

TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE  
***MAESTRO EN ECONOMIA***

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS  
EL COLEGIO DE MEXICO

***Bursatilización del Crédito Hipotecario:***  
Evaluación para la posible aplicación  
en México de un modelo de fijación  
de precios para valores respaldados  
por hipotecas.

***Jair Muñoz Bugarín***

Promoción 1994-1996

Enero, 1997.

ASESOR: Mogens Bladt Petersen

Gracias a mi familia, a mis amigos y a todos los que de alguna forma me ayudaron en la realización de mi tesina, en especial al Dr. Antonmaria Minzoni Alessio, por su asesoría en ecuaciones diferenciales.

## RESUMEN

Esta investigación aborda el proceso de burasatilización de cartera hipotecaria, enfocándose principalmente a mostrar que tan factible es la implementación en México de modelos financieros continuos que se utilizan en este proceso y que son aplicados en economías desarrolladas.

Para lo cual, se analiza un modelo que fija precio a un valor respaldo por créditos hipotecarios (valor GNMA), el cual está respaldado por el *Government National Mortgage Association*.

Este modelo, es un modelo estocástico y continuo que utiliza la metodología de fijación de precios para opciones y es aplicado al valor GNMA el cual es emitido y comercializado en los Estados Unidos.

Para realizar este análisis, la investigación está dividida en dos partes, en la primera se trata el marco conceptual para comprender el proceso de burasatilización de cartera hipotecaria y el modelo de fijación de precios. Por lo cual, se inicia tratando los principales créditos hipotecarios que se comercian en nuestro país, así como la reestructuración en unidades de inversión. En otra sección, se exponen las características principales para fijar precio a bonos y opciones. Para finalizar esta primera parte, se tratan los principales rasgos de la burasatilización del crédito hipotecario poniendo énfasis en lo referente al valor GNMA.

En la segunda parte, se expone el modelo de fijación de precios para valores GNMA. Posteriormente, se realiza una descripción razonada de las características del valor, resolviendo en primer lugar la ecuación diferencial que arroja el modelo, para continuar con una discusión intuitiva de las características del valor. Después, se analizan los supuestos del modelo utilizando métodos econométricos y estadísticos.

Finalmente, se concluye que no se puede aplicar el modelo de fijación de precios a la economía mexicana debido principalmente a la alta volatilidad de la tasa de interés por lo que se propone elaborar un nuevo modelo que capture las principales características de la economía Mexicana.

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN.</b>	1
<b>ANTECEDENTES.</b>	4
<b>1. HIPOTECAS MEXICANAS.</b>	4
1.1 HIPOTECAS CON ÍNDICE DUAL.	6
1.1.1 Tasa de deuda.	7
1.1.2 Tasa de pagos.	8
1.1.3 Amortización.	9
1.2 HIPOTECAS HÍBRIDAS CON TASAS AJUSTABLES.	10
1.2.1 Tasa de deuda y tasa de pagos.	10
1.2.2 Amortización.	11
1.3 RIESGOS DE LAS HTD MEXICANAS.	11
1.3.1 Riesgo de <i>default</i> .	11
1.3.2 Riesgo de desbalance.	12
1.3.3 Riesgo de prepago.	14
1.4 REESTRUCTURACIÓN MEDIANTE UNIDADES DE INVERSIÓN.	14
1.4.1 Principales riesgos para las HUDIs.	15
<b>2. CARACTERÍSTICAS SOBRE LA FIJACIÓN DE PRECIOS PARA BONOS Y OPCIONES CALL.</b>	17
2.1 BONOS.	17
2.1.1 Teorías de la estructura de plazos.	19
2.1.2 La fijación de precios de bonos.	21
2.2 OPCIÓN <i>CALL</i> .	25
2.2.1 La fijación de precio para una opción <i>call</i> americana.	27
2.2.2 Modelo de fijación de precio para una opción <i>call</i> americana.	29
<b>3. BURSATILIZACIÓN DEL CRÉDITO HIPOTECARIO.</b>	31
3.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS VALORES <i>PASS-THROUGH</i> .	32
3.2 PRECIO Y RENDIMIENTO PARA VALORES <i>PASS-THROUGH</i> .	36
3.2.1 Experiencia de la FHA.	36
3.2.2 Tasa de prepagos constante.	37

3.2.3 Indicador de prepagos estándar de la Public Securities Association.	37
3.3 PREPAGOS.	40
3.3.1 El riesgo de prepagos asociado a los valores <i>pass-through</i> .	42
3.4 DERIVADOS	43
3.4.1 Collateralized Mortgage Obligations.	43
3.4.2 Stripped Mortgage-Backed Securities.	44
<b>MODELO.</b>	45
<b>4. MODELO DE FIJACIÓN DE PRECIOS DE UN VALOR GNMA.</b>	45
<b>5. ANÁLISIS DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS VALORES GNMA.</b>	56
5.1 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL PRECIO DE UN VALOR GNMA.	56
5.2 LA OPCIÓN <i>CALL</i> .	62
5.3 LA CARACTERÍSTICA DE AMORTIZACIÓN.	63
5.4 PREPAGOS SUBÓPTIMOS.	65
<b>6. EVALUACIÓN DEL MODELO DE FIJACIÓN DE PRECIOS DE UN VALOR GNMA PARA SU APLICACIÓN EN MÉXICO.</b>	68
<b>7. CONCLUSIONES.</b>	73
<b>Glosario de abreviaturas.</b>	75
<b>Glosario de notación.</b>	77
<b>Bibliografía.</b>	81

# INTRODUCCIÓN

Uno de los anhelos de toda familia, en cualquier sociedad, es el poseer un lugar digno para vivir, ya sea su propia casa o departamento. Lo cual refleja la importancia que tiene el mercado de la vivienda, y que día con día, aumenta..

En México, desde hace varios años, se tiene un gran problema de escasez de vivienda. Lo anterior es debido principalmente, a la ausencia de instrumentos financieros que logren que los créditos hipotecarios sean más accesibles y también a la falta de recursos para otorgar un mayor número de créditos hipotecarios y para la construcción de nuevas viviendas.

La banca hipotecaria, en un intento por solucionar este problema de escasez de vivienda instrumentó nuevos esquemas de financiamiento, como son las hipotecas con índice dual y las hipotecas híbridas con tasa ajustable. A pesar de que estos nuevos esquemas contribuyeron a que sectores de la población, que antes no tenían acceso a créditos hipotecarios, pudieran convertirse en acreditados potenciales, este esfuerzo no fue suficiente.

El problema de la vivienda persiste y en el último año y medio se ha hecho cada vez más grave debido a la crisis económica por la que estamos pasando. Con lo anterior la banca hipotecaria ha volteado la vista a otro instrumento financiero llamado bursatilización.

La idea básica de la bursatilización del crédito hipotecario, es la de emitir valores respaldados por un *pool* o conjunto de hipotecas, de tal forma que el banco recupere más rápidamente los recursos que destina a este sector, gracias a la participación de nuevos inversionistas que compran partes del valor emitido. Con esto se ocasiona que la banca tenga a su disposición una cantidad mayor de recursos que podrá utilizar en la emisión de nuevos créditos hipotecarios. A su vez, los inversionistas mejoran su diversificación del riesgo dado que pueden poseer partes de diferentes valores, donde cada uno de ellos tiene

distinto riesgo debido a que los *pools* de créditos que los respaldan son heterogéneos, es decir, están conformados por hipotecas con diferentes características.

Lo anterior se escucha muy interesante, pero para poner en práctica la bursatilización es necesario sortear varias vicisitudes. Entre las más importantes se encuentra en primer lugar, la falta de información sobre el historial crediticio y del comportamiento de los acreditados bajo distintos escenarios económicos. Sin embargo, desde hace más de un año se formó una institución encargada de recabar, administrar y dar cauce a todos los historiales crediticios. Si esta institución logra realizar de forma eficiente y confiable su tarea, será posible que en mediano plazo se logre sortear este problema.

