EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

RIESGO MORAL Y COMPETENCIA DUOPOLÍSTICA EN LOCALIZACIÓN

CARLOS DANIEL RUIZ PÉREZ

PROMOCIÓN 2012-2014

ASESOR:

DR. JAIME SEMPERE CAMPELLO

JULIO 2014

Riesgo moral y competencia duopolística en localización

Carlos Daniel Ruiz Pérez

Julio 2014

Resumen

En un modelo de ciudad lineal, donde los consumidores valoran el esfuerzo que realiza una empresa, se encuentra que será óptimo para las empresas diferenciarse lo máximo posible (Principio de Máxima Diferenciación), cobrar el precio más alto y hacer esfuerzo bajo. Además, se analiza el caso cuando el modelo es tipo Agente-Principal donde existen problemas de riesgo moral. Cuando no se puede cobrar un monto fijo se situarán en el centro (Principio de Mínima Diferenciación), y harán el máximo esfuerzo posible, pero no habrá beneficios. Mientras que cuando se puede cobrar un monto fijo, en equilibrio, las empresas realizarán un esfuerzo particularmente bajo (incluso más bajo que cuando no existen problemas de riesgo moral), se ofrecerá un contrato de renta compartida y el Principal tendrá más beneficios que en el caso donde no existen problemas de riesgo moral.

AGRADECIMIENTOS

Al COLMEX y al CONACyT por apoyarme económicamente en mis estudios de Maestría, y por haberme dado la oportunidad de explotar mi potencial.

A mi profesor y asesor, el Dr. Jaime Sempere, ya que sin su apoyo y su guía este trabajo quizás no existiría; sus consejos fueron de gran ayuda en la producción de la presente tesis.

A mi papá, mi mamá, Erik y Miguelito por todo su apoyo durante la realización de mis estudios de Maestría, por ayudarme a crecer en todos los ámbitos de mi vida, y por tolerarme y entenderme todos estos años.

A mis abuelitos Nico, Sol, Manuel y Carlos por compartir todas sus experiencias conmigo y ayudarme a crecer en todo aspecto de mi vida.

A Alexa por haber compartido incontables experiencias juntos.

A mis profesores y compañeros, cuyas clases, exposiciones y discusiones han contribuido a mi formación como economista.

A toda otra persona que me ha apoyado de cualquier manera, y cuyo anonimato no disminuye en nada su aportación a este trabajo.

Índice

1. Introducción

Uno de los supuestos cruciales detrás de los modelos neoclásicos en economía (que conlleva a la llamada “Paradoja de Bertrand”) es que las empresas producen un bien homogéneo; por tanto, el precio es la única variable de interés para los consumidores y ninguna empresa puede subirlo más allá del costo marginal sin perder toda su cuota de mercado. En la práctica se sabe que esto es improbable pues algunos consumidores prefieren una marca en particular, toman en cuenta qué tan lejos está la tienda que provee el producto, evalúan la calidad de los bienes y servicios, y toman en cuenta muchas más variables que el precio.

Hotelling (1929) afirmó que la competencia entre dos vendedores de un producto homogéneo conduce a su aglomeración en el centro de un mundo lineal con fronteras. La idea subyacente es que cualquier empresa ganaría, a través de un aumento de su cuota de mercado, mediante el establecimiento cerca de su competidor en la parte más grande del mercado.

Este proceso, aparentemente razonable, ha demostrado ser inválido por Lerner y Singer (1937) en el caso de tres empresas. De hecho, es obvio que dadas dos empresas en el centro del mercado, la tercera se localizará inmediatamente a un lado de ellas, con lo que les quita a las otras dos la mitad del mercado. La empresa que quede enmedio tendrá casi cero cuota de mercado y, en consecuencia, también se moverá inmediatamente afuera de ellas, lo que provoca que no exista equilibrio.

Además, cuando el precio es una variable de decisión la predicción de Hotelling no se mantiene incluso en el caso de dos empresas (d’Aspremont *et al.*, 1979). Cuando ambas empresas se localizan juntas, la competencia de precios *à la* Bertrand hace bajar los precios hasta el costo marginal, por tanto los beneficios son cero. Así, las empresas tienen una ventaja al diferenciarse espacialmente con el fin de disfrutar de los beneficios de un cuasimonopolio local. Todo esto destruye el llamado “Principio de Mínima Diferenciación.”

Un resultado bien conocido es que las empresas no quieren estar en el mismo lugar en el espacio (*v. gr.* d’Aspremont *et al.* (1979), Salop (1979), Gabszewicz y Thisse (1979), entre otros), la razón es la Paradoja de Bertrand misma: Dos empresas que producen bienes iguales compiten fuertemente en precios (al menos en el modelo estático). La separación local de empresas provoca que se creen “nichos de mercado” y permite que las empresas tengan poder de mercado en sus respectivas demandas. Esto implica que las empresas quieran tener la máxima diferenciación local posible y, de esto, se desprende el llamado “Principio de Máxima Diferenciación.”

A pesar de este resultado anteriormente expuesto, existen condiciones de mercado que lo impiden. Por ejemplo, existen productos que por sus características técnicas la empresa no puede diferenciar (*v. gr.*, las tapas de botellas), hay mercados con precios fijos, puede haber concentraciones discretas de la demanda o podrían existir ganancias en costos o en demanda por aglomeración (externalidades).

El modelo propuesto en el presente documento es útil para analizar la localización geográfica en la que se establecerán dos empresas que compiten muy fuertemente, y que no solo eligen su precio sino el esfuerzo a realizar. Además, en vista de que el esfuerzo es una variable no-observable, el modelo también se presta para analizar problemas de Agente-Principal y estructuras de contrato bajo competencia. En la literatura existen muy pocos modelos teóricos que analicen la estructura contractual bajo competencia, por lo que este modelo es conveniente para analizar esa situación pues propone una forma muy particular de competir (horizontalmente) que es útil en la práctica.

A pesar de la poca literatura teórica al respecto, la idea no es nueva; de hecho, en la práctica los consultores de franquicias lo tienen muy presente. Phil Holand (dueño de la empresa *My Own Business*) afirma que la elección se localización es muy importante para el éxito de las franquicias[1] y señala que cada empresa tiene su propio "modelo de sitio" sobre el cual, dependiendo de qué valoran y cuáles son sus objetivos, analizan y eligen los lugares para sus franquiciatarios; él considera que es una buena opción establecerse a un lado de la competencia bajo ciertas circunstancias. Similarmente, Mark Siebert (dueño de la consultora de franquicias *iFranchise Group*) señala como un factor importante para mantener la calidad de una franquicia al "apoyo continuo" (*ongoing support*) y dentro de ese grupo cita características de diferenciación horizontal, publicidad, etc.[2]

La tesis se estructura de la siguiente manera: La Sección 2 resume muy brevemente las explicaciónes teóricas sobre por qué podría haber mínima diferenciación y explica concisamente los modelos de riesgo moral bajo competencia. La Sección 3 presenta el modelo de Hotelling e introduce la notación de los modelos ulteriormente presentados. Después, en la Sección 4 se propone el modelo que incluye la valoración del consumidor por el esfuerzo y, luego, que incluye problemas de riesgo moral. En la Sección 5 se presenta la discusión de resultados, y se encuentra que cuando una empresa no puede cobrar un monto fijo realizará el esfuerzo de mínima diferenciación (muy alto); cuando hay máxima diferenciación se hace menos esfuerzo, pero cuando hay máxima diferenciación y existen problemas de riesgo moral se hace el menor esfuerzo posible, y esto se ve reflejado en los beneficios, que aumentan entre menor sea el esfuerzo ejercido. Finalmente, se explican las conclusiones en la Sección 6.

[1] `http://www.myownbusiness.org/franchising_your_business/`
[2] `http://www.entrepreneur.com/article/202330`

2. Revisión de literatura

Hay dos corrientes que convergen en este modelo. Es de notarse que el presente documento es de los pocos que intentan conciliar estas corrientes.

1. La literatura que pretende explicar los procesos de diferenciación entre empresas. En particular, por qué las empresas no habrían en todo momento de buscar la máxima diferenciación.
2. La que intenta explicar las formas de los contratos que le ofrecen las empresas a sus gerentes bajo riesgo moral. En particular, la relación que existe entre la competencia y el esfuerzo de los gerentes.

