right)-C\left(1-\pi\theta\right)$

$Y=X\left[\left(1-\pi\right)-P\left(1-\pi\theta\right)\right]$

Después se analiza el signo de Y utilizando la ecuación (20):

$Y=X\left[\left(1-\pi\right)-\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X}\left(1-\pi\theta\right)\right]$

$Y>0 \Leftrightarrow \left(1-\pi\right)-\frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X}\left(1-\pi\theta\right)>0$

$\Leftrightarrow \left(1-\pi\right)\left(D-X+\pi\theta X\right)>\left(\left(1-\pi\right)\left(D-X\right)+\pi\theta W_L\right)\left(1-\pi\theta\right)$

$\Leftrightarrow (1-\pi)(D-X+\pi\theta X) >$
$(1-\pi)(D-X)+(1-\pi)\pi\theta X-(1-\pi)\pi\theta D+(1-\pi)\pi\theta W_L$

$\Leftrightarrow 0 > -(1-\pi)\pi\theta D+(1-\pi)\pi\theta W_L$

$\Leftrightarrow D > \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$.

En la condición inicial (18) se establece que $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D$, por lo tanto $Y > 0$.

Caso B

Condiciones[9]:

$$\frac{(1-\pi\theta)W_L}{1-\pi} < \theta W_H \leq D. \tag{21}$$

Se supone que se cumple (19), a diferencia del caso A, en este caso es posible que no se cumpla, sin embargo, para demostrar que existe una X tal que $Y > 0$, es suficiente encontrar un escenario en que esto suceda. Con base en (21) $\theta W_L < \theta W_H \leq D$, usando (1):

$V(D) = (1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L$

y con base en (2) y (19):

$V(D-X) = (1-\pi)(D-X) + \pi\theta(W_L - C)$

Con este resultado y (5) y se encuentra un precio igual al del caso A:

$P = \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta(W_L-C)}{D-X} \Rightarrow P = \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X}$
con este precio y (3) se obtiene que:

$Y = (1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L - (1-\pi)(D-X) - \pi\theta(W_L - C) - C$

simplificando y utilizando (4):

$Y = (1-\pi)(\theta W_H - (D-X)) - PX(1-\pi\theta)$

se propone $X = D$

$X = D \Rightarrow P = \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X} = \frac{W_L}{X} \Rightarrow PX = C = W_L$

$\Rightarrow Y\mid_{X=D} = (1-\pi)(\theta W_H) - W_L(1-\pi\theta)$

[9]La ecuación (21) es una manera más simple de suponer las condiciones $\theta W_L < \theta W_H \leq D$, y $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \leq \theta W_H$ ya que $\theta W_L \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$

Con base en (21):

$\theta W_H \geq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \Leftrightarrow (1-\pi)(\theta W_H) - W_L(1-\pi\theta) \geq 0$

$\Rightarrow Y \mid_{X=D} \geq 0$

De esta manera se demuestra que en el caso B existe una X tal que $Y > 0$.

Caso C

Condiciones:

$\theta W_L < D < \theta W_H$, $D \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$.

La diferencia con respecto al caso A es que ahora $D \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$. Si se vuelve al caso A se verifica que esto implica que $Y \leq 0$.

Caso D

Condiciones:

$\theta W_L < \theta W_H < D$, $\theta W_H \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$.

Este caso es similar al caso B, con la diferencia de que ahora $\theta W_H \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$, por lo tanto, con base en lo analizado en el caso B, si se cumple el supuesto (19) $Y \leq 0$, como se vio en el caso A, las alternativas al supuesto (19) son:

$D - X \leq \theta(W_L - PX) < \theta(W_H - PX)$ y

$\theta(W_L - PX) < \theta(W_H - PX) \leq D - X$.

Con la primer alternativa y las condiciones del caso se obtiene:

$V(D) = (1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L$

$V(D-X) = D - X$

$\Rightarrow P = \frac{V(D-X)}{D-X} = \frac{D-X}{D-X} = 1.$

Usando (3):

$Y = V(D) - V(D-X) - C$

$= (1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L - (D-X) - X$

$=(1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L - D$

D es mayor que θW_H, y $(1-\pi)\,\theta W_H + \pi\theta W_L$ es una suma ponderada entre θW_H y θW_L que es menor a θW_H, por lo tanto:

$Y = (1-\pi)\,\theta W_H + \pi\theta W_L - D < 0.$

Con la segunda alternativa y las condiciones de este caso D se obtiene:

$V\,(D) = (1-\pi)\,\theta W_H + \pi\theta W_L$

$V\,(D-X) = (1-\pi)\,(D-X) + \pi\theta\,(W_L - C)$

$P = \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X}$

$Y = (1-\pi)\,(\theta W_H - (D-X)) - PX\,(1-\pi\theta)$

$\Rightarrow Y = (1-\pi)\,(\theta W_H - D) + X\,((1-\pi) - PX\,(1-\pi\theta)).$

En primer lugar, se supone que $D \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$.

El primer término de Y es negativo ya que en las condiciones del caso se tiene que $\theta W_H < D$.

En lo que respecta al segundo término, obsérvese que es igual a la Y del caso A, donde se establece que $D \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \Leftrightarrow Y \leq 0$, por lo tanto $Y \leq 0$.

En segundo lugar se analiza qué pasa cuando $D > \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$.

$D = X \Rightarrow P = \frac{W_L}{X}$

$\Rightarrow Y\,|_{D=X} = (1-\pi)\,\theta W_H - (1-\pi\theta)\,W_L$.

En las condiciones de este caso se afirma que

$\theta W_H \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$

$\Rightarrow Y\,|_{D=X} = (1-\pi)\,\theta W_H - (1-\pi\theta)\,W_L < 0.$

Entonces, cuando X toma su valor máximo (que es D) Y es negativa o igual a cero. Además, según lo establecido en los casos A y B, $D > \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial X} \geq 0$, Esto también es válido en este caso, puesto que $\frac{\partial Y}{\partial X}$ sigue siendo la misma que se obtiene en los casos A y B. Por lo tanto, si se tomara una X por debajo de D se mantendrá que $Y \leq 0$. Dicho de otra manera, Y es creciente en X, lo que implica que si disminuye X el signo negativo de Y se mantendrá. Recapitulando, con el supuesto (19) o con sus dos alternativas $Y < 0$.

Caso E

Condiciones:

$D_2 \leq \theta W_L < \theta W_H$

La condición $D \leq \theta W_L$ implica que $D - X \leq \theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right)$. Para mostrarlo, se reescribe la desigualdad $D - X \leq \theta\left(W_L - C\right)$ como $D_2 - \theta W_L \leq X\left(1 - P\right)$, donde $D - \theta W_L \leq 0$ y $X\left(1 - P\right) \geq 0$, lo cual nos permite afirmar que $D \leq \theta W_L \Rightarrow D - X \leq \theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right)$, con base en las condiciones del caso, lo anteriormente descrito y las funciones (1) y (2) se obtiene:

$V\left(D\right) = D$

$V\left(D - X\right) = D - X$

$P = 1$

$Y = D - \left[D - X + C\right] = 0.$

Demostración de la proposición 2

En la demostración de la proposición 1 se estableció que solo en los casos A y B puede convenir la recompra, por lo tanto, se analizan estos casos para demostrar que cuando conviene la recompra $X^* = D$ y $PX^* = C = W_L$.

Se inicia con el caso A maximizando Y; su derivada con respecto a X es la siguiente:

$\frac{\partial Y}{\partial X} = \left[\left(1 - \pi\right) - P\left(1 - \pi\theta\right)\right] + X\left[-\frac{\partial P}{\partial X}\left(1 - \pi\theta\right)\right].$

Para encontrar el signo del segundo término, es decir de $X_2\left[-\frac{\partial P_2}{\partial X_2}\left(1 - \pi\theta\right)\right]$, se analiza la relación entre el precio y la recompra derivando la ecuación (20).

$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{-(1-\pi)(D-X+\pi\theta X)-[(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L](\pi\theta-1)}{(D-X+\pi\theta X)}.$

Por la ecuación (18) se sabe que:

$\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \leq D$

$\Rightarrow Y > 0$

$\Leftrightarrow \left(1 - \pi\right) - \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X}\left(1 - \pi\theta\right) > 0$

$\Leftrightarrow \left(1 - \pi\right)\left(D - X + \pi\theta X\right) > \left(\left(1 - \pi\right)\left(D - X\right) + \pi\theta W_L\right)\left(1 - \pi\theta\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial X} \leq 0.$

Habiendo encontrado que la relación es negativa, resulta que el segundo término de la derivada de Y_2 con respecto a X_2 es mayor o igual a cero. Ahora se verifica que el primer término sea positivo, con base en :

$D_2 \geq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \Rightarrow Y > 0$

$\Leftrightarrow (1-\pi) - \frac{(1-\pi)(D-X)+\pi\theta W_L}{D-X+\pi\theta X}(1-\pi\theta) > 0,$

utilizando la ecuación (20)

$\Leftrightarrow (1-\pi) - P(1-\pi\theta) > 0.$

Así, se encuentra que $\frac{\partial Y}{\partial X} \geq 0$. Entonces, el país buscará la X mayor posible, y el valor más grande que puede tener es el total de la deuda, por lo tanto, $X^* = D$, de donde:

$\Rightarrow P = \frac{(1-\pi)(D-X^*)+\pi\theta W_L}{D-X^*+\pi\theta X^*} = \frac{W_L}{X^*} \Leftrightarrow PX^* = C = W_L$

El país tendrá los recursos suficientes para la recompra dado que $C = PX^* = W_L$. También hay que verificar que con $X^* = D$ se seguirá cumpliendo la condición (18). Utilizando la ecuación (4) se obtiene la condición:

$\theta(W_L - PX^*) \leq D - X^* < \theta(W_H - PX^*),$

la cual se cumple dado que $X^* = D \Rightarrow$

$0 \leq 0 < \theta(W_H - W_L).$

En el caso B derivando Y con respecto a X se encuentra:

$\frac{\partial Y}{\partial X} = [(1-\pi) - P(1-\pi\theta)] + X\left[-\frac{\partial P}{\partial X}(1-\pi\theta)\right].$

La derivada de Y con respecto a X es igual al caso A. Además, con base en (21), en este caso también se cumple que $D \geq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$, lo que nos asegura que $\frac{\partial P}{\partial X} \leq 0$ y $\frac{\partial Y}{\partial X} \geq 0$. Por lo tanto, la maximización de Y será igual al caso A. En consecuencia, de nuevo el país eligirá $X^* = D$. La ecuación (19) se cumple, ya que $X^* = D$ implica que $\theta(W_L - C) \leq D - X < \theta(W_H - C)$ se puede expresar como $0 \leq 0 < \theta(W_H - W_L)$, lo cual es cierto.

Entonces en los casos A y B, únicos en los que puede convenir la recompra, la recompra óptima es igual al total de la deuda, es decir, $X^* = D$, lo que implica que $C = PX^* = W_L$.

Demostración del corolario 1

Por demostrar que una reducción del monto recomprado puede convertir una recompra conveniente en no conveniente, es decir, puede pasar que $X > \widehat{X} \Rightarrow Y > 0$ y $X < \widehat{X} \Rightarrow Y < 0$, donde:

$\widehat{X} = \frac{\left[\theta W_H(1-\pi\theta)+\theta^2\pi W_L - D(2-\theta)\right]}{2(1-\theta)} - \frac{\sqrt{\left[\theta W_H(1-\pi\theta)+\theta^2\pi W_L - D(2-\theta)\right]^2 - 4(1-\theta)D(D-\theta W_H)}}{2(1-\theta)}$.

En la demostración de la proposición 2 se establece que en el caso B $X = D \Rightarrow Y > 0$. Por otro lado, con la condición:

$\theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right) \leq D - X$ y con base en (1) y partiendo de (21):

$\theta W_L < \theta W_H \leq D$

$\Rightarrow V\left(D\right) = \left(1-\pi\right)\theta W_H + \pi\theta W_L,$

y con base en (2):

$\theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right) \leq D - X$

$\Rightarrow V\left(D - X\right) = \left(1-\pi\right)\theta\left(W_H - C\right) + \pi\theta\left(W_L - C\right)$

$\Rightarrow Y = \left(1-\pi\right)\theta W_H + \pi\theta W_L - \left[\left(1-\pi\right)\theta\left(W_H - C\right) + \pi\theta\left(W_L - C\right)\right] - C$
$= \theta C - C = -C\left(1-\theta\right) < 0.$

Entonces con la condición $\theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right) \leq D - X$ nunca convendrá la recompra ($Y < 0$). Además, en la demostración de la proposición 2 se estableció que en este caso B $\frac{\partial Y}{\partial X} < 0$, por lo que Y es una función monotonamente decreciente de X. Obsérvese que con $D = X$ se cumple la ecuación (19) y que para pasar a la condición $\theta\left(W_L - C\right) < \theta\left(W_H - C\right) \leq D - X$ tendría que aumentar $D - X$, o lo que es lo mismo, que disminuya X. Por lo tanto, existe una X donde $Y > 0$ y una X menor con la que $Y < 0$.

Demostración de la proposición 3

Por demostrar: $\exists X_1$ tal que $Y_1 > 0$ $\Leftrightarrow$se cumple (17), donde la desigualdad (17) es la siguiente:

$$\frac{\left(1-\pi\theta\right)\left(1+\theta\right)W_L}{\left(1-\pi\right)\theta} < D_1.$$

Según la función (16), para encontrar el signo de Y_1 y saber así si la recompra es conveniente para el país ($Y_1 > 0$), se requiere calcular el valor de la deuda $V_1()$ con y sin recompra.

En primer lugar, se encontrará el valor de la deuda sin recompra $V_1(D_1)$. Si en el periodo inicial el país no recompra deuda y ocurre W_H, entonces el país, con base en (8), solo pagaría θW_H, por lo tanto, la deuda remanente en el periodo final sería $D_1 - \theta W_H$. Despejando la desigualdad derecha de (9) se encuentra que $D_2 = D_1 - \theta W_H < \theta W_L$, de esta manera se verifica que se cumple la condición del caso E del análisis del periodo final, por lo tanto $V^R(D_2) = V^R(D_1 - \theta W_H) = D_1 - \theta W_H$.

Por otro lado, si en el periodo inicial ocurre W_L , con base en (8), la deuda en el periodo final sería $D_1 - \theta W_L$. La desigualdad (17) implica que $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - \theta W_L = D_2$ como se demuestra a continuación:

Por demostrar: $\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta} < D_1 \Rightarrow \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - \theta W_L$

$\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - \theta W_L \Leftrightarrow \frac{((1-\pi\theta)+\theta(1-\pi))W_L}{(1-\pi)} < D_1 \Leftrightarrow \frac{(1-2\pi\theta+\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1$

$\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta} > \frac{(1-2\pi\theta+\theta)W_L}{(1-\pi)} \Leftrightarrow 1 - \pi\theta + \theta - \pi\theta^2 > \theta - 2\pi\theta^2 + \theta^2$

$\Leftrightarrow (1 - \pi\theta) > \theta^2 (1 - \pi)$

entonces $D_1 > \frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta} > \frac{(1-2\pi\theta+\theta)W_L}{(1-\pi)}$

y por lo tanto $\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta} < D_1 \Rightarrow \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - \theta W_L$.

Además, con base en (9) $\theta W_L < D_1 - \theta W_L = D_2 < \theta W_H$, se verifica así que se cumplen las condiciones del caso A, en consecuencia $V^R(D_2) = V^R(D_1 - \theta W_L) = W_L$. De esta manera, bajo los supuestos (8) y (9), se tiene que:

$$(1-\pi)V^R(D_1 - \theta W_H) = (1-\pi)V^R(D_2) = (1-\pi)D_2$$
$$= (1-\pi)(D_1 - \theta W_H)$$

$$\pi V^R(D_1 - \theta W_L) = \pi V^R(D_2) = \pi W_L$$

$$V_1(D_1) = (1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L + (1-\pi)(D_1 - \theta W_H) + \pi W_L$$
$$= (1-\pi)D_1 + \pi(1+\theta)W_L.$$

Enseguida se demuestra que siempre existe una X_1 tal que $D_1 - X_1 - \theta(W_L - P_1X_1) > \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$

En esta demostración se estableció que $\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta} < D_1 \Rightarrow \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - \theta W_L$ lo que se sigue cumpliendo ya que se sigue bajo la condición (17).

además $P_1 \leq 1$ como se demuestra enseguida:

con base en (2) la ecuación (5) $P_1 = V\left(D_1 - X_1\right) / \left(D_1 - X_1\right)$ puede tomar tres formas:
$\left(D_1 - X_1\right) / \left(D_1 - X_1\right) = 1$
$\left(\left(1-\pi\right)\left(D_1 - X_1\right) + \pi\theta\left(W_L - P_1 X_1\right)\right) / \left(D_1 - X_1\right)$
cuando $\theta\left(W_L - P_1 X_1\right) \leq D_1 - X_1 < \theta\left(W_H - P_1 X_1\right)$
y
$\left(\left(1-\pi\right)\left(W_H - P_1 X_1\right) + \pi\theta\left(W_L - P_1 X_1\right)\right) / \left(D_1 - X_1\right)$
cuando $\theta\left(W_L - P_1 X_1\right) < \theta\left(W_H - P_1 X_1\right) \leq D_1 - X_1$,
la primer forma es igual a uno, la segunda y la tercera tienen en el numerador sumas ponderadas de valores inferiores a $D_1 - X_1$, por lo tanto $P_1 \leq 1$.

El país siempre puede gastar todos sus recursos en la recompra de manera que:

$C_1 = P_1 X_1 = W_L$
$\Rightarrow X_1 \geq W_L$.

Entonces se tiene que
$D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - C_1\right) = D_1 - X_1 \geq D_1 - \theta W_L > \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$
de donde se obtiene (22)

$$D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - C_1\right) > \frac{\left(1-\pi\theta\right)W_L}{\left(1-\pi\right)}. \tag{22}$$

Con base en la parte derecha de la condición (9) que dice $D_1 - \theta W_L < \theta W_H$ y en que $P_1 \leq 1$ se afirma que:

$$D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - P_1 X_1\right) < \theta W_H. \tag{23}$$

Con recompra, partiendo de la desigualdad (23), si en el primer periodo ocurre W_H, entonces $D_2 = D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - C_1\right) < \theta W_L$ por lo tanto se estará en el caso E. Si en cambio ocurre W_L, la ecuación (22) permite afirmar que $D_2 = D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - C_1\right) > \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$, en consecuencia se estaría en el caso A. De esta manera los resultados serían:

$\left(1-\pi\right)V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - C_1\right)\right) = \left(1-\pi\right)V^R\left(D_2\right) = \left(1-\pi\right)D_2$
$= \left(1-\pi\right)\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - C_1\right)\right)$

$\pi V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - C_1\right)\right) = \pi V^R\left(D_2\right) = \pi W_L$

$V_1(D_1 - X_1)$
$= (1-\pi)\theta(W_H - C_1) + \pi\theta(W_L - C_1)$
$+ (1-\pi)(D_1 - X_1 - \theta(W_H - C_1)) + \pi W_L.$

Así se obtiene el valor de la deuda con recompra en el periodo inicial considerando ambos periodos:

$V_1(D_1 - X_1) = (1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L(1+\theta) - \pi\theta C_1.$

De donde:

$P_1 = \frac{V_1(D_1-X_1)}{D_1-X_1} = \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi\left(W_L+\theta\left(W_L-C_1\right)\right)}{D_1-X_1}$
$\Rightarrow P_1 = \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi\left(W_L+\theta\left(W_L-P_1X_1\right)\right)}{D_1-X_1}$
$\Leftrightarrow P_1\left(\frac{D_1-X_1+\pi\theta X_1}{D_1-X_1}\right) = \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi(W_L+\theta W_L)}{D_1-X_1}$
$\Leftrightarrow P_1 = \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi W_L(1+\theta)}{D_1-X_1+\pi\theta X_1}.$

Con base en este resultado se calcula la ganancia que obtiene el país por la recompra Y_1:

$Y_1 = V_1(D_1) - V_1(D_1 - X_1) - C_1$

$= (1-\pi)D_1 + \pi(1+\theta)W_L$
$- ((1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L(1+\theta) - \pi\theta C_1) - C_1$
$= X_1\left[(1-\pi) - \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi W_L(1+\theta)}{D_1-X_1+\pi\theta X_1}(1-\pi\theta)\right]$
$\Leftrightarrow Y_1 = X_1[(1-\pi) - P_1(1-\pi\theta)].$

Para analizar el signo de Y_1 se hace el siguiente despeje:

$Y_1 = X_1\left[(1-\pi) - \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi W_L(1+\theta)}{D_1-X_1+\pi\theta X_1}(1-\pi\theta)\right] > 0$
$\Leftrightarrow (1-\pi)(D_1 - X_1 + \pi\theta X_1) > [(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L(1+\theta)](1-\pi\theta)$

$\Leftrightarrow 0 > -(1-\pi)D_1\pi\theta + \pi W_L(1+\theta)(1-\pi\theta)$

$\Leftrightarrow D_1 > \frac{W_L(1+\theta)(1-\pi\theta)}{(1-\pi)\theta}.$

Entonces, cuando se cumple la condición (17) siempre existe una X_1 tal que $Y_1 > 0$.

En la proposición 3 se dice que si y solo si se cumple la condición (17) sucede que $Y_1 > 0$, por lo tanto, resta mostrar que cuando la condición (17) no se cumple $Y < 0$. Hay dos escenarios posibles donde no se cumple (17), en el escenario uno se cumple (24) y en el escenario dos se cumple (25), para cada uno de los escenarios se hace en análisis con las alternativas a (22), las cuales son (26) y (27), no se hace el análisis con (22) en el escenario uno debido a que (22) y (24) se contradicen.

Entonces los escenarios se definen por (24) y (25).

$$D_1 - \theta W_L \leq \frac{(1-\pi\theta)\, W_L}{(1-\pi)}, \tag{24}$$

$$D_1 - \theta W_L > \frac{(1-\pi\theta)\, W_L}{(1-\pi)}. \tag{25}$$

Cada escenario se analiza con las alternativas a la función (22), las cuales son:

$$D_1 - X_1 - \theta\,(W_L - P_1 X_1) \leq \theta W_L, \tag{26}$$

$$\frac{(1-\pi\theta)\, W_L}{(1-\pi)} \geq D_1 - X_1 - \theta\,(W_L - P_1 X_1) > \theta W_L. \tag{27}$$

Escenario uno (24) y supuesto (26)

Cuando el país no recompra y sucede W_L, con base en (8) $D_2 = D_1 - \theta W_L$. Observando la condición (9) se verifica que $\theta W_L \leq D_2 \leq \theta W_H$. Además por la condición (24) se puede afirmar que se está en el caso C. Por su parte, si ocurre W_H, con base en (8) $D_2 = D_1 - \theta W_L$, despejando la desigualdad izquierda de la condición (9) se encuentra que se cae en el caso E. Con base en lo anterior se obtiene que:

$V^R\,(D_1 - W_L) = (1-\pi)\, D_2 + \pi\theta W_L = (1-\pi)\, D_1 - \theta W_L\,(1-2\pi)$
$V^R\,(D_1 - W_H) = D_1 - \theta W_H,$

$V_1\,(D_1) = (1-\pi^2)\, D_1 + 2\pi^2\theta W_L.$

Cuando el país recompra si en el primer periodo ocurre W_H la deuda en el segundo periodo sería $D_1 - X_1 - \theta\,(W_H - P_1 X_1)$ que es menor a θW_L; el supuesto (26) asegura esta afirmación, de ahí que se estaría en caso E del periodo final. Si en cambio sucede W_L el supuesto (26) es suficiente para saber que $D_2 = D_1 - X_1 - \theta\,(W_L - P_1 X_1) < \theta W_L$, de donde se obtiene de nuevo el caso E. En consecuencia, el valor de la deuda en el periodo inicial en caso de recompra sería:

$V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - P_1X_1\right)\right) = D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - P_1X_1\right)$
$V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - P_1X_1\right)\right) = D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - P_1X_1\right)$

$V_1\left(D_1 - X_1\right) = \left(1-\pi\right)\theta\left(W_H - P_1X_1\right) + \pi\theta\left(W_L - P_1X_1\right)$
$+\left(1-\pi\right)\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - P_1X_1\right)\right) + \pi\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - P_1X_1\right)\right)$
$= D_1 - X_1.$

Continuando el análisis,

$P_1 = \frac{D_1 - X_1}{D_1 - X_1} = 1$

$\Rightarrow Y_1 = \left(1-\pi^2\right)D_1 + 2\pi^2\theta W_L - D_1 + X_1 - X_1$

$= \pi^2\left(2\theta W_L - D_1\right) < 0$ (con base en la desigualdad izquierda del supuesto (9)).

De esta manera, se sabe que con (24) y(26) la recompra no conviene, es decir, $Y_1 < 0$.