En segundo lugar, no se cuenta con una institución gubernamental que avale los créditos hipotecarios a bursatilizar y que garantice los valores que estén respaldados por tales créditos. Como expondré en mi tesina, esta es una de las principales condiciones que se necesita cumplir para poder bursatilizar el crédito hipotecario, sobre todo en una economía como la mexicana donde la tasa de interés tiene una alta volatilidad y existe un alto riesgo de devaluación.

Finalmente, se tienen problemas legales que impiden la bursatilización, en cuanto a la transferencia de la propiedad y de la relación, al tiempo que se emplea para embargar la propiedad en caso de incumplimiento del acreditado.

En cada uno de los problemas anteriores se están haciendo intentos para solucionarlos y lograr crear el marco estructural necesario para la bursatilización del crédito hipotecario. La rapidez con que se conforme este marco va a depender de las condiciones económicas y de la integración de la banca hipotecaria para lograr consensos.

El objetivo que persigo en mi tesina es ir más allá de estos problemas de implementación al intentar realizar un análisis de un modelo para fijar precio a un valor respaldado por el *Government National Mortgage Association*, (valor GNMA), el cual es un valor respaldado por créditos hipotecarios. Este modelo que intento analizar es un modelo continuo que utiliza la metodología de fijación de precios para opciones y es aplicado al valor GNMA el cual es emitido y comercializado en los Estados Unidos.

Lo que intento lograr con el análisis es el demostrar que tan factible es el implementar en el mercado mexicano modelos que se utilizan en otras economías, como es la estadounidense, que es el lugar en donde se inició la bursatilización del crédito hipotecario.

De cumplirse las condiciones necesarias para su aplicación, el modelo puede servir como parámetro para evaluar que tan rentable es la bursatilización. En caso de que no se pueda aplicar se tendrían que hacer cambios, si son factibles, en el modelo o crear uno nuevo que capture el comportamiento de los créditos hipotecarios en México.

Para realizar este análisis, divido mi tesina en dos partes, en la primera trato el marco conceptual para poder comprender el concepto de bursatilización y el modelo de fijación de precios. Para ello, comienzo tratando los principales créditos hipotecarios que se comercian en nuestro país, así como la reestructuración del crédito hipotecario en unidades de inversión, (UDIs). En otra sección, expongo las características principales para fijar precio a bonos y opciones. Para finalizar esta primera parte, abordo los rasgos principales de la bursatilización del crédito hipotecario poniendo énfasis en lo referente al valor GNMA.

En la segunda parte, inicié exponiendo el modelo de fijación de precios. Posteriormente, realizo un análisis de las características de valor GNMA, analizando primero la ecuación diferencial que arroja el modelo, para después, continuar con una discusión intuitiva de las características del valor GNMA. Posteriormente, trato de hacer un análisis de supuestos del modelo basándome en métodos econométricos y estadísticos. Finalmente, concluyo utilizando los resultados que arroja el análisis.

## **ANTECEDENTES.**

### **1. HIPOTECAS MEXICANAS.**

Hace doce años, para enfrentar el problema de la inflación en México se instrumentaron dos tipos de hipotecas; las “hipotecas con índice dual” (HID) y las “hipotecas híbridas con tasas ajustables” (HHTA), ambas pertenecen al grupo de “hipotecas de tasas duales” (HTD), llamadas también hipotecas a prueba de inflación.

Para saber que ventajas ofrecen las HID en escenarios inflacionarios es necesario primero conocer los problemas que enfrentan las “hipotecas tradicionales” (HTF), en su aplicación, las cuales utilizan una tasa de interés fija y cobran mensualidades niveladas.

En las HTF los pagos deben de ser lo suficientemente elevados para cubrir el cobro de intereses como una proporción del capital. La idea básica de estas hipotecas es que los pagos periódicos son iguales durante todo el plazo y son calculados de tal forma que se cubre totalmente la deuda al vencimiento.<sup>1</sup>

La hipoteca tradicional enfrenta dos grandes problemas los cuales ocasionan que se encuentren limitadas a actuar adecuadamente en economías con una alta tasa de inflación; a) el problema de transformación de plazos y b) el problema de amortización acelerada.

---

<sup>1</sup> La forma en que se calcula el pago mensual en las HTF es aplicando la fórmula del valor presente de una anualidad ordinaria. Obteniendo la siguiente fórmula:

$$P = S_0 \left[ \frac{i(1+i)^T}{(1+i)^T - 1} \right]$$

Donde  $P$  es el pago mensual,  $S_0$  es el monto del crédito  $i$  es la tasa de interés mensual pactada y  $T$  es el plazo del crédito.

a) Problema de transformación de plazos: Este problema es causado cuando las tasas activas o de crédito están muy cerca o por abajo de las tasas pasivas o de depósito. En esta situación el banco podría enfrentar pérdidas, porque el valor de mercado de la inversión de un banco se encuentra por abajo del valor nominal, debido a que el flujo de pagos que recibirá por las hipotecas tendrá que ser descontado a una tasa mayor.

b) Problema de amortización acelerada por inflación “problema de inclinación”: En un entorno inflacionario las tasas nominales son muy altas causando que los pagos iniciales de las hipotecas sean muy altos, generando que gran parte de la población encuentre inaccesible este financiamiento. Aunque en principio este problema parece afectar sólo al acreditado también afecta al banco porque prácticamente le imposibilita colocar créditos.

Para tratar de solucionar estos dos problemas los bancos pusieron en práctica nuevos instrumentos financieros entre los que se encuentran las HTD. La principal característica de las HTD es que trabajan simultáneamente con dos tasas, una para calcular los pagos y otra para calcular el interés devengado. Generalmente los pagos evolucionan de acuerdo a la inflación de tal forma que el acreditado pueda mantener su poder de compra o de pago como sería el caso. En tanto la tasa de deuda se utiliza para calcular la tasa de interés que el prestatario debería pagar periódicamente por los saldos insolutos. Como estas dos tasas no son iguales puede ocurrir que el saldo insoluto real crezca al inicio del período de amortización. Este proceso de amortización negativa ocurrirá siempre y cuando el pago nominal no alcance a cubrir el monto del componente real del interés devengado. En lo que respecta al vencimiento de la deuda este puede ser de dos tipos fijo o variable.

Con las HTD se pospone el problema de pagos iniciales elevados que se presentan bajo esquemas de amortización tradicional en contextos de inflación alta, pudiendo de esta forma ser accesibles para un mercado más amplio de acreditados. En las HTD este problema de “inclinación” en la amortización desaparece, ya que el pago inicial se calcula tomando en cuenta las expectativas sobre la tasa real a largo plazo y el plazo de vencimiento. Además, debido a que los pagos se ajustan en base a un índice de inflación, el acreditado, según los bancos, sentirá mayor confianza en poder cumplir con su deuda. Claro que siempre y cuando, el poder de compra que tiene el acreditado en el momento de contratar la deuda sea

menor o igual al que tenga durante todo el tiempo que dure la amortización. Por su parte, el problema de transformación de plazos entre activos y pasivos, se soluciona a través del uso de una tasa variable, es decir, la tasa es ajustada cada intervalo de tiempo de acuerdo al índice inflacionario.

Sin embargo, el hecho de posponer los pagos iniciales altos expone al banco a un riesgo mayor a largo plazo ya que los bancos esperan que el poder adquisitivo de sus acreditados se mantenga, lo cual es muy poco probable en economías como la mexicana. Por otro lado, si se toma en cuenta que en economías inestables, como la nuestra, al calcular la tasa a largo plazo usando expectativas siempre se va a quedar muy lejos de la realidad, debido a tantos cambios inesperados que se dan en las variables económicas.

Expuestas las características que ofrecen las HTD se tratará de explicar como trabajan y a que problemas se enfrentan cada una de las principales hipotecas que son comerciadas en México.