En tanto a los procesos que llevan a una empresa a diferenciarse, se puede encontrar mucha literatura al respecto. Los primeros intentos datan de Hotelling (1929), y luego de d'Aspremont *et al.* (1979); que son las principales formas de modelar los comportamientos estratégicos de las empresas en tanto a su diferenciación, y de los cuales se desprenden muchas modificaciones muy bien conocidas (Salop (1979), Gabszewicz y Thisse (1979), Shaked y Sutton (1982), Shaked y Sutton (1983), entre otros).

Con respecto de la primera pregunta de por qué las empresas no siempre se diferencian máximamente se han planteado diversas posibles explicaciones. Las décadas pasadas muchos economistas intentaron examinar las condiciones bajo las cuales se restaura el Principio de Mínima Diferenciación. Butters (1977) es el primero en enfatizar la importancia de la publicidad y cómo ello afecta a la diferenciación; de Palma *et al.* (1985) y Rhee *et al.* (1992) introducen heterogeneidad tanto en los consumidores como en las empresas; Stahl (1982b) considera como una opción las conjeturas variacionales; Stahl (1982a) enfatiza la búsqueda de características óptimas de productos (modelos de "características puras"); Liebowitz (1982) modela bienes durables; Anderson y Neven (1991) suponen que las empresas compiten *à la* Cournot (en vez de *à la* Bertrand); Jehiel (1992) y Friedman y Thisse (1993) abordan la idea de colusión en precios; Zhang (1995) utiliza una política de *matching* en precios para mostrar que puede ocurrir colusión tácita y mínima diferenciación; Mai y kun Peng (1999) enfatiza la importancia de beneficios por externalidades que se generan por el intercambio de información entre empresas.

En el modelo de d'Aspremont *et al.* (1979) se obtiene que el "efecto estratégico" (el efecto directo de la localización de la empresa sobre sus propios beneficios) domina el "efecto demanda" (el efecto indirecto que tienen los precios de la competencia sobre la empresa), es decir, el acercarse al centro y ganar más cuota de mercado le es más costoso que el alejarse y arriesgarse a perderla; por lo cual les conviene a diferenciarse a ambas empresas y poner un precio más alto; estos efectos son de particular importancia para entender los resultados del presente modelo o cualquier modelo de este estilo.

La mayoría de modelos que encuentran mínima diferenciación utilizan supuestos que generalmente conllevan a que los efectos sean inversos, ello tiene como consecuencia que las empresas ganan más cuando se acercan al centro que cuando se alejan de éste, por lo que obviamente se obtiene el resultado inverso (que les conviene a las empresas la mínima diferenciación).

Con respecto de la segunda línea de literatura también se ha escrito mucho, aunque modelos teóricos hay pocos. La literatura más antigua al respecto es más bien empírica, no ofrece una explicación teórica para la conexión entre la competencia y los incentivos de los Agentes. Posteriormente hay varios intentos para modelar teóricamente el efecto de la competencia en los contratos. Jensen y Meckling (1976) muestran que el grado de competencia no afecta a los costos de los Agentes, por lo que tanto un monopolio como una empresa competitiva ofrecerán exactamente el mismo arreglo de incentivos en el contrato; Holmstrom (1982) y Stiglitz y Nalebuff (1983) utilizan el hecho de que la competencia genera información adicional, y por ende entre más competidores haya en la industria, si los choques a la demanda están correlacionados, se generará información adicional que ayudará a mitigar los problemas de riesgo moral; Hart (1983) desarrolla un modelo en el que el choque es transmitido vía el precio de mercado y el salario del Agente depende solo de los beneficios de la empresa, donde encuentra que mayor competencia aumenta el esfuerzo (aunque sus resultados dependen crucialmente de la forma de la función de utilidad supuesta, infinitamente averso al riesgo); Scharfstein (1988) muestra que si se cambia la función de utilidad del Agente en "Hart (1983)" se genera el resultado opuesto; Hermalin (1992) muestra bajo ese mismo marco que el efecto es ambiguo.

El presente modelo se abstrae de dichos efectos informacionales, a pesar de que se sabe que son importantes. En vez de eso, se elabora un modelo de ciudad lineal en el que el esfuerzo tiene un rol muy importante, pues los consumidores lo valoran. En primera instancia, el modelo es útil para analizar la localización geográfica en la que se establecerán dos empresas que compiten muy fuertemente, y que no solo eligen su precio sino su esfuerzo a realizar. Además, en vista de que el esfuerzo puede ser una variable no-observable, el modelo también se presta para analizar problemas de Agente-Principal (riesgo moral) y estructuras de contrato bajo competencia. Se debe mencionar que existen muy pocos modelos teóricos que analicen la estructura contractual bajo competencia, por lo que este modelo es particularmente atractivo para poder analizar dichos efectos pues propone una forma muy particular de competir (horizontalmente) que se ha visto útil en la práctica.

Existen tres documentos similares al presente:

1. Tseng *et al.* (2010) construyen un modelo de dos dimensiones (diferenciación vertical y horizontal) de dos etapas. Muestran que entre más verticalmente diferenciados estén las empresas, menor será la diferenciación horizontal.

2. Liang y Mai (2006) crean un modelo con subarrendamiento en la producción, y encuentran otros efectos. Encuentran las condiciones contractuales para que ocurra o máxima o mínima diferenciación.
3. Olmos *et al.* (2009) analizan un modelo de diferenciación vertical con un rol estratégico de las decisiones del competidor.

Todos son diferentes al modelo en este documento pues el primero analiza tanto la diferenciación horizontal como la vertical (el “esfuerzo”), sin embargo, no analiza relaciones contractuales; el segundo introduce contratos pero en un bien intermedio, y el tercero introduce riesgo moral pero de una manera muy diferente a la que aborda el presente documento, y con otras implicaciones.

3. Modelo de Hotelling

Primeramente, vale la pena recordar la modificación que sugiere d'Aspremont *et al.* (1979) al modelo de Hotelling (1929). Considérese un modelo de una "ciudad lineal" de longitud uno donde los consumidores se distribuyen uniformemente con densidad uno en este intervalo. Existen dos empresas o tiendas que venden el mismo bien, y el costo unitario de producirlo es c para ambas. Los consumidores tienen demanda unitaria,[3] y la función de utilidad de cada uno es de la forma

$$u(x) = \begin{cases} R - p_1 - t(x-a)^2 \\ R - p_2 - t(x-(1-b))^2 \end{cases} \quad ;$$

donde R es la valoración del consumidor por tener el bien (supuesta suficientemente grande como para que siempre[4] le convenga consumir al menos un bien); t es el costo de transportarse de los consumidores por unidad de longitud;[5] p_i el precio del bien que pone la empresa $i = 1, 2$; $x \epsilon [0, 1]$ la localización del consumidor en la ciudad, y a y $1 - b$ las localizaciones de las empresas 1 y 2, respectivamente, en el mismo intervalo en el que están los consumidores.

Bajo los mismos supuestos de Hotelling (R suficientemente grande y que la demanda esté entre cero y uno), en un modelo de dos etapas donde primero se elige la localización y luego se compite en precios *à la* Bertrand simultaneamente, se tiene que los precios de equilibrio son $p_1^* = p_2^* = c + t$, y se tiene la máxima diferenciación (a lo que llaman el *Maximum Differentiation Principle*, $a = b = 0$) en equilibrio.

El autor hace notar que de haberse elegido la mínima diferenciación, $a = 1 - b$, se habría llegado a un equilibrio con precios competitivos (costo marginal), y el hecho de estar separados tiene un efecto de diferenciación de producto.

Bajo el mismo marco explicado anteriormente de ciudad lineal, en el que el esfuerzo importa al consumidor, se presenta un modelo en el que el Principal (*v. gr.* una franquicia) "renta" su marca al Agente (franquiciado); el Agente realiza un esfuerzo (valorado por el consumidor), pero en el contrato no se puede estipular un esfuerzo directamente, pues el costo de monitoreo es muy grande, y, al ser no-observable, se tiene un problema de riesgo moral. El Principal no elige el esfuerzo del Agente, pero sí la localización (y el contrato), mientras que el Agente elige su esfuerzo óptimo (que lo valora el consumidor, y no lo puede monitorear el Principal), y al final ocurre competencia *à la* Bertrand.