Escenario uno (24) y supuesto (27)

En el escenario uno con el supuesto (27) se obtiene el mismo resultado que con el (26) en lo que respecta a $V_1\left(D_1\right)$. Cuando recompra, si ocurre W_L en el periodo inicial, estará en el caso C por (24) y (27), por (9) si ocurre W_H en el caso E, de donde:

$V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - C_1\right)\right) = \left(1-\pi\right)\left(D_1 - X_1 + \theta P_1X_1\right) - \theta W_L\left(1-2\pi\right)$

$V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - C_1\right)\right) = D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - P_1X_1\right)$

$V_1\left(D_1 - X_1\right) = \left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + \pi^2\theta\left(2W_L - P_1X_1\right)$

$V_1\left(D_1\right) = \left(1-\pi^2\right)D_1 + 2\pi^2\theta W_L$

$Y_1 = X\left(\left(1-\pi^2\right) - P_1\left(1-\pi^2\theta\right)\right)$

$P_1 = \frac{\left(1-\pi^2\right)\left(D_1-X_1\right)+\pi^2\theta 2W_L}{D-X+\pi^2\theta X_1}.$

Por demostrar que:$Y_1 < 0 \Leftrightarrow D_1 < \frac{2\left(1-\pi^2\theta\right)}{1-\pi^2}W_L$

$Y_1 < 0 \Leftrightarrow \left(1-\pi^2\right) - P_1\left(1-\pi^2\theta\right) < 0,$
sustituyendo el reciente resultado $P_1 = \frac{\left(1-\pi^2\right)\left(D_1-X_1\right)+\pi^2\theta 2W_L}{D-X+\pi^2\theta X_1}$
$\Leftrightarrow \left(1-\pi^2\right) < \frac{\left(1-\pi^2\right)\left(D_1-X_1\right)+\pi^2\theta 2W_L}{D-X+\pi^2\theta X_1}\left(1-\pi^2\theta\right)$

$\Leftrightarrow \left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1 + \pi^2\theta X_1\right) < \left(\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + \pi^2\theta 2W_L\right)\left(1-\pi^2\theta\right)$
$\Leftrightarrow 0 < -\left(1-\pi^2\right) D_1\pi^2\theta + 2W_L\pi^2\theta\left(1-\pi^2\theta\right)$
$\Leftrightarrow \left(1-\pi^2\right) D_1 < 2W_L\left(1-\pi^2\theta\right)$
$\Leftrightarrow D_1 < \frac{2W_L\left(1-\pi^2\theta\right)}{\left(1-\pi^2\right)}$.

Ahora se demuestra que $D_1 < \frac{2\left(1-\pi^2\theta\right)}{1-\pi^2}W_L$
la desigualdad (25) establece que $D_1 - \theta W_L \leq \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$
$\Leftrightarrow D_1 \leq \frac{(1+\theta-2\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$,
ahora se demuestra que $\frac{(1+\theta-2\pi\theta)}{1-\pi} < \frac{2\left(1-\pi^2\theta\right)}{1-\pi^2}$
$\frac{(1+\theta-2\pi\theta)}{1-\pi} < \frac{2\left(1-\pi^2\theta\right)}{1-\pi^2}$
$\Leftrightarrow 1+\theta-2\pi\theta < \frac{2\left(1-\pi^2\theta\right)}{1+\pi}$
$\Leftrightarrow \left(1+\theta-2\pi\theta\right)\left(1+\pi\right) < 2\left(1-\pi^2\theta\right)$
$\Leftrightarrow \pi - \pi\theta < 1-\theta \Leftrightarrow \pi < 1$.

Se encuentra que $Y_1 < 0 \Leftrightarrow D_1 < \frac{2\left(1-\pi^2\theta\right)}{1-\pi^2}W_L$ y $D_1 < \frac{2\left(1-\pi^2\theta\right)}{1-\pi^2}W_L$, así se asegura con el supuesto (27) $Y_1 < 0$, entonces en el escenario uno $Y_1 < 0$, tanto con el supuesto (26) como con el (27).

Escenario dos (25) y supuesto (22)

Si en el periodo inicial el país no recompra deuda y ocurre W_H, entonces con base en (8), el país solo pagaría θW_H, por lo tanto, la deuda remanente en el periodo final sería $D_1 - \theta W_H$. Despejando la desigualdad derecha de (9) se encuentra que $D_2 = D_1 - \theta W_H < \theta W_L$, de esta manera se verifica que se cumple la condición del caso E del análisis del periodo final, por lo tanto $V^R\left(D_2\right) = V^R\left(D_1 - \theta W_H\right) = D_1 - \theta W_H$.

Por otro lado, si en el periodo inicial ocurre W_L , con base en (8), la deuda en el periodo final sería $D_1 - \theta W_L$. Por la desiguladad (25) $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - \theta W_L = D_2$ y la condición (9) $\theta W_L < D_1 - \theta W_L = D_2 < \theta W_H$, por lo que se cumplen las condiciones del caso A, en consecuencia $V^R\left(D_2\right) = V^R\left(D_1 - \theta W_L\right) = W_L$. De esta manera, bajo los supuestos (8) y (9) se tiene que:

$(1-\pi) V^R\left(D_1 - \theta W_H\right) = (1-\pi) V^R\left(D_2\right) = (1-\pi)\left(D_1 - \theta W_H\right)$

$\pi V^R\left(D_1 - \theta W_L\right) = \pi V^R\left(D_2\right) = \pi W_L$

$$V_1(D_1) = (1-\pi)\,\theta W_H + \pi\theta W_L + (1-\pi)(D_1 - \theta W_H) + \pi W_L$$
$$= (1-\pi)\,D_1 + \pi(1+\theta)\,W_L.$$

Con base en (22) y la parte derecha de la condición (9) que dice $D_1 - \theta W_L < \theta W_H$, se afirma que $D_1 - X_1 - \theta(W_L - P_1 X_1) < \theta W_H$, Por lo tanto, con recompra, si en el primer periodo ocurre W_H, entonces $D_2 = D_1 - X_1 - \theta(W_H - C_1) < \theta W_L$ y se estará el caso E. Si, en cambio, ocurre W_L resultaría por (22) que $D_2 = D_1 - X_1 - \theta(W_L - C_1) > \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$, en consecuencia se estaría en el caso A y los resultados serían:

$$(1-\pi)\,V^R(D_1 - X_1 - \theta(W_H - C_1)) = (1-\pi)\,V^R(D_2)$$
$$= (1-\pi)(D_1 - X_1 - \theta(W_H - C_1))$$

$$\pi V^R(D_1 - X_1 - \theta(W_L - C_1)) = \pi V^R(D_2) = \pi W_L$$

$$V_1(D_1 - X_1) =$$
$$(1-\pi)\,\theta(W_H - C_1) + \pi\theta(W_L - C_1)$$
$$+ (1-\pi)(D_1 - X_1 - \theta(W_H - C_1)) + \pi W_L.$$

De esta manera se obtiene el valor de la deuda con recompra en el periodo inicial considerando ambos periodos:

$$V_1(D_1 - X_1) = (1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L(1+\theta) - \pi\theta C_1.$$

De donde:

$$P_1 = \frac{V_1(D_1 - X_1)}{D_1 - X_1} = \frac{(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi\left(W_L + \theta\left(W_L - C_1\right)\right)}{D_1 - X_1}$$
$$\Rightarrow P_1 = \frac{(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi\left(W_L + \theta\left(W_L - P_1 X_1\right)\right)}{D_1 - X_1}$$
$$\Leftrightarrow P_1\left(\frac{D_1 - X_1 + \pi\theta X_1}{D_1 - X_1}\right) = \frac{(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi(W_L + \theta W_L)}{D_1 - X_1}$$
$$\Leftrightarrow P_1 = \frac{(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L(1+\theta)}{D_1 - X_1 + \pi\theta X_1}.$$

Con base en este resultado se obtiene la ganancia que obtiene Y_1:

$$Y_1 = V_1(D_1) - V_1(D_1 - X_1) - C_1$$
$$= (1-\pi)\,D_1 + \pi(1+\theta)\,W_L$$
$$-\left((1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L(1+\theta) - \pi\theta C_1\right) - C_1$$
$$= X_1\left[(1-\pi) - \frac{(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L(1+\theta)}{D_1 - X_1 + \pi\theta X_1}(1-\pi\theta)\right]$$

$\Leftrightarrow Y_1 = X_1 \left[(1-\pi) - P_1 (1-\pi\theta)\right].$

Para el estudio del signo de Y_1 se hace el siguiente despeje:

$Y_1 = X_1 \left[(1-\pi) - \frac{(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L (1+\theta)}{D_1 - X_1 + \pi\theta X_1} (1-\pi\theta)\right] > 0$

$\Leftrightarrow (1-\pi)(D_1 - X_1 + \pi\theta X_1) > \left[(1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi W_L (1+\theta)\right](1-\pi\theta)$

$\Leftrightarrow 0 > -(1-\pi) D_1 \pi\theta + \pi W_L (1+\theta)(1-\pi\theta)$

$\Leftrightarrow D_1 > \frac{W_L (1+\theta)(1-\pi\theta)}{(1-\pi)\theta},$

ya que esta igualdad, que es la misma que (17), no se cumple, se obtiene que $Y \leq 0$ en este escenario dos con el supuesto (22).

Escenario dos (25) y supuesto (26)

El valor de la deuda sin recompra $V_1(D_1)$ es igual al escenario anterior

$V_1(D_1) = (1-\pi) D_1 + \pi (1+\theta) W_L,$

con recompra por (26) se estará en el caso E, tanto si ocurre W_L como W_H, por lo tanto:

$(1-\pi) V^R (D_1 - X_1 - \theta (W_H - C_1)) = (1-\pi)(D_1 - X_1 - \theta (W_H - C_1))$

$\pi V^R (D_1 - X_1 - \theta (W_L - C_1)) = \pi (D_1 - X_1 - \theta (W_L - C_1))$

$V_1 (D_1 - X_1) = D_1 - X_1$

$P_1 = \frac{V_1(D_1 - X_1)}{D_1 - X_1} = \frac{D_1 - X_1}{D_1 - X_1} = 1$

$Y_1 = \pi (W_L (1+\theta) - D_1),$

por (25)

$D_1 - \theta W_L > \frac{(1-\pi\theta) W_L}{(1-\pi)}$

$\Leftrightarrow D_1 > W_L \left(\frac{(1-\pi\theta)}{(1-\pi)} + \theta\right)$

y $\frac{(1-\pi\theta)}{(1-\pi)} > 1,$

entonces $W_L (1+\theta) - D_1 < 1$ y $Y_1 < 0$ en este escenario dos con el supuesto (26).

Escenario dos (25) y supuesto (27)

El valor de la deuda sin recompra $V_1(D_1)$ es igual al escenario anterior

$V_1(D_1) = (1-\pi) D_1 + \pi (1+\theta) W_L$

Con recompra si ocurre W_H por (9) y $P_1 \leq 1$ se estará en el caso E. Si ocurre W_L por (27) se estará en el caso C, entonces:

$V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - C_1\right)\right) = D_1 - X_1 - \theta\left(W_H - C_1\right)$
$V^R\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - C_1\right)\right) = (1-\pi)\left(D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - C_1\right)\right) + \pi\theta W_L$
$V_1\left(D_1 - X_1\right) = \left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + \pi^2\theta\left(2W_L - C_1\right)$

$Y_1 = (1-\pi)\,\pi\left(W_L\left(1+\theta\right) - D_1\right) + X\left(1 - \pi^2 - P_1\left(1 - \pi^2\theta\right)\right)$
$P_1 = \frac{\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + 2\pi^2\theta W_L - \pi^2\theta P_1 X_1}{D_1 - X_1}.$

Se analiza el signo de P_1,

$\Rightarrow P_1 = \frac{\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + \pi^2\theta\left(2W_L - P_1 X_1\right)}{D_1 - X_1}.$

Por la desigualdad derecha de (27) se encuentra que:

$D - X > \theta\left(2W_L - P_1 X_1\right)$

de donde se puede afirmar que el numerador es una suma ponderada de un valor igual denominador y otro inferior, por lo tanto, $P_1 < 1$

Se despeja P_1 para obtener una expresión donde no dependa de sí mismo:

$P_1 = \frac{\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + 2\pi^2\theta W_L}{D_1 - X_1 + \pi^2\theta X_1},$

$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = \left[\left(1-\pi^2\right) - P_1\left(1 - \pi^2\theta\right)\right] + X_1\left[-\frac{\partial P_1}{\partial X_1}\left(1 - \pi^2\theta\right)\right].$

Se analiza el signo del primer término de la derivada

$\left(1-\pi^2\right) - P_1\left(1-\pi^2\theta\right) \geq 0$
$\Leftrightarrow \left(1-\pi^2\right) \geq P_1\left(1-\pi^2\theta\right)$
$\Leftrightarrow \frac{\left(1-\pi^2\right)}{\left(1-\pi^2\theta\right)} \geq P_1$
$P_1 \leq 1$ y $\frac{\left(1-\pi^2\right)}{\left(1-\pi^2\theta\right)} \geq 1$ por lo tanto $\left(1-\pi^2\right) - P_1\left(1-\pi^2\theta\right) \geq 0.$

Por su parte, el signo del segundo se definirá con el signo de la derivada del precio con respecto a la recompra, la cual es:

$$\frac{\partial P_1}{\partial X_1} = \frac{-\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1 + \pi^2\theta X_1\right) + \left(1-\pi^2\theta\right)\left[\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + 2\pi^2\theta W_L\right]}{\left(D_1 - X_1 + \pi^2\theta X_1\right)^2}.$$

Se parte del signo del primer término para encontrar el signo de $\frac{\partial P_1}{\partial X_1}$:

$\left(1-\pi^2\right) - P_1\left(1-\pi^2\theta\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(1-\pi^2\right) - \frac{\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + 2\pi^2\theta W_L}{D_1 - X_1 + \pi^2\theta X_1}\left(1-\pi^2\theta\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1 + \pi^2\theta X_1\right) - \left(\left(1-\pi^2\right)\left(D_1 - X_1\right) + 2\pi^2\theta W_L\right)\left(1-\pi^2\theta\right)$

$\geq 0.$

lo que implica que:

$$\frac{\partial P_1}{\partial X_1} < 0 \tag{28}$$

El signo negativo de $\frac{\partial P_1}{\partial X_1}$ permite asegurar que $\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}$ es positiva. En otras palabras, al país le convendrá la X_1 mayor posible. Se empieza explorando la posibilidad de que la recompra sea tan grande que se pague toda la deuda:

$X_1 = D_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\left(1-\pi^2\right)(D_1-X_1)+2\pi^2\theta W_L}{D_1-X_1+\pi^2\theta X_1} = \frac{2W_L}{X_1} \Rightarrow P_1X_1 = 2W_L.$

Se ha establecido que en este modelo los recursos destinados a la recompra no pueden ser mayores a los que el país tendría en el estado malo de la naturaleza, es decir que $P_1X_1 \leq W_L$; por lo tanto, en este escenario no será posible recomprar toda la deuda. Se satura entonces la restricción que se acaba de enunciar para obtener la recompra mayor posible, resultando que $P_1X_1 = W_L$, es decir, se gastan todos los recursos que se tendrían en el estado malo de la naturaleza, de donde se parte para encontrar la recompra óptima.

$P_1X_1 = W_L \Leftrightarrow \frac{\left(1-\pi^2\right)(D_1-X_1)+2\pi^2\theta W_L}{D_1-X_1+\pi^2\theta X_1}X_1 = W_L$

$\Leftrightarrow \left(\left(1-\pi^2\right)(D_1-X_1)+2\pi^2\theta W_L\right)X_1 = \left(D_1-X_1+\pi^2\theta X_1\right)W_L$

$\Leftrightarrow X_1^2\left(1-\pi^2\right) - X_1\left[D_1\left(1-\pi^2\right)+W_L\left(1+\pi^2\theta\right)\right] + D_1W_L = 0$

$\Leftrightarrow X_1 =$

$\begin{cases} X_1^c = \frac{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]-\sqrt{\left[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1\right]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1}}{2(1-\pi^2)} \\ X_1^d = \frac{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]+\sqrt{\left[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1\right]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1}}{2(1-\pi^2)} \end{cases}$

Se encontra que X_1^d es mayor a D_1 y X_1^c es menor, como se muestra a continuación:

Por demostrar que $X_1^d > D_1$

$X_1^d > D_1$

$\Leftrightarrow \frac{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]+\sqrt{\left[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1\right]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1}}{2(1-\pi^2)} > D_1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_LD_1} >$

$2\left(1-\pi^2\right)D_1 - \left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right].$

El término dentro de la raíz es positivo como se demuestra enseguida:

Por demostrar $[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1>0$

$$[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1$$
$$=W_L^2(1+\pi^2\theta)^2+(1-\pi^2)^2D_1^2+2(1+\pi^2\theta)(1-\pi^2)W_LD_1$$
$$-4(1-\pi^2)W_LD_1$$
$$=W_L^2(1+\pi^2\theta)^2+(1-\pi^2)^2D_1^2+2(1-\pi^2)W_LD_1[(1+\pi^2\theta)-2]$$
$$=W_L^2(1+\pi^2\theta)^2+(1-\pi^2)^2D_1^2-2(1-\pi^2)W_LD_1(1-\pi^2\theta)$$
$$=W_L^2(1+\pi^2\theta)^2+(1-\pi^2)D_1[(1-\pi^2)D_1-2W_L(1-\pi^2\theta)]$$

El primer término $W_L^2(1+\pi^2\theta)^2$ es positivo y el signo del segundo es definido por lo que está contenido en los corchetes:

$(1-\pi^2)D_1-2W_L(1-\pi^2\theta)>0\Leftrightarrow D_1>\frac{2W_L(1-\pi^2\theta)}{(1-\pi^2)}$,

se establecio en anteriormente que $\frac{\partial P_1}{\partial X_1}<0$

$$\Leftrightarrow(1-\pi^2)(D_1-X_1+\pi^2\theta X_1)-((1-\pi^2)(D_1-X_1)+2\pi^2\theta W_L)(1-\pi^2\theta)>0$$
$$\Leftrightarrow(1-\pi^2)(D_1-X_1)+(1-\pi^2)\pi^2\theta X_1-(1-\pi^2)(D_1-X_1)$$
$$+\left(1-\pi^2\right)D_1\pi^2\theta-\left(1-\pi^2\right)X_1\pi^2\theta-2\pi^2\theta W_L\left(1-\pi^2\theta\right)>0$$
$$\Leftrightarrow(1-\pi^2)D_1\pi^2\theta-2\pi^2\theta W_L(1-\pi^2\theta)>0$$
$$\Leftrightarrow D_1>\frac{2W_L\left(1-\pi^2\theta\right)}{(1-\pi^2)}$$
$$\Rightarrow[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1>0,$$

se vuelve a la desigualdad

$$\Leftrightarrow\sqrt{[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1}$$
$$>2\left(1-\pi^2\right)D_1-\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right].$$

Tomando en cuenta lo anterior, si el L.D. fuera negativo se cumpliría la desigualdad. A partir de este punto se analiza el caso en que el L.D. es positivo:

$$\Leftrightarrow[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]^2-4(1-\pi^2)W_LD_1>$$
$$4(1-\pi^2)^2D_1^2+[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]^2$$
$$-4(1-\pi^2)D_1[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]$$
$$\Leftrightarrow-4(1-\pi^2)W_LD_1>4(1-\pi^2)^2D_1^2$$
$$-4(1-\pi^2)D_1[W_L(1+\pi^2\theta)+(1-\pi^2)D_1]$$
$$\Leftrightarrow0>4(1-\pi^2)D_1[W_L+(1-\pi^2)D_1-(1-\pi^2)D_1-W_L-W_L\pi^2\theta]$$
$$\Leftrightarrow0>-4(1-\pi^2)D_1W_L\pi^2\theta.$$

Por lo tanto $X_1^d>D_1$

Por demostrar que $X_1^c < D_1$

$X_1^c < D_1$
$\Leftrightarrow \frac{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]-\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_L D_1}}{2\left(1-\pi^2\right)} < D_1$
$\Leftrightarrow \sqrt{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_L D_1}$
$> -2\left(1-\pi^2\right)D_1+\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right].$

El término dentro de la raíz es positivo como se demostró anteriormente. Tomando esto en cuenta, si el L.D. fuera negativo se cumpliría la desigualdad, a partir de este punto se analiza el caso en que el L.D. es positivo.

$\Leftrightarrow \left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_L D_1 >$
$4\left(1-\pi^2\right)^2 D_1^2+\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2$
$-4\left(1-\pi^2\right)D_1\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]$
$\Leftrightarrow -4\left(1-\pi^2\right)W_L D_1 > 4\left(1-\pi^2\right)^2 D_1^2$
$-4\left(1-\pi^2\right)D_1\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]$
$\Leftrightarrow 0 > 4\left(1-\pi^2\right)D_1\left[W_L+\left(1-\pi^2\right)D_1-\left(1-\pi^2\right)D_1-W_L-W_L\pi^2\theta\right]$
$\Leftrightarrow 0 > -4\left(1-\pi^2\right)D_1 W_L\pi^2\theta.$

Por lo tanto $X_1^c < D_1$

Lo recompra X_1 no puede ser mayor a la D_1, por lo tanto, se descarta X_1^d y se acepta X_1^c.

Por demostrar que no se cumple el supuesto (27) $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \geq D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - P_1X_1\right) > \theta W_L$, cuando $Y_1 > 0$.

Se comienza analizando qué pasa cuando $X_1 = X_1^c$

$X_1 = X_1^c = \frac{W_L}{P_1} \Rightarrow D_1 - X_1 - \theta\left(W_L - P_1X_1\right) = D_1 - X_1^c$, entonces el supuesto (27) tomará la forma $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \geq D_1 - X_1^c > \theta W_L$, se demuestra que la desigualdad de la izquierda no se cumple:

$\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \geq D_1 - X_1^c$
$\Leftrightarrow D_1 - \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \leq X_1^c$
$\Leftrightarrow D_1 - \frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}$
$\leq \frac{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]-\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_L D_1}}{2\left(1-\pi^2\right)}$
$\Leftrightarrow 2\left(1-\pi^2\right)D_1 - 2\left(1-\pi^2\right)\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} \leq \left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]$
$-\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_L D_1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_LD_1}$
$\leq 2\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L-\left(1-\pi^2\right)D_1\right]+\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right].$

anteriormente se demostró que el término dentro de la raíz es mayor a cero, entonces, si el L.D. fuera negativo la desigualdad no se cumple. Se analiza qué pasa en caso de que L.D. sea positivo:

$\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_LD_1}$
$\leq 2\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L-\left(1-\pi^2\right)D_1\right]+\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]$
$\Leftrightarrow \left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi^2\right)W_LD_1\leq$
$4\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L-\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2+\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2$
$+4\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L-\left(1-\pi^2\right)D_1\right]\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]$
$\Leftrightarrow -\left(1-\pi^2\right)W_LD_1\leq\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L-\left(1-\pi^2\right)D_1\right]^2$
$+\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L-\left(1-\pi^2\right)D_1\right]\left[W_L\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1-\pi^2\right)D_1\right]$
$\Leftrightarrow -\left(1-\pi^2\right)W_LD_1\leq\left(1+\pi\right)^2\left(1-\pi\theta\right)^2W_L^2$
$+\left(1-\pi^2\right)^2D_1^2-2\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L\left(1-\pi^2\right)D_1$
$+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L^2\left(1+\pi^2\theta\right)-\left(1-\pi^2\right)D_1W_L\left(1+\pi^2\theta\right)$
$+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L\left(1-\pi^2\right)D_1-\left(1-\pi^2\right)^2D_1^2$
$\Leftrightarrow -\left(1-\pi^2\right)W_LD_1\leq\left(1+\pi\right)^2\left(1-\pi\theta\right)^2W_L^2$
$-\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L\left(1-\pi^2\right)D_1$
$+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L^2\left(1+\pi^2\theta\right)-\left(1-\pi^2\right)D_1W_L\left(1+\pi^2\theta\right)$
$\Leftrightarrow 0\leq\left[\left(1+\pi\right)^2\left(1-\pi\theta\right)^2+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)\left(1+\pi^2\theta\right)\right]W_L^2$
$-\left[\left(1-\pi^2\right)\left(1+\pi^2\theta\right)+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)\left(1-\pi^2\right)-1\right]D_1W_L$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 0\leq&\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)+\left(1+\pi^2\theta\right)\right]\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L\\&-\left[\pi^2\theta+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)\right]\left(1-\pi^2\right)D_1.\end{aligned}\tag{29}$$

Con base en la condición (17) se puede afirmar que:
$\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)+\left(1+\pi^2\theta\right)\right]\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L$
$-\left[\pi^2\theta+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)\right]\left(1-\pi^2\right)\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta}<0$
$\Rightarrow\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)+\left(1+\pi^2\theta\right)\right]\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L$
$-\left[\pi^2\theta+\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)\right]\left(1-\pi^2\right)D_1<0.$

Entonces si
$\left[\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)+\left(1+\pi^2\theta\right)\right]\left(1+\pi\right)\left(1-\pi\theta\right)W_L$

$-\left[\pi^2\theta+(1+\pi)(1-\pi\theta)\right](1-\pi^2)\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta}<0,$

no se cumplirá la desigualdad (29) y en consecuencia tampoco se cumpliría el supuesto (27).