## **1.1 HIPOTECAS CON ÍNDICE DUAL.**

Las HID trabajan con dos índices, por un lado la tasa de inflación, la cual controla el desarrollo del pago mensual, y por otro lado, la tasa de interés del mercado<sup>2</sup>, la cual determina la tasa de deuda, es decir los intereses que se van a pagar por periodo.

Los objetivos que persigue la HID son ofrecerle acceso a una parte de la población, quienes bajo HTF no podrían acceder a créditos hipotecarios, debido a los pagos iniciales altos, y darle al banco un producto rentable.

El primero es alcanzado al definir pagos iniciales relativamente bajos,<sup>3</sup> el poder de pago por parte de los acreditados se mantendrá mediante el incremento de la tasa en base a la tasa de inflación, eliminando de esta forma el problema de inclinación.

---

<sup>2</sup> La tasa de mercado puede ser alguna de las siguientes tasas: la tasa de los Certificados del Tesoro (CETES) a 28 días, la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP), la tasa del costo porcentual promedio de fondeo de los bancos (CPP) y la tasa de aceptaciones bancarias

El segundo se logra al realizar cambios periódicos en la tasa activa, reduciendo la exposición del banco al riesgo de cambios en la tasa de interés. Esta tasa activa es igual a una tasa de interés de mercado más un margen de intermediación. Más sin embargo, el riesgo se esta transfiriendo al acreditado al ser expuesto a variaciones en la tasa de interés que le impida saldar su deuda y en consecuencia el banco enfrenta riesgos de incumplimiento o *default*.

### 1.1.1 Tasa de deuda.

La tasa aplicada al saldo real del acreditado para determinar el monto de intereses a acumular en el periodo, es la tasa de deuda. La tasa de mercado más alta que es conocida como la “tasa líder”<sup>4</sup> se emplea como índice para definir la tasa de deuda. De esta forma el banco transfiere a los acreditados la carga financiera de los pasivos del banco causados por un incremento en la tasa de interés del mercado.

La tasa de deuda se calcula de la siguiente manera:

$$D_{m,t} = \text{Max}\{rm_t + \xi, rm_t \cdot f\} \quad f > 1 \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

Donde

$D_{m,t}$  = Tasa de deuda.

$rm_t$  = Tasa líder en el mes t.

$f$  = Margen expresado como un factor multiplicativo.

$\xi$  = Margen expresado como un parámetro fijo.

La razón de calcular de esta forma la tasa de deuda, es que en condiciones de inflación baja las tasas nominales son bajas, por lo que el banco cobrará  $rm$  más el margen  $\xi$  pero cuando la inflación es alta este margen no será suficiente para cubrir los costos de

---

<sup>3</sup> Los pagos iniciales se determinan de acuerdo a los objetivos del banco, si el banco quiere acceder a una mayor parte del mercado fijará los pagos iniciales lo más bajo posible y si desea estar expuesto a un menor riesgo aumentara estos pagos iniciales.

<sup>4</sup> La tasa líder es seleccionada entre las siguientes: la tasa de los Certificados del Tesoro (CETES) a 28 días, la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP), la tasa del costo porcentual promedio de fondeo de los bancos (CPP) y la tasa de aceptaciones bancarias.

intermediación por lo que el banco estará protegido al utilizar el margen multiplicativo  $f$ , lo cual puede interpretarse como un porcentaje sobre la tasa líder.

### 1.1.2 Tasa de pagos.

En los últimos años el índice que se utiliza para obtener la tasa de los pagos es el más alto de los siguientes dos índices: la tasa de inflación del índice de precios al consumidor o la tasa de crecimiento de los salarios mínimos.<sup>5</sup>

La forma en que se realiza el cálculo de los pagos mensuales es la siguiente:

$$T_{m,t} = \frac{P_t}{S_{t-1}} \quad t = 1, \dots, T$$

con

$$P_t = \begin{cases} P_t & t = 1 \\ P_{t-1}(1 + \Pi_t) & t = 2, \dots, T \end{cases} \quad (2)$$

Donde

$T_{m,t}$  = Tasa de pagos para el periodo  $t$ .

$P_t$  = Pago de la mensualidad efectuado en el periodo  $t$ .

$S_t$  = Saldo insoluto al final del periodo  $t$ .

$\Pi_t$  = Tasa de inflación al final del periodo  $t$ , calculada como una tasa *ex post* entre  $t$  y  $t-1$ .

La tasa de pago es igual a la razón del pago mensual de ese periodo, el cual se incrementa de acuerdo a la inflación observada, y el saldo insoluto. El pago inicial es calculado en base a una estimación de la tasa real de largo plazo y de la inflación para el largo plazo de amortización, tratando de que la mensualidad sea suficiente para garantizar que la deuda se amortice antes del vencimiento máximo. Si se estiman adecuadamente estas dos tasa, el acreditado tendría que pagar una prima extra para cubrir el riesgo a que se exponen los bancos y no sólo la prima de riesgo de devaluación y alta inflación que generalmente si se toman en cuenta.

---

<sup>5</sup> En un principio el único índice que se tomo como referencia fue el índice de salarios mínimos, pero como se rezagó demasiado en relación a la inflación se decidió tomar otro índice como referencia.

El ajuste de pagos se realiza generalmente cada seis meses por lo que los pagos entre cada ajuste se mantienen constantes.

### **1.1.3 Amortización.**

Si el primer pago se realiza en un escenario de inflación baja, la amortización se realiza de una forma normal, es decir, parte del pago es a intereses y otra parte a capital. Sin embargo, cuando el primer pago se realiza en un escenario de inflación alta, los pagos iniciales no alcanzarán a cubrir ni los intereses, por que la tasa inicial de deuda será mayor que la tasa de pagos. La parte de intereses no pagados se refinancia y pasará a ser parte de la deuda del acreditado, es decir, si el pago a intereses era de \$50 pero el pago mensual fue sólo de \$45, el saldo insoluto se incrementará en \$5. Lo anterior se repite hasta que la tasa de interés observada baje, causando que la deuda nominal del acreditado muestre una tendencia descendente, es decir, los pagos mensuales serán lo suficientemente elevados para cubrir los intereses y liquidar parte del saldo insoluto.

Cuando no existe mucha incertidumbre del nivel de las tasas reales y los pronósticos por parte del banco son de tal forma que las tasas de interés *ex ante* se encuentren al menos iguales a las tasas *ex post*, se tendrá desde el inicio de la amortización unos saldos reales decrecientes, debido a que los pagos iniciales serán lo suficientemente elevados, y a pesar de mostrarse un crecimiento en los saldos nominales se estará llevando a cabo un proceso de amortización real.

Pero como es bien conocido, en México no existe ninguna garantía para asegurar que las tasas *ex post* se encuentren por abajo de las *ex ante*. Tratando de cubrirse de este riesgo los bancos instrumentaron diversos mecanismos, como son el pedir pagos adicionales en meses específicos del año,<sup>6</sup> imponer un plazo máximo de vencimiento dado el sistema de refinanciamiento y un monto máximo de refinanciamiento, o el aumentar el monto de los pagos. Todas estas soluciones son poco eficientes, ya que podrían causar que el acreditado sufriera una crisis de liquidez implicando un riesgo para los HID.

---

<sup>6</sup> Como serían los meses en que se pagan utilidades y aguinaldos.

## 1.2 HIPOTECAS HÍBRIDAS CON TASAS AJUSTABLES.

A diferencia de las HID las HHTA utilizan únicamente un índice, la tasa interés de mercado, para calcular la tasa de deuda y la tasa de pagos.

### 1.2.1 Tasa de deuda y de pagos.

La tasa de deuda para las HHTA es simplemente una tasa activa de mercado, la cual se calcula de la misma forma que en el caso de las HID.