[3]Es decir, cada consumidor compra una o cero unidades del bien.
[4]A cualquier precio e independientemente de su localización.
[5]Este costo puede incluir cuánto valoran el tiempo que gastan en el viaje. Debido a los costos de transporte cuadráticos, el costo marginal de trasladarse aumenta conforme aumenta la distancia a la tienda.

4. El modelo

4.1. Diferenciación horizontal y esfuerzo

Inicialmente es necesario mostrar que las modificaciones en tanto a supuestos del conjunto de acciones para cada jugador no cambian cualitativamente los resultados del modelo de d'Aspremont *et al.* (1979).

Considérese una Economía en una "ciudad lineal" de longitud uno donde los consumidores se distribuyen uniformemente con densidad uno en este intervalo. Existen dos empresas o tiendas que venden el mismo bien, y el costo unitario de producirlo es c para ambas.[6] En tiempo 1 se elige localización y en tiempo 2 se elige efuerzo (o calidad), que es valorado positivamente por el consumidor en $\theta \,\epsilon\, \mathbb{R}_{++}$. La utilidad del consumidor en x ahora estará dada por

$$u(x) = \begin{cases} R + \theta s_1 - p_1 - t(x-a)^2 \\ R + \theta s_2 - p_2 - t(x-(1-b))^2 \end{cases},$$

donde R es la valoración del consumidor por tener el bien; t es el costo de transportarse de los consumidores por unidad de longitud; s_i es el esfuerzo a elegir en el segundo periodo; p_i el precio del bien que pone la empresa $i = 1, 2$ y está dado exógenamente;[7] $x \,\epsilon\, [0, 1]$ la localización del consumidor en la ciudad, y a y $1 - b$ las localizaciones de las empresas 1 y 2, respectivamente, en el mismo intervalo en el que están los consumidores.

Se utilizan los dos mismos supuestos de Hotelling:

Supuesto 1 (Demanda positiva). $D_i \,\epsilon\, [0, 1]$, para $i = 1, 2$.[8]

Supuesto 2 (Mercado cubierto). R es suficientemente grande, tal que $u(x) > 0$ para cualquier p_i y s_i.[9]

La diferencia radica en que, aquí, en el segundo periodo se elige esfuerzo "*à la* Bertrand," y el precio es exógeno. El modelo se resuelve al hallarse el consumidor indiferente $\bar{x}$, con lo que se encuentran las demandas para cada una de las dos empresas, $D_1(a, b, s_1, s_2; p_1, p_2) := \bar{x}$ y

[6]Tanto Hotelling como d'Aspremont lo suponen igual a cero, sin pérdida de generalidad.

[7]Supuesto simplificador que se hace sin perderse generalidad en el modelo. Es fácil mostrar que si, en vez de esto, se supone que los precios son también una variable de decisión de la empresa en la etapa final (como en el modelo expuesto al inicio de esta sección) y las empresas no son muy distintas entre ellas ($p_1 \,\epsilon\, (0, \bar{p}]$ y $p_2 \,\epsilon\, (0, \bar{p}]$), se llega exactamente a lo mismo y eligen en equilibrio el máximo precio, $\bar{p}$.

[8]Esta condición debe claramente satisfacerse en equilibrio, pues una empresa sin demanda no genera beneficios por lo que tiene un claro incentivo a bajar su precio para ganar cuota de mercado.

[9]Esta condición se satisface en equilibrio por el mismo *rationale* del Supuesto 1, pues en equilibrio los precios no serán particularmente altos.

$D_2(a, b, s_1, s_2; p_1, p_2) := 1 - \bar{x}$. Los beneficios de las empresas están dados por

$$\begin{cases} \Pi_1 = D_1(a, b, s_1, s_2; p_1, p_2)(p_1 - c - \alpha s_1) \\ \Pi_2 = D_2(a, b, s_1, s_2; p_1, p_2)(p_2 - c - \alpha s_2) \end{cases},$$

donde α es el costo de hacer esfuerzo de las empresas, $\alpha \, \epsilon \, (0, \theta)$.

4.2. Diferenciación horizontal y riesgo moral

Bajo el mismo marco explicado en la sección pasada (4.1), se presenta un modelo en el que el Principal (*v. gr.* una franquicia) "renta" su marca al Agente (franquiciado); el Agente realiza un esfuerzo (valorado por el consumidor), pero en el contrato no se puede estipular un esfuerzo directamente, pues el costo de monitoreo es muy grande, y, al ser no-observable, se tiene un problema de riesgo moral. El Principal no elige el esfuerzo del Agente, pero sí la localización, precio y contrato, mientras que el Agente elige su esfuerzo óptimo (que lo valora el consumidor, y no puede ser monitoreado por el Principal), donde ocurre competencia *à la* Bertrand.

Supóngase una Economía bajo el mismo marco del modelo anterior,[10] solo que ahora cada empresa (Principal) contrata a un gerente (Agente), y todos ellos son neutrales al riesgo.[11] El Principal i le ofrece a su respectivo Agente un contrato no-lineal típico en franquicias en el cual el Agente ganará una fracción de las ventas λ_i, $\lambda_i \,\epsilon\, [0, 1]$,[12] y un monto fijo F_i, $F_i \,\epsilon\, \mathbb{R}_{++}$.

La incertidumbre está en α,[13] y ahora supónganse cuatro periodos:

1. El Principal i le ofrece un contrato de arrendamiento λ_i y F_i a su respectivo Agente.
2. El Agente i decide si aceptar o no el contrato que le ofrece su respectiva franquicia.
3. Si acepta el contrato el Agente elige su esfuerzo s_i óptimo.
4. Se realiza la variable aleatoria α.

El problema de incentivos está en que los beneficios del Principal son crecientes respecto al esfuerzo y los del Agente no, y el problema de riesgo moral está en que el esfuerzo no lo observa el Principal pues α es una variable aleatoria. En la siguiente Sección (5) se analizan los resultados y las implicaciones económicas tanto del Modelo 4.1 como del presentado en esta sección.

[10] Con los mismos Supuestos 1 y 2, y con los mismos supuestos sobre los parámetros.

[11] La neutralidad al riesgo para todos se supone con el objetivo de aislar efectos, pues la aversión al riesgo, ya sea del Principal o del Agente, conlleva a resultados diferentes pero por el efecto de la aversión misma y la mayor concavidad de los beneficios esperados. En vista de esto, $\mathrm{E}(\Pi_i(\cdot)) = \Pi_i(\mathrm{E}(\cdot))$.

[12] Y, en consecuencia, el Principal se lleva $1 - \lambda_i$ de las ventas.

[13] Ésta podría también estar en θ, es irrelevante pues todos son neutrales al riesgo. Es necesario que la variable aleatoría $\alpha \,\epsilon\, (0, \theta)$, con $\mathrm{E}(\alpha) = \bar{\alpha}$.

5. Discusión

El Modelo 4.1 se resuelve con inducción hacia atrás, como cualquier modelo de este estilo. Bajo el supuesto de que la diferencia de precios no sea demasiado grande[14] se encuentra el primer resultado.

Lema 1. *En un modelo de "ciudad lineal" con costos de transporte cuadráticos y con valoración de los consumidores por el esfuerzo, si la diferencia entre precios no es muy grande, en equilibrio:*

1. *Se sostiene el principio de máxima diferenciación,*
2. *es óptimo hacer bajo esfuerzo y*
3. *es cualitativamente equivalente al modelo de d'Aspremont.*

Demostración. Véase Apéndice A.1. ∎

En particular, de imponerse el supuesto de que $p_1 = p_2 = \bar{p}$, el conjunto de esfuerzos en equilibrio estaría dado por

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha} - \frac{t(1-b-a)(1+\frac{a-b}{3})}{\theta} \\ s_2^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha} - \frac{t(1-b-a)(1+\frac{b-a}{3})}{\theta} \end{cases}.$$

Los resultados se resumen en la siguiente tabla, donde se explica lo que sucede en cada caso de diferenciación.