$\left[(1+\pi)(1-\pi\theta)+(1+\pi^2\theta)\right](1+\pi)(1-\pi\theta)W_L$

$-\left[\pi^2\theta+(1+\pi)(1-\pi\theta)\right](1-\pi^2)\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta}<0$

$\Leftrightarrow(1-\pi)\theta\left[(1+\pi)(1-\pi\theta)+(1+\pi^2\theta)\right](1+\pi)(1-\pi\theta)W_L$

$-\left[\pi^2\theta+(1+\pi)(1-\pi\theta)\right](1-\pi^2)(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L<0$

$\Leftrightarrow\theta\left[(1+\pi)(1-\pi\theta)+(1+\pi^2\theta)\right]-\left[\pi^2\theta+(1+\pi)(1-\pi\theta)\right](1+\theta)<0$

$\Leftrightarrow\theta(1+\pi)(1-\pi\theta)+\theta(1+\pi^2\theta)-\pi^2\theta$

$-(1+\pi)(1-\pi\theta)-\pi^2\theta^2-\theta(1+\pi)(1-\pi\theta)<0$

$\Leftrightarrow\theta+\pi^2\theta^2-\pi^2\theta-1-\pi+\pi\theta+\pi^2\theta-\pi^2\theta^2<0$

$\Leftrightarrow\theta-1-\pi+\pi\theta<0$

$\Leftrightarrow-(1+\pi)(1-\theta)<0.$

Hasta este punto solo se ha demostrado que el supuesto (27) no se cumple con X_1^c; falta demostrar que tampoco se cumplirá para otra X_1. Se recuerda que X_1^c es la mayor posible, es decir, cualquier otra X_1 será menor. Se reescribe la desigualdad izquierda del supuesto (27) como: $D_1-\theta W_L-\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)}\leq X_1(1-P_1\theta)$, donde se ve que solo el lado derecho es afectado por X_1; la derivada de este lado derecho es: $(1-P_1\theta)-X_1\frac{\partial P_1}{\partial X_1}$, donde $(1-P_1\theta)>0$ y con base en (28) se afirma que $-X_1\frac{\partial P_1}{\partial X_1}>0$, de ahí que $\frac{\partial(X_1(1-P_1\theta))}{\partial X_1}>0$, es decir, si se selecciona una X_1 menor a X_1^c, $X_1(1-P_1\theta)$ disminuirá y el supuesto (27) seguirá sin cumplirse.

Se asegura de esta manera que si y solo si se cumple la condición (17) existe una X_1 tal que $Y_1>0$.

Demostración proposición 4

A continuación se encontrará el valor del monto que se recomprará; para esto, primero se establecen algunos puntos. En primer lugar, se demuestra que $\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}>0$, es decir, que conforme aumenta X_1 mayor será Y_1, lo que significa que el país recompraría el monto más alto posible, para esto se considera que se cumplen (17) y (22). Se mostró en la demostración de la proposición 3 que asumir (22) no resta generalidad.

Por demostrar que $\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}>0$

$Y_1=X_1\left[(1-\pi)-P_1(1-\pi\theta)\right]$ y su derivada es:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} = [(1-\pi) - P_1(1-\pi\theta)] + X_1\left[-\frac{\partial P_1}{\partial X_1}(1-\pi\theta)\right] \tag{30}$$

Por demostrar $\frac{\partial P_1}{\partial X_1} < 1$

$\frac{\partial P_1}{\partial X_1} = \frac{-(1-\pi)(D_1-X_1+X_1\pi\theta)+(1-\pi\theta)[(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi W_L(1+\theta)]}{(D_1-X_1+\pi\theta X_1)^2}$

$\frac{\partial P_1}{\partial X_1} < 1$

$\Leftrightarrow (1-\pi)(D_1 - X_1 + X_1\pi\theta) > (1-\pi\theta)[(1-\pi)(D_1-X_1) + \pi W_L(1+\theta)]$

$\Leftrightarrow (1-\pi)(D_1-X_1) + (1-\pi)X_1\pi\theta >$

$(1-\pi)(D_1-X_1) - \pi\theta(1-\pi)D_1 + \pi\theta(1-\pi)X_1 + (1-\pi\theta)\pi W_L(1+\theta)$

$\Leftrightarrow 0 > -\pi\theta(1-\pi)D_1 + (1-\pi\theta)\pi W_L(1+\theta)$

$\Leftrightarrow D_1 > \frac{W_L(1+\theta)(1-\pi\theta)}{(1-\pi)\theta}$.

La última desigualdad es idéntica a (17)

Dado que $\frac{\partial P_1}{\partial X_1} < 0$ el signo del segundo término es positivo. Por otro lado, el primer término $(1-\pi) - P_1(1-\pi\theta)$ es positivo dado que $Y > 0$; por lo tanto, se puede afirmar que $\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} > 0$.

Ahora se sabe que el país buscará la X_1 más grande posible, solo falta encontrarla. Al igual que en la demostración de la proposición 3, se considera la opción $X_1 = D_1$, es decir, recomprar toda la deuda, sin embargo, los recursos no son suficientes para recomprar toda la deuda como se demuestra a continuación:

$X_1 = D_1 \Rightarrow P_1 = \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi W_L(1+\theta)}{D_1-X_1+\pi\theta X_1} = \frac{W_L(1+\theta)}{\theta X_1} \Rightarrow P_1X_1 = \frac{W_L(1+\theta)}{\theta}$,

donde $\frac{W_L(1+\theta)}{\theta} > W_L$. Esto último sería afirmar que el país gasta en la recompra más recursos de los que tendría disponibles en caso de que sucediera W_L, lo cual en este modelo no es posible. Entonces se explora una alternativa en la que el país gastará todos sus recursos disponibles, es decir $C_1 = W_L$. Partiendo de esta igualdad se encuentra el valor de X_1^*:

$C_1 = P_1X_1 = \frac{(1-\pi)(D_1-X_1)+\pi W_L(1+\theta)}{D_1-X_1+\pi\theta X_1}X_1 = W_L$

$\Leftrightarrow (1-\pi)(D_1-X_1)X_1 + \pi W_L(1+\theta)X_1 = W_L(D_1 - X_1 + \pi\theta X_1)$

$\Leftrightarrow (1-\pi)D_1X_1 - (1-\pi)X_1^2 + \pi W_L\theta X_1 + \pi W_L X_1 = W_L D_1 - W_L X_1 + W_L\pi\theta X_1$

$\Leftrightarrow X_1^2(1-\pi) - X_1(W_L(1+\pi) + (1-\pi)D_1) + W_L D_1 = 0,$

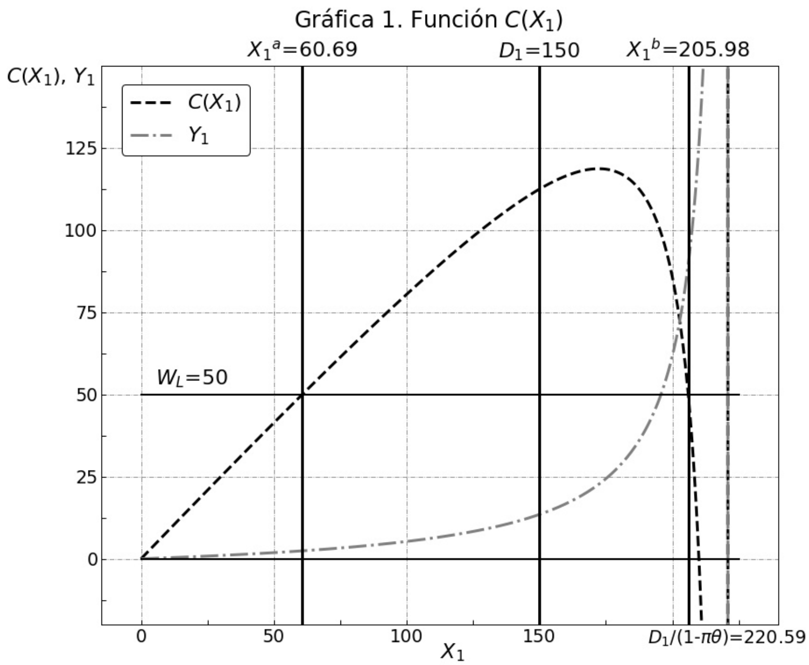
de donde se obtienen dos X_1

$X_1^a = \frac{[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1]-\sqrt{[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1]^2-4(1-\pi)W_LD_1}}{2(1-\pi)}$,

$X_1^b = \frac{[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1]+\sqrt{[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1]^2-4(1-\pi)W_LD_1}}{2(1-\pi)}$.

La gráfica 1 será un apoyo para mostrar que X_1^a maximiza Y_1, los valores que se utilizan para la elaboración de esta gráfica son: $D_1 = 150$, $W_H = 150$, $W_L = 50$, $\theta = 0.8$, $\pi = 0.4$. Partiendo de estos valores se grafica el pago de la recompra mediante la función:

$C(X_1) = P_1X_1 = \frac{(1-\pi)\left(D_1-X_1\right)+\pi W_L(1+\theta)}{D_1-X_1+\pi\theta X_1}X_1$,



para observar su relación con los recursos en el estado malo de la naturaleza W_L. También se grafica Y_1, la cual, como se ha descrito anteriormente, es creciente en X_1. Al final de esta demostración se muestra que $X_1^a < D_1$ y $X_1^b > D_1$, se ha establecido que $D_1 \geq X_1$ y que $X_1 \geq 0$, expresado de otra forma, el rango de X_1 es $[0, D_1]$. Además $C(0) < C(X_1^a) < C(D_1)$, lo que se puede observar evaluando la función $C(X_1)$ en los puntos respectivos, como se hace a continuación:

$C(0) = P_1 \cdot 0 = 0$

$C(X_1^a) = W_L$

$C(D_1) = \frac{\pi W_L(1+\theta)}{\pi\theta X_1} X_1 = \frac{W_L(1+\theta)}{\theta}$

$\frac{W_L(1+\theta)}{\theta} > W_L \Rightarrow C(D_1) > C(X_1^a)$

$W_L > 0 \Rightarrow C(X_1^a) > C(0)$.

En lo que respecta a la continuidad de la función $C(X_1)$, se indetermina solo cuando $D_1 - X_1 + \pi\theta X_1 = 0$ lo cual sucede con $X_1 = \frac{D_1}{1-\pi\theta}$. Dado que $\frac{D_1}{1-\pi\theta} > D_1$, en el rango $[0, D_1]$ la función es continua, en la gráfica se puede observar este valor $\frac{D_1}{1-\pi\theta}$.

Con base en lo desarrollado anteriormente se sabe que en el rango $[0, D_1]$ la función $C(X_1)$ solo cruza W_L una vez y que es continua. Además que $C(0) < C(X_1^a) = W_L < C(D_1)$, es decir, en este rango la función $C(X_1)$ parte de cero y llega a un punto por encima de W_L, y solo cruza la constante W_L una vez, por lo tanto $C_1(X_1) > W_L \ \forall \ X_1 \in (X_1^a, D_1]$, en otras palabras, cuando el valor de X_1 está entre X_1^a y D_1, los recursos en el estado malo de la naturaleza W_L son insuficientes para realizar el pago $C_1(X_1)$. Mientras que $C_1(X_1) \leq W_L \ \forall \ X_1 \in [0, X_1^a]$ lo que significa cuando X_1 está entre cero y X_1^a la recompra sí es asequible en el estado malo de la naturaleza, entonces se tiene que seleccionar una X_1 en el rango $[0, X_1^a]$, donde la mayor es X_1^a, entonces el monto de recompra óptima es:

$$X_1^a = \frac{[W_L(1+\pi) + (1-\pi)D_1] - \sqrt{[W_L(1+\pi) + (1-\pi)D_1]^2 - 4(1-\pi)W_L D_1}}{2(1-\pi)}. \quad (31)$$

Enseguida se muestra que con X_1^a se cumple la condición (22)

$W_L = P_1 X_1^a \Leftrightarrow D_1 - X_1^a - \theta(W_L - P_1 X_1^a) = D_1 - X_1^a$ entonces la desigualdad a comprobar es $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - X_1^a$.

Por demostrar que $\frac{(1-\pi\theta)W_L}{(1-\pi)} < D_1 - X_1^a$

$\theta > \theta^2 \Leftrightarrow -(1+\pi)\theta < -(1+\pi)\theta^2$

$\Leftrightarrow (1-\pi\theta) - (1+\pi)\theta < -\theta^2 - \pi\theta^2 + 1 - \pi\theta + \theta - \theta$

$\Leftrightarrow \frac{(1-\pi\theta)-(1+\pi)\theta}{\theta^2} < \frac{(1+\theta)-\theta(1+\theta)-\pi\theta(1+\theta)}{\theta^2}$

$\Leftrightarrow \frac{(1-\pi\theta)W_L}{\theta^2}((1-\pi\theta) - (1+\pi)\theta) < \frac{(1-\pi\theta)W_L(1+\theta)}{\theta(1-\pi)} \frac{(1-\pi)}{\theta}(1-\theta-\pi\theta)$

Con base en el supuesto (11) se puede sustituir $\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta}$ por D_1 y se seguirá cumpliendo la desigualdad.

$\frac{(1-\pi\theta)W_L}{\theta^2}\left((1-\pi\theta)-(1+\pi)\theta\right)<D_1\frac{(1-\pi)}{\theta}\left(1-\theta-\pi\theta\right)$
$\Leftrightarrow\frac{(1-\pi\theta)W_L}{\theta^2}\left(1-\pi\theta\right)-\frac{(1-\pi\theta)W_L}{\theta^2}\left(1+\pi\right)\theta<D_1\frac{(1-\pi)}{\theta}\left(1-\pi\theta\right)-D_1\frac{(1-\pi)}{\theta}\theta$
$\Leftrightarrow 4W_L\frac{(1-\pi\theta)W_L}{\theta^2}\left(1-\pi\theta\right)-4W_L\frac{(1-\pi\theta)W_L}{\theta}\left(1+\pi\right)<4W_LD_1\frac{(1-\pi)}{\theta}\left(1-\pi\theta\right)-4W_LD_1\left(1-\pi\right)$
$\Leftrightarrow\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2+4W_L^2\frac{(1-\pi\theta)^2}{\theta^2}-4W_L\frac{(1-\pi\theta)W_L}{\theta}\left(1+\pi\right)$
$<\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2+4W_LD_1\frac{(1-\pi)}{\theta}\left(1-\pi\theta\right)-4W_LD_1\left(1-\pi\right)$
$\Leftrightarrow\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2+4W_L^2\frac{(1-\pi\theta)^2}{\theta^2}$
$-4W_L\frac{(1-\pi\theta)}{\theta}\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]$
$<\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4W_LD_1\left(1-\pi\right)$
$\Leftrightarrow\left(\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]-2W_L\frac{(1-\pi\theta)}{\theta}\right)^2<\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4W_LD_1\left(1-\pi\right)$
$\Leftrightarrow\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]-2W_L\frac{(1-\pi\theta)}{\theta}$
$<\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4W_LD_1\left(1-\pi\right)}$
$\Leftrightarrow\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]$
$-\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4W_LD_1\left(1-\pi\right)}$
$<2W_L\frac{(1-\pi\theta)}{\theta}$
$\Leftrightarrow\frac{\left[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1\right]-\sqrt{\left[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1\right]^2-4W_LD_1(1-\pi)}}{2(1-\pi)}<W_L\frac{(1-\pi\theta)}{\theta(1-\pi)}.$
En la ecuación (15) se encuentra que:
$\frac{\left[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1\right]-\sqrt{\left[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1\right]^2-4W_LD_1(1-\pi)}}{2(1-\pi)}=X_1^a$
$\Rightarrow X_1^a<W_L\frac{(1-\pi\theta)}{\theta(1-\pi)}$
$\Leftrightarrow -W_L\frac{1}{\theta(1-\pi)}\left((1-\pi\theta)\left((1+\theta)-\theta\right)\right)<-X_1^a$
$\Leftrightarrow -W_L\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)}{\theta(1-\pi)}+W_L\frac{(1-\pi\theta)}{(1-\pi)}<-X_1^a$
$\Leftrightarrow W_L\frac{(1-\pi\theta)}{(1-\pi)}<W_L\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)}{\theta(1-\pi)}-X_1^a.$
De nuevo se utiliza el supuesto (17) para sustituir $\frac{(1-\pi\theta)(1+\theta)W_L}{(1-\pi)\theta}$ por D_1
$W_L\frac{(1-\pi\theta)}{(1-\pi)}<D_1-X_1^a.$

Por demostrar que $X_1^b>D_1$

$X_1^b>D_1$
$\Leftrightarrow\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi\right)W_LD_1}>$
$2\left(1-\pi\right)D_1-\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right].$
Se analiza el signo de $\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi\right)W_LD_1$
$\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi\right)W_LD_1=$

$(1-\pi)^2 D_1^2 + (1+\pi)^2 W_L^2 + 2D_1 W_L (1+\pi)(1-\pi) - 4D_1 W_L (1-\pi) =$
$(1-\pi)^2 D_1^2 + (1+\pi)^2 W_L^2 - 2D_1 W_L (1-\pi)^2 =$
$(1+\pi)^2 W_L^2 + D_1 (1-\pi)^2 (D_1 - 2W_L),$
con base en la condición (11) se sustituye D_1 por $\frac{W_L(1+\theta)(1-\pi\theta)}{(1-\pi)\theta}$
$(1+\pi)^2 W_L^2 + D_1 (1-\pi)^2 \left(\frac{W_L(1+\theta)(1-\pi\theta)}{(1-\pi)\theta} - 2W_L\right) > 0$
$\Rightarrow (1+\pi)^2 W_L^2 + D_1 (1-\pi)^2 (D_1 - 2W_L) > 0$
$W_L \left(\frac{(1+\theta)(1-\pi\theta)}{(1-\pi)\theta} - 2\right) > 0 \Leftrightarrow (1+\theta)(1-\pi\theta) > 2(1-\pi)\theta$
$\Leftrightarrow 1 + \theta - \pi\theta - \pi\theta^2 > 2\theta - 2\pi\theta \Leftrightarrow$
$1 - \theta + \pi\theta - \pi\theta^2 > 0 \Leftrightarrow (1-\theta)(1+\pi\theta) > 0.$
Por lo tanto se puede asegurar que:
$[W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]^2 - 4(1-\pi) W_L D_1 > 0.$
Volviendo a la desigualdad
$\sqrt{[W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]^2 - 4(1-\pi) W_L D_1} >$
$2(1-\pi) D_1 + [W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1].$

Ya se mostró que el L.I. es positivo, entonces si el L.D. fuera negativo $X_1^b > D_1$, se verá ahora el caso en el que L.D. es positivo.

$\sqrt{[W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]^2 - 4(1-\pi) W_L D_1} >$
$2(1-\pi) D_1 - [W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1] \Leftrightarrow$
$[W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]^2 - 4(1-\pi) W_L D_1 >^2$
$\{2(1-\pi) D_1 - [W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]\}^2 \Leftrightarrow$
$[W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]^2 - 4(1-\pi) W_L D_1 >$
$4(1-\pi)^2 D_1^2 + [W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]^2 -$
$4(1-\pi) D_1 [W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1] \Leftrightarrow$
$-4(1-\pi) W_L D_1 >$
$4(1-\pi)^2 D_1^2 - 4(1-\pi) D_1 [W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1] \Leftrightarrow$
$-4(1-\pi) D_1 \pi W_L < 0.$

Por demostrar que $X_1^a < D_1$

$X_1^a = \frac{[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1] - \sqrt{[W_L(1+\pi)+(1-\pi)D_1]^2 - 4(1-\pi)W_L D_1}}{2(1-\pi)} < D_1 \Leftrightarrow$
$\sqrt{[W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1]^2 - 4(1-\pi) W_L D_1} >$
$-2(1-\pi) D_1 + [W_L (1+\pi) + (1-\pi) D_1].$

El L.I es positivo (como se comprobó en la demostración pasada); si L.D. es negativo $X_1^a < D_1$. Ahora se analiza el caso en que el L.D. es positivo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi\right)W_LD_1} > \\
&-2\left(1-\pi\right)D_1+\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right] \Leftrightarrow \\
&-2\left(1-\pi\right)D_1+\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right] \Leftrightarrow \\
&\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi\right)W_LD_1 > \\
&\left\{-2\left(1-\pi\right)D_1+\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]\right\}^2 \Leftrightarrow \\
&\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2-4\left(1-\pi\right)W_LD_1 > \\
&4\left(1-\pi\right)^2D_1^2+\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right]^2- \\
&4\left(1-\pi\right)D_1\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right] \Leftrightarrow \\
&-4\left(1-\pi\right)W_LD_1 > \\
&4\left(1-\pi\right)^2D_1^2-4\left(1-\pi\right)D_1\left[W_L\left(1+\pi\right)+\left(1-\pi\right)D_1\right] \Leftrightarrow \\
&-4\left(1-\pi\right)\pi W_LD_1 < 0.
\end{aligned}$$

Apéndice 2.B Semejanza con el modelo de Bulow y Rogoff

Independientemente del supuesto de recompra pequeña, se coincide con el artículo de Bulow y Rogoff. Para mostrarlo, se retoma la desigualdad (6) del artículo de estos autores la cual indica cuándo la recompra perjudica al país:

$$1-q\left[1-v'\left(D\right)\right] > \tfrac{Dv'(D)}{v(D)},$$

que es equivalente a:

$$1-\theta\left[1-\tfrac{\partial V(D)}{\partial D}\right] > \tfrac{D\frac{\partial V(D)}{\partial D}}{V(D)},$$

utilizando el caso intermedio ($\theta W_L \leq D < \theta W_H$) de la ecuación (1) se encuentra que:

$$\begin{aligned}
&V\left(D\right)=\left(1-\pi\right)D+\pi\theta W_L, \tfrac{\partial V(D)}{\partial D}=\left(1-\pi\right) \\
&\Rightarrow 1-\theta\left[1-\tfrac{\partial V(D)}{\partial D}\right] > \tfrac{D\frac{\partial V(D)}{\partial D}}{V(D)} \Leftrightarrow 1-\theta\left[1-\left(1-\pi\right)\right] > \tfrac{D(1-\pi)}{(1-\pi)D+\pi\theta W_L} \\
&\Leftrightarrow D < W_L\left(1-\pi\theta\right)/\left(1-\pi\right).
\end{aligned}$$

De esta manera se obtiene la segunda desigualdad de la proposición 1 que resulta de separar (7), pero con signo invertido debido a que en Bulow y Rogoff la condición (6) se cumple cuando la recompra perjudica al país, mientras que la condición (7) del presente artculo nos indica cuándo conviene la recompra. De esta manera, se encuentra que el modelo de Bulow y Rogoff y el modelo aquí desarrollado evalúan de manera similiar la conveniencia de la recompra.

Apéndice 2.C Resultados del periodo final

Este apéndice es un resumen de la proposición 1.

Caso A usando las ecuaciones (6) y (7):

$V^R(D_2) = V(D_2 - X_2^*) + C_2$
$= (1-\pi)(D_2 - X_2^*) + \pi\theta(W_L - C_2) + C_2 = C_2 = P_2 X_2^* = W_L$

Caso B
$\Rightarrow V^R(D_2) = V(D_2 - X_2^*) + C_2 =$
$(1-\pi)(D_2 - X_2) + \pi\theta(W_L - C_2) + C_2 = C_2 = P_2 X_2^* = W_L$

Caso C

$V(D_2) = (1-\pi) D_2 + \pi\theta W_L$
$Y_2 \leq 0 \Rightarrow V_2^R(D_2) = (1-\pi) D_2 + \pi\theta W_L$

Caso D

$V^R(D_2) = (1-\pi)\theta W_H + \pi\theta W_L$

Caso E

$V^R(D_2) = D_2$

Apéndice 2.D Supuesto $D_1 - X_1 > \theta(W_H - C_1)$ no necesario

En el periodo inicial se adopta el supuesto $D_1 - X_1 > \theta(W_H - C_1)$, por lo tanto

$V_1(D_1 - X_1) = (1-\pi)\theta(W_H - C_1) + \pi\theta(W_L - C_1)$

$+ (1-\pi) V^R (D_1 - \theta (W_L - C_1)) + \pi V^R (D_1 - \theta (W_H - C_1))$,

sin embargo, ahora que se abandona el supuesto, se adopta la ecuación más general:

$V_1 (D_1 - X_1) = V (D_1 - X_1) + (1-\pi) V^R (D_2 \mid W_1 = W_H) +$
$\pi V^R (D_2 \mid W_1 = W_L)$,

donde de manera similar al periodo final

$$V (D_1 - X_1) = \begin{cases} D_1 - X_1 & D_1 - X_1 \leq \theta (W_L - C_1) < \theta (W_H - C_1) \\ (1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi\theta (W_L - C_1) & \theta (W_L - C_1) \leq D_1 - X_1 < \theta (W_H - C_1) \\ (1-\pi)\theta (W_H - C_1) + \pi\theta (W_L - C_1) & \theta (W_L - C_1) < \theta (W_H - C_1) \leq D_1 - X_1. \end{cases}$$

En este apéndice se muestra que los resultados se mantienen. Las dos maneras como se puede salir del supuesto $D_1 - X_1 > \theta (W_H - C_1)$ son:

$$\theta (W_H - C_1) > D_1 - X_1 > \theta (W_L - C_1), \tag{32}$$

$$\theta (W_L - C_1) > D_1 - X_1. \tag{33}$$

Las ecuaciones (32) y (33) serán analizadas por separado con las condiciones (22), (26) y (27), resultando seis combinaciones.

Combinación 1: (32) y (22)

Partiendo de (35) y (2)

$V (D_1 - X_1) = (1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi\theta (W_L - C_1)$

con base en las ecuaciones (22) y (32) se está en el caso A

$V^R (D_2 \mid W_1 = W_L) = W_L$

Por otro lado si ocurre W_H , debido a (32) en el periodo uno se pagará toda la deuda en ese mismo periodo, por lo tanto:

$V^R (D_2 \mid W_1 = W_H) = 0$

$\Rightarrow V_1 (D_1 - X_1) = (1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi\theta (W_L - C_1) + \pi W_L$

Obsérvese que $V_1 (D_1 - X_1)$ es idéntico al que se obtiene en la demostración de la proposición 3 donde se encuentra que existe una X_1 tal que $Y > 0$ y en el escenario dos (25) con el supuesto (22), en consecuencia los resultados serán los mismos.