Por otro lado, las HHTA incluyen un factor de refinanciamiento para que los pagos iniciales sean menores a los que se realizarían con una hipoteca de tasa ajustable (HTA). Este factor de refinanciamiento permite que en los primeros años los pagos sean bajos a costa de un incremento en los saldos insolutos, para que de esta forma se pueda acceder a un mayor número de personas, pero nuevamente se expone a un riesgo mayor de *default* cuanto más se rezagó el poder adquisitivo de los acreditados.

La tasa de pagos se calcula de la forma siguiente:

$$T_{m,t} = \frac{(1 + D_{m,t}\eta)}{T - t + 1} + (D_{m,t}[1 - \eta]) \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$
$$P_t = T_{m,t} S_{t-1}$$

Donde

$T_{m,t}$  = Tasa de pagos para el periodo t.

$D_{m,t}$  = Tasa activa de mercado.

$T$  = Plazo fijo de la hipoteca.

$\eta$  = Factor de refinanciamiento a seleccionar por el acreditado,  $0 < \eta < 1$ .

$P_t$  = Pago mensual en el periodo t.

$S_t$  = Saldo insoluto al final del periodo t.

Esta formula nos dice que la tasa de pagos es la suma de una fracción fija de la tasa de deuda, la cual depende del factor de refinanciamiento, más una fracción variable de la tasa de deuda que también depende del factor de refinanciamiento, pero la cual va a aumentar

conforme se acerqué la fecha de vencimiento. Hasta que en la fecha de vencimiento la tasa de pagos va a ser igual a la tasa de deuda más uno.

$$T_{m,T} = \frac{(1 + D_{m,T}\eta)}{T - T + 1} + (D_{m,T}[1 - \eta]) = 1 + D_{m,T}\eta + D_{m,T}[1 - \eta] = 1 + D_{m,T}$$

### 1.2.2 Amortización.

Los pagos se ajustan completamente a cambios en la tasa de interés de mercado. Como se mencionó anteriormente el factor de refinanciamiento que poseen las HHTA causa que en la parte inicial de la amortización los pagos sean más accesibles. La diferencia que tienen las HHTA respecto a las HID es que el plazo de vencimiento esta fijo. Tomando  $t = T$  en (3):

$$S_{T-1}T_{m,T} = S_{T-1}[1 + (D_{m,T}\eta) + D_{m,T}(1 - \eta)] = S_{T-1}(1 + D_{m,T}) = P_T$$

Lo que demuestra que el pago final es igual al saldo insoluto al vencimiento.

## 1.3 RIESGOS DE LAS HTD MEXICANAS.

Las HTD fueron diseñadas para trabajar en entornos inflacionarios pero eso no las excluye de enfrentar riesgos. Los riesgos más importantes que enfrentan las HTD mexicanas desde el punto de vista del banco son; a) el riesgo de incumplimiento, mejor conocido como “*default*”, b) el riesgo de desbalance y c) el riesgo de prepago. A continuación se presentan las principales características de estos riesgos dentro de cada una de las hipotecas.

### 1.3.1 Riesgo de *default*.

Este riesgo ocurre por dos razones, ya sea que el pago de la deuda excede a las posibilidades de pago del acreditado o que el monto del saldo insoluto quede por arriba o

muy cerca del valor de la propiedad. El primero de ellos se le llama factor de ingresos y al segundo factor de capital.

Para el caso de las HID, si el ingreso del acreditado se rezaga en relación a la inflación el acreditado enfrentará una crisis de liquidez, imposibilitándolo a pagar su deuda. Este problema es más grave en las HTD que en las HTF, porque existen más personas que se encuentran en el margen de solvencia en el momento de contratar la deuda.

Por otro lado, ante periodos de inflación prolongada la tasa de deuda podría alejarse demasiado de la tasa de pago causando un incremento en el valor de la deuda, de tal forma que si este se acerca o sobrepasa el valor de la propiedad el acreditado tendría incentivos al *default*.

En cuanto a las HHTA, cuando las tasas *expost* son inesperadamente altas y las tasas nominales crecen, los pagos mensuales que están indizados a la tasa líder nominal se incrementarán, haciendo más probable que el ingreso del acreditado se rezague a tal grado que se vería incapaz de cumplir con el pago. Por otro lado, si las tasas *expost* son altas pero la tasa nominal decrece, se producirán pagos nominales bajos y el saldo insoluto se incrementaría, si esta combinación se mantiene por un largo periodo de tiempo se causará un incentivo al *default* por el factor de capital.

### **1.3.2 Riesgo de desbalance.**

Al permitirse la característica de refinanciamiento en estos esquemas hipotecarios se corre el riesgo de comprometer una gran cantidad de recursos por esa vía, lo que podría generar un desbalance en la cartera de los bancos, causando problemas de liquidez, mala capitalización y falta de diversificación.

Una de las características de las HID es permitir amortizaciones negativas, que cuando son potencialmente explosivas crean para los bancos un problema tridimensional. En primer lugar, la razón de los activos a capital podría rebasar el nivel máximo permitido por la Comisión Nacional Bancaria (CNB),<sup>7</sup> quienes pedirán que los bancos aumenten su nivel de

---

<sup>7</sup> Comisión Nacional Bancaria, institución encargada de regular a la banca mexicana.

capitalización. Si se capitaliza reduciendo su liquidez estarán incrementando el riesgo en las otras dos dimensiones, que son la falta de diversificación y la falta de liquidez.

La falta de diversificación es causada porque ante un refinanciamiento potencialmente explosivo, se incrementará la razón de activos hipotecarios a activos totales desbalanceando la cartera del banco, haciéndolo más dependiente de los créditos hipotecarios y por ende exponiéndolo a un mayor riesgo.

Por su parte, el desbalance de los activos puede generar un problema de liquidez debido a que el banco presta a una tasa activa que depende de la inflación, mientras que el pago a sus depositante se realiza en base a una tasa pasiva del mercado. Si bien el banco está consciente de que en la primera etapa de la amortización del crédito hipotecario esta será negativa, también sabe que si perdura por un gran lapso de tiempo el ingreso generado por sus inversiones podría ser insuficiente para pagar sus obligaciones. Lo anterior se agravaría al tener que cumplir con los requerimientos de capital que le exige la CNB.

Por otro lado, las HHTA también poseen la característica de refinanciamiento, pero debido a la forma en que son calculados los pagos este problema tridimensional aparece únicamente cuando la tasa *expost* crece mientras que las tasas nominales caen, causando una amortización negativa creciente, pero como en el caso de las HHTA la deuda se contrata a plazo fijo por lo que no puede ser explosiva.

Aunque la amortización real negativa incremente las razones activos a capital y activos hipotecarios a activos totales, no aumentará el riesgo en las tres dimensiones antes mencionadas gracias a que los pagos mensuales de las hipotecas están indizados a estas tasas nominales bajas, con ello el problema de liquidez no es tan factible ya que al bajar sus cobros mensuales también estarán bajando sus pagos mensuales, pero si el factor de refinanciamiento escogido por el acreditado es grande, la factibilidad del problema de liquidez aumentará. No obstante lo anterior, este problema puede ser fácilmente solucionado limitando el intervalo en que el acreditado puede escoger el factor de refinanciamiento.

### **1.3.3 Riesgo de prepago.**

Tratándose de HTF, cuando la tasa de mercado cae, el acreditado tiene incentivos a prepagar para renegociar el contrato a una tasa menor, porque no baja la tasa de interés a pagar por el acreditado en la misma forma en que sube cuando sube la tasa de interés de mercado y el ingreso extra que obtiene el banco por el prepago del acreditado va a disminuir su rendimiento esperado porque sólo lo puede reinvertir a una tasa más baja. Entonces el riesgo de prepago aparece cuando el rendimiento obtenido por los créditos hipotecarios es menor que el rendimiento esperado.

El riesgo de prepago no existe en las HID ni en las HHTA, porque si la tasa de interés baja, también bajará el saldo insoluto y el costo de fondeo.