Si ocurre máx. dif. ($a = b = 0$)	Si ocurre mín. dif. ($a = 1 - b$)
$s_1^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha} - \frac{t}{\theta}$	$s_1^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha}$
$s_2^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha} - \frac{t}{\theta}$	$s_2^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha}$
$\Pi_1 = \frac{t\alpha}{2\theta}$	$\Pi_1 = 0$
$\Pi_2 = \frac{t\alpha}{2\theta}$	$\Pi_2 = 0$

Es decir, cuando las empresas se diferencian máximamente hacen menos esfuerzo y tienen beneficios positivos, y cuando lo hacen mínimamente tienen que hacer más esfuerzo porque hay más competencia y, a pesar del esfuerzo alto (con lo que ganan la mayor cuota de mercado posible), tienen beneficios cero.

Es importante notar que sus beneficios nulos no ocurren porque no tengan demanda de su producto, sino porque el esfuerzo alto es tal que se cumple que su precio es igual a su "costo marginal," el cual incluye a c y al costo del esfuerzo.

El lema 1 es intuitivo pues el cambio al modelo de d'Aspremont *et al.* (1979) es mínimo; sin

[14] $\frac{-\alpha t(1-b-a)(1+b+3a)}{\theta-\alpha} < p_2 - p_1 < \frac{\alpha t(1-b-a)(1+a+3b)}{\theta-\alpha}$ es necesario y suficiente, que es consecuencia directa del Supuesto 1.

embargo, es necesario pues es la base para entender los resultados expuestos en el modelo principal de este documento, presentados en un par de párrafos a continuación.

La intuición económica detrás es la misma que en d'Aspremont *et al.* (1979). El efecto estratégico domina al efecto demanda, es decir, el acercarse al centro y ganar más cuota de mercado le es más costoso (pues tienen que hacer más esfuerzo del necesario porque están compitiendo en esfuerzos) que el alejarse y arriesgarse a perderla; por lo cual, a ambas empresas, les conviene diferenciarse y hacer un menor esfuerzo.

El Lema 1 sirve como modelo de base para el explicado en la Sección 4.2, donde cada empresa (Principal) contrata a un gerente (Agente), lo cual es más realista al pensar en cómo funcionan las franquicias.

En dicho Modelo 4.2 se encuentra el equilibrio básicamente de la misma forma.[15] La principal modificación es que en éste se permite que en el primer periodo elija el Principal y en el segundo el Agente, lo cual vuelve al problema particularmente interesante y permite introducir problemas de riesgo moral.

En el segundo periodo cada Agente encuentra el esfuerzo que maximiza sus respectivos beneficios, del que se obtienen sus mejores respuestas al esfuerzo del Agente de la otra empresa, y llegan a un equilibrio:

$$\begin{cases} s_1^* = \frac{\lambda_2 p_2 + 2\lambda_1 p_1}{3\bar{\alpha}} + \frac{p_1 - p_2}{3\theta} - \frac{c}{\bar{\alpha}} - \frac{t(1-b-a)\left(1+\frac{a-b}{3}\right)}{\theta} \\ s_2^* = \frac{\lambda_1 p_1 + 2\lambda_2 p_2}{3\bar{\alpha}} + \frac{p_2 - p_1}{3\theta} - \frac{c}{\bar{\alpha}} - \frac{t(1-b-a)\left(1+\frac{b-a}{3}\right)}{\theta} \end{cases}.$$

El esfuerzo en equilibrio del Agente tiene resumidos dos efectos. Depende positivamente de la parte de beneficios que le tocan (p_i y λ_i) y depende, también positivamente, de los beneficios que vaya a ganar el otro Agente (p_j y λ_j). Éste último efecto ocurre por la misma competencia entre ellas, pues sí le pagan más al Agente j hará más esfuerzo, por lo que el Agente i se verá forzado a hacer más esfuerzo, también, para no perder su cuota de mercado.

Nótese que, para los Agentes, el efecto estrategia domina al efecto demanda, por lo que si por ellos fuera se establecerían lejos el uno del otro y harían esfuerzo bajo, y esto les permitiría tener beneficios positivos.

Entonces, cada Principal elige el contrato, precio y localización que maximicen sus beneficios, sujeto al esfuerzo que realizarán los Agentes el en segundo periodo, y luego llegarán a un equilibrio. Primeramente, supóngase que el Principal no puede cobrar un monto fijo ($F_1 = F_2 = 0$).

Proposición 1. *En un modelo de "ciudad lineal" con costos de transporte cuadráticos, valoración de los consumidores por el esfuerzo y bajo un marco de Agente-Principal, si la diferencia entre*

[15] Véanse Apéndices A.2 y A.3.

precios no es muy grande y el Principal no puede cobrar un monto fijo, en equilibrio:

1. *Ocurre mínima diferenciación,*
2. *es óptimo hacer el mayor esfuerzo posible,*
3. *es óptimo para los Principales el contrato con el máximo incentivo y*
4. *tanto Principales como Agentes tendrán cero beneficios.*

Demostración. Véase Apéndice A.2. ∎

De hecho, se tiene que cuando $F_1 = F_2 = 0$ el equilibrio está dado por $a^* = b^* = \frac{1}{2}$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$, $p_1^* = p_2^* = \bar{p}$ y $s_1^* = s_2^* = \frac{\bar{p}-c}{\bar{\alpha}}$. Y los beneficios en equilibrio son $\Pi_1^{P*} = \Pi_2^{P*} = \Pi_1^{A*} = \Pi_2^{A*} = 0$.

La función de beneficios es estrictamente convexa con respecto de los precios, donde el mínimo en equilibrio estaría en $p_1 = p_2 = 0$, es por ello que bajo cualquier circunstancia, siempre el Principal querrá el máximo precio posible. El poner precio cero los llevaría exactamente al mismo resultado de cero beneficios, sin embargo, esto nunca sucederá por la convexidad de sus beneficios y que son estrictamente crecientes en su dominio;[16] por tanto, bajo ninguna circunstancia les conviene bajar precios (incluso aunque con ello puedan ganar cuota de mercado).

Al tomarse esto en cuenta (sin conocer aún la localización óptima), el contrato en equilibrio sería de la forma:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \frac{\bar{\alpha}t}{3\theta\bar{p}}(1-b-a)(9+a-b) \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\bar{\alpha}t}{3\theta\bar{p}}(1-b-a)(9+b-a) \end{cases}.$$

En esas ecuaciones se puede ver el *trade-off* que enfrenta el Principal. En vista de que λ_i es la única forma de cobrarle al Agente, le conviene un λ_i estrictamente menor a uno.

Supóngase que las empresas están máximamente diferenciadas, eso implica $\lambda_i < 1$ por lo que el Pricipal sí se lleva parte de las ventas. Al ser esto cierto, el esfuerzo es particularmente bajo;[17] entonces el Principal podría ganar más beneficios si se ubica un poco más hacia el centro.[18] La otra empresa enfrenta el mismo *trade-off* por lo que, igualmente, aumentará el *share* que le da a su Agente al acercarse al centro, así hasta que en equilibrio se llega a $a^* = b^* = \frac{1}{2}$.

Una vez en equilibrio, a las empresas no les es redituable moverse. Si alguno de los Principales decide localizarse justo a un lado, para poder cobrarle algo al Agente, esto disminuiría el esfuerzo del Agente, y al ser $s_j > s_i$, la demanda se trasladaría completamente al competidor, por lo que

[16] No solo por el mero efecto ingreso, sino porque también el esfuerzo de su Agente es creciente en precios

[17] No solo por el efecto de la máxima diferenciación sino porque el Agente se está llevando menor parte de las ventas, por lo que no tiene incentivos a hacer más esfuerzo.

[18] Pues aunque gane menor parte de las ventas, aumenta más su cuota de mercado vía el efecto de los incentivos en el esfuerzo y el efecto estratégico

seguiría ganando cero beneficios; por tanto, el efecto demanda domina al efecto estratégico.

Finalmente, el caso en el que el Principal puede cobrarle un monto fijo a su Agente es incluso aún más interesante.