Combinación 2: (22) y (33)

Esta combinación es imposible ya que según (22)

$D_1 - X_1 - \theta (W_L - C_1) > 0$

y la condición (33) establece que $D_1 - X_1 - \theta (W_L - C_1) < 0$

Combinación 3: (26) y (32)

Partiendo de (32) y (2):

$V (D_1 - X_1) = (1 - \pi) (D_1 - X_1) + \pi\theta (W_L - C_1)$

por la ecuación (26) se está en el caso E

$V^R (D_2 \mid W_1 = W_L) = D_1 - X_1 - \theta (W_L - C_1)$

Por otro lado, si ocurre W_H , debido a (35) en el periodo uno se pagará toda la deuda en ese mismo periodo, por lo tanto:

$V^R (D_2 \mid W_1 = W_H) = 0$

$\Rightarrow V_1 (D_1 - X_1) = D_1 - X_1.$

Obsérvese que $V_1 (D_1 - X_1)$ es idéntico al que se obtiene en la demostración de la proposición 3 en los escenarios uno (24) y dos (25) con el supuesto (26), en consecuencia los resultados serán los mismos.

Combinación 4: (26) y (33)

Partiendo de (33) y (2)

$V (D_1 - X_1) = D_1 - X_1$

Con base en (33) en el periodo inicial se pagará toda la deuda, por lo tanto:

$V^R (D_2 \mid W_1 = W_H) = 0$

$V^R (D_2 \mid W_1 = W_L) = 0$

$\Rightarrow V_1 (D_1 - X_1) = D_1 - X_1,$

obsérvese de nuevo que $V_1 (D_1 - X_1)$ es idéntico al que se obtiene en la demostración de la proposición 3 en los escenarios uno (24) y dos (25) con el supuesto (26), en consecuencia los resultados serán los mismos.

Combinación 5: (27) y (32)

Partiendo de (32)

$V (D_1 - X_1) = (1 - \pi) (D_1 - X_1) + \pi\theta (W_L - C_1)$

por las ecuaciones (32) y (27) se está en el caso C, por lo tanto:

$V^R(D_2 \mid W_1 = W_L) = (1-\pi)((D_1 - X_1) - \theta(W_L - C_1)) + \pi\theta W_L$

Por otro lado, si ocurre W_H , con base en (32) en el periodo uno se pagará toda la deuda en ese mismo periodo, por lo tanto:

$V^R(D_2 \mid W_1 = W_H) = 0$

$\Rightarrow V_1(D_1 - X_1) = (1-\pi)(D_1 - X_1) + \pi\theta(W_L - C_1)$

$+\pi((1-\pi)((D_1 - X_1) - \theta(W_L - C_1)) + \pi\theta W_L)$

$= (1-\pi^2)(D_1 - X_1) + 2\pi^2\theta W_L - \pi^2\theta C_1.$

Obsérvese que $V_1(D_1 - X_1)$ es idéntico al que se obtiene en la demostración de la proposición 3 en los escenarios uno (24) y dos (25) con el supuesto (27), en consecuencia los resultados serán los mismos.

Combinación 6: (27) y (33)

Esta combinación es imposible ya que según (27),

$D_1 - X_1 - \theta(W_L - C_1) > 0$

y la condición (33) establece que $D_1 - X_1 - \theta(W_L - C_1) < 0$.

Artículo 3

Deuda soberana y tasas impositivas con dos sectores

Resumen

Este artículo analiza la relación entre la deuda soberana y las tasas impositivas. Con este objeto, se presenta un modelo de una economía con dos sectores que difieren en su vulnerabilidad frente al suceso del impago de deuda soberana. En este modelo la motivación para pagar la deuda se explica por la existencia del costo sufrido por la economía doméstica en caso de impago. Se encuentra que un gobierno que maximiza su utilidad gastando lo más posible tiende a fijar menos impuestos al sector más vulnerable; además, ejerce menos presión fiscal a los dos sectores productivos cuando la recaudación esperada del siguiente gobierno es baja.

3.1 Introducción

El presente trabajo estudia la interacción entre la deuda soberana y las tasas impositivas, para esto se desarrolla un modelo con base en el de Acharya y Rajan (2013), estos autores definen en su modelo a un gobierno miope al que solo le interesa gastar lo más posible en su mandato y no se preocupa por los periodos futuros; por lo tanto, le interesa obtener la mayor deuda posible para así maximizar su gasto.

En su modelo, el gobierno miope se ve forzado a tomar en cuenta el periodo del gobierno siguiente, no porque le importe si le irá bien o mal, sino porque el siguiente periodo restringe el monto de su préstamo de dos maneras. En primer lugar, si los acreedores esperan que en el segundo periodo se recauden pocos impuestos, no estarán dispuestos a otorgar un gran préstamo ya que será muy probable que no les puedan pagar; a esta restricción se le llama de "habilidad para pagar". En segundo lugar, los acreedores también saben que existirá una restricción de voluntad para pagar, en esta restricción entra en juego el costo generado para la economía nacional derivado de un impago de la deuda. Se considera que, si este costo es menor al monto mismo de la deuda, el gobierno del segundo periodo preferirá no pagar sus obligaciones, lo que limita el monto que los acreedores potenciales están dispuestos a prestar. Este modelo da una posible explicación de por qué se paga la deuda soberana aun cuando el costo para su economía es bajo.

Este trabajo confirma los resultados de Acharya y Rajan (2013) y extiende el radio de análisis preguntándose: ¿qué tasas impositivas fijaría un gobierno miope? Considerando que los sectores productivos de su economía no son homogéneos, la diferencia entre los dos sectores productivos es que son afectados en diferente grado por el impago de la deuda. Esta diferenciación es la variación más importante con respecto al modelo de Acharya y Rajan y da pie al análisis de la interacción entre las tasas impositivas y la deuda. En este análisis se está suponiendo que se pueden fijar tasas impositivas diferentes para distintos sectores de la economía. No siempre es posible hacer esto directamente en la práctica; sin embargo, sí es posible dar un tratamiento distinto a los sectores, por ejemplo, mediante subvenciones, de esta manera se obtienen tasas impositivas efectivas distintas.

Se encuentra que un gobierno miope fija impuestos mayores al sector de la economía menos vulnerable frente a un impago y menores al más vulnerable. Además, fija impuestos más elevados cuando la recaudación esperada del segundo periodo es más alta que el costo por impago, en comparación al escenario en el que el costo es mayor que la recaudación.

Acharya y Rajan (2013) definen al gobierno miope como un gobierno al que no le importa el destino del país en los siguientes gobiernos, solo le importa su periodo. Sin embargo, podría abordarse este modelo bajo otro enfoque: el comportamiento de este gobierno puede obedecer a una necesidad imperante de gastar en el presente debido a una gran crisis, es decir, es posible que al gobierno sí le importe el futuro y la suerte de su nación en los siguientes gobiernos, pero dada la necesidad de afrontar una crisis en el presente se vea forzado a aumentar extraordinariamente el gasto con el objetivo de cubrir las necesidades de su población. En general, es importante encontrar las decisiones óptimas que conduzcan a maximizar el bienestar de una sociedad. En este sentido, encontrar cuáles son la tasas impositivas que mejoran la situación de un país tiene un valor. Sin embargo, con este enfoque el análisis se torna más relevante porque ya no se restringe a gobiernos miopes, sino que hace referencia a situaciones críticas en las cuales los gobiernos se ven forzados por una crisis a priorizar el presente, escenario que resulta muy presente y tangible en el 2020, año que será recordado por su crisis económica agravada por la pandemia del COVID-19, donde precisamente los gobiernos se han visto forzados a hacer gastos extraordinarios para atender la situación.

Este artículo se ubica dentro de la literatura sobre la deuda soberana donde una de las principales preguntas es: ¿por qué los países pagan sus deudas externas? Se ha generado un abanico diverso de artículos explorando las respuestas. Una de las primeras respuestas la dieron Eaton y Gersovitz (1981) al sostener que los paíse pagan para mantener una reputación en el mercado crediticio y así poder acceder a nuevos préstamos. Después, dos artículos base que enriquecieron la discusión son los de Bulow y Rogoff (1989) y Krugman (1988), donde se sostiene que la capacidad que tienen los acreedores para embargar activos del país deudor explica el pago de la deuda externa. En específico, Bulow y Rogoff afirman que la motivacion principal para pagar es la amenaza de sanciones que restringen la libertad del país en los mercados financieros y de bienes.

Acharya y Rajan (2013) encuentran una respuesta alternativa. Afirman que la razón última por la cual se paga la deuda es para evitar el costo económico derivado de una crisis financiera doméstica que se generaría debido a un impago, es decir, sostienen que parte de la explicación del pago es la existencia de un costo para la economía doméstica debido al impago de la deuda. En el modelo de Acharya y Rajan existen dos periodos de gobierno. En el primero, la exclusión del mercado financiero y el embargo juegan un papel en la explicación del pago de la deuda adquirida en un periodo anterior. Sin embargo, en el segundo y último periodo del modelo la única motivación para pagar la deuda externa es evitar el costo para la economía doméstica, ya que en este segundo periodo la exclusión del mercado financiero es irrelevante debido a que en este periodo no se realizan más préstamos.

En la misma línea, Gennaioli, Martin y Rossi (2018) en un análisis de veinte casos de impago de deuda soberana, concuerdan con que el impago de la deuda soberana tiene un impacto negativo en los bancos domésticos. El debate acerca de qué explica el pago de la deuda sigue en pie, lo más probable es que la explicación no venga de una sola fuente o fenómeno, incluso habrá que reconsiderar respuestas que fueron descartadas. Por ejemplo, Cruces y Trebesch (2013) sostienen que si se estudia al impago tomando en cuenta su magnitud en vez de considerarlo como una variable binaria, existe un castigo por él, consistente en la exclusión del mercado.

En el modelo de Acharya y Rajan (2013) el costo de no pagar la deuda a extranjeros depende del supuesto de que no se puede discriminar entre acreedores domésticos y extranjeros al momento de pagar la deuda; en otras palabras, es inevitable que la afectación sea la misma para el conjunto de acreedores. Por lo tanto, el impago perjudica al sector financiero del país deudor produciendo un costo, para evitarlo este país opta por pagarle a todos incluyendo los extranjeros. Al respecto, Broner, Martin y Ventura (2010) señalan que la dificultad para discriminar entre acreedores se explica por la existencia de un mercado secundario donde los activos pueden ser vendidos.

Con respecto al modelo de Acharya y Rajan (2013), una diferencia del modelo que aquí se desarrolla es la existencia de dos sectores de la economía distintos, donde uno es más vulnerable al impago que otro. En su artículo, estos autores señalan al sector financiero como elemento principal para explicar el costo del default, incluso describen al costo económico derivado del impago de la deuda como las afectaciones negativas al sector financiero y las consecuencias de esta debacle financiera sobre el conjunto de la economía. De ahí surge la idea de modelar dos sectores, uno que sería gravemente perjudicado en sus ingresos en caso de impago, este sector en concreto podria ser el financiero. El otro sector sería poco afectado por el impago y se puede pensar en él como el sector no ligado al financiero. La propuesta de los dos sectores también está inspirada en Goldberg y Spiegel (1992), donde se supone la existencia de dos sectores; sin embargo, ellos los diferencian por la posibilidad de ser incautados o expropiados en caso de impago.

En la búsqueda de explicaciones al pago de la deuda externa se encuentran quienes adoptan un enfoque político, como lo hacen Borensztein y Panizza (2009) en un análisis empírico donde resaltan la relevancia del costo político del impago. De manera distinta, pero también invocando a razones políticas, Amador (2004) encuentra que la incertidumbre política puede ser un elemento de explicación del pago de la deuda externa.

La literatura sobre deuda soberana no se circunscribe a la explicación del pago de la deuda, por ejemplo, Baglioni (2015) parte de un modelo de deuda soberana para estudiar bajo qué condiciones conviene una recompra de ella.

3.2 Modelo

Existen dos periodos en el modelo, cada periodo corresponde a mandatos distintos, por ejemplo, puede considerarse que tienen duración de seis o cuatro años si se piensa en países con cambios de gobierno en estos plazos. El gobierno del periodo uno inicia con dos variables ya definidas: la dotación inicial del sector privado disponible para invertirse E y la deuda adquirida por el gobierno anterior D_0. Esta deuda tiene por acreedores solo a extranjeros. Las funciones de producción de los periodos uno y dos son $f(k)$ y $f_2(k)$. Ambas funciones dependen de la inversión del primer periodo k, en el periodo final ya no se invierte, además, sus primeras derivadas son positivas y las segundas negativas con respecto a k. Existe una lógica económica en la relación positiva entre la inversión y la producción, puesto que es de esperarse que entre más se invierta mayor será la producción. En este contexto, el gobierno fija las tasas impositivas del primer periodo s y t, que corresponden a los dos sectores de la economía contemplados en el modelo. Estos sectores se distinguen entre sí por su vulnerabilidad ante un impago de la deuda, siendo s la tasa impositiva del sector fuerte y t la del sector débil.

En este modelo se analizan escenarios donde sí conviene pagar la deuda heredada D_0. Si se decidiera no pagar, la resolución de modelo sería simple, puesto que no habría más préstamos. Debido a que el gobierno del primer periodo sí paga D_0, puede adquirir una deuda D_1 que hereda al gobierno del segundo periodo. Esta deuda tiene acreedores domésticos y extranjeros. La inversión en cada uno de los sectores $k(s)$ y $k(t)$ depende de las tasas impositivas. La primera y segunda derivada de la función k son negativas con respecto a la tasa impositiva.

La relación negativa entre la inversión y la tasa impositiva describe un comportamiento en el cual un aumento de los impuestos desincentiva la inversión.

El gobierno del periodo uno maximiza los recursos disponibles para gastar en su periodo, puesto que se supone que el gobierno es miope, lo que significa que no le importa lo que pase después de su mandato, solo quiere gastar lo más posible para congraciarse con la población de su país. Con base en esto decidirá si lo más conveniente es pagar la deuda o no. La motivación de pagar la deuda heredada D_0 reside en que al hacerlo se accede a un nuevo préstamo D_1 en el periodo uno, sin embargo, este nuevo préstamo está limitado por dos restricciones: la restricción de habilidad para pagar y la restricción de voluntad para pagar.

1) Restricción de habilidad para pagar. Los potenciales acreedores no prestarán más de lo que el gobierno del segundo periodo pueda pagar; por lo tanto, la deuda D_1 debe ser menor o igual al valor en el periodo uno de la recaudación fiscal del gobierno del periodo dos, como lo expresa la siguiente ecuación:

$$D_1 \leq cf_2\left(k\left(s\right)\right) + cf_2\left(k\left(t\right)\right), \tag{1}$$

donde c es la tasa de impuestos máxima en el periodo dos t^{max} (para ambos sectores) dividida entre uno más la tasa de interés r, la división entre $1+r$ tiene por propósito obtener el valor de la recaudación del segundo periodo en el primero. Suponemos que el gobierno del segundo periodo no puede pedir préstamos y sigue siendo miope, por lo tanto, fijará una tasa máxima t^{max}, Por simplicidad de la notación se utiliza $c = t^{max}/(1+r)$. El lado derecho de esta desigualdad es el valor en el periodo uno de la recaudación fiscal del periodo dos, donde las funciones de producción están en función de $k\left(s\right)$ y $k\left(t\right)$. Se subraya que se adopta el supuesto de que la inversión del sector privado $k(s)$ y $k(t)$ se decide en el periodo uno y ya no se vuelve a invertir en el periodo dos; por lo tanto, la función de producción del segundo periodo f_2 también está en función del la inversión que se hizo en el periodo uno. Para futuras referencias definimos la parte derecha de la restricción de habilidad para pagar como:

$$A\left(s,t\right) = cf_2\left(k\left(s\right)\right) + cf_2\left(k\left(t\right)\right). \tag{2}$$

2) Restricción de voluntad para pagar. El sector privado se modela por medio de una empresa representativa de cada sector. En ambos, la empresa invierte en la produccion con base en la función k, que es decreciente con respecto a la tasa impositiva, es decir, si los impuestos aumentan, la inversión disminuye. La parte de los recursos que las empresas no invierten en la produccion $E - k(s) - k(t)$ representa el ahorro que se invierte en bonos del gobierno. A diferencia de la deuda heredada D_0 que solamente tiene acreedores extranjeros, la nueva deuda en el periodo uno D_1 tiene por acreedores a extranjeros y nacionales, los montos de la deuda que corresponden a extranjeros y nacionales son D_1^{For} y D_1^{Dom} respectivamente.

La deuda doméstica D_1^{Dom} es igual al ahorro $E - k(s) - k(t)$, éste es un elemento clave en el modelo, puesto que genera un costo para el gobierno cuando no se paga la deuda D_1^{Dom}, este costo se explica por una afectación negativa a la economía nacional vía el sector financiero y se modela con el parámetro z, de esta manera definimos el costo del impago como $z(E - \lambda k(s) - (2 - \lambda) k(t))$, donde z es el parámetro del costo del impago, este parámetro es positivo y entre mayor sea mayor será el costo por impago, λ es el parámetro de diferencia entre los sectores, sus valores van de uno a dos y entre mayor sea, más fuerte es un sector ante el impago en comparación al otro, cuando λ es igual a uno, ambos sectores son igual de vulnerables frente al impago de la deuda, por lo tanto, el modelo sería similar al de Acharya y Rajan (2013).

Tabla 1. Línea de tiempo del modelo.

	Periodo 1	Periodo 2
Cada gobierno inicia con:	▪ Deuda heredada D_0 ▪ Recursos del sector privado E	▪ Deuda heredada D_1 ▪ Inversión en bonos de gobierno E - $k(s)$ - $k(t)$
Cada gobierno decide:	▪ Nivel de impuestos s y t	▪ Pagar o no D_1 ▪ Nivel de impuestos t^{max}
Se definen:	▪ Nueva deuda D_1 ▪ Inversión $k(s)$ y $k(t)$ ▪ Producción del periodo 1 $f(k(s))$ y $f(k(t))$ ▪ Producción del periodo 2 $f_2(k(s))$ y $f_2(k(t))$	

En la tabla 1 se resume la dinámica del modelo, como se ha establecido, el gobierno miope inicia con una deuda D_0 y los recursos del sector privado E. Se está suponiendo que este gobierno es capaz de predecir la inversión de las empresas k e integrar esta información en sus decisiones para determinar t y s. El gobierno del segundo periodo pagará la deuda heredada D_1 solo si el costo debido al impago es mayor que la deuda $D_1(1+r) \leq z(E - \lambda k(s) - (2-\lambda)k(t))(1+r)$, se multiplican ambos lados de la desigualdad por uno más la tasa de interés para obtener los valores en el periodo dos, sin embargo, se simplifica y define la restricción de voluntad para pagar como:

$$D_1 \leq zE - z\lambda k(s) - z(2-\lambda)k(t). \tag{3}$$

El lado derecho de la restricción de voluntad para pagar (3) representa el costo para el gobierno si no se paga la deuda, el cual debe ser mayor a cero, ya que de lo contrario, no existiría costo para la economía nacional, por lo tanto $zE - z(2-\lambda)k(t) - z\lambda k(s) > 0$. Para el desarrollo del modelo se define la parte derecha de la restricción de voluntad de pagar como:

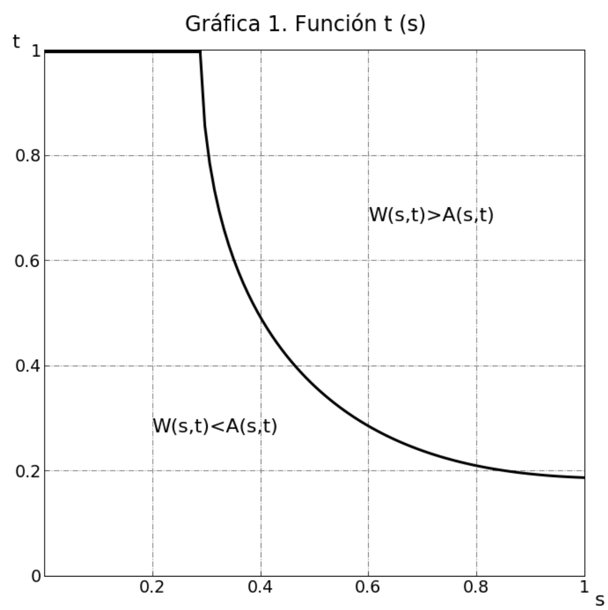
$$W(s,t) = zE - z\lambda k(s) - z(2-\lambda)k(t). \tag{4}$$

El hecho de que el gobierno del periodo dos tenga los recursos para pagar no garantiza que pague, para esto también debe de tener la voluntad para pagar, es importante remarcar que la explicación del pago a extranjeros no proviene del posible castigo de perder el acceso a créditos, ya que en el modelo se supone que en el periodo dos no hay préstamos, es en este punto donde el costo del impago para la economía nacional se revela como la explicación del porqué se pagan las deudas soberanas.

Proposición 1. Para cada s existe un valor $t(s)$, decreciente en s, tal que si $t > t(s)$ solo se satura la restricción de habilidad para pagar $W(s,t) > A(s,t)$. Contrariamente, si $t < t(s)$ solo se saturará la restricción de voluntad para pagar $W(s,t) < A(s,t)$. La función $t(s)$ se define de la siguiente manera:

$$t(s) = \begin{cases} 1 & si\ \exists\, \overline{s} \mid g(\overline{s}) = 1\ y\ s \leq \overline{s} \\ 0 & si\ \exists\, \underline{s} \mid g(\underline{s}) = 0\ y\ s \geq \underline{s} \\ g(s) & en\, otro\, caso. \end{cases}$$

Donde $g(s)$ es la función que calcula la t necesaria para igualar las dos restricciones dada una s, es decir, siempre se cumple que $W(s, g(s)) = A(s, g(s))$. De esta manera, se definen dos regiones. En una la restricción menor, y por lo tanto la que se activa, es la de voluntad para pagar, es decir $W(s,t) < A(s,t)$. En la otra región la restrición menor es la de habilidad para pagar y por lo tanto $W(s,t) > A(s,t)$. En la gráfica 1, con s y t en los ejes, se puede observar la función $t(s)$ que divide las dos regiones y forma una línea decreciente[1].



Con base en las restricciones planteadas el gobierno maximiza su utilidad. Este es caracterizado como miope, por lo tanto, entre mayor sea su gasto, mayor será su utilidad. Para esto busca obtener el préstamo más grande posible, como se observa en la función objetivo (5), que son los ingresos que tendrá el gobierno en el periodo uno, los ingresos son la suma del préstamo D_1 y la recaudación fiscal en ambos sectores de la economía $sf(k(s)) + tf(k(t))$:

[1] La gráfica 1 se construye a partir de los mismos valores de la gráfica 8 del ejercicio numérico 2 ubicado en el apéndice 3.A.

$$D_1 + sf\left(k\left(s\right)\right) + tf\left(k\left(t\right)\right). \tag{5}$$

En un primer momento se supondrá que solo existe la restricción de habilidad para pagar; posteriormente se supondrá que solo se satura la restricción de voluntad para pagar. Estos dos escenarios dan origen a las proposiciones 2 y 3 respectivamente y, posteriormente, serán la base de la proposición 4. Suponiendo que solo existe la restricción de habilidad para pagar (1), al maximizar se elige un nivel de deuda tal que se sature esta restricción, obteniendo que $D_1 = A\left(s,t\right) = cf_2\left(k\left(s\right)\right) + cf_2\left(k\left(t\right)\right)$. Sustituyendo en la función objetivo (5) el problema de maximización es el siguiente[2]:

$$\max_{t,s}\ cf_2\left(k\left(s\right)\right) + cf_2\left(k\left(t\right)\right) + sf\left(k\left(s\right)\right) + tf\left(k\left(t\right)\right). \tag{6}$$

Lo que el gobierno está maximizando es la recaudación de impuestos en los dos periodos, ya que la deuda se iguala al valor actual de la recaudación del siguiente gobierno. Al plantear el problema de esta manera, se dan las condiciones para que los potenciales acreedores presten, ya que se está garantizando que el siguiente gobierno tendrá los recursos para pagar. Se denota s^A y t^A a las tasas de impuestos que resuelven el problema de maximización (6) y, por lo tanto, satisfacen las siguientes condiciones de primer orden:

$$cf_2'\left(k\right)k'\left(s^A\right) + s^A f'\left(k\right)k'\left(s^A\right) + f\left(k\left(s^A\right)\right) = 0, \tag{7}$$

$$cf_2'\left(k\right)k'\left(t^A\right) + t^A f'\left(k\right)k'\left(t^A\right) + f\left(k\left(t^A\right)\right) = 0. \tag{8}$$

Proposición 2. Si solo existe la restricción de habilidad para pagar, las tasas de impuestos t^A y s^A son iguales entre sí y no son afectadas por la dotación inicial E, por el parámetro de costo del impago z ni por el parámetro de diferencia entre los sectores λ.