### **1.4 REESTRUCTURACIÓN MEDIANTE UNIDADES DE INVERSIÓN.**

La crisis económica por la que pasa México, desde finales de 1994, aunado a la mala discriminación hecha por los bancos para asignar créditos, causaron que el sistema bancario mexicano, de la que no están exentos los créditos hipotecarios, se encuentre en condiciones muy difíciles. Con el fin de resolver el problema de liquidez causado por el efecto de inclinación, se diseñó un esquema a través de Unidades de Inversión (UDIs), que establece un plazo fijo y además garantiza al acreedor una tasa real *ex ante*,<sup>8</sup> eliminando con ello la necesidad de encarecer el crédito para compensar la incertidumbre.

Al ser las UDIs una unidad de cuenta que permite definir el valor de la deuda en términos constantes, se establece un patrón de pagos reales como el que se tendría bajo un escenario sin inflación, pero además al eliminar la prima de riesgo por incertidumbre sobre el pronóstico inflacionario reducen el costo del crédito.<sup>9</sup>

---

<sup>8</sup> Debido a la incertidumbre macroeconómica y falta de credibilidad del gobierno mexicano era casi imposible pronosticar la tasa de inflación.

<sup>9</sup> A diferencia de las HID, donde el componente inflacionario de la tasa de mercado contiene una prima de riesgo.

La forma en que se calculan los pagos y los servicios de la deuda cuando se utilizan créditos en UDIs con tasas reales fijas es en primer lugar calcular el valor de la deuda en términos de UDIs, después se calculan los pagos reales conforme a la fórmula de amortización lineal que es la siguiente:

$$PD_t = \frac{\left(\frac{F_0}{U_0}\right)}{T} \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

Donde

$PD_t$  = Pago de capital en UDIs en el periodo t.

$F_0$  = Valor en términos nominales del principal contratado.

$U_0$  = Valor de las UDIs. al inicio del contrato.

$T$  = Plazo vencimiento de la deuda en meses.

$$I_t = S_{t-1}i \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

Donde

$I_t$  = Pago de intereses en UDIs. en el periodo t.

$S_{t-1}$  = Saldo insoluto al final del periodo t - 1.

$i$  = Tasa de interés pactada.

Los créditos en UDIs no están exentos de riesgos por lo que en la última parte de esta sección se tratarán los diferentes riesgos a los que están expuestos las “hipotecas reestructurados y contratados en UDIs” (HUDIs).

#### 1.4.1 Principales riesgos para las HUDIs.

Para el caso de las HUDIs el riesgo de incumplimiento se vuelve sistemático. La razón es la posibilidad de que la tasa inflacionaria se mantenga alta mientras que el poder de compra de los acreditados se rezaga.

A pesar de que no existe una amortización negativa, los saldos en UDIs estarán creciendo en los primeros meses, este problema a diferencia de las HID es que los pasivos están pactados en pesos, lo que incentiva a incrementar el capital causando un problema de

diversificación real, pero a comparación de las HTD<sup>10</sup> este problema no será importante por que sólo se estará restableciendo al nivel de capitalización real inicial.

Por otro lado, si existe un riesgo relevante en cuanto a la falta de liquidez a causa de un desbalance en la mezcla de activos bancarios en pesos y UDIs, porque las obligaciones de los bancos son pagadas a una tasa comercial mayor a la tasa real que se aplica sobre sus ingresos por créditos en UDIs.<sup>11</sup>

Por último las HUDIs también enfrentan el riesgo de prepagos, pero este es menor a comparación de las HID, porque a pesar de que se de un ambiente favorable haciendo que la tasa de inflación disminuya estos cambios en tasa reales son menos drásticos que los cambios que se observan en tasas nominales.

---

<sup>10</sup> En donde puede darse un crecimiento en los saldos insolutos de forma explosiva.

<sup>11</sup> Para poder realizar la reestructuración el gobierno tuvo que transferir el riesgo de desbalance de la cartera de los bancos al gobierno, creando fideicomisos para que los bancos comerciales sustituyan su cartera por CETES a 28 días.

## 2 CARACTERÍSTICAS SOBRE LA FIJACIÓN DE PRECIOS PARA BONOS Y OPCIONES CALL.

### 2.1 BONOS.

La fijación de precios a los valores de ingreso-fijo, mejor conocidos como bonos, se realiza de acuerdo a la tasa de interés de mercado y al volumen y forma en que los flujos de pagos comprometidos por el emisor de un bono se distribuyan en el tiempo. La forma en que el mercado determina la tasa de interés esta definido por la estructura de plazos.

La estructura de plazos mide la relación entre el rendimiento de valores libres de *default* que difieren únicamente en su término de vencimiento. Para poder entender la estructura de plazos es necesario comprender las diferencias entre tasas de interés corrientes y tasas de interés a término.

a) Tasa de interés corriente, es la tasa de interés que se cobra sobre un crédito que se lleva a cabo en ese preciso momento.

b) Tasa de interés a término, es aquella que se le carga a un crédito que se va a realizar en el futuro, pero los términos y condiciones bajo los cuales se realizará se determinan ahora.

Aunque ambas tasas dependen de la duración del crédito la diferencia radica en cuando se va a llevar a cabo el crédito, por lo anterior la tasa de interés,  $r(a,b)$ , va a ser una función de la fecha en que se realiza el crédito,  $a$ , y de la fecha de vencimiento del crédito,  $b$ , como se puede apreciar, para tasas corrientes  $a = 0$ .

Como se mencionó anteriormente la estructura de plazos define la tasa corriente para varios vencimientos y aunque la tasa a término no puede ser definida a través de la estructura de plazos, se puede inferir debido a la relación que guardan las tasas corrientes y las a término.

Para entender mejor esta relación se propone primero un ejemplo de estructura de plazos:<sup>1</sup>

$$r(0,1) = 0.04$$

$$r(0,2) = 0.06$$

$$r(0,3) = 0.08$$

$$r(0,4) = 0.09$$

En la figura 1 se exponen las diferentes tasas a término que surgen de este ejemplo de estructura de plazos.

Bajo el supuesto de que los créditos están libres de riesgo, los prestatarios y los prestamistas deben estar indiferentes entre un crédito por \$1 contratado hoy con vencimiento en  $b$  años a un crédito contratado por \$1 hoy con vencimiento en  $b - c$  años e invirtiendo el ingreso de este en otro crédito en  $b - c$  años y con vencimiento en  $c$  años, de no ser así habría arbitraje, por lo tanto, como en equilibrio no se permite arbitraje lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$[1 + r(0,b)]^b = [1 + r(0,b-c)]^{b-c} [1 + r(b-c,b)]^c$$

Despejando  $r(b-c,b)$ .

$$r(b-c,b) = \left[ \frac{[1 + r(0,b)]^b}{[1 + r(0,b-c)]^{b-c}} \right]^{\frac{1}{c}} - 1 \quad (6)$$

Tomando el ejemplo de estructura de plazos para  $b = 4$  y  $c = 2$  se obtiene:

$$r(2,4) = \left[ \frac{[1 + r(0,4)]^4}{[1 + r(0,2)]^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = \left[ \frac{[1.09]^4}{[1.06]^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.1208$$

De lo anterior se deduce que sin la existencia del riesgo de *default* basta conocer el valor de las tasas corrientes para obtener las tasas a término.

---

<sup>1</sup> La relación positiva que muestran las tasas de interés respecto a la fecha de vencimiento es solo un ejemplo de la estructura de plazos ya que dependiendo de diferentes factores que tratan de ser explicados por diferentes teorías de estructura de plazos estas pueden mostrar relaciones positivas o negativas o neutras.