Proposición 2. *En un modelo de "ciudad lineal" con costos de transporte cuadráticos, valoración de los consumidores por el esfuerzo y bajo un marco de Agente-Principal, si la diferencia entre precios no es muy grande, en equilibrio:*

1. *Ocurre máxima diferenciación,*
2. *es óptimo hacer el menor esfuerzo posible,*
3. *es óptimo un contrato de "renta compartida" y*
4. *los Principales obtienen sus máximos beneficios.*

Demostración. Véase Apéndice A.3. ∎

Por tanto, cuando F_1 y F_2 también son variables de decisión, el equilibrio está dado por $a^* = b^* = 0$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1 - \frac{\bar{\alpha}t}{\theta\bar{p}}$, $p_1^* = p_2^* = \bar{p}$ y $s_1^* = s_2^* = \frac{\bar{p}-c}{\bar{\alpha}} - \frac{2t}{\theta}$. Y los beneficios en equilibrio serán $\Pi_1^{P*} = \Pi_2^{P*} = \frac{\bar{\alpha}t}{\theta}$ y $\Pi_1^{A*} = \Pi_2^{A*} = 0$.

Con los precios ocurre exáctamente lo mismo que en la Proposición 1, sin embargo, con las otras variables la historia es diferente. En este caso, en vista de que ahora el Principal ya puede extraer los beneficios de su Agente, también le importa que su Agente tenga beneficios positivos (para después quitárselos con el monto fijo). Como se mostró anteriormente, para el Agente domina el efecto estratégico mientras que para el Principal domina el efecto demanda; así, no es trivial saber *a priori* cuál será el efecto que domine en este caso.

Anteriormente se tenía que bajo máxima diferenciación el Principal tenía incentivos a moverse al centro, diferenciarse menos; sin embargo, ahora no es el caso. Lo que ocurre es que el Principal vuelve endógenos los beneficios del Agente, por lo que no pierde cuando éste hace menor esfuerzo (de hecho, gana entre menos esfuerzo haga).

Los resultados de ambas Proposiciones y el Lema se pueden ver de manera más ilustrativa en la siguiente tabla.

Resumen de los Resultados			
Mínima dif.	Máxima dif.	Sin F_i a elegir	Con F_i a elegir
.	.	$F_1 = F_2 = 0$	$F_1^* = F_2^* = \frac{t\bar{\alpha}}{2\theta}$
$s_1^* = s_2^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha}$	$s_1^* = s_2^* = \frac{\bar{p}-c}{\alpha} - \frac{t}{\theta}$	$s_1^* = s_2^* = \frac{\overline{p}-c}{\bar{\bar{\alpha}}}$	$s_1^* = s_2^* = \frac{\overline{p}-c}{\bar{\bar{\alpha}}} - \frac{2t}{\theta}$
.	.	$\Pi_1^{A*} = \Pi_2^{A*} = 0$	$\Pi_1^{A*} = \Pi_2^{A*} = 0$
$p_1^* = p_2^* = \overline{p}$	$p_1^* = p_2^* = \overline{p}$	$p_1^* = p_2^* = \overline{p}$	$p_1^* = p_2^* = \overline{p}$
.	.	$\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$	$\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1 - \frac{t\bar{\alpha}}{2\theta}$
$a = 1 - b$	$a^* = b^* = 0$	$a^* = b^* = \frac{1}{2}$	$a^* = b^* = 0$
$\Pi_1^* = \Pi_2^* = 0$	$\Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{t\alpha}{2\theta}$	$\Pi_1^{P*} = \Pi_2^{P*} = 0$	$\Pi_1^{P*} = \Pi_2^{P*} = \frac{t\bar{\alpha}}{\theta}$

Las primeras dos columnas resumen el modelo de donde se obtiene el Lema 1; en particular, la primera ocurriría si la empresa se diferenciase mínimamente y la segunda es, lo que finalmente ocurre en equilibrio, cuando la empresa está en máxima diferenciación. Las últimas dos columnas resumen los resultados a los que llega el modelo propuesto para las Proposiciones 1 y 2; la tercera es para cuando no es variable de decisión del Principal la F_i y la cuarta para cuando sí lo es.

El resultado más interesante ocurre si se compara el esfuerzo óptimo en los 3 modelos. Se puede ver que éste es igual en el caso de mínima diferenciación y cuando no se puede cobrar un monto fijo; sin embargo, cuando hay máxima diferenciación se hace menos esfuerzo, pero cuando hay máxima diferenciación y existen problemas de riesgo moral se hace el menor esfuerzo posible. Esto se ve reflejado en los beneficios que aumentan entre menor sea el esfuerzo ejercido.

Esto ocurre porque el esfuerzo es el que ahora está jugando el rol que jugaba el precio en el modelo de d'Aspremont. Así como en su modelo más precio es mejor, en vista de que aquí el efecto en precios es tan grande que siempre conviene el máximo,[19] hacer menos esfuerzo es mejor, incluso para el Principal. Así, el Principal (en vista de que ahora sí puede extraerle todos sus beneficios al Agente con una suma de monto fijo) es de hecho beneficiado por menos esfuerzo, pues eso hace que su precio sea mayor que el "costo marginal" de ofrecer el producto.

Para ilustrar de mejor manera los resultados, se expone el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Supóngase que un bar (1), que recién acaba de iniciar con su negocio, decide entrar al mercado en una ciudad lineal (que va de cero a uno) donde enfrentará la competencia de otro (2) exactamente igual a él, que ofrecerá las mismas bebidas. El costo marginal de las bebidas es $c = 5$, y por hacer esfuerzo es de α, que puede variar entre 1 y 9, depedendiendo del clima (pues cuando llueve los meseros se deprimen y les cuesta más trabajo atender al cliente), aunque se sabe que, en promedio, $\alpha = 5$. Se hace un estudio de mercado y resulta que el precio máximo al que comprarían

[19]El máximo precio es en todo momento lo que maximiza beneficios, sin importar la diferenciación.

las bebidas es $\bar{p} = 105$.

Los consumidores en esa economía son alcohólicos, por lo que no habrá nadie que decida no ir a ninguno de los dos bares; además, valoran el esfuerzo en $\theta = 10$ pues prefieren ir a un bar donde les atiende gente muy amable, y por supuesto que toman en cuenta el precio y qué tanto tienen que caminar para llegar al bar. Sus costos de transporte son cuadráticos y $t = 2$.

Cada cervecera tiene 2 opciones: El dueño puede hacerse cargo del negocio o puede contratar a un gerente para que éste se haga cargo.

Si el dueño se hiciera cargo del negocio, él preferiría diferenciarse máximamente de la otra cervecería. Entonces, en equilibrio, harían un esfuerzo $s = 19{,}8$ (a veces atenderían mal a los clientes), cobraría $p = 105$ (el máximo precio) y los bares se establecerían en cada extremo de la ciudad. Así, sus beneficios serían de $\Pi = 0{,}5$ para cada uno de los bares.

Ahora bien, si el dueño le delegara a un gerente (cuyo costo de reserva es cero) el cargo, en equilibrio harían un esfuerzo $s = 19{,}6$ (sería un muy mal servicio), cobraría el precio máximo y los bares también se establecerían en cada extremo de la ciudad. El dueño le podría ofrecer al gerente un contrato donde le cobraría la mitad de las ventas y un monto fijo de $0{,}5$, entonces el gerente se quedaría en su precio de reserva ($\Pi^A = 0$) y el dueño se llevaría $\Pi^P = 1$ (es decir, más que en el otro caso). Entonces, el dueño decidiría contratar a un gerente y que él se haga cargo.

Supóngase ahora que es ilegal cobrarle un monto fijo a los gerentes. Sujeto a esto, el dueño sabe que, al no poder cobrarle un monto fijo, sus beneficios estarán sujetos solo a una parte de las ventas pero, dada la competencia, no podrá cobrarle nada y, en equilibrio, ganaría $\Pi^P = 0$. Así, decide que es mejor no contratar al gerente y quedarse con sus beneficios de $\Pi = 0{,}5$, en máxima diferenciación.