Por su parte, si se supone que solo existe la restricción de voluntad para pagar (3), al maximizar (5) ésta se saturará, por lo tanto $D_1 = W\left(s,t\right) = zE - z\left(2-\lambda\right)k\left(t\right) - z\lambda k\left(s\right)$, sustituyendo la deuda D_1 en la función objetivo (5) el problema de maximización del gobierno

[2]Se supone que (6) es función estríctamente cóncava.

del primer periodo es el siguiente[3]:

$$\max_{t,s}\; zE - z\lambda k\left(s\right) - z\left(2-\lambda\right)k\left(t\right) + sf\left(k\left(s\right)\right) + tf\left(k\left(t\right)\right). \tag{9}$$

En este caso no se considera cuánto es capaz de pagar o recaudar el gobierno del periodo dos; sin embargo, así como en el caso anterior, el gobierno del periodo uno busca maximizar su gasto, pero ahora debe tomar en cuenta que si baja los impuestos, aumentará la inversión y caerá el ahorro doméstico. En consecuencia caerá el costo del impago y la voluntad de pagar el gobierno del periodo dos, reduciendo así el monto que los acreedores están dispuestos a prestar. Simultáneamente, la reducción de las tasas impositivas genera otro efecto en sentido contrario, ya que esta reducción aumenta la producción y la recaudación. Se denota t^W y s^W a las tasas de impuestos que resuelven la maximización (9). Por lo tanto, las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$-z\lambda k'\left(s^W\right) + s^W f'\left(k\right)k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right) = 0, \tag{10}$$

$$-z\left(2-\lambda\right)k'\left(t^W\right) + t^W f'\left(k\right)k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) = 0. \tag{11}$$

Proposición 3. Si solo existe la restricción de voluntad para pagar, s^W es mayor o igual que t^W, ninguna de las tasas es afectada por la dotación inicial E. Ambas son crecientes en el parámetro del costo del impago z, la tasa impositiva del sector débil t^W es decreciente en el parámetro de diferencia de los sectores λ, mientras que la tasa del sector fuerte s^W es creciente en este parámetro.

Corolario 1. Las tasas impositivas cumplen con las siguientes condiciones:

$$t^W > t^A, \tag{12}$$

$$s^W > s^A. \tag{13}$$

El corolario 1 implica que las tasas impositivas siempre serán mayores cuando la restricción

[3]Se supone que (9) es función estríctamente cóncava.

que se sature sea la de voluntad para pagar; es decir, si se espera que la recaudación del gobierno dos va a ser mayor que el costo del impago para el país deudor, entonces las tasas tenderán a ser más altas y viceversa.

Proposición 4 . El gobierno del primer periodo escogerá el par (t^*, s^*) dependiendo en el caso que se encuentre:

caso uno
$(t^*, s^*)=\left(t^W, s^W\right)$ si $W\left(t^W, s^W\right) < A\left(t^W, s^W\right), W\left(t^A, s^A\right) < A\left(t^A, s^A\right)$
caso dos
$(t^*, s^*)=\left(t^I, s^I\right)$ si $W\left(t^W, s^W\right) \geq A\left(t^W, s^W\right), W\left(t^A, s^A\right) \leq A\left(t^A, s^A\right)$
caso tres
$(t^*, s^*)=\left(t^A, s^A\right)$ si $W\left(t^W, s^W\right) > A\left(t^W, s^W\right), W\left(t^A, s^A\right) > A\left(t^A, s^A\right)$

Donde el par $\left(t^I, s^I\right)$ es aquel que soluciona el siguiente problema de maximización:

$$\max_{t,s} cf_2\left(k\left(t\right)\right) + cf_2\left(k\left(s\right)\right) + tf\left(k\left(t\right)\right) + sf\left(k\left(s\right)\right), \tag{14}$$

$$s.a\, W\left(t, s\right) = A\left(t, s\right). \tag{15}$$

Por su parte, el nivel óptimo de la deuda es:

$$D_1^* = min\left(zE - z\lambda k\left(s^*\right) - z\left(2-\lambda\right)k\left(t^*\right), cf_2\left(k\left(s^*\right)\right) + cf_2\left(k\left(t^*\right)\right)\right). \tag{16}$$

Corolario 2. En el caso dos, las tasas impositivas que solo toman en cuenta la restricción de habilidad $\left(t^A, s^A\right)$ son menores o iguales a las tasas óptimas $\left(t^I, s^I\right)$, mientras que las tasas impositivas que solo toman en cuenta la restricción de voluntad $\left(s^W, t^W\right)$ son mayores o iguales a las tasas óptimas de este caso $\left(s^I, t^I\right)$. Es decir, siempre que se esté en el caso dos se cumple.

$$t^W \geq t^I \geq t^A, \tag{17}$$

$$s^W \geq s^I \geq s^A. \tag{18}$$

Corolario 3. Con un valor de E suficientemente bajo siempre se podrá llegar al caso uno. En el caso uno, cuando la dotación inicial E aumenta, la deuda óptima D_1^* incrementará. En algún punto, el aumento de E nos hará pasar del caso uno al dos. Mientras se esté en el caso dos, si sube E, las tasas impositivas s^* y t^* disminuirán y la deuda óptima D_1^* ascenderá[4]. Si sigue aumentando E se pasa del caso dos al tres. En este caso tres, la deuda óptima D_1^* permanecerá sin cambio ante variaciónes en E. Tal como se establece en las proposiciones 2 y 3 las tasas s^* y t^* no son afectadas por cambios en la dotación inicial E en los casos uno y tres.

Con base en el corolario 3 se afirma que D_1^* es creciente en la dotación inicial E, mientras que s^* y t^* son decrecientes. En las gráficas 4, 9 y 14 de los ejercicios numéricos se puede apreciar este comportamiento de las tasas impositivas.

Corolario 4. En el caso dos, conforme aumenta λ, la tasa impositiva del sector débil de la economía t^* disminuye, y la del sector fuerte s^* puede pasar de creciente a decreciente o no, además s^* es creciente para valores de λ cercanos a uno. En lo que respecta a los cambios de caso, estando en el caso tres las variaciones de λ no tienen ningún efecto. Por otro lado, ante estas variaciones del caso uno es posible que se cambie al caso dos, de la misma manera, del caso dos es posible que se cambie al caso uno. Por último, en el caso dos la tasa óptima del sector fuerte siempre será mayor a la del sector débil de la economía ($s^I \geq t^I$). De acuerdo a las proposiciones 2 y 3, las tasas s^* y t^* no son afectadas por variaciónes en λ en el caso tres y, en contraste, en el caso uno s^* es creciente y t^*decreciente.

En las gráficas 2, 7, 12, 17 y 20 de los ejercicios numéricos se puede apreciar este comportamiento de las tasas impositivas. Los corolarios 3 y 4 no hacen mención de cómo se comportan las tasas s y t ante cambios en la dotación inicial E en los casos uno y tres, sin embargo, en las proposiciones 2 y 3 se establece que estas tasas no son afectadas por E.

[4]Se adoptan los supuestos $\mathcal{L}_{tt} < 0$ y $\mathcal{L}_{ss} < 0$ para garantizar las afirmaciones de los corolarios 3 y 4. $\mathcal{L}_{tt}$ y $\mathcal{L}_{ss}$ son las condiciones de segundo orden del lagrangiano con respecto a t y a s respectivamente, lagrangiano que es parte del planteamiento de la solución del problema de maximización de (14). Para más detalles ir a las demostraciones de estos corolario.

En la proposición 4 se definen tres casos posibles, con su respectiva solución, en el caso uno $(s^*, t^*) = \left(s^W, t^W\right)$, en el caso dos $(s^*, t^*) = \left(s^I, t^I\right)$ y en el caso tres $(s^*, t^*) = \left(s^A, t^A\right)$, por su parte, con base en la proposición 3 y el corolario 4 se sabe que en el caso uno $s^W \geq t^W$ y en el caso dos $s^I \geq t^I$, además la proposición 2 permite afirmar que en el caso tres $s^A = t^A$. Con estos resultados se obtiene que $s^* \geq t^*$. De esta manera se encuentra que el gobierno miope tenderá a poner impuestos más bajos al sector más débil de la economía ante un impago, a menos que la restricción activa sea la de habilidad para pagar, en cuyo caso las tasas impositivas serán las mismas para el conjunto de la economía.

El corolario 1 también revela un resultado que se debe subrayar. En él se afirma que $s^W \geq s^A$ y $t^W \geq t^A$, lo que indica que cuando solo se satura la restricción de habilidad para pagar, los impuestos son menores, en comparación a cuando solo se satura la restricción de voluntad para pagar. En palabras distintas, el gobierno miope fijará impuestos más altos cuando el costo debido al impago en el periodo dos sea menor o igual a la recaudación esperada del periodo dos.

Otro resultado a destacar del corolario 4, es que en el caso tres, entre más distintos sean los sectores, o lo que es lo mismo, entre mayor sea λ, mayor será la diferencia entre s^* y t^*, siendo s^* creciente en λ y t^* decreciente. Es decir, en el caso tres, cuanto más distintos son los sectores, mayores son los impuestos al sector fuerte y menores los del sector débil de la economía.

3.3 Conclusiones

El gobierno miope prefiere imponer una tasa impositiva menor al sector débil de la economía para incentivar su crecimiento, de esta manera, aumenta el costo ante un impago, así se envía una señal positiva a los potenciales acreedores, lo que le permite adquirir un mayor monto de préstamo.

Además, cuando la recaudación de impuestos esperada es menor al costo para el país debido a un impago, las tasas impositivas de los dos sectores de la economía son iguales entre sí y más bajas en comparación al escenario donde el costo de impago es menor o igual a la recaudación. Por otro lado, en este escenario donde el costo es menor, entre más distintos sean los sectores de la economía, mayor será la diferencia entre sus tasas impositivas, siendo siempre mayor la tasa del sector fuerte de la economía. Igualmente se encuentra que, entre más recursos tenga el sector privado para invertir, mayor será la deuda que el gobierno miope adquirirá y menores las tasas impositivas.

Como en el modelo de Acharya y Rajan (2013), en el modelo desarrollado en el presente artículo, se mantiene la dinámica que explica por qué un país paga su deuda a pesar de tener un sector financiero poco desarrolado y, por lo tanto, que en caso de impago, tendría un costo bajo para su economía. Además, se coincide con estos autores en que el gobierno miope incentiva el crecimiento del sector financiero para aumentar su capacidad de endeudamiento. Por otra parte, suponer la existencia de dos sectores, donde uno es más vulnerable al impago, en lugar de un solo sector como en Acharya y Rajan (2013), abre la puerta a nuevos resultados, en específico, sobre el tratamiento fiscal de cada sector, al respecto se obtiene que éste es diferenciado y favorece al sector más vulnerable en relación al otro.

Con base en este artículo podrían desarrollarse algunas extensiones. Como determinar bajo qué condiciones es conveniente la recompra, y cuánto convendría recomprar. También se podría asignar una probabilidad a la ocurrencia de cada estado de la naturaleza. De igual forma, se podría considerar que la ocurrencia de cada estado de la naturaleza es endógena. Por otro lado, sería interesante permitir que el sector privado decida su inversión en cada uno de los periodos. Por último, es posible que se encuentren resultados relevantes cambiando la manera de modelar el costo para la economía doméstica.

Referencias

Acharya, V. V., y Rajan, R. G. (2013). Sovereign debt, government myopia, and the financial sector. *The Review of Financial Studies*, 26 (6), p. 1526-1560.

Amador, M. (2004). A Political Model of Sovereign Debt Repayment, *2004 Meeting Papers*, (762). Society for Economic Dynamics.

Baglioni, A. (2015). Leveraged buybacks of sovereign debt: A model and an application to greece, *Contemporary Economic Policy*, 33(1), p. 87-103.

Borensztein, E. y Panizza, U. (2009). The Cost of Sovereign Default, *IMF Staff Papers*, 56(4), p. 683-741.

Broner, F., Martin, A. y Ventura, J. (2010). Sovereign Risk and Secondary Markets, *American Economic Review*, 100(4), p. 1523-1555.

Bulow, J. y Kenneth, R.(1989). A Constant Recontracting Model of Sovereign Debt, *Journal of Political Economy*, 97(1), p. 155-178.

Cruces, J.J. y Trebesch, C. (2013). Sovereign Defaults: The Price of Haircuts, *American Economic Journal: Macroeconomics*, 5(3), p. 85-117.

Eaton, J. y Gersovitz, M. (1981). Debt with Potential Repudiation: Theoretical and Empirical Analysis, *The Review of Economic Studies*, 48(2), p. 289-309.

Gennaioli, N., Martin, A., y Rossi, S. (2018). Banks, government bonds, and default: What do the data say?. *Journal of Monetary Economics*, 98, p. 98-113.

Goldberg, L. y Spiegel, M.M. (1992). Debt write-downs and debt-equity swaps in a two-sector model, *Journal of International Economics*, 33(3-4), p. 267-283.

Krugman, P. R. (1989). Market-based debt-reduction schemes and welfare. *Analytical Issues in Debt, International Monetary Fund*.

Apéndice 3.A Ejercicios Numéricos

Se utilizan las mismas funciones del artículo de Acharya y Rajan (2013)

$$f(k) = \alpha\theta k^{\gamma},\ f_2(k) = (1-\alpha)\,\theta k^{\gamma},$$

donde $\alpha \in (0,1)$,$\theta > 0$, $\gamma \in (0,1)$, los parámetros constantes en todos los ejercicios son: $\alpha = 0.75$, $\gamma = 0.66$, $t^{max} = 0.675$, $r = 0.05$, por otro lado, se les asignan distintos valores a los parámetros θ, λ, z y E. Al final de este apéndice se explica como se obtiene la función $k(.)$:

$$k(s) = \left(\frac{\gamma\theta}{1+r}\left[(1-s)\,\alpha + \frac{(1-t^{max})\,(1-\alpha)}{1+r}\right]\right)^{\frac{1}{(1-\gamma)}}.$$

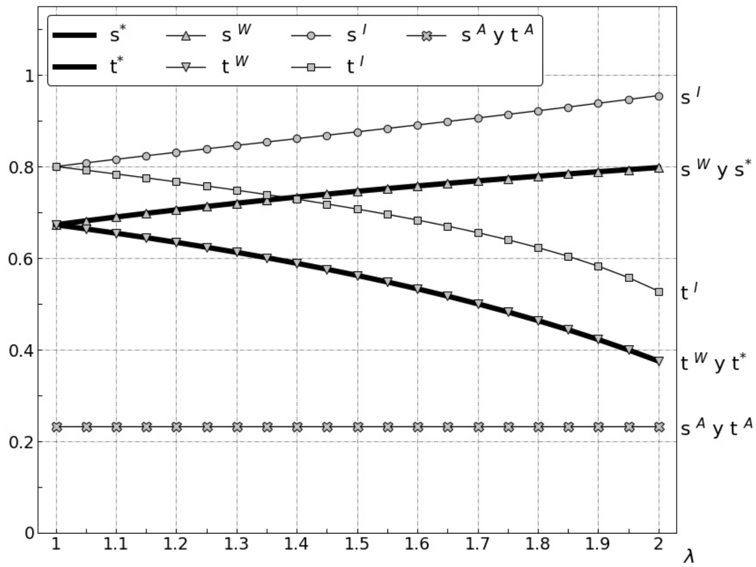
Los ejercicios 1, 2 y 3 corresponden a los casos uno, dos y tres de la proposición 4 respectivamente. Los ejercicios 4 y 5 tienen por objeto mostrar que cambios en λ pueden hacernos pasar del caso uno al dos o del dos al uno. En todos los ejercicios se verifica lo establecido en las proposiciones y los corolarios.

Ejercicio numérico 1

Se establece que $\theta = 8$, $z = 1.1$ y en un primer momento E toma el valor de 6. En la gráfica 2 varía λ y se muestran los cambios en las tasas impositivas. En la gráfica 3 se fija λ en 1.3 y se observa que los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por debajo de la función $t(s)$, por lo tanto, se está en el caso uno, dados estos parámetros ninguna variación de λ generará un cambio del caso uno a otro caso. La gráfica 4 muestra los cambios en las tasas impositivas cuando cambia la dotación E. Con respecto a la gráfica 3, donde $E = 6$, en la gráfica 5 aumenta E a 60, lo cual cambia el caso del uno al dos, como se puede apreciar en la gráfica 5 el punto $\left(t^W, s^W\right)$ está por encima de $t(s)$ mientras que el punto $\left(t^A, s^A\right)$ se mantiene por debajo. En la gráfica 6, E aumenta aún más, hasta 96, lo cual cambia el caso al tres, lo que se verifica al observar que los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por encima de $t(s)$. En este ejercicio se muestra que partiendo del caso uno, cambios en λ pueden no producir cambios en el caso, y que, contrariamente, al variar E se puede cambiar a cualquiera de los otros dos casos.

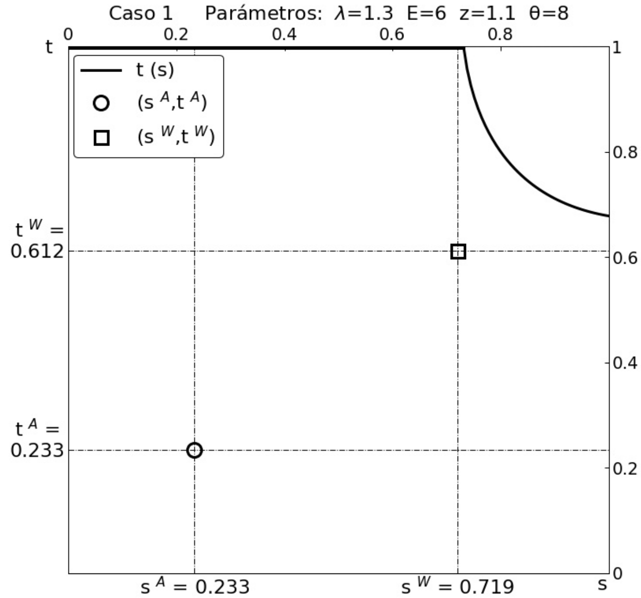
Gráfica 2. Tasas impositivas ante cambios en lambda (λ)

Parámetros: E=6 z=1.1 θ=8



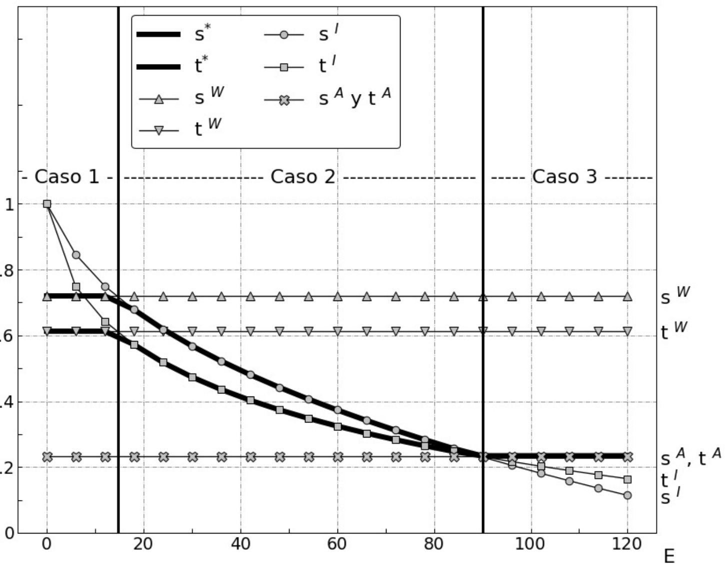
Gráfica 3. Función t(s)

Caso 1 Parámetros: λ=1.3 E=6 z=1.1 θ=8



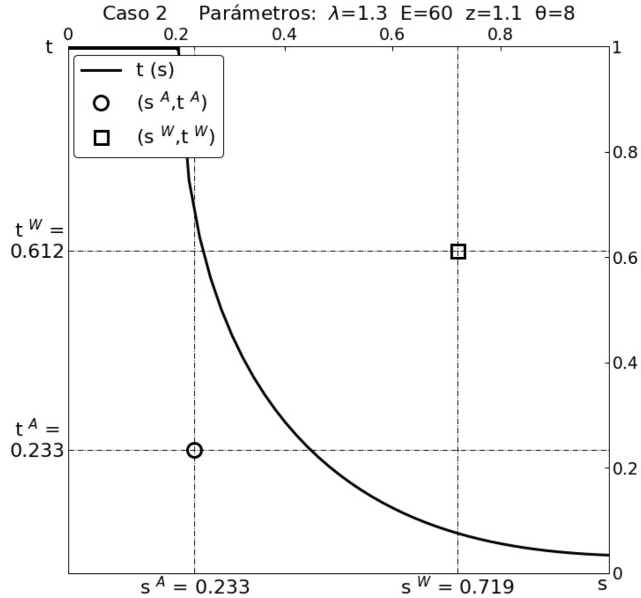
Gráfica 4. Tasas impositivas ante cambios en la dotación inicial (E)

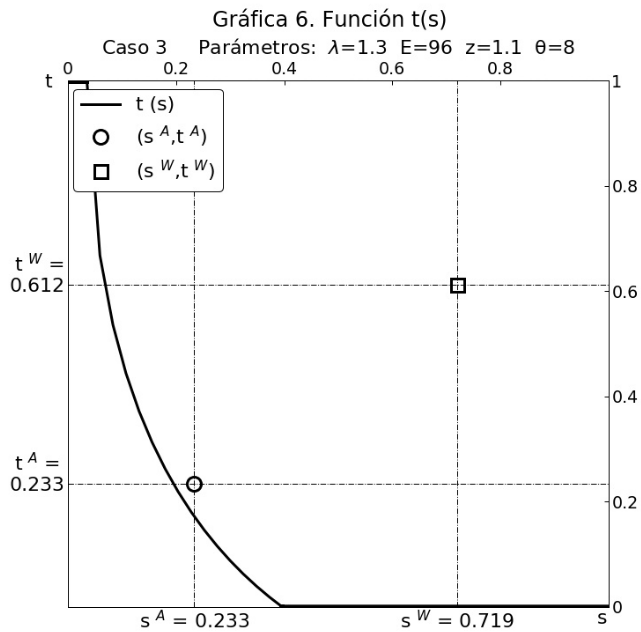
Parámetros: λ=1.3 z=1.1 θ=8



Gráfica 5. Función t(s)

Caso 2 Parámetros: λ=1.3 E=60 z=1.1 θ=8



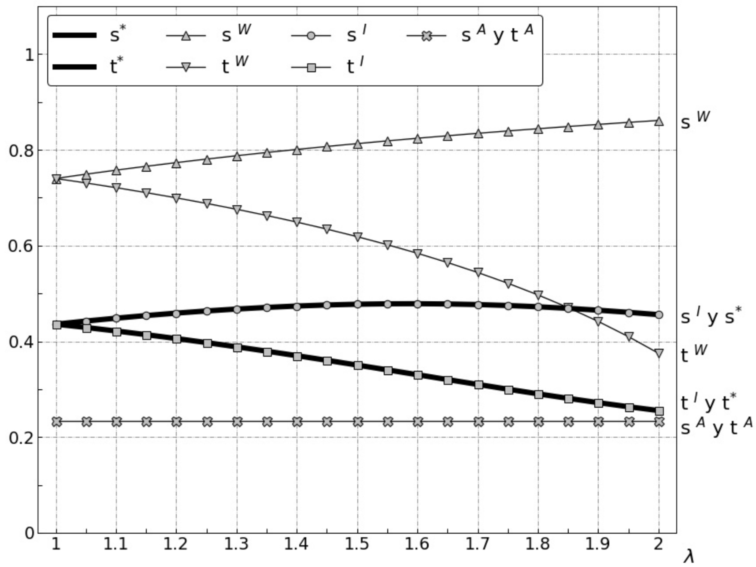


Ejercicio numérico 2

Se establece que $\theta = 5$, $z = 1.6$ y en primer momento E toma el valor de 10. En la gráfica 7 varía λ y se muestran los cambios en las tasas impositivas. En la gráfica 8 se fija λ en 1.2 y se observa que los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están uno arriba y otro abajo de la función $t(s)$, por lo tanto, se está en el caso dos, dados estos parámetros ninguna variación de λ generará un cambio del caso dos a otro caso. La gráfica 9 muestra los cambios en las tasas impositivas cuando cambia la dotación E. Con respecto a la gráfica 8, donde $E = 10$, en la gráfica 10 disminuye E a 1.5, lo cual cambia el caso del dos al uno, como se puede apreciar en la gráfica 10 los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por debajo de $t(s)$ lo cual corresponde al caso dos. En la gráfica 11, E aumenta hasta 27, lo cual cambia el caso al tres, lo que se verifica al observar que los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por encima de $t(s)$. Análogamente al ejercicio anterior, se constata en este ejercicio que partiendo del caso dos, cambios en λ pueden no producir cambios en el caso, y que, contrariamente, al variar E se puede cambiar a cualquiera de los otros dos casos.