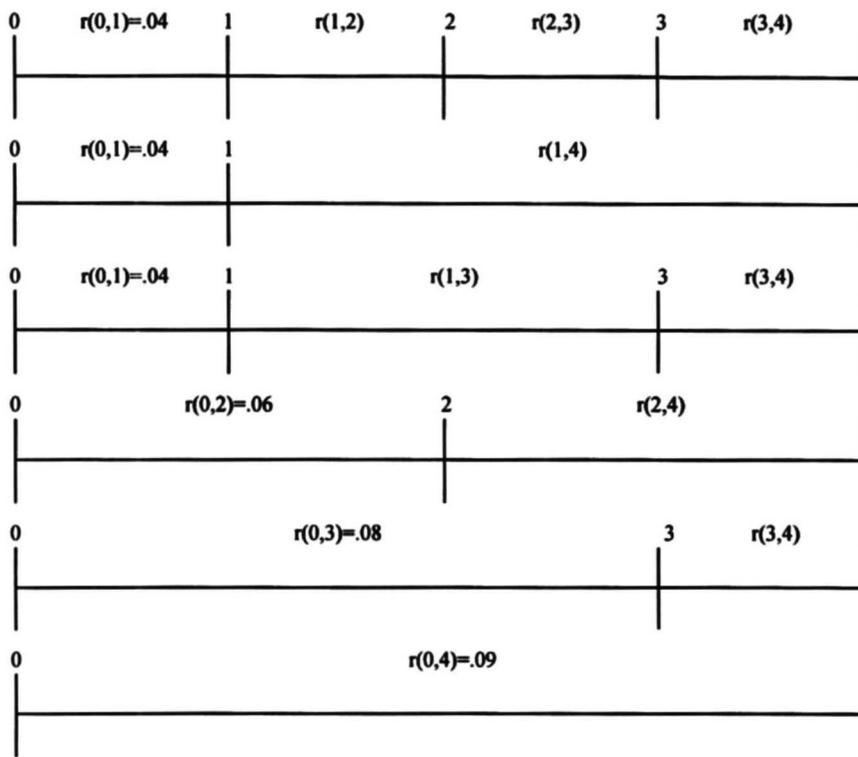


Figura 1.

Después de saber como están relacionadas las tasas corrientes y a término es tiempo de analizar como se determina la estructura de plazos de la tasa de interés.

### 2.1.1 Teorías de la estructura de plazos.

Si se gráficán las relaciones entre la tasa de interés y los vencimientos para un conjunto de bonos dado un nivel de riesgo, básicamente se podrán obtener tres distintos tipos de curvas, como las que se muestran en la figura 2.

Realmente es difícil construir una estructura de plazos y rara vez se pueden encontrar curvas suaves como las de la Fig. 2. Aunque algunas estructuras de plazos están en un montículo, en general las curvas tienden a presentar pendiente negativa, positiva o prácticamente cero.

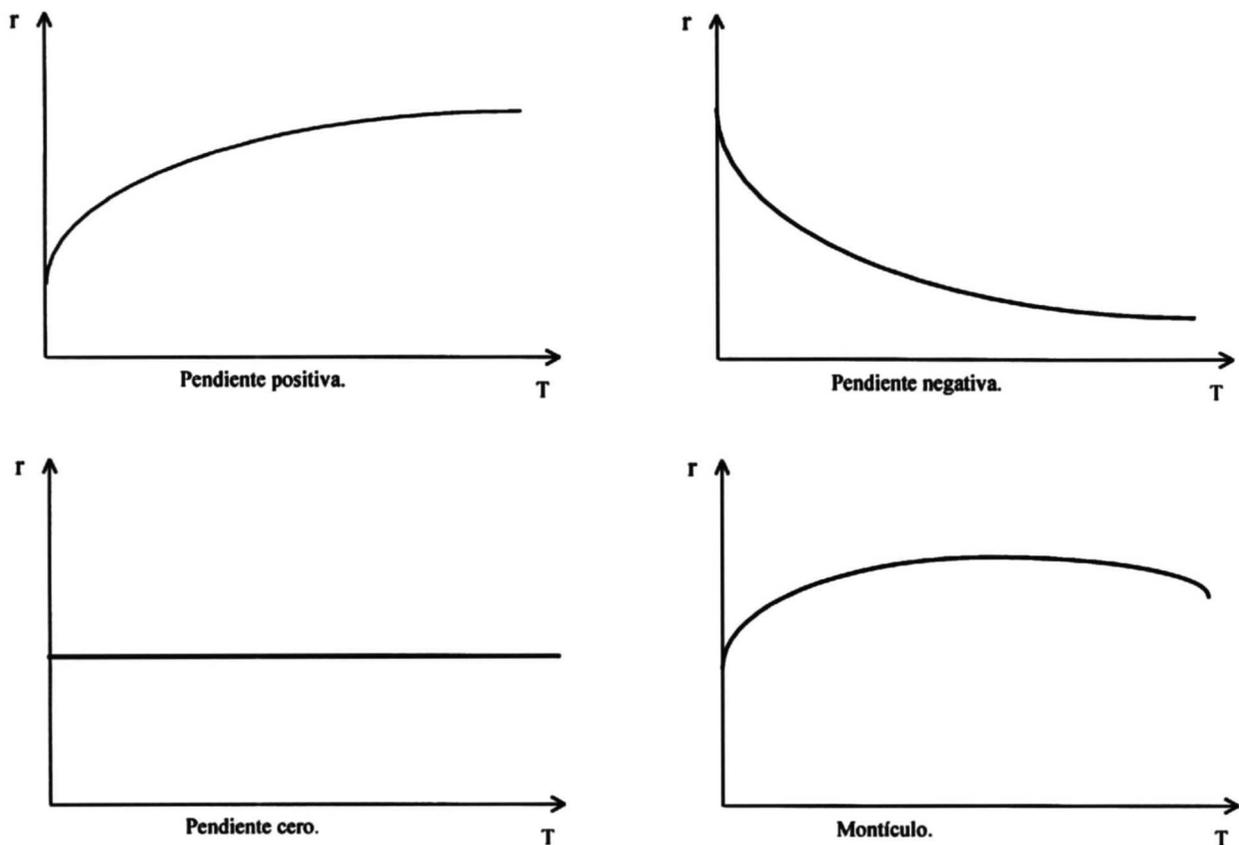


Figura 2.

a) Teoría de las expectativas. Esta teoría supone que no existen costos de transacción ni incertidumbre o que los inversionistas son neutrales al riesgo. Bajo estas condiciones, las tasas a término deberán de representar las expectativas del mercado de las tasas corrientes futuras, implicando que la pendiente de la curva de la estructura de plazos indica la dirección esperada de las tasas de interés futuras.

Si el mercado pronostica un crecimiento en las tasas de interés corrientes para créditos de un cierto periodo de tiempo la estructura de plazos tendrá una pendiente positiva. De forma similar, si el mercado pronostica que las tasas corrientes caerán la estructura de plazos tendrá pendiente negativa y si pronostica que no van a suceder cambios, se tendrá una estructura de plazos con pendiente cero, mientras que una curva de estructura de plazos en forma de montículo, querrá decir que las expectativas de la tasa de interés van a llegar a un

nivel donde comenzará a desacelerarse este crecimiento hasta que ya no se espere que suba más y a partir de ahí comenzara a caer.

b) Teoría de la preferencia por liquidez. En esta teoría se argumenta que los prestamistas prefieren tener liquidez, por tanto tienen preferencia por créditos a corto plazo. Entonces las tasas a largo plazo exceden a las tasas a corto plazo para inducir a los prestamista a renunciar a su liquidez. Lo anterior implicaría una pendiente positiva en la estructura de plazos.

Si esta teoría es cierta las tasas a término serán sistemáticamente sobre estimadas, por que estarán sesgadas debido a las expectativas de las tasas corrientes futuras.

c) Teoría de la segmentación del mercado. Aquí se supone, que los mercados a corto y largo plazo son independientes y que la oferta y demanda de cada uno de los mercados determinan su estructura de plazos respectivamente.

### **2.1.2 La fijación de precios de bonos.**

Debido a la dificultad que se tiene en la práctica para obtener las tasas corrientes dadas por la estructura de plazos, se utiliza el rendimiento al vencimiento para fijar precios a los bonos.