5.1. Posibles Extensiones

El hecho de que “menos esfuerzo es mejor” ocurre por la vía de los beneficios marginales. Para franquicias que no tienen mucho renombre o que, por alguna razón, no ven al esfuerzo como un beneficio *per se*, el modelo aplica muy bien. Sin embargo, es claro que esto no es necesariamente cierto; la mayoría de las franquicias saben que el esfuerzo en una de sus sucursales es sinónimo de calidad y de mayores beneficios (ya sea intertemporalmente o en otros mercados), por lo que ellas valoran al esfuerzo *per se*. Esta es la principal forma de extender el presente modelo, pues el hecho de que se introduzca al esfuerzo en la funcion de beneficios del Principal, de manera aditivamente separada, es probable que altere los resultados y que se encuentre que no necesariamente es óptimo para las empresas hacer siempre su menor esfuerzo posible.

Además hay otras opciones para extender el presente modelo como el analizar el caso cuando los Principales son aversos al riesgo; la inclusión de restricciones de liquidez *ex-post*; la introducción de externalidades (positivas) entre empresas; generalizar al caso de n empresas con n Agentes; empresas y/o Agentes heterogéneos; considerar el caso en el que compiten *á la* Cournot, entre otros.

6. Conclusiones

Se elaboró un modelo de ciudad lineal en el que el esfuerzo tiene un rol muy importante, pues los consumidores valoran su consumo del bien en función de éste. En primera instancia, el modelo es conveniente para analizar la localización geográfica en la que se establecerán dos empresas que compiten muy fuertemente, y que no solo eligen su precio sino su esfuerzo a realizar. Además, en vista de que el esfuerzo puede ser una variable no-observable, el modelo también se presta para analizar problemas de Agente-Principal y estructuras de contrato bajo competencia. En la literatura existen muy pocos modelos teóricos que analicen la estructura contractual bajo competencia, por lo que este modelo es útil para poder analizar dichos efectos pues propone una forma muy particular de competir (horizontalmente) que se ha visto útil en la práctica.

Se encuentra que cuando el esfuerzo también es una variable de decisión será óptimo para las empresas diferenciarse lo máximo posible, cobrar el precio más alto y hacer esfuerzo bajo. Además, cuando se toma en cuenta que el modelo podría analizarse como uno de Agente-Principal donde existen problemas de riesgo moral, las conclusiones en tanto a localización cambian y se obtienen contratos particularmente interesantes para su análisis teórico.

En primer lugar, el modelo encuentra que cuando el contrato que ofrece el Principal solo puede depender de las ventas del Agente (*i. e.*, no se puede cobrar un monto fijo) en equilibrio las empresas terminarán compitiendo fuertemente en el centro de la ciudad (mínima diferenciación), con el máximo esfuerzo posible (el que hace que el precio sea igual al costo marginal) y no habrá beneficios para ninguno de los involucrados.

Sin embargo, cuando sí se puede cobrar un monto fijo resulta que en equilibrio las empresas realizarán un esfuerzo particularmente bajo (incluso más bajo que cuando no existen problemas de riesgo moral), se ofrecerá un contrato de renta compartida (que es lo que provoca que, de hecho, el esfuerzo sea aún menor), y, a pesar de ello, el Principal tendrá más beneficios que incluso en el caso donde no existen problemas de riesgo moral.

A primera vista este resultado parecería poco intuitivo pues, en general, hacer esfuerzo bajo genera menores beneficios; sin embargo, por la estructura competitiva en el modelo de diferenciación horizontal, este no es el caso, pues un menor esfuerzo puede generar ahorros equivalentes a cobrar un precio mayor al costo marginal.

En consecuencia, cuando una empresa no puede cobrar un monto fijo realizará el esfuerzo de mínima diferenciación (muy alto); cuando hay máxima diferenciación se hace menos esfuerzo, pero cuando hay máxima diferenciación y existen problemas de riesgo moral se hace el menor esfuerzo posible, y esto se ve reflejado en los beneficios, que aumentan entre menor sea el esfuerzo ejercido.

A. Apéndices

A.1. Prueba del Lema 1

Considérese el marco explicado previamente. La utilidad del consumidor en x está dada por

$$u(x) = \begin{cases} R + \theta s_1 - p_1 - t(x-a)^2 \\ R + \theta s_2 - p_2 - t(x-(1-b))^2 \end{cases},$$

lo cual implica que el consumidor indiferente $\bar{x}$ es tal que

$$\bar{x} = \frac{\theta(s_1 - s_2) + p_2 - p_1}{2t(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2}.$$

Por lo tanto, las demandas

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1(a,b,s_1,s_2;p_1,p_2) := \bar{x} = a + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_1-s_2)+p_2-p_1}{2t(1-a-b)} \\ D_2(a,b,s_1,s_2;p_1,p_2) := 1-\bar{x} = b + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_2-s_1)+p_1-p_2}{2t(1-a-b)} \end{cases},$$

y los beneficios

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi_1(a,b,s_1,s_2;p_1,p_2) = \left(a + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_1-s_2)+p_2-p_1}{2t(1-a-b)}\right)(p_1 - c - \alpha s_1) \\ \Pi_2(a,b,s_1,s_2;p_1,p_2) = \left(b + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_2-s_1)+p_1-p_2}{2t(1-a-b)}\right)(p_2 - c - \alpha s_2) \end{cases}.$$

Bajo los supuestos 1 y 2, el problema se resuelve con inducción hacia atrás; por tanto, en el segundo periodo, el problema de maximización de cada una de las empresas está dado por:

$$\max_{\{s_i \,\epsilon\, \mathbb{R}_{++}\}} \left\{\Pi_i(a,b,s_1,s_2;p_1,p_2)\right\}.$$

Así, al resolverse se encuentra que las condiciones de primer orden son:[20]

$$\begin{cases} \frac{t(1-a-b)(1-b+a)}{\theta} + \frac{p_2}{\theta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\theta}\right) p_1 + \frac{c}{\alpha} = s_2 - 2s_1 \\ \frac{t(1-a-b)(1-a+b)}{\theta} + \frac{p_1}{\theta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\theta}\right) p_2 + \frac{c}{\alpha} = s_1 - 2s_2 \end{cases}.$$

[20]Es claro que las funciones de beneficios son estríctamente cóncavas, por lo que las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes.

En equilibrio, los esfuerzos óptimos son:

$$\begin{cases} s_1^* = \frac{p_2+2p_1}{3\alpha} + \frac{p_1-p_2}{3\theta} - \frac{c}{\alpha} - \frac{t(1-b-a)\left(1+\frac{a-b}{3}\right)}{\theta} \\ s_2^* = \frac{p_1+2p_2}{3\alpha} + \frac{p_2-p_1}{3\theta} - \frac{c}{\alpha} - \frac{t(1-b-a)\left(1+\frac{b-a}{3}\right)}{\theta} \end{cases}.$$

Seguidamente se sustituyen estos esfuerzos óptimos en las funciones de beneficios.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi_1(a,b;s_1^*,s_2^*,p_1,p_2) = 2t(1-b-a)\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-b}{3}\right)+\frac{(p_1-p_2)(\theta-\alpha)}{6t\alpha(1-b-a)}\right)^2 \\ \Pi_2(a,b;s_1^*,s_2^*,p_1,p_2) = 2t(1-b-a)\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{b-a}{3}\right)+\frac{(p_2-p_1)(\theta-\alpha)}{6t\alpha(1-b-a)}\right)^2 \end{cases}.$$

Dada la condición de que los precios no sean muy distintos entre sí, $\frac{-\alpha t(1-b-a)(1+b+3a)}{\theta-\alpha} < p_2 - p_1 < \frac{\alpha t(1-b-a)(1+a+3b)}{\theta-\alpha}$,[21] ahora se resuelve el problema de maximización para cada empresa en el primer periodo, donde eligen la localización óptima, es decir,

$$\max_{\{a \text{ ó } b \,\epsilon\, [0,1]\}} \left\{\Pi_i(a,b;s_1^*,s_2^*,p_1,p_2)\right\}.$$

Las primeras derivadas

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{signo}\left(\frac{d\Pi_1}{da}\right) = \text{signo}\left(\frac{(p_1-p_2)(\theta-\alpha)}{t\alpha(1-b-a)} - (1+b+3a)\right) \\ \text{signo}\left(\frac{d\Pi_2}{db}\right) = \text{signo}\left(\frac{(p_2-p_1)(\theta-\alpha)}{t\alpha(1-b-a)} - (1+a+3b)\right) \end{cases}.$$

Con ayuda del supuesto 1, entonces:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\Pi_1}{da} < 0 \\ \frac{d\Pi_2}{db} < 0 \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

[21] Consecuencia directa del Supuesto 1.