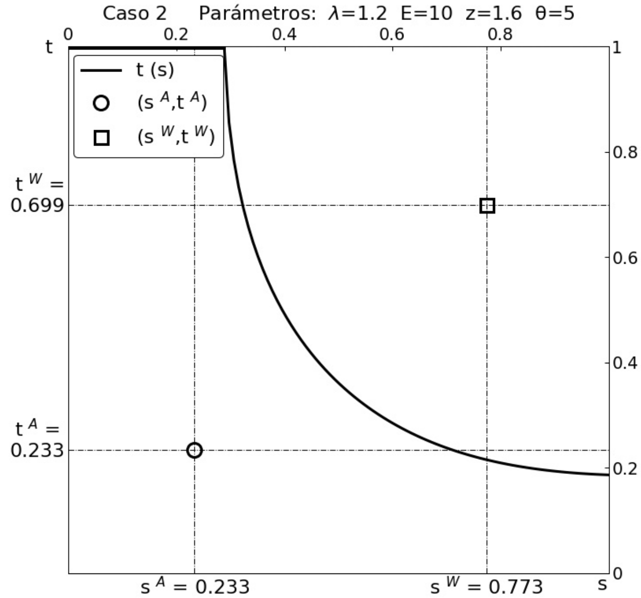
Gráfica 7. Tasas impositivas ante cambios en lambda (λ)

Parámetros: E=10 z=1.6 θ=5



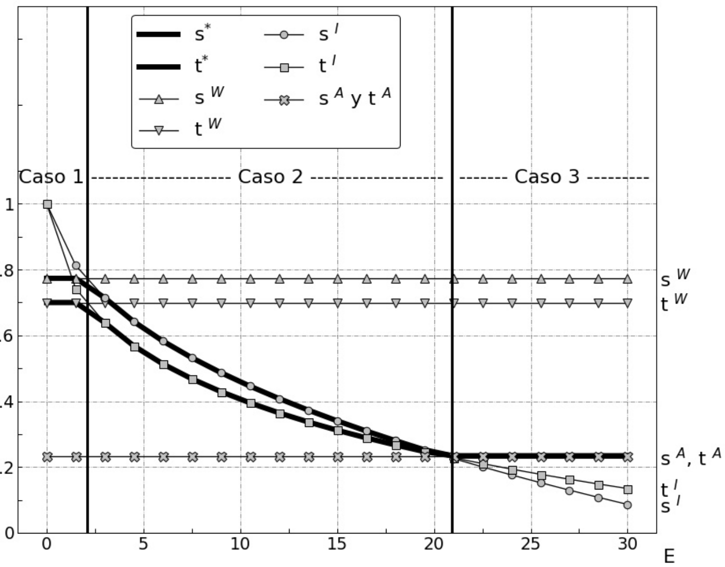
Gráfica 8. Función t(s)

Caso 2 Parámetros: λ=1.2 E=10 z=1.6 θ=5



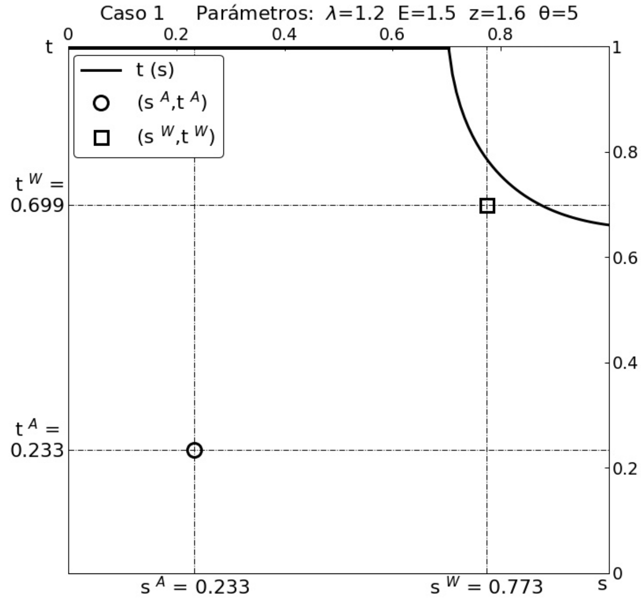
Gráfica 9. Tasas impositivas ante cambios en la dotación inicial (E)

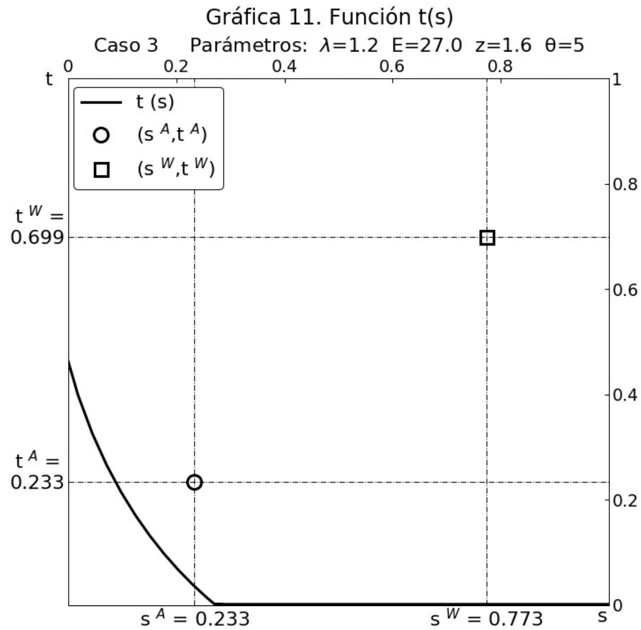
Parámetros: λ=1.2 z=1.6 θ=5



Gráfica 10. Función t(s)

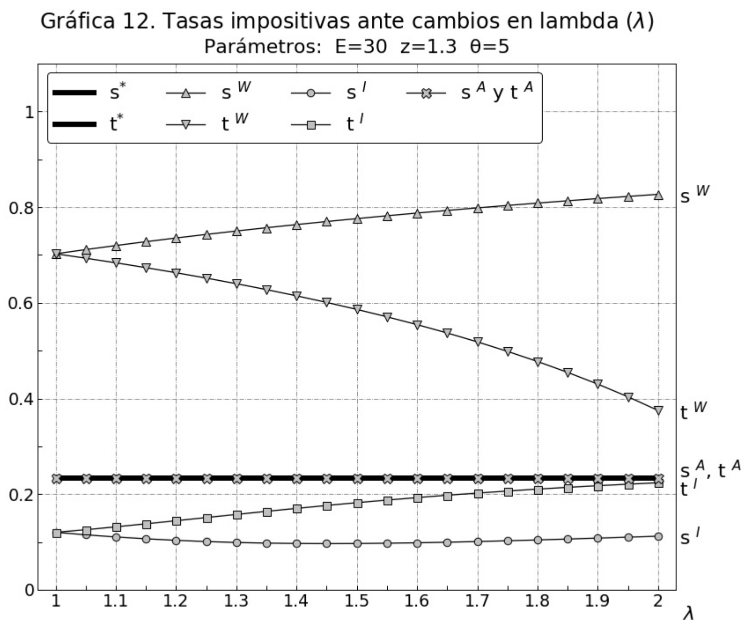
Caso 1 Parámetros: λ=1.2 E=1.5 z=1.6 θ=5

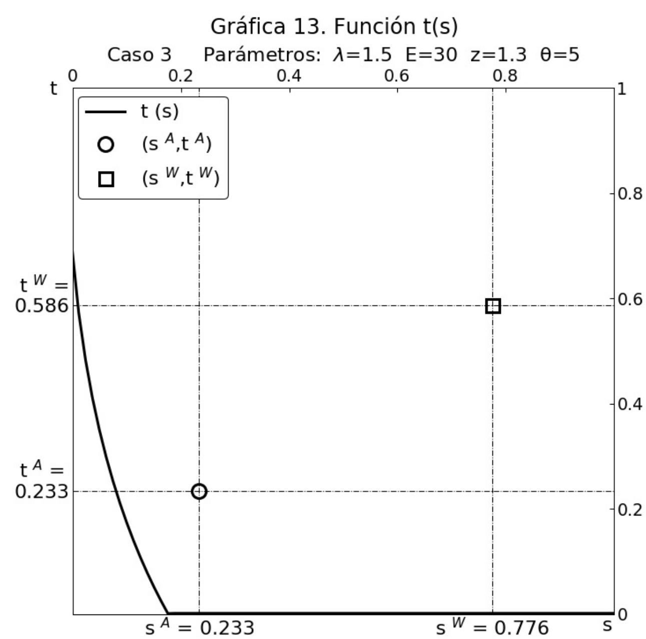




Ejercicio numérico 3

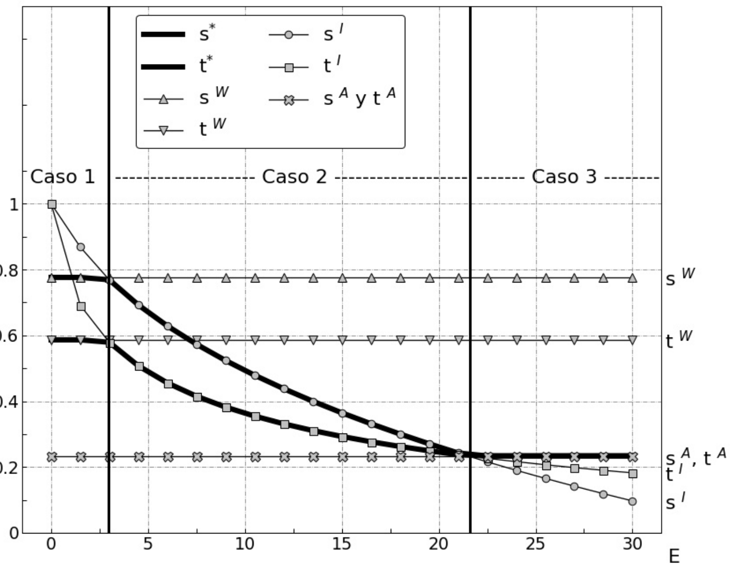
Se establece que $\theta = 5$, $z = 1.3$ y en primer momento E toma el valor de 30. En la gráfica 12 varía λ y se muestran los cambios en las tasas impositivas. En la gráfica 13 se fija λ en 1.5 y se observa que los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por encima de la función $t(s)$, por lo tanto, se está en el caso tres, dados estos parámetros ninguna variación de λ generará un cambio del caso tres a otro caso. La gráfica 14 muestra los cambios en las tasas impositivas cuando cambia la dotación E. Con respecto a la gráfica 13, donde $E = 30$, en la gráfica 15 disminuye E a 1.5, lo cual cambia el caso del tres al uno, como se puede apreciar en la gráfica 15, los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por debajo de la función $t(s)$, lo que nos indica que se está en el caso uno. En la gráfica 16, E disminuye en menor medida con respecto a la gráfica 13, una $E = 15$ cambia el caso al dos, lo que se verifica al observar que el punto $\left(t^W, s^W\right)$ está por encima de $t(s)$ mientras que el punto $\left(t^A, s^A\right)$ se mantiene por debajo. Con la misma lógica de los ejercicios anteriores, se observa en este ejercicio que iniciando en el caso tres, cambios en λ pueden no producir cambios en el caso, y que, contrariamente, al variar E se puede cambiar a cualquiera de los otros dos.


Gráfica 12. Tasas impositivas ante cambios en lambda (λ)
Parámetros: E=30 z=1.3 θ=5
s*
t*
s W
t W
s I
t I
s A y t A
s W
t W
s A, t A
t I
s I
λ


Gráfica 13. Función t(s)
Caso 3 Parámetros: λ=1.5 E=30 z=1.3 θ=5
t (s)
(s A,t A)
(s W,t W)
t W = 0.586
t A = 0.233
s A = 0.233
s W = 0.776
t
s

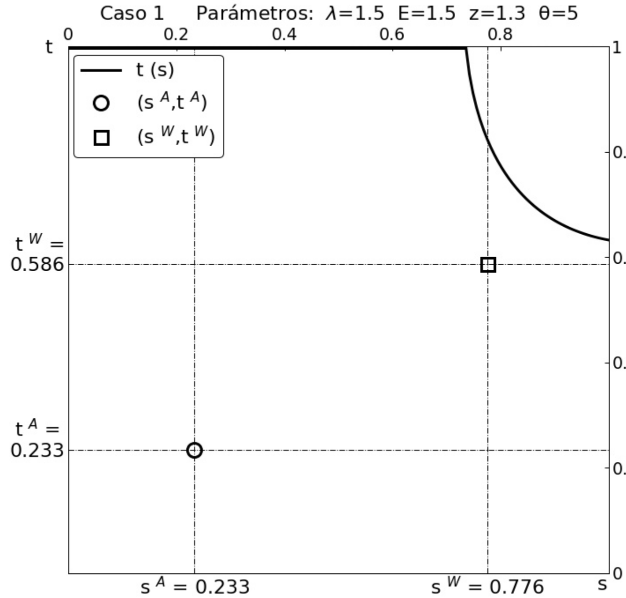
Gráfica 14. Tasas impositivas ante cambios en la dotación inicial (E)

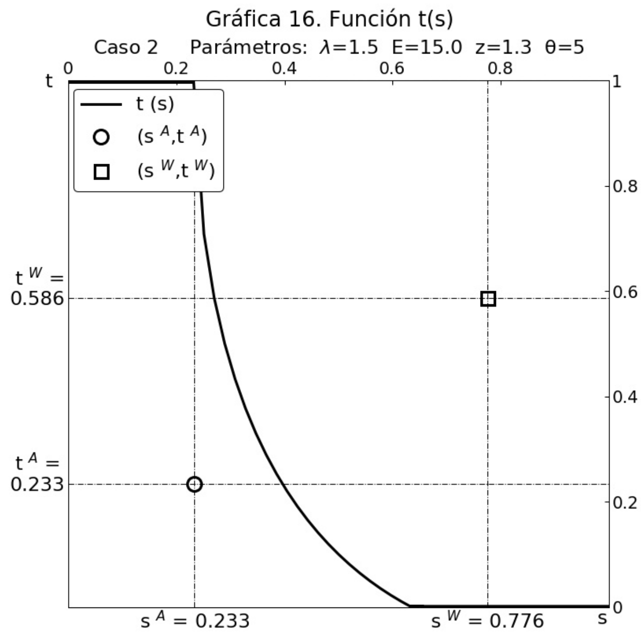
Parámetros: λ=1.5 z=1.3 θ=5



Gráfica 15. Función t(s)

Caso 1 Parámetros: λ=1.5 E=1.5 z=1.3 θ=5



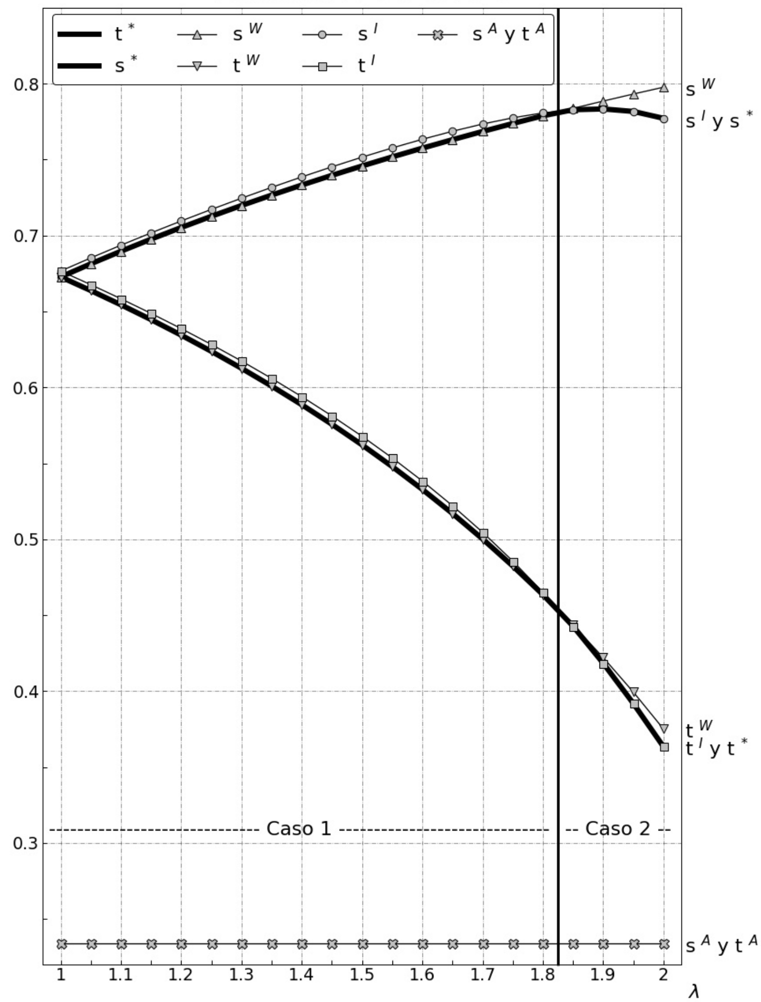


Ejercicio numérico 4

Se establece que $\theta = 6$, $z = 1.1$ y $E = 6$. En la gráfica 17 varía λ y se muestran los cambios en las tasas impositivas indicando las áreas donde se está en el caso uno y dos. Las gráficas 18 y 19 toman valores de λ de estas dos áreas, En la gráfica 18 se fija λ en 1.3 y se observa que los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por debajo de la función $t(s)$, por lo tanto, se está en el caso uno. En la gráfica 19, $\lambda = 1.9$, este aumento de λ cambia el caso del uno al dos, en esta gráfica el punto $\left(t^W, s^W\right)$ está por encima de $t(s)$ mientras que el punto $\left(t^A, s^A\right)$ se mantiene por debajo, lo que nos indica que se está en el caso dos. Con este ejercicio se demuestra la existencia de cambios del caso uno al dos debidos a variaciones en λ.

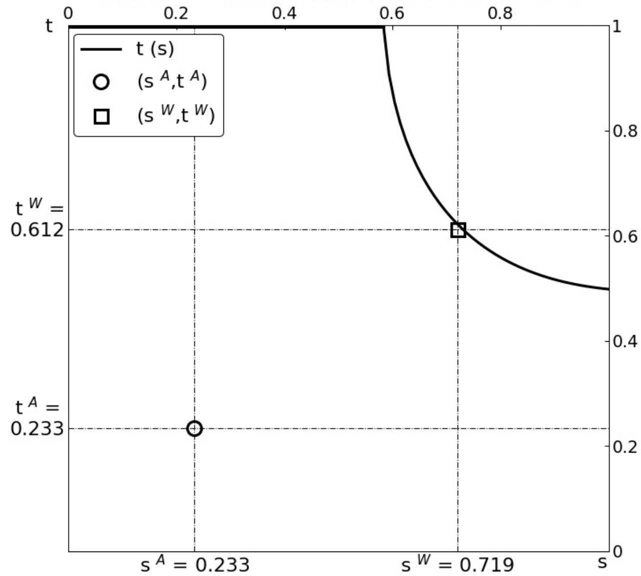
Gráfica 17. Tasas impositivas ante cambios en lambda (λ)

Parámetros: E=6 z=1.1 θ=6



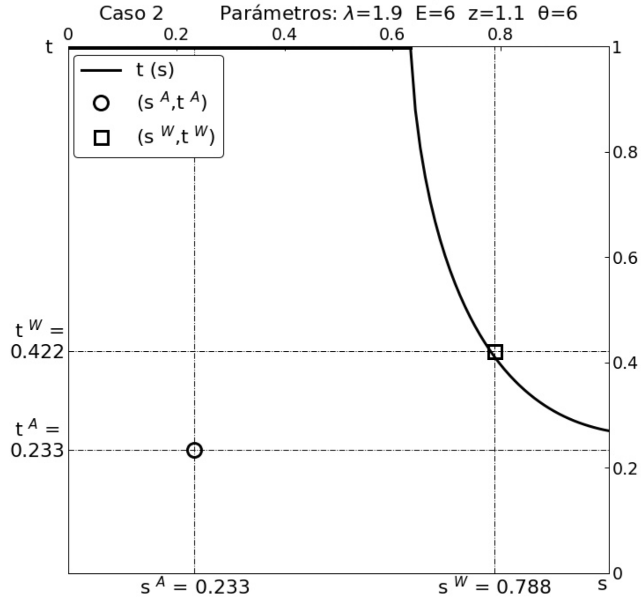
Gráfica 18. Función t(s) del ejercicio 4

Caso 1 Parámetros: λ=1.3 E=6 z=1.1 θ=6



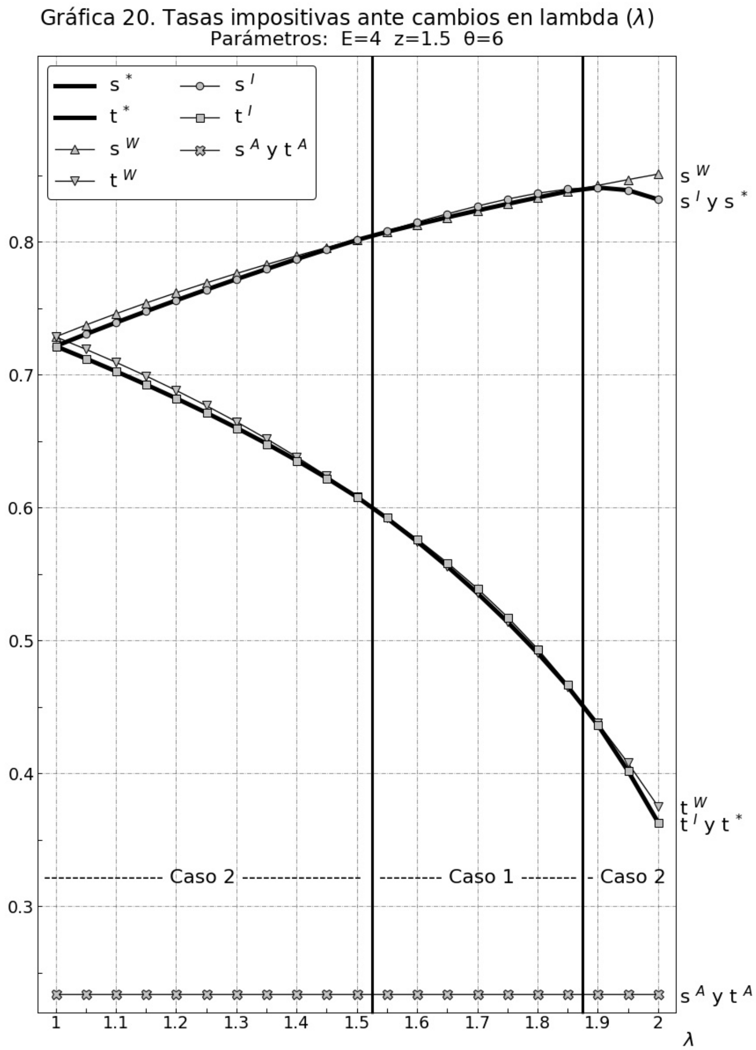
Gráfica 19. Función t(s) del ejercicio 4

Caso 2 Parámetros: λ=1.9 E=6 z=1.1 θ=6



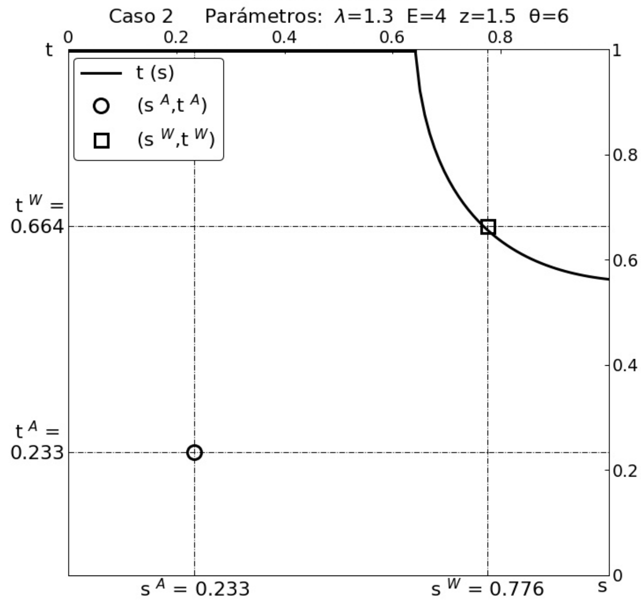
Ejercicio numérico 5

Se establece que $\theta = 6$, $z = 1.5$ y $E = 4$. En la gráfica 20 varía λ y se muestran los cambios en las tasas impositivas indicando las áreas donde se está en el caso uno y dos. Las gráficas 21, 22 y 23 toman valores de λ de las tres áreas definidas en la gráfica 20, En la gráfica 21 el punto $\left(t^W, s^W\right)$ está por encima de $t(s)$ mientras que el punto $\left(t^A, s^A\right)$ se mantiene por debajo, lo que nos indica que se está en el caso dos. En la gráfica 22 aumenta λ a 1.7 y se observa que los puntos $\left(t^W, s^W\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ están por debajo de la función $t(s)$, por lo tanto, se está en el caso uno. Por último en la gráfica 23 $\lambda = 1.95$, de esta manera el punto $\left(t^W, s^W\right)$ nuevamente está por encima de $t(s)$ mientras que el punto $\left(t^A, s^A\right)$ se sigue por debajo, lo que nos indica que se está en el caso uno otra vez. Con este ejercicio se demuestra la existencia de cambios del caso dos al uno debidos a variaciones en λ.