El rendimiento al vencimiento es simplemente una sencilla tasa de descuento que se aplica a los cupones de los bonos y a su valor nominal para obtener el valor presente, el cual va ser igual al precio de mercado actual del bono. La forma de calcular el precio del bono es la siguiente:

$$B = \sum_{t=1}^T C_t (1+y)^{-t} \quad (7)$$

Donde

$B$  = Precio del bono.

$y$  = Rendimiento.

$C_t$  = Flujo de pagos, "cupones y principal" al tiempo  $t$ .

Si se supone que los cupones son constantes, la ecuación anterior puede ser expresada de la siguiente forma:

$$B = CU \sum_{t=1}^T (1+y)^{-t} + PR(1+y)^{-T} = CU \left[ \frac{1+(1+y)^{-T}}{y} \right] + PR(1+y)^{-T} \quad (8)$$

Donde

$CU$  = Cupon.

$PR$  = Principal.

Conociendo la forma en que se calcula un bono se puede analizar la forma en que se comporta al cambiar los diferentes parámetros que lo componen.

El rendimiento del precio del bono se va a mover en relación inversa al rendimiento, porque el rendimiento es una tasa de descuento que se aplica al bono. Entonces para rendimientos por abajo de la tasa del cupón el bono será vendido con una prima, cuando es igual a la tasa del cupón se vende a la par y cuando esta por arriba se vende descontado.

Ahora bien, ante un cambio en el rendimiento el precio del bono cambia por un porcentaje que varía inversamente con el vencimiento del bono, es decir, manteniendo todo lo demás constante. Cuanto mayor sea el tiempo para el vencimiento del bono mayor será el cambio porcentual en su precio ocasionado por un cambio porcentual en el rendimiento. Lo cual es fácil de ver, dado que el pago del principal se descuenta aun más, pero con altos vencimientos la diferencia en el cambio porcentual en el precio va a ser insignificante.

En lo que respecta al cupón, se tiene que a mayor cupón menor será el cambio porcentual en el precio de un bono dado un cambio porcentual en el rendimiento si se mantiene todo lo demás constante, ya que la razón cupón principal será menos significativa.

Tomando todos los resultados anteriores, se puede decir que los bonos más volátiles son aquellos con vencimientos largos y cupones pequeños, es decir, si el administrador del portafolio pronostica una caída en la tasa de interés, una mayor parte del portafolio debería contener bonos con largos vencimientos y cupones bajos.

Al comparar bonos con largos vencimientos y cupones altos con bonos con cortos vencimientos y cupones bajos sería muy problemático determinar su volatilidad, para resolver tal problema se utiliza una medida de como los flujos de pagos de un bono se distribuyen en el tiempo y del monto de estos pagos conocido como “duración”, ( $DU$ ), que indica cuales pagos regresan más rápido y cuales son más volátiles. Esta medida de duración esta dada por la siguiente ecuación:

$$DU = \sum_{t=1}^T t \frac{C_t(1+y)^{-t}}{B} \quad (9)$$

Esta ecuación no es más que la suma ponderada de los flujos de pagos, multiplicados por los valores de  $t$ .

Para ilustrar como la duración mide la volatilidad se muestra en la tabla 1 las duraciones para varios vencimientos y cupones, con un rendimiento del 10%.

Estas tabla muestra, como se esperaría, que dado un vencimiento la duración disminuye si el cupón aumenta, es decir que paga menos rápido su rendimiento, mientras que para un cupón dado, la duración se incrementa si el vencimiento del bono se hace mayor.

VENCIMIENTO	CUPONES (%)					
	0	2	4	6	8	10
5	5	4.76	4.57	4.41	4.28	4.17
10	10	8.73	7.95	7.42	7.04	6.76
15	15	11.61	10.12	9.28	8.74	8.37
20	20	13.33	11.30	10.32	9.75	9.36
25	25	14.03	11.81	11.86	10.32	9.98
30	30	14.03	11.92	11.09	10.65	10.37
35	35	13.64	11.84	11.17	10.82	10.61

Tabla 1.

Cabe notar, que para cupones pequeños lo anterior no siempre ocurre cuando el vencimiento es muy largo, pero como la mayoría de los créditos son otorgados por lapsos menores a 30 años se puede decir que generalmente se da la relación anterior.

En si la duración es solamente la elasticidad del precio del bono a cambios en el rendimiento:

$$\frac{dB}{dy} \cdot \frac{1+y}{B} = -\sum_{t=1}^T t \frac{C_t}{(1+y)^{t+1}} \cdot \frac{1+y}{B} = -\sum_{t=1}^T t \frac{C_t(1+y)^{-t}}{B} = -DU \quad (10a)$$

Al ser la duración una medida del cupón y del vencimiento, deberá ser también una medida de la volatilidad del precio del bono.

Utilizando la ecuación (10a) obtenemos la tasa de cambio del precio del bono como función de la duración y del cambio en el rendimiento:

$$\frac{dB}{B} = -DU \frac{dy}{1+y} \quad (10b)$$

Por último se analiza la relación que guardan la estructura de plazos y la curva de rendimiento.

a) La curva de rendimiento es la relación entre rendimiento de los cupones y sus vencimientos.

b) La curva de estructura de plazos es la relación entre tasas de interés de bonos con diferentes vencimientos.

Por ejemplo una estructura de plazos puede ser definida como sigue:

$$r(0,1) = 0.16$$

$$r(0,2) = 0.14$$

$$r(0,3) = 0.12$$

$$r(0,4) = 0.10$$

Calculando el precio de un bono con valor nominal de \$1000 y cupón de 8%, con esta estructura de plazos se tiene,  $B = 952.12$  y utilizando la ecuación (8) el rendimiento sería de 10.38%.

Se aprecia que el rendimiento del bono es mayor que la tasa corriente para un crédito de cuatro años, esta relación siempre se va a dar en estructuras de plazos que tengan pendiente negativa. Entonces, si la estructura de plazos tiene pendiente negativa, el rendimiento de cualquier bono con vencimiento a  $T$  años va a ser mayor que la tasa de interés corriente a  $T$  años. Para una estructura de plazos con pendiente positiva, el rendimiento de cualquier bono con vencimiento a  $T$  años va a ser menor que la tasa de interés corriente a  $T$  años. Únicamente para estructuras de plazos con pendiente cero, el rendimiento de cualquier bono con vencimiento a  $T$  años va a coincidir con la tasa de interés corriente a  $T$  años.

Como se mencionó anteriormente la estructura de plazos es difícil de observar, sin embargo, es muy común utilizar la curva de rendimiento como una aproximación de la estructura de plazos. Usualmente la curva de rendimiento derivada por los Certificados del Tesoro (CETES) es utilizada para aproximar la estructura de plazos.

## **2.2 OPCIÓN CALL.**

Una opción es un contrato entre dos partes, un comprador y un vendedor, que da al comprador el derecho, pero no la obligación, para comprar o vender algo en una fecha futura a un precio acordado hoy.

El vendedor de la opción debe estar listo durante el tiempo en que dure la opción para vender o comprar de acuerdo al contrato previamente acordado, si el comprador de la opción lo desea. Una opción *call* es la opción de comprar algo, mientras que la opción de vender algo es llamada opción *put*. Entre las características de los valores respaldados por la *Government National Mortgage Association* (GNMA), cuyas características se discutirán a detalle más adelante, se encuentra la de ser un valor con opción *call* por lo cual únicamente se tratarán las propiedades referentes a esta opción.

Una opción *call* es la opción de comprar un activo a un precio fijo, mejor conocido como precio de ejercicio,<sup>2</sup> esta opción tiene un tiempo de vigencia el cual también es acordado entre las dos partes, este tiempo de vigencia de la opción es conocido como fecha de expiración.<sup>3</sup>

La opción *call* sobre un valor trabaja de la siguiente manera. Dos individuos acuerdan la compra-venta de una opción *call* sobre un valor, el vendedor adquiere la obligación de vender el valor al precio de ejercicio pactado, si el precio del valor sube por arriba del precio de ejercicio el comprador de la opción ejercerá la opción, comprando el valor al precio de ejercicio y vendiéndolo al precio de mercado obteniendo una ganancia libre de riesgo, ahora bien, si el precio de mercado del valor cae por abajo del precio de ejercicio el tenedor de la opción especulara mientras expire la opción, esperando que suba el precio del valor.