A.2. Prueba de la Proposición 1

Se procede de la misma manera que antes. Los supuestos 1 y 2 siguen aplicando para este modelo, además ahora es necesario que la variable aleatoría $\alpha \,\epsilon\, (0, \theta)$, con $\mathrm{E}(\alpha) = \bar{\alpha}$. Como no hay cambios en los supuestos de la función de utilidad

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2) := \bar{x} = a + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_1-s_2)+p_2-p_1}{2t(1-a-b)} \\ D_2(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2) := 1 - \bar{x} = b + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_2-s_1)+p_1-p_2}{2t(1-a-b)} \end{cases}.$$

Pero ahora hay 2 pares de funciones de beneficio, las de los Agentes son

$$\begin{cases} \Pi_1^A(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2) = \left(a + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_1-s_2)+p_2-p_1}{2t(1-a-b)}\right)(\lambda_1 p_1 - c - \alpha s_1) - F_1 \\ \Pi_2^A(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2) = \left(b + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_2-s_1)+p_1-p_2}{2t(1-a-b)}\right)(\lambda_2 p_2 - c - \alpha s_2) - F_2 \end{cases}$$

y las de los Principales son

$$\begin{cases} \Pi_1^P(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2) = \left(a + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_1-s_2)+p_2-p_1}{2t(1-a-b)}\right)(1 - \lambda_1)p_1 + F_1 \\ \Pi_2^P(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2) = \left(b + \frac{1-b-a}{2} + \frac{\theta(s_2-s_1)+p_1-p_2}{2t(1-a-b)}\right)(1 - \lambda_2)p_2 + F_2 \end{cases}.$$

Por lo tanto, el problema de maximización a resolver está dado por:

$$\underset{\{\lambda_i \,\epsilon\, [0,1],\, p_i \,\epsilon\, (0, \overline{p}],\, a \text{ ó } b,\, F_i \,\epsilon\, \mathbb{R}_+\}}{\text{máx}} \left\{E\left[\Pi_i^P(a, b, p_1, p_2; s_1^*, s_2^*)\right]\right\}$$

sujeto a:

$$\begin{cases} a \,\epsilon\, [0, 1] & i = 1 \\ b \,\epsilon\, [0, 1] & i = 2 \end{cases},$$

$$a \leq 1 - b,$$

$$\{s_1^*, s_2^*\} = \left\{\underset{\{s_1\}}{\text{argmáx}}\left\{E\left[\Pi_1^A(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2)\right]\right\}, \underset{\{s_2\}}{\text{argmáx}}\left\{E\left[\Pi_2^A(a, b, s_1, s_2, p_1, p_2)\right]\right\}\right\},$$

$$\Pi_i^A \epsilon \mathbb{R}_+,$$

para $i = 1, 2$, y luego hallar el equilibrio.

Las primeras tres restricciones son de localización.[22] Las últimas dos son las equivalentes a la restricción de incentivos y a la restricción de participación de los modelos clásicos en teoría de contratos, respectivamente. Note también que se supone implícitamente que hay un precio máximo,

[22]En particular, la tercera se hace por mera simplificación matemática, sin pérdida de generalidad.

que es igual para ambas empresas.

Entonces, para hallar el Equilibrio de Nash se procede primeramente a encontrar los esfuerzos óptimos. Las condiciones de primer orden son:[23]

$$\begin{cases} \frac{t(1-a-b)(1-b+a)}{\theta} + \frac{p_2}{\theta} - \left(\frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}} + \frac{1}{\theta}\right) p_1 + \frac{c}{\bar{\alpha}} = s_2 - 2s_1 \\ \frac{t(1-a-b)(1-a+b)}{\theta} + \frac{p_1}{\theta} - \left(\frac{\lambda_2}{\bar{\alpha}} + \frac{1}{\theta}\right) p_2 + \frac{c}{\bar{\alpha}} = s_1 - 2s_2 \end{cases}.$$

Al resolverse en equilibrio,

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1^* = \frac{\lambda_2 p_2 + 2\lambda_1 p_1}{3\bar{\alpha}} + \frac{p_1 - p_2}{3\theta} - \frac{c}{\bar{\alpha}} - \frac{t(1-b-a)\left(1+\frac{a-b}{3}\right)}{\theta} \\ s_2^* = \frac{\lambda_1 p_1 + 2\lambda_2 p_2}{3\bar{\alpha}} + \frac{p_2 - p_1}{3\theta} - \frac{c}{\bar{\alpha}} - \frac{t(1-b-a)\left(1+\frac{b-a}{3}\right)}{\theta} \end{cases}.$$

Seguidamente, se sustituyen estos esfuerzos óptimos en las funciones de beneficios del Agente,

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi_1^A(a,b,p_1,p_2;s_1^*,s_2^*) = 2t(1-b-a)\left(\frac{\bar{\alpha}}{\theta}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-b}{3}\right) + \frac{\theta(\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2) - \bar{\alpha}(p_1 - p_2)}{6t\bar{\alpha}(1-b-a)}\right)^2 - F_1 \\ \Pi_2^A(a,b,p_1,p_2;s_1^*,s_2^*) = 2t(1-b-a)\left(\frac{\bar{\alpha}}{\theta}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{b-a}{3}\right) + \frac{\theta(\lambda_2 p_2 - \lambda_1 p_1) - \bar{\alpha}(p_2 - p_1)}{6t\bar{\alpha}(1-b-a)}\right)^2 - F_2 \end{cases}.$$

Paralela a la condición en el Apéndice anterior, $-\bar{\alpha}t(1-b-a)(1+b+3a) < \theta(\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2) - \bar{\alpha}(p_1 - p_2) < \bar{\alpha}t(1-b-a)(1+a+3b)$,[24] con lo que se puede fácilmente mostrar que sigue siendo cierto que el efecto estrategia domina al efecto demanda, pues

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\Pi_1^A}{da} < 0 \\ \frac{d\Pi_2^A}{db} < 0 \end{cases}.$$

Sin embargo, ahora es el turno de los Principales para maximizar sus beneficios. Sus respectivas funciones de beneficios ahora son

$$\begin{cases} \Pi_1^P(a,b,p_1,p_2;s_1^*,s_2^*) = \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-b}{3}\right) + \frac{\theta(\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2) - \alpha(p_1 - p_2)}{6t\alpha(1-b-a)}\right) p_1(1-\lambda_1) + F_1 \\ \Pi_2^P(a,b,p_1,p_2;s_1^*,s_2^*) = \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{b-a}{3}\right) + \frac{\theta(\lambda_2 p_2 - \lambda_1 p_1) - \alpha(p_2 - p_1)}{6t\alpha(1-b-a)}\right) p_2(1-\lambda_2) + F_2 \end{cases}.$$

Entonces, cada Principal elegirá el contrato, el precio y la localización que maximizen sus beneficios, y luego se llegará a un equilibrio. Supóngase que el contrato solo depende de las ventas realizadas, *i. e.*, $F_1 = F_2 = 0$.

[23] Las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes, se puede facilmente mostrar que la función es estrictamente cóncava en esfuerzos.

[24] Consecuencia directa, también, del Supuesto 1.

Así, las condiciones de primer orden (necesarias y suficientes) para el contrato están dadas por

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 1 + \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\theta p_1}\right)(p_1 - p_2 - t(1-b-a)(3+a-b)) \\ 2\lambda_2 = 1 + \frac{p_1}{p_2} + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\theta p_2}\right)(p_2 - p_1 - t(1-b-a)(3+b-a)) \end{cases}.$$

Ahora, en tanto a los precios, su respectiva condición de segundo orden depende del λ óptimo; en particular del signo de $\theta\lambda_i - \bar{\alpha}$. Si ocurre que $\theta\lambda_i - \bar{\alpha} < 0$ implica que las funciones de mejor respuesta dan el máximo, y el equilibrio estaría en $p_1^* = p_2^* = 0$ (lo cual, entonces, vuelve trivial el problema de maximización); sin embargo, es fácil demostrar que esto no ocurre pues $\theta\lambda_i^* - \bar{\alpha} > 0$, evaluado en el contrato óptimo. Así, los precios óptimos en equilibrio son $p_1^* = p_2^* = \bar{p}$.