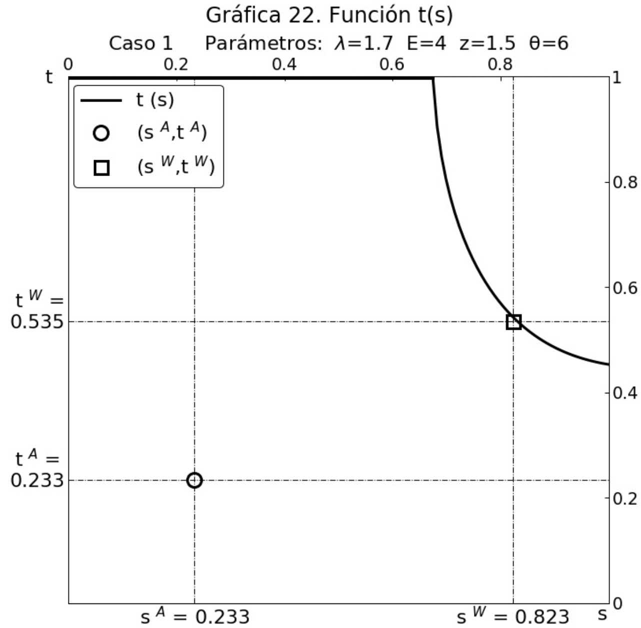


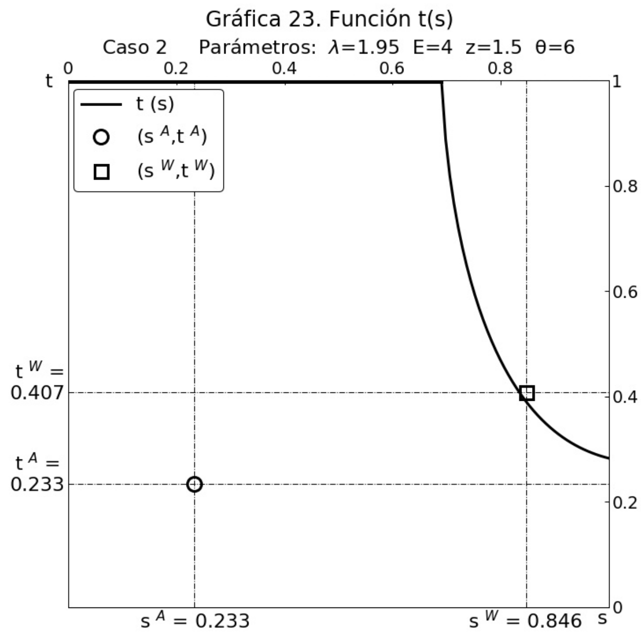
Gráfica 20. Tasas impositivas ante cambios en lambda (λ)
Parámetros: E=4 z=1.5 θ=6
s *
t *
s W
t W
s I
t I
s A y t A
s W
s I y s *
t W
t I y t *
s A y t A
Caso 2
Caso 1
Caso 2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
λ

Gráfica 21. Función t(s)



Gráfica 22. Función t(s)





La función k que se utiliza en los ejercicios numéricos es la mejor respuesta del sector productivo, es decir, con k las empresas maximizan su beneficio B.

$$B = \frac{1}{1+r}(1-s)\, f(k(s)) + \frac{1}{1+r}(1-t)\, f(k(t)) + \frac{1}{(1+r)^2}(1-s^{max})\, f_2(k(s))$$

$$+\frac{1}{(1+r)^2}(1-t^{max})\, f_2(k(t)) - k(s) - k(t)\,.$$

El beneficio se define como la multiplicación de la producción en los periodos uno y dos, f y f_2, por $(1-s)$ y $(1-t)$ que representan el porcentaje de la producción ya habiendo reducido los impuestos, además se divide entre $(1+r)$ y $(1+r)^2$ para obtener el valor actual. Dado que las tasas s y t nunca están en el mismo término podemos separar la función de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{1}{1+r}(1-s)\, f(k(s)) + \frac{1}{(1+r)^2}(1-s)\, f_2(k(s)) - k(s)\,,$$

$$G(t) = \frac{1}{1+r}(1-t) f(k(t)) + \frac{1}{(1+r)^2}(1-t) f_2(k(t)) - k(t).$$

Ya que son idénticas la funciones se resuelve solo una y aplicará a la otra, se sustituye $f(k) = \alpha\theta k^{\gamma}$, $f_2(k) = (1-\alpha)\theta k^{\gamma}$, se deriva con respecto a k y se iguala a cero obteniendo:

$$\frac{1}{1+r}(1-s)\alpha\gamma\theta k^{(\gamma-1)} + \frac{1}{(1+r)^2}(1-s)(1-\alpha)\gamma\theta k^{(\gamma-1)} - 1 = 0$$

$\Rightarrow \frac{\gamma\theta}{1+r}\left[(1-s)\alpha + \frac{(1-s^{max})(1-\alpha)}{1+r}\right] k^{\gamma-1} = 1$

$\Rightarrow \frac{\gamma\theta}{1+r}\left[(1-s)\alpha + \frac{(1-s^{max})(1-\alpha)}{1+r}\right] = k^{1-\gamma}$

$\Rightarrow k(s) = \left(\frac{\gamma\theta}{1+r}\left[(1-s)\alpha + \frac{(1-s^{max})(1-\alpha)}{1+r}\right]\right)^{\frac{1}{(1-\gamma)}}.$

Apéndice 3.B Demostraciones

Demostración de la proposición 1

La función f_2 es creciente y la función k es decreciente. Por lo tanto $A(s,t) = cf_2(k(s)) + cf_2(k(t))$ es decreciente en t y s y $W(s,t) = zE - z\lambda k(s) - z(2-\lambda)k(t)$ es creciente. Con base en lo anterior, $A(s, g(s)) - W(s, g(s))$ es decreciente en t y s. Entonces, dado un valor de s tal que $A(s,t) - W(s,t) = 0$, si $t > g(s) \Rightarrow A(s,t) - W(s,t) < 0$ y si $t < g(s) \Rightarrow A(s,t) - W(s,t) > 0$. Nótese que en la función $t(s)$ existen tres casos, los dos primeros corresponden a soluciones de esquina.

Demostración de la proposición 2

La proposición 2 establece que: $t^A = s^A$, $\frac{\partial t^A}{\partial E} = 0$, $\frac{\partial s^A}{\partial E} = 0$, $\frac{\partial t^A}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial s^A}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial t^A}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial s^A}{\partial \lambda} = 0$.

Se parte de la funciones (7) y (8):

$cf_2'(k)k'\left(s^A\right) + s^A f'(k)k'\left(s^A\right) + f\left(k\left(s^A\right)\right) = 0$

$cf_2'(k)k'\left(t^A\right) + t^A f'(k)k'\left(t^A\right) + f\left(k\left(t^A\right)\right) = 0$

Dado que las condiciones son idénticas se puede afirmar que $t^A = s^A$, por otro lado, se observa que las variables z, E y λ no forman parte de las condiciones, por lo tanto, no tienen efecto en t^A o s^A.

Demostración de la proposición 3

La proposición 3 establece que $t^W \leq s^W, \frac{\partial t^W}{\partial E} = 0$, $\frac{\partial s^W}{\partial E} = 0, \frac{\partial t^W}{\partial z} > 0$, $\frac{\partial s^W}{\partial z} > 0$, $\frac{\partial t^W}{\partial \lambda} < 0$, $\frac{\partial s^W}{\partial \lambda} > 0$.

Parte a)

Por demostrar que $t^W \leq s^W$

Con base en las ecuaciones (10) y (11) se tiene:

$-z\lambda k'\left(s^W\right) + s^W f'(k)\, k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right) = 0$

$-z\left(2-\lambda\right) k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) = 0$

Suponemos que estamos maximizando, por lo que la condición de segundo orden es negativa, también se sabe que $k' < 0$:

$1 \leq \lambda \Rightarrow -z\left(2-\lambda\right) k'\left(t^W\right) \leq -z\lambda k'\left(t^W\right)$

$\Rightarrow -z\lambda k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right)$

$\geq -z\left(2-\lambda\right) k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) = 0$

$\Rightarrow -z\lambda k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right)$

$\geq -z\lambda k'\left(s^W\right) + s^W f'(k)\, k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right) = 0$

Puesto que $-z\lambda k'(x) + x f_1'(k)\, k'(x) + f_1(k(x))$ es decreciente en x, se asegura que $s^W \geq t^W$.

Parte b)

Por demostrar que $\frac{\partial t^W}{\partial E} = 0$, $\frac{\partial s^W}{\partial E} = 0$.

E no aparece en las condiciones de primer orden por lo que no afecta a s^W ni a t^W.

Parte c)

Por demostrar que $\frac{\partial t^W}{\partial z} > 0$, $\frac{\partial s^W}{\partial z} > 0$, $\frac{\partial t^W}{\partial \lambda} < 0$, $\frac{\partial s^W}{\partial \lambda} > 0$.

Se definen las funciones F y G como se muestra:

$F = -z\left(2-\lambda\right) k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right)$

$G = -z\lambda k'\left(s^W\right) + s^W f'(k)\, k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right)$
y se obtiene el signo de la derivada $\frac{\partial t^W}{\partial z}$de la siguiente manera:
$\frac{\partial t^W}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial t^W}}$, se sabe que $\frac{\partial F}{\partial t^W}$ es negativa
$\therefore \frac{\partial t^W}{\partial z}$ tiene el mismo signo que $\frac{\partial F}{\partial z}$
$\frac{\partial F}{\partial z} = -(2-\lambda)\, k'\left(t^W\right) > 0 \Rightarrow \frac{\partial t^W}{\partial z} > 0$
con los mismos pasos pero con G se obtiene $\frac{\partial s^W}{\partial z} > 0$
$\frac{\partial t^W}{\partial \lambda} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda}}{\frac{\partial F}{\partial t^W}}$, se sabe que $\frac{\partial F}{\partial t^W}$ es negativa
$\therefore \frac{\partial t^W}{\partial z}$ tiene el mismo signo que $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$
$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = zk'\left(t^W\right) < 0 \Rightarrow \frac{\partial t^W}{\partial \lambda} < 0$
$\frac{\partial s^W}{\partial \lambda} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial \lambda}}{\frac{\partial G}{\partial s^W}}$, se sabe que $\frac{\partial G}{\partial s^W}$ es negativa
$\therefore \frac{\partial s^W}{\partial \lambda}$ tiene el mismo signo que $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$
$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -zk'\left(s^W\right) > 0 \Rightarrow \frac{\partial s^W}{\partial \lambda} > 0$

Demostración del corolario 1

Por demostrar que $t^W > t^A$ y $s^W > s^A$

Se parte de la funciones (7) y (8):
$cf_2'(k)\, k'\left(s^A\right) + s^A f'(k)\, k'\left(s^A\right) + f\left(k\left(s^A\right)\right) = 0$
$cf_2'(k)\, k'\left(t^A\right) + t^A f'(k)\, k'\left(t^A\right) + f\left(k\left(t^A\right)\right) = 0$

$f_2' > 0, k\text{'} < 0 \Rightarrow cf_2'(k)\, k'\left(s^A\right) < 0,\ cf_2'(k)\, k'\left(t^A\right) < 0$
$\Rightarrow s^A f'(k)\, k'\left(s^A\right) + f\left(k\left(s^A\right)\right)$
$> cf_2'(k)\, k'\left(s^A\right) + s^A f'(k)\, k'\left(s^A\right) + f\left(k\left(s^A\right)\right) = 0$
y $t^A f'(k)\, k'\left(t^A\right) + f\left(k\left(t^A\right)\right)$
$> cf_2'(k)\, k'\left(t^A\right) + t^A f'(k)\, k'\left(t^A\right) + f\left(k\left(t^A\right)\right) = 0$

De forma similar con base en la ecuación (10) y (11) se tiene:
$-z\lambda k'\left(s^W\right) + s^W f'(k)\, k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right) = 0$
$-z(2-\lambda)\, k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) = 0$

$$
\begin{aligned}
&k' < 0 \\
&\Rightarrow -z\lambda k'\left(s^W\right) > 0 \Rightarrow s^W f'(k)\, k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right) \\
&< -z\lambda k'\left(s^W\right) + s^W f'(k)\, k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right) = 0 \\
&k' < 0 \\
&\Rightarrow -z(2-\lambda)\, k'\left(t^W\right) > 0 \Rightarrow t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) \\
&< -z(2-\lambda)\, k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow t^A f'(k)\, k'\left(t^A\right) + f\left(k\left(t^A\right)\right) > t^W f'(k)\, k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) \\
&\Rightarrow s^A f'(k)\, k'\left(s^A\right) + f\left(k\left(s^A\right)\right) > s^W f'(k)\, k'\left(s^W\right) + f\left(k\left(s^W\right)\right)
\end{aligned}
$$

$tf'(k)\, k'(t) + f(k(t))$ es la condición de primer orden del problema de maximización en autarquía, es decir, cuando no hay deudas y los ingresos son solo los recaudados con los impuestos, en esta maximización la función objetivo es definida como cóncava, por lo tanto, $tf'(k)\, k'(t) + f(k(t))$ es decreciente. En consecuencia $t^W > t^A$ y $s^W > s^A$.

Demostración de la proposición 4

Primeramente se verifica que solo existen los tres casos enunciados en la proposición 1, para esto se descarta un cuarto caso posible restante en el cual:

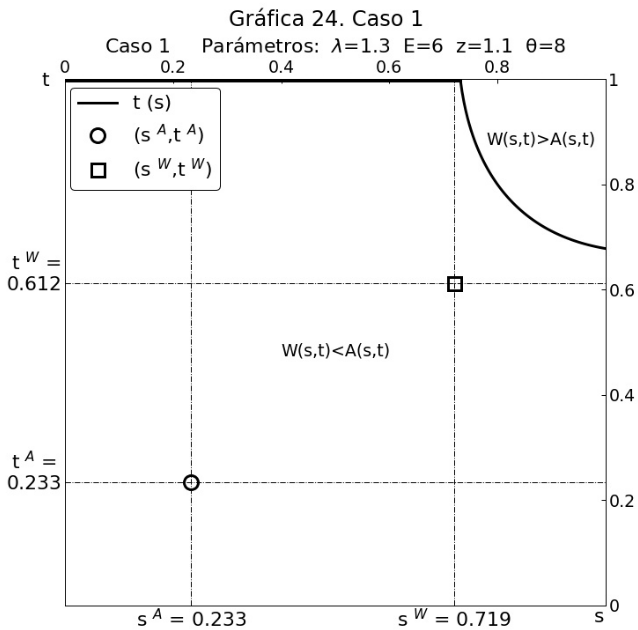
$$
W\left(t^W, s^W\right) < A\left(t^W, s^W\right),\, W\left(t^A, s^A\right) > A\left(t^A, s^A\right).
$$

Con base en la demostración de proposición 1 $\frac{\partial W}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial W}{\partial s} > 0$, $\frac{\partial A}{\partial t} < 0$ y $\frac{\partial A}{\partial s} < 0$, y retomando las desigualdades (12) y (13) del corolario 1 se obtiene que: $W\left(t^W, s^W\right) > W\left(t^A, s^A\right)$ y $A\left(t^A, s^A\right) > A\left(t^W, s^W\right)$, juntando estas dos desigualdades con las dos que definen el cuarto caso se obtiene que $W\left(t^W, s^W\right) > W\left(t^A, s^A\right) > A\left(t^A, s^A\right) > A\left(t^W, s^W\right) > W\left(t^W, s^W\right)$, lo cual es imposible, por lo tanto se descarta el cuarto caso.

La proposición 4 indica cuáles son las tasas óptimas (s^*, t^*), en cada uno de los casos, se abordará cada caso por separado. Como apoyo se retoman las gráficas 3, 8 y 13 con modificaciones mínimas y reenumeradas en esta demostración como 24, 25 y 26 respectivamente.

Caso uno

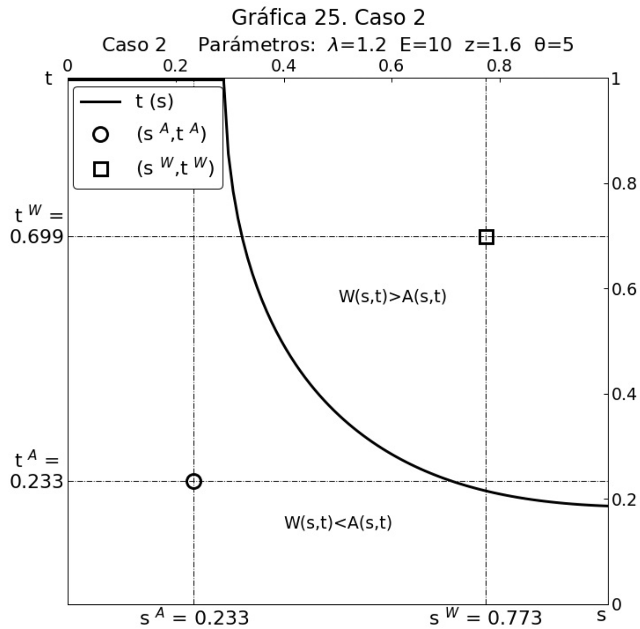
$$(t^*, s^*) = \left(t^W, s^W\right) \; si \, W\left(t^W, s^W\right) < A\left(t^W, s^W\right), \, W\left(t^A, s^A\right) < A\left(t^A, s^A\right)$$



El par $\left(t^A, s^A\right)$ maximiza nuestro problema si solo existiera la restricción $A(t,s)$, sin embargo, considerando también la restricción $W(t,s)$, el par $\left(t^A, s^A\right)$ es infactible dado que, como dice la definición del caso $W\left(t^A, s^A\right) < A\left(t^A, s^A\right)$, y al maximizar se satura la restricción, es decir, $A\left(t^A, s^A\right) = D$ por lo tanto $W\left(t^A, s^A\right) < D$, lo cual incumple con la restricción (3). Por otro lado, el par $\left(t^W, s^W\right)$ si es factible ya que se tiene que $W\left(t^W, s^W\right) = D < A\left(t^W, s^W\right)$, cumpliendose las restricciones (1) y (3). Descartamos otro par $\left(t^D, s^D\right)$ tal que $W\left(t^D, s^D\right) > A\left(t^D, s^D\right)$, es decir, que este por encima de la función $t(s)$, ya que entre $\left(t^D, s^D\right)$ y $\left(t^A, s^A\right)$ existe un punto $\left(t^F, s^F\right)$ donde se igualan ambas restricciones, por concavidad el este punto $\left(t^F, s^F\right)$ es mejor que $\left(t^D, s^D\right)$, al mismo tiempo, también por concavidad, $\left(t^W, s^W\right)$ es un mejor punto que $\left(t^F, s^F\right)$.

Caso dos

$(t^{*}, s^{*}) = (t^{I}, s^{I})$ $si\, W(t^{W}, s^{W}) \geq A(t^{W}, s^{W})$, $W(t^{A}, s^{A}) \leq A(t^{A}, s^{A})$



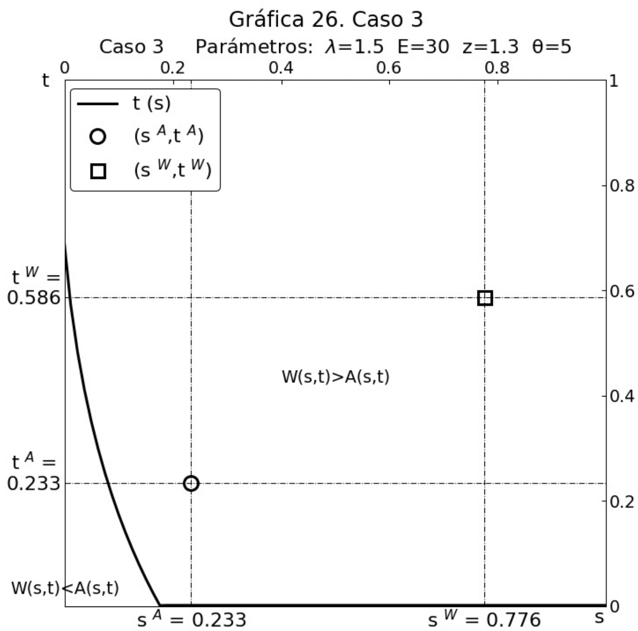
Se analiza el caso dos cuando las desigulades son estrictas. El par (t^{A}, s^{A}) maximiza nuestro problema si solo se tuviera la restricción $A(t, s)$, sin embargo, considerando también la restricción $W(t, s)$, el par (t^{A}, s^{A}) es infactible dado que, como dice la definición del caso $W(t^{A}, s^{A}) < A(t^{A}, s^{A})$, al maximizar se satura la restricción, es decir, $A(t^{A}, s^{A}) = D$ por lo tanto $W(t^{A}, s^{A}) < D$, lo cual incumple con la restricción (3). Por otro lado, el par (t^{W}, s^{W}) también es infactible, como dice la definición del caso $W(t^{W}, s^{W}) > A(t^{W}, s^{W})$, y al maximizar se satura la restricción, es decir, $W(t^{W}, s^{W}) = D$ por lo tanto $A(t^{W}, s^{W}) < D$, lo cual incumple con la restricción (1).

Dado que ninguno de los dos puntos es factible, habría que desplazarse hasta la línea $t(s)$, pero sin pasar de una región a otra ya que, dada la condición de concavidad de las funciones (6) y (9), entre más nos alejemos de los puntos (t^{A}, s^{A}) y (t^{W}, s^{W}) menor será la función objetivo.

Por lo tanto, el punto óptimo en este caso dos está sobre la línea $t(s)$, condición que define al punto $\left(t^I, s^I\right)$

Caso tres

$(t^*, s^*)=\left(t^A, s^A\right)$ $si\, W\left(t^W, s^W\right) > A\left(t^W, s^W\right)$, $W\left(t^A, s^A\right) > A\left(t^A, s^A\right)$



El óptimo en el caso tres se encuentra de forma análoga al caso uno con la diferencia de que ahora los puntos $\left(t^A, s^A\right)$ y $\left(t^W, s^W\right)$ se encuentran en la región donde $W(t, s) > A(t, s)$, el par $\left(t^W, s^W\right)$ es infactible, como dice la definición del caso $W\left(t^W, s^W\right) > A\left(t^W, s^W\right)$, y al maximizar se satura la restricción, es decir, $W\left(t^W, s^W\right) = D$, por lo tanto, $A\left(t^W, s^W\right) < D$, lo cual incumple con la restricción (1).

Por otro lado, el par $\left(t^A, s^A\right)$ si es factible, saturando la restricción de habilidad obtenemos que $A\left(t^A, s^A\right) = D < W\left(t^A, s^A\right)$, cumpliéndose las restricciones (1) y (3). Para descartar otro punto $\left(t^D, s^D\right)$ tal que $W\left(t^D, s^D\right) < A\left(t^D, s^D\right)$, se pueden seguir los mismos pasos que en el caso uno.

Demostración del corolario 2

La demotración se divide en dos partes.

Parte a)

Por demostrar que en el caso dos $t^I \geq t^A$, $s^I \geq s^A$
Existen cuatro posibles escenarios:
escenario A: $t^I \geq t^A$ y $s^I < s^A$
escenario B: $t^I < t^A$y $s^I \geq s^A$
escenario C: $t^I \geq t^A$y $s^I \geq s^A$
escenario D: $t^I < t^A$ y $s^I < s^A$
Se recurrirá a la función $R(s,t)$ para la demostración,

$$R(s,t) = A(s,t) - W(s,t)$$

Si se parte del escenario D donde $t^I < t^A$ y $s^I < s^A$, entonces $R\left(s^I, t^I\right) > R\left(s^A, t^A\right)$ debido a que $R(s,t)$ es decreciente en ambas variables. Por definición $R\left(s^I, t^I\right) = 0$, en consecuencia $R\left(s^A, t^A\right) < 0$, lo cual se contradice con la definición del caso dos donde $R\left(s^A, t^A\right) > 0$, de esta manera se descarta el escenario D.

Ahora se desarrolla el problema de maximización que es resuelto por t^I y s^I utilizando el método de Lagrange.

$\text{máx}_{t,s}\, cf_2(k(t)) + cf_2(k(s)) + tf(k(t)) + sf(k(s))$.
s.a $R(t,s) = 0$.

$\mathcal{L} = cf_2(k(t)) + cf_2(k(s)) + tf(k(t)) + sf(k(s))$
$-\psi\left(cf_2(k(t)) + cf_2(k(s)) - zE + z(2-\lambda)k(t) + z\lambda k(s)\right)$

$\mathcal{L}_t = cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right) + t^I f'(k)\,k'\left(t^I\right) + f\left(k\left(t^I\right)\right)$
$-\psi\left(cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\right) = 0$

$$\mathcal{L}_s = cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right) + s^I f'(k)\,k'\left(s^I\right) + f\left(k\left(s^I\right)\right)$$
$$-\psi\left(cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right) + z\lambda k'\left(s^I\right)\right) = 0$$

$$\mathcal{L}_\psi = -cf_2\left(k\left(s^I\right)\right) - cf_2\left(k\left(s^I\right)\right) + zE - z\,(2-\lambda)\,k\left(t^I\right) - z\lambda k\left(s^I\right) = 0$$

$cf_2'(k)\,k'(x) + xf'(k)\,k'(x) + f(k(x))$ es la condición de primer orden del problema de maximización cuando solo se toma en cuenta la restricción de habilidad para pagar, por lo que es decreciente, entonces suponiendo que se está en el escenario A donde $t^I \geq t^A$ y $s^I < s^A$, dado que $cf_2'(k)\,k'\left(t^A\right)+t^A f'(k)\,k'\left(t^A\right)+f\left(k\left(t^A\right)\right) = 0$, se puede afirmar que $cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right)+ t^I f'(k)\,k'\left(t^I\right) + f\left(k\left(t^I\right)\right) \leq 0$, lo cual implica $-\psi\left(cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\right) \geq 0$ para que $\mathcal{L}_t$ pueda ser igual a cero. Con base en $f_2'(k) > 0$ y $k'(t) < 0$, se afirma que la suma $cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)$ es negativa, de donde se deduce que $\psi \geq 0$.

Siguiendo los mismos pasos, se encuentra que $cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right)+s^I f'(k)\,k'\left(s^I\right)+f\left(k\left(s^I\right)\right) > 0$, lo que implica $\psi < 0$ para que $\mathcal{L}_s$ pueda ser igual a cero, dada la contradicción del signo de ψ se descarta la existencia del escenario A, con base en el mismo procedimiento se descarta también la existencia del escenario B. Ya que el escenario C no presenta estas contradicciones, se afirma que en el caso dos $t^I \geq t^A$y $s^I \geq s^A$, también se obtiene que $\psi \geq 0$, lo cual será útil para posteriores demostraciones.

Parte b)

Por demostrar que en el caso dos $t^W \geq t^I$ y $s^W \geq s^I$

Existen cuatro posibles escenarios:

escenario A: $t^W \geq t^I$ y $s^W < s^I$

escenario B: $t^W < t^I$ y $s^W \geq s^I$

escenario C: $t^W \geq t^I$ y $s^W \geq s^I$

escenario D: $t^W < t^I$ y $s^W < s^I$

Si se parte del escenario D donde $t^W < t^I$ y $s^W < s^I$, entonces $R\left(s^W, t^W\right) > R\left(s^I, t^I\right)$, debido a que $R(s,t)$ es decreciente en ambas variables, por definición $R\left(s^I, t^I\right) = 0$, en consecuencia $R\left(s^W, t^W\right) > 0$, lo cual se contradice con la definición del caso dos donde $R\left(s^W, t^W\right) \leq 0$, de esta manera se descarta el escenario D.

Ahora se desarrolla el problema de maximización que es resuelto por t^I y s^I utilizando el método de Lagrange, pero cambiamos la función a maximizar, lo cual es posible ya que $cf_2(k(t)) + cf_2(k(s)) = zE - z(2-\lambda)k(t) - z\lambda k(s)$.

$\text{máx}_{t,n}\, zE - z(2-\lambda)k(t) - z\lambda k(s) + tf(k(t)) + sf(k(s))$.
s.a $R(t,s) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& zE - z(2-\lambda)k(t) - z\lambda k(s) + tf(k(t)) + sf(k(s))\\ &-\Delta(cf_2(k(t)) + cf_2(k(s)) - zE + z(2-\lambda)k(t) + z\lambda k(s))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t =& -z(2-\lambda)k'\left(t^I\right) + t^I f'(k)k'\left(t^I\right) + f\left(k\left(t^I\right)\right)\\ &-\Delta\left(cf_2'(k)k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s =& -z\lambda k'\left(s^I\right) + s^I f'(k)k'\left(s^I\right) + f\left(k\left(s^I\right)\right)\\ &-\Delta\left(cf_2'(k)k'\left(s^I\right) + z\lambda k'\left(s^I\right)\right) = 0\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_\triangle = -cf_2\left(k\left(t^I\right)\right) - cf_2\left(k\left(s^I\right)\right) + zE - z(2-\lambda)k\left(t^I\right) - z\lambda k\left(s^I\right) = 0$$

$-z(2-\lambda)k'(x) + xf'(k)k'(x) + f(k(x))$ y $-z\lambda k'(x) + tf'(k)k'(x) + f(k(x))$ son las condiciones de primer orden del problema de maximización cuando solo se toma en cuenta la restricción de voluntad para pagar, por lo que son decrecientes, entonces suponiendo que se está en el escenario A donde $t^I \geq t^W$ y $s^I < s^W$, dado que $-z(2-\lambda)k'\left(t^W\right) + t^W f'(k)k'\left(t^W\right) + f\left(k\left(t^W\right)\right) = 0$ se puede afirmar que $-z(2-\lambda)k'\left(t^I\right) + t^I f'(k)k'\left(t^I\right) + f\left(k\left(t^I\right)\right) \leq 0$, lo cual implica que $-\Delta\left(cf_2'(k)k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\right) \geq 0$ para que $\mathcal{L}_t$ pueda ser igual a cero. Con base en $f_2'(k) > 0$ y $k'(t) < 0$, la suma $cf_2'(k)k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)$ es negativa, de donde se deduce que $\Delta \geq 0$.

Siguiendo los mismos pasos, se encuentra que $-z\lambda k'\left(s^I\right) + s^I f'(k)k'\left(s^I\right) + f\left(k\left(s^I\right)\right) > 0$, lo que implica que $\Delta < 0$ para que $\mathcal{L}_s$ pueda ser igual a cero, dada la contradicción del signo de Δ se descarta la existencia del escenario A. Con base en el mismo procedimiento se descarta también la existencia del escenario B. Ya que el escenario C no presenta estas contradicciones, se afirma que en el caso dos $t^W \geq t^I$ y $s^W \geq s^I$.

Demostración del corolario 3

La prueba del corolario se dividirá en seis partes y de nuevo se utilizará la función $R(s,t)$.

Parte a)

Por demostrar que en el caso uno$\frac{\partial D_1^*}{\partial E} > 0$
$D_1^* = zE - z\left(2-\lambda\right)k\left(t\right) - z\lambda k\left(s\right)$
$\frac{\partial D_1^*}{\partial E} = z > 0$

Parte b)

Para que, estando en el caso 1, en algún punto el aumento de E provoque un cambio de caso del 1 al 2, el signo de $R\left(t^W, s^W\right)$ debe pasar de positivo a negativo al aumentar E. Primeramente verificamos que la función R es decreciente en E.
$\frac{\partial R\left(t^W, s^W\right)}{\partial E} = -z < 0.$

Después basta con observar que un aumento de E, que no tiene límite superior en su rango, siempre puede hacer que la función R sea negativa.

Parte c)

Por demostrar que en el caso dos $\frac{\partial t^I}{\partial E} < 0, \frac{\partial s^I}{\partial E} < 0$.

Partiendo de la maximización que se planteó en la parte a) de la demostración del corolario 2 derivamos con respecto a E e igualamos a cero, tomando en cuenta que t^I, s^I y ψ dependen de E.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{tE} = cf_2''\left(k\right)k'\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E}k'\left(t^I\right) + cf_2'\left(k\right)k''\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E} + \tfrac{\partial t^I}{\partial E}f'\left(k\right)k'\left(t^I\right)\\
&+t^I\left[f''\left(k\right)k'\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E}k'\left(t^I\right) + f'\left(k\right)k''\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E}\right] + f'\left(k\right)k'\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E}\\
&-\psi\left(cf_2''\left(k\right)k'\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E}k'\left(t^I\right) + cf_2'\left(k\right)k''\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E} + z(2-\lambda)k''\left(t^I\right)\tfrac{\partial t^I}{\partial E}\right)\\
&-\tfrac{\partial \psi}{\partial E}\left(cf_2'\left(k\right)k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{sE} = cf_2''\left(k\right)k'\left(s^I\right)\tfrac{\partial s^I}{\partial E}k'\left(s^I\right) + cf_2'\left(k\right)k''\left(s^I\right)\tfrac{\partial s^I}{\partial E} + \tfrac{\partial s^I}{\partial E}f'\left(k\right)k'\left(s^I\right)$$

$$+s^I\left[f''(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}k'\left(s^I\right)+f'(k)\,k''\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}\right]+f'(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}$$
$$-\psi\left(cf_2''(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}k'\left(s^I\right)+cf_2'(k)\,k''\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}+z\lambda k''\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}\right)$$
$$-\frac{\partial\psi}{\partial E}\left(cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right)+z\lambda k'\left(s^I\right)\right)=0$$

$$\mathcal{L}_{\psi E}=-cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial E}-cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}$$
$$+z-z(2-\lambda)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial E}-z\lambda k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E}=0$$

ecuaciones con las que se arman las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix}
\begin{array}{c} cf_2''(k)\,k'\left(t^I\right)k'\left(t^I\right)\\ +cf_2'(k)\,k''\left(t^I\right)\\ +2f'(k)\,k'\left(t^I\right)\\ +t^If''(k)\,k'\left(t^I\right)k'\left(t^I\right)\\ +t^If'(k)\,k''\left(t^I\right)\\ -\psi cf_2''(k)\,k'\left(t^I\right)k'\left(t^I\right)\\ -\psi cf_2'(k)\,k''\left(t^I\right)\\ -\psi z(2-\lambda)\,k''\left(t^I\right)\end{array} & 0 & \begin{array}{c}-cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right)\\ -z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\end{array}\\
0 & \begin{array}{c} cf_2''(k)\,k'\left(s^I\right)k'\left(s^I\right)\\ +cf_2'(k)\,k''\left(s^I\right)\\ +2f'(k)\,k'\left(s^I\right)\\ +s^If''(k)\,k'\left(t^I\right)k'\left(s^I\right)\\ +s^If'(k)\,k''\left(s^I\right)\\ -\psi cf_2''(k)\,k'\left(s^I\right)k'\left(s^I\right)\\ -\psi cf_2'(k)\,k''\left(s^I\right)\\ -\psi z\lambda k''\left(s^I\right)\end{array} & \begin{array}{c}-cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right)\\ -z\lambda k'\left(s^I\right)\end{array}\\
\begin{array}{c}-cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right)\\ -z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\end{array} & \begin{array}{c}-cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right)\\ -z\lambda k\left(s^I\right)\end{array} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\frac{\partial t^I}{\partial E}\\ \frac{\partial s^I}{\partial E}\\ \frac{\partial\psi}{\partial E}\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -z\end{pmatrix}$$

para facilitar la notación se define así la matriz:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} cf_2''(k)\,k'(t^I)\,k'(t^I) \\ +cf_2'(k)\,k''(t^I) \\ +2f'(k)\,k'(t^I) \\ +t^I f''(k)\,k'(t^I)\,k'(t^I) \\ +t^I f'(k)\,k''(t^I) \\ -\psi cf_2''(k)\,k'(t^I)\,k'(t^I) \\ -\psi cf_2'(k)\,k''(t^I) \\ -\psi z\,(2-\lambda)\,k''(t^I) \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} -cf_2'(k)\,k'(t^I) \\ -z(2-\lambda)k'(t^I) \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} cf_2''(k)\,k'(s^I)\,k'(s^I) \\ +cf_2'(k)\,k''(s^I) \\ +2f'(k)\,k'(s^I) \\ +s^I f''(k)\,k'(t^I)\,k'(s^I) \\ +s^I f'(k)\,k''(s^I) \\ -\psi cf_2''(k)\,k'(s^I)\,k'(s^I) \\ -\psi cf_2'(k)\,k''(s^I) \\ -\psi z\lambda k''(s^I) \end{matrix} & \begin{matrix} -cf_2'(k)\,k'(s^I) \\ -z\lambda k'(s^I) \end{matrix} \\ \begin{matrix} -cf_2'(k)\,k'(t^I) \\ -z(2-\lambda)k'(t^I) \end{matrix} & \begin{matrix} -cf_2'(k)\,k'(s^I) \\ -z\lambda k(s^I) \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & F \\ B & F & 0 \end{pmatrix}$$

por la regla de Cramer se obtiene:

$\frac{\partial t^I}{\partial E} = \frac{1}{H}\left(-(-z)CB\right)$

$\frac{\partial s^I}{\partial E} = \frac{1}{H}\left(-(-z)FA\right)$

donde H es el determinante del hessiano orlado que es positivo ya que suponemos que se está maximizando. Además se adopta el supuesto de que $\mathcal{L}_{tt} < 0$ y $\mathcal{L}_{ss} < 0$.

$A = \mathcal{L}_{tt} < 0$

$C = \mathcal{L}_{ss} < 0$

$B = -cf_2'(k)\,k'(t^I) - z(2-\lambda)k'(t^I) > 0$

$F = -cf_2'(k)\,k'(s^I) - z\lambda k'(s^I) > 0$

por lo tanto

$\frac{\partial t^I}{\partial E} = \frac{1}{H}\left(-(-z)CB\right) < 0$
$\frac{\partial s^I}{\partial E} = \frac{1}{H}\left(-(-z)FA\right) < 0$

Parte d)

Por demostrar que en el caso dos $\frac{\partial D_1^*}{\partial E} > 0$

En este caso $D_1^* = cf_2\left(k\left(t^I\right)\right) + cf_2\left(k\left(s^I\right)\right) = zE - z\left(2-\lambda\right)k\left(t^I\right) - z\lambda k\left(s^I\right) \Rightarrow \frac{\partial D_1^*}{\partial E} = \frac{\partial\left(cf_2\left(k\left(t^I\right)\right)+cf_2\left(k\left(s^I\right)\right)\right)}{\partial E} = cf_2'\left(k\right)k\text{'}\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial E} + cf_2'\left(k\right)k\text{'}\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial E} > 0.$

Parte e)

Para que en algún punto el aumento de E provoque un cambio de caso del dos al caso tres, el signo de $R\left(t^A, s^A\right)$ debe pasar de positivo a negativo, la relación entre R y E es negativa.

$$\frac{\partial R\left(t^A, s^A\right)}{\partial E} = -z < 0.$$

Bajo la misma lógica de la parte b) de esta demostración siempre es posible volver la función R negativa al aumentar E.

Parte f)

En el caso tres $D_1^* = cf_2\left(k\left(t^A\right)\right) + cf_2\left(k\left(s^A\right)\right)$ y las tasas impositivas no dependen de E, por lo tanto, $\frac{\partial D_1^*}{\partial E} = 0$.

Demostración del corolario 4

Para observar el que de s^I puede pasar de creciente a decreciente ante cambios en λ, ver ejercicio numérico 2 y la gráfica 7. Para ver que variaciónes de λ no garantizan cambios de caso ir a ejercicios numéricos 1 y 3, para ver que es posible que estos cambios de caso sucedan ver ejercicios numéricos 4 y 5. En cuanto al hecho de que s^I es creciente para valores de λ cercanos a uno ver el final de la parte a) que se desarrolla a continuación.

Parte a)

Por demostrar que en el caso dos $\frac{\partial t^I}{\partial \lambda} < 0$

Se parte de la maximización que se planteó en la prueba de que $t^I \geq t^A$ y $s^I \geq s^A$ en el corolario 2 se deriva con respecto a λ y se iguala a cero, tomando en cuenta que t^I, s^I y ψ dependen de λ.

$$\mathcal{L}_{t\lambda} = cf_2''(k)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda}k'\left(t^I\right) + cf_2'(k)\,k''\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda} + \frac{\partial t^I}{\partial \lambda}f'(k)\,k'\left(t^I\right)$$
$$+t^I\left[f''(k)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda}k'\left(t^I\right) + f'(k)\,k''\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda}\right] + f'(k)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda}$$
$$-\psi\left(cf_2''(k)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda}k'\left(t^I\right) + cf_2'(k)\,k''\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda} + z(2-\lambda)k''\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda}\right)$$
$$+\psi zk'\left(t^I\right) - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\left(cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right) + z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)\right) = 0$$

$$\mathcal{L}_{s\lambda} = cf_2''(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda}k'\left(s^I\right) + cf_2'(k)\,k''\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda} + \frac{\partial s^I}{\partial \lambda}f'(k)\,k'\left(s^I\right)$$
$$+s^I\left[f''(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda}k'\left(s^I\right) + f'(k)\,k''\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda}\right] + f'(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda}$$
$$-\psi\left(cf_2''(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda}k'\left(s^I\right) + cf_2'(k)\,k''\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda} + z\lambda k''\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda}\right)$$
$$-\psi zk'\left(t^I\right) - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\left(cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right) + z\lambda k'\left(s^I\right)\right) = 0$$

$$\mathcal{L}_{\psi\lambda} = -cf_2'(k)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda} - cf_2'(k)\,k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda}$$
$$-z(2-\lambda)\,k'\left(t^I\right)\frac{\partial t^I}{\partial \lambda} - z\lambda k'\left(s^I\right)\frac{\partial s^I}{\partial \lambda} + zk\left(t^I\right) - zk\left(s^I\right) = 0$$

ecuaciones con las que se arman las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix}
\begin{array}{c} cf_2''\left(k\right)k'\left(t^I\right)k'\left(t^I\right) \\ +cf_2'\left(k\right)k''\left(t^I\right) \\ +2f'\left(k\right)k'\left(t^I\right) \\ +t^I f''\left(k\right)k'\left(t^I\right)k'\left(t^I\right) \\ +t^I f'\left(k\right)k''\left(t^I\right) \\ -\psi c f_2''\left(k\right)k'\left(t^I\right)k'\left(t^I\right) \\ -\psi c f_2'\left(k\right)k''\left(t^I\right) \\ -\psi z\left(2-\lambda\right)k''\left(t^I\right) \end{array} & 0 & \begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k'\left(t^I\right) \\ -z(2-\lambda)k'\left(t^I\right) \end{array} \\
0 & \begin{array}{c} cf_2''\left(k\right)k'\left(s^I\right)k'\left(s^I\right) \\ +cf_2'\left(k\right)k''\left(s^I\right) \\ +2f'\left(k\right)k'\left(s^I\right) \\ +s^I f''\left(k\right)k'\left(t^I\right)k'\left(s^I\right) \\ +s^I f'\left(k\right)k''\left(s^I\right) \\ -\psi c f_2''\left(k\right)k'\left(s^I\right)k'\left(s^I\right) \\ -\psi c f_2'\left(k\right)k''\left(s^I\right) \\ -\psi z\lambda k''\left(s^I\right) \end{array} & \begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k'\left(s^I\right) \\ -z\lambda k'\left(s^I\right) \end{array} \\
\begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k'\left(t^I\right) \\ -z(2-\lambda)k'\left(t^I\right) \end{array} & \begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k'\left(s^I\right) \\ -z\lambda k\left(s^I\right) \end{array} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial t^I}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial s^I}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\psi z k'\left(t^I\right) \\ \psi z k'\left(s^I\right) \\ \begin{array}{c} zk\left(s^I\right) \\ -zk\left(t^I\right) \end{array} \end{pmatrix}$$

para facilitar la notación se define así la matriz:

$$
\begin{pmatrix}
\begin{array}{c} cf_2''\left(k\right)k'\left(t^I\right)k'\left(t^I\right) \\ +cf_2'\left(k\right)k''\left(t^I\right) \\ +2f'\left(k\right)k'\left(t^I\right) \\ +t^I f''\left(k\right)k\text{'}\left(t^I\right)k\text{'}\left(t^I\right) \\ +t^I f'\left(k\right)k'\text{'}\left(t^I\right) \\ -\psi cf_2''\left(k\right)k\text{'}\left(t^I\right)k'\left(t^I\right) \\ -\psi cf_2'\left(k\right)k''\left(t^I\right) \\ -\psi z\left(2-\lambda\right)k''\left(t^I\right) \end{array} & 0 & \begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k\text{'}\left(t^I\right) \\ -z(2-\lambda)k'\left(t^I\right) \end{array} \\
0 & \begin{array}{c} cf_2''\left(k\right)k'\left(s^I\right)k'\left(s^I\right) \\ +cf_2'\left(k\right)k''\left(s^I\right) \\ +2f'\left(k\right)k'\left(s^I\right) \\ +s^I f''\left(k\right)k\text{'}\left(t^I\right)k\text{'}\left(s^I\right) \\ +s^I f'\left(k\right)k'\text{'}\left(s^I\right) \\ -\psi cf_2''\left(k\right)k\text{'}\left(s^I\right)k'\left(s^I\right) \\ -\psi cf_2'\left(k\right)k''\left(s^I\right) \\ -\psi z\lambda k''\left(s^I\right) \end{array} & \begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k\text{'}\left(s^I\right) \\ -z\lambda k'\left(s^I\right) \end{array} \\
\begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k\text{'}\left(t^I\right) \\ -z(2-\lambda)k'\left(t^I\right) \end{array} & \begin{array}{c} -cf_2'\left(k\right)k\text{'}\left(s^I\right) \\ -z\lambda k\left(s^I\right) \end{array} & 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
A & 0 & B \\
0 & C & F \\
B & F & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
-\psi zk'\left(t^I\right) \\
\psi zk'\left(s^I\right) \\
\begin{array}{c} zk\left(s^I\right) \\ -zk\left(t^I\right) \end{array}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
W \\
X \\
Y
\end{pmatrix}
$$

por la regla de Cramer se obtiene:
$\frac{\partial t^I}{\partial \lambda} = \frac{1}{H} \left(BXF - YCB - FFW\right)$
$\frac{\partial s^I}{\partial \lambda} = \frac{1}{H} \left(WFB - YFA - BXB\right)$
donde H es el determinante del hessiano orlado que es positivo ya que se supone que se está maximizando. . Además se adopta el supuesto de que $\mathcal{L}_{tt} < 0$ y $\mathcal{L}_{ss} < 0$.
$A = \mathcal{L}_{tt} < 0$
$C = \mathcal{L}_{ss} < 0$
$B = -cf_2' \left(k\right) k' \left(t^I\right) - z(2-\lambda)k' \left(t^I\right) > 0$
$F = -cf_2' \left(k\right) k' \left(s^I\right) - z\lambda k' \left(s^I\right) > 0$
$W = -\psi z k' \left(t^I\right) > 0$
$X = \psi z k' \left(s^I\right) < 0$
$Y = zk \left(s^I\right) - zk \left(t^I\right) < 0$
por lo tanto
$\frac{\partial t^I}{\partial \lambda} = \frac{1}{H} \left(BXF - YCB - FFW\right) < 0$
obsérvese que $WFB > 0$,$-BBX > 0$ y que cuando $\lambda = 1 \Rightarrow s^I = t^I \Rightarrow Y = 0$
por lo tanto $\lambda = 1 \Rightarrow \frac{\partial s^I}{\partial \lambda} = \frac{1}{H} \left(WFB - YFA - BXB\right) > 0$, de esta manera se puede asegurar que para valores de λ cercanos a uno s^I será creciente en λ, sin embargo, conforme λ aumenta, la relación puede cambiar de signo, tal cual lo muestra el ejercicio numérico 2.

Parte b)

Por demostrar que $s^I \geq t^I$
Se retoman las ecuaciones de la parte a) de la demostración del corolario 2 y se recuerda que en esta parte se encontró que $\psi \geq 0$
$\mathcal{L}_t = cf_2' \left(k\right) k' \left(t^I\right) + t^I f' \left(k\right) k' \left(t^I\right) + f \left(k \left(t^I\right)\right)$
$-\psi[cf_2' \left(k\right) k' \left(t^I\right) + z(2-\lambda)k' \left(t^I\right)] = 0$

$\mathcal{L}_s = cf_2' \left(k\right) k' \left(s^I\right) + s^I f' \left(k\right) k' \left(s^I\right) + f \left(k \left(s^I\right)\right)$
$-\psi[cf_2' \left(k\right) k' \left(s^I\right) + z\lambda k' \left(s^I\right)] = 0$
Además se recurre al supuesto de que $\mathcal{L}_{tt} < 0$
Si se evalua $\mathcal{L}_s$ con la tasa t^Ise obtiene
$cf_2' \left(k\right) k' \left(t^I\right) + t^I f' \left(k\right) k' \left(t^I\right) + f \left(k \left(t^I\right)\right) - \psi[cf_2' \left(k\right) k' \left(t^I\right) + z(2-\lambda)k' \left(t^I\right)]$

Dado que $z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)$ es mayor o igual a $z\lambda k'\left(t^I\right)$,
$cf_2'\left(k\right)k'\left(t^I\right)+t^I f'\left(k\right)k'\left(t^I\right)+f\left(k\left(t^I\right)\right)-\psi[cf_2'\left(k\right)k'\left(t^I\right)+z(2-\lambda)k'\left(t^I\right)]\geq 0$

Para reducir la ecuación e igualarla a cero habría que aumentar la tasa impositiva, en consecuencia $s^I\geq t^I$.

Conclusión general

En los tres artículos presentados se analizaron distintos escenarios donde la deuda soberana juega un papel central; en cada uno se encontraron resultados que invitan a la reflexión y a continuar el estudio del tema. En el primer artículo, donde se supone la existencia de dos recursos distintos del país deudor, se observa que un aumento de la capacidad de incautación o embargo de los acreedores no siempre significa que será más probable que la recompra de deuda mejore la situación del país. En específico, si aumenta la capacidad de incautar la dotación del país deudor, la cual no incluye a las reservas, es menos probable que la recompra de deuda sea conveniente para este país. Por otro lado, si el aumento es en la capacidad de incautar las reservas, la recompra se torna más conveniente.

El modelo del segundo artículo tiene dos características clave: considera dos periodos, y permite que el país no pague su deuda aunque le vaya bien económicamente. Plantear de esta manera el análisis permitió obtener una serie de estrategias óptimas que dependen de variables como: el monto de la deuda heredada, los recursos del país deudor en cada estado de la naturaleza, la probabilidad de que suceda el estado bueno de la naturaleza, y el porcentaje de incautación. Estas estrategias pueden variar bastante, por ejemplo, lo más conveniente para el país puede ser pagar solo lo que le pueden embargar en cada periodo; recomprar la deuda en uno de los dos periodos o en ambos; pagar solo lo embargable en el primer periodo y liquidar la deuda en el segundo, y por último, recomprar deuda en el primer periodo y en el segundo liquidarla. De manera general, este artículo encuentra que entre mayor sea la deuda y menores los recursos del país deudor, más conveniente será la recompra para este país. Además, en este artículo se encontró que cuando la recompra es conveniente, entre mayor sea el monto recomprado, mejor será la situación del país frente a su deuda.

En el tercer artículo se cambia el enfoque. A diferencia de los dos primeros modelos, ya no se estudia la recompra, en cambio, se analiza la mejor estrategia fiscal de un gobierno miope. Se obtiene que este gobierno fija una tasa impositiva menor al sector que se vería más afectado por un impago de la deuda; este sector puede identificarse como el sector financiero. La dinámica del resultado del modelo es la siguiente: el gobierno miope da incentivos o subvenciones al sector financiero, esto se refleja en un crecimiento del sector, lo que tiene como consecuencia un aumento del costo para la economía doméstica en caso de un posible impago de deuda. El aumento de este costo lo genera intencionalmente el gobierno miope con el objetivo de dar una señal a los acreedores de que el siguiente gobierno preferirá pagar su deuda, dado que un impago le resultaría muy costoso. Otro resultado del artículo es que, cuando el costo para la economía doméstica es bajo, las tasas impositivas del conjunto de la economía tienden a ser menores.

En conjunto, los tres artículos introducen al tema de deuda soberana. En ellos se determina cuáles son las mejores estrategias para un país en diferentes contextos y se explica la lógica económica que está detrás del resultado, lo cual aporta al debate sobre la deuda y busca las decisiones que conduzcan al bienestar. Al mismo tiempo se abren posibilidades para extensiones, algunas propuestas en los artículos, aunque la lista podría ampliarse sin dificultad. En este sentido, los tres artículos contribuyen a la generación de conocimiento, tanto por sus resultados en sí mismos como por las preguntas que se generan a partir de ellos.