Si se evalúa esto en las funciones de mejor respuesta del contrato

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 - \frac{\bar{\alpha}t}{3\theta\bar{p}}(1-b-a)(9+a-b) \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\bar{\alpha}t}{3\theta\bar{p}}(1-b-a)(9+b-a) \end{cases}.$$

Finalmente, la localización tiene dos condiciones de primer orden para cada empresa. Es fácil mostrar que las que maximizan los beneficios son las siguientes:

$$\begin{cases} a = \frac{3-b}{5} \\ b = \frac{3-a}{5} \end{cases}.$$

Por tanto, $a^* = b^* = \dfrac{1}{2}$.

En conclusión, cuando $F_1 = F_2 = 0$ el equilibrio está dado por $a^* = b^* = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$, $p_1^* = p_2^* = \bar{p}$ y $s_1^* = s_2^* = \dfrac{\bar{p} - c}{\bar{\alpha}}$. Y los beneficios en equilibrio serán $\Pi_1^{P*} = \Pi_2^{P*} = \Pi_1^{A*} = \Pi_2^{A*} = 0$. ∎

A.3. Prueba de la Proposición 2

El problema del Agente es casi el mismo, salvo porque ahora el del Principal cambia pues puede elegir F_i. El problema se resuelve de la misma manera, solo que es necesario sustituir la restricción de participación en el problema de maximización de cada Principal para resolverlo. Entonces, cada Principal elegirá el contrato, el precio y la localización que maximizen sus beneficios, y luego se llega a un equilibrio.

Así, las condiciones de primer orden (necesarias y suficientes) para el contrato están dadas por

$$\begin{cases} 4\lambda_1 p_1 = \lambda_2 p_2 + 3p_1 + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\theta}\right)(p_1 - p_2 - t(1-b-a)(3+a-b)) \\ 4\lambda_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + 3p_2 + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\theta}\right)(p_2 - p_1 - t(1-b-a)(3+b-a)) \end{cases}.$$

Ahora, en tanto a los precios, su respectiva condición de segundo orden depende del λ óptimo; en particular del signo de $\theta\lambda_i - \bar{\alpha}$. Si ocurre que $\theta\lambda_i - \bar{\alpha} < 0$ implica que las funciones de mejor respuesta dan el máximo, y el equilibrio estaría en $p_1^* = p_2^* = 0$ (lo cual, entonces, vuelve trivial el problema de maximización); sin embargo, es fácil demostrar que esto no ocurre pues $\theta\lambda_i^* - \bar{\alpha} > 0$, evaluado en el óptimo contrato. Así, los precios óptimos en equilibrio son $p_1^* = p_2^* = \bar{p}$.

Si se evalúa esto en las funciones de mejor respuesta del contrato

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 - \frac{\bar{\alpha}t}{5\theta\bar{p}}(1-b-a)(5+a-b) \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\bar{\alpha}t}{5\theta\bar{p}}(1-b-a)(5+b-a) \end{cases}.$$

Finalmente, la localización tiene dos condiciones de primer orden para cada empresa. Es fácil mostrar que las que maximizan los beneficios se encuentran en los números negativos, lo cual implica que se saturan las restricciones de los parámetros; por tanto, $a^* = b^* = 0$.

En conclusión, cuando F_1,$F_2 \neq 0$ el equilibrio está dado por $a^* = b^* = 0$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1 - \dfrac{\bar{\alpha}t}{\theta\bar{p}}$, $p_1^* = p_2^* = \bar{p}$ y $s_1^* = s_2^* = \dfrac{\bar{p}-c}{\bar{\alpha}} - \dfrac{2t}{\theta}$. Y los beneficios en equilibrio serán $\Pi_1^{P*} = \Pi_2^{P*} = \dfrac{\bar{\alpha}t}{\theta}$ y $\Pi_1^{A*} = \Pi_2^{A*} = 0$. ∎

Referencias

Anderson, Simon P. y Damien J. Neven (1991), "Cournot competition yields spatial agglomeration." *International Economic Review*, 793–808.

Butters, Gerard R. (1977), "Equilibrium distributions of sales and advertising prices." *The Review of Economic Studies*, 465–491.

d'Aspremont, Claude, J. Jaskold Gabszewicz, y J-F Thisse (1979), "On hotelling's"stability in competition"." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1145–1150.

de Palma, Andre, Victor Ginsburgh, Yorgo Y. Papageorgiou, y J-F Thisse (1985), "The principle of minimum differentiation holds under sufficient heterogeneity." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 767–781.

Friedman, James W. y J-F Thisse (1993), "Partial collusion fosters minimum product differentiation." *Rand Journal of Economics*, 24, 631–645.

Gabszewicz, Jean Jaskold y J-F Thisse (1979), "Price competition, quality and income disparities." *Journal of Economic Theory*, 20, 340–359.

Hart, Oliver D. (1983), "The market mechanism as an incentive scheme." *The Bell Journal of Economics*, 366–382.

Hermalin, Benjamin E. (1992), "The effects of competition on executive behavior." *The Rand journal of economics*, 350–365.

Holmstrom, Bengt (1982), "Moral hazard in teams." *Bell Journal of Economics*, 13, 324–340.

Hotelling, H. (1929), "Stability in competition." *Economic Journal*, 39, 41–57.

Jehiel, Philippe (1992), "Product differentiation and price collusion." *International Journal of Industrial Organization*, 10, 633–641.

Jensen, Michael C. y William H. Meckling (1976), "Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs and ownership structure." *Journal of Financial Economics*, 3, 305–360.

Lerner, A. P. y H. W. Singer (1937), "Some notes on duopoly and spatial competition." *Journal of Political Economy*, 45, 145–186.

Liang, Wen-Jung y Chao-Cheng Mai (2006), "Validity of the principle of minimum differentiation under vertical subcontracting." *Regional Science and Urban Economics*, 36, 373–384.

Liebowitz, Stan J. (1982), “Durability, market structure, and new-used goods models.” *The American Economic Review*, 816–824.

Mai, Chao Cheng y Shin kun Peng (1999), “Cooperation vs. competition in a spatial model.” *Regional Science and Urban Economics*, 29, 463–472.

Olmos, Marta Fernández, Jorge Rosell Martínez, Manuel Antonio Espitia Escuer, y Luz María Marín Vinuesa (2009), “Successive duopoly under moral hazard: Will incentive contracts persist?” *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2, 208–229.

Rhee, Byong-Duk, André de Palma, Claes Fornell, y Jacques-Francois Thisse (1992), “Restoring the principle of minimum differentiation in product positioning.” *Journal of Economics & Management Strategy*, 1, 475–505.

Salop, Steven C. (1979), “Monopolistic competition with outside goods.” *Bell Journal of Economics*, 10, 141–156.

Scharfstein, David (1988), “Product-market competition and managerial slack.” *Rand Journal of Economics*, 19, 147–155.

Shaked, Avner y John Sutton (1982), “Relaxing price competition through product differentiation.” *The review of economic studies*, 3–13.

Shaked, Avner y John Sutton (1983), “Natural oligopolies.” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1469–1483.

Stahl, Konrad (1982a), “Differentiated products, consumer search, and locational oligopoly.” *The Journal of Industrial Economics*, 97–113.

Stahl, Konrad (1982b), “Location and spatial pricing theory with nonconvex transportation cost schedules.” *Bell Journal of Economics*, 13, 575–582.

Stiglitz, Joseph E. y Barry J. Nalebuff (1983), “Information, competition, and markets.” *American Economic Review*, 73, 278–283.

Tseng, Ching Chih, Wen Jung Liang, y Kuang Cheng Andy Wang (2010), “Spatial agglomeration with vertical differentiation.” *Papers in Regional Science*, 89, 841–858.

Zhang, Z. John (1995), “Price-matching policy and the principle of minimum differentiation.” *The Journal of Industrial Economics*, 287–299.