En opciones *call* sobre *stocks* la forma en que se utiliza es muy similar, si el precio del *stock* aumenta, la opción *call* es más valiosa, es decir, opciones *call* que se emitan en ese momento costarán más que las emitidas antes del incremento en el precio del *stock*, entonces el tenedor de una opción vieja tendrá una opción más valiosa ya que puede ser vendida a un mayor precio, de manera similar, si el precio del *stock* cae, el precio de la opción cae también. Una opción *call* se dice que esta *in-the-money* si el precio del *stock* excede al precio de ejercicio y se dice que esta *out-of-the-money* si el precio del *stock* esta por abajo del precio de ejercicio.

Existen dos distintos tipos de opciones *call* y *put* que son las opciones americanas y las opciones europeas.

La diferencia entre estas dos opciones es que mientras las opciones europeas únicamente pueden ser ejercidas cuando la opción expira las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento mientras no expire la opción. Los valores GNMA permiten que las hipotecas sean prepagadas en cualquier momento, es decir, tienen las características de opciones *call* americanas, así pues la siguiente sección abordará el tema de fijación de precio para una opción *call* americana.

---

<sup>2</sup> Es el precio acordado por el comprador y el vendedor al cual el tenedor de la opción puede comprar el valor suscrito.

<sup>3</sup> Es el tiempo durante el cual la opción se puede ejercer, después de este tiempo la opción ya no existe.

### 2.2.1 La fijación de precio para una opción *call* americana.

Como el uso de la opción no es obligatorio el valor de la opción no puede ser negativo, pero además para opciones americanas existe un valor mínimo, que es llamado el valor intrínseco. Este valor intrínseco siempre es no negativo, cuando el *call* esta *in-the-money* va a ser positivo, ya que es la diferencia entre el precio del *stock* y el precio de ejercicio, y si el *call* esta *out-of-the-money* el valor intrínseco va a ser cero. Lo anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$C_a(ST, T, E) \geq \text{Max}(0, ST - E)$$

Donde

$C_a$  = Precio de la opción *call* americana.

$ST$  = Precio del *stock*.

$E$  = Precio de ejercicio.

$T$  = Tiempo de expiración de la opción.

Generalmente el precio de una opción *call* americana excede a su valor intrínseco. La diferencia se debe a que tan dispuestos a pagar estén los agentes por la incertidumbre del precio futuro del *stock* suscrito, a esta diferencia entre el precio de la opción y el valor intrínseco se le llama valor especulativo. Si el precio del *stock* es muy alto, se dice que la opción esta *deep-in-the-money* y el valor especulativo será pequeño, igualmente si el precio del *stock* es muy bajo *deep-out-of-the-money*, lo anterior se debe a la poca incertidumbre que se tiene si el precio del *stock* se encuentra muy alejado del precio de ejercicio, si el precio del *stock* se encuentra muy cercano al precio de ejercicio aumenta la incertidumbre, de si en el futuro el precio del *stock* estará por arriba o por abajo del precio de ejercicio.

El máximo valor que puede alcanzar una opción *call* es el del *stock* suscrito menos el precio de ejercicio, entonces si el precio de ejercicio fuera cero el máximo valor que estarían dispuestos a pagar los agentes por la opción sería el valor del *stock* suscrito.

$$\text{Max}\{C_a(ST, T, E)\} \leq ST$$

El efecto que tiene el tiempo de expiración sobre el precio de la opción *call* americana va a ser positivo, si se tienen dos opciones *call* idénticas y solamente varia el

tiempo de expiración, el máximo valor que puede alcanzar la opción *call* con más rápida expiración va estar siempre contenido dentro de la opción *call* con un mayor tiempo de expiración. Entonces una opción americana con tiempo de expiración  $T+1$  va a ser al menos tan valiosa que una con tiempo de expiración  $T$ .

En lo que respecta al efecto que tiene el precio de ejercicio sobre el precio de una opción este va a ser negativo, es claro que el precio de una opción *call* americana va a ser al menos tan alto que el precio de una opción idéntica pero con un precio de ejercicio mayor, porque el rendimiento esperado del primero va a ser mayor. Pero esta diferencia de precios no puede exceder la diferencia de precios de ejercicio, porque el rendimiento esperado de cada uno de las opciones varían solamente en la misma cantidad que la diferencia de precios de ejercicio.

Una opción *call* puede verse como la compra diferida de un *stock*. Si los agentes esperan que el precio del valor aumente ellos pueden tanto comprar ahora el *stock* como la opción. La compra de la opción puede costarles a lo máximo lo mismo que cuesta el *stock*, la diferencia radica en que si compran la opción muy posiblemente tendrán un capital disponible con el que podrán comprar bonos libres de riesgo, CETES, y si la tasa de interés sube la combinación de opciones y *stock* es más atractiva, con lo anterior se deduce que el precio de una opción *call* sobre algún *stock* va a aumentar si la tasa de interés aumenta. Sin embargo, si la opción *call* es sobre algún valor dependiente de la tasa de interés como lo es un bono, un incremento en la tasa de interés también deprecia el bono suscrito. Análisis numéricos indican que este último efecto es mayor y por tanto el valor de la opción sobre un bono es una función convexa y decreciente de la tasa de interés.

Como la opción *call* asegura al comprador por lo menos el precio de ejercicio la volatilidad le va a beneficiar, porque con la volatilidad podrá aumentar el precio del valor y el tenedor puede ejercer la opción obteniendo una mayor ganancia, por otro lado al emisor de la opción no le conviene la volatilidad, ya que con alta volatilidad sólo estará dispuesto a ofrecer la opción a un precio mayor, por lo que el precio de la opción aumentará cuando el valor suscrito sea más volátil.

### 2.2.2 Modelo de fijación de precio para una opción *call* americana.

El modelo más utilizado para fijar precios a opciones europeas es el *Black & Scholes*,<sup>4</sup> el cual también se puede obtener como el caso límite del modelo *binomial*, cuando el número de periodos en que se pueden realizar transacciones tiende a infinito.<sup>5</sup> Desgraciadamente no hay fórmulas similares para el cálculo de opciones americanas,<sup>6</sup> sin embargo se han desarrollado otros modelos que dan una aproximación al precio de las opciones americanas, uno de esos modelos es el *BAW*.<sup>7</sup>

La fórmula que utiliza el modelo *BAW* incorpora la propiedad que tienen las opciones americanas que es el de poder ser ejercidas en cualquier momento antes de la expiración. Cuando la opción se encuentre *deep-out-of-the-money* el precio de ejercer la opción antes de la expiración debe ser pequeño y caerá aun más cuando la fecha de expiración se acerca. Cuando la opción esta *deep-in-the-money*, deberá ser vendida por su valor intrínseco. Entonces el precio de poder ejercer antes la opción se le debe agregar al precio de la opción europea dada por la fórmula *Black & Scholes*, dando como resultado el precio de una opción americana. La fórmula *BAW* provee un precio crítico del *stock*, para el cual la opción *call* americana deberá ser ejercida. Siendo entonces la fórmula:

$$C_a = C_e + \left( \frac{ST^*}{h} \right) \left[ 1 - e^{-\delta T} N(l) \right] \left( \frac{ST}{ST^*} \right)^h \quad (11a)$$

<sup>4</sup> Ver F. Black and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, Vol. 8, No. 1, Mayo-Junio 1973, 637-659.

<sup>5</sup> Esto quiere decir que el comercio se realiza de manera continua.

<sup>6</sup> Pero si existe fórmula para opciones europeas, la forma de calcular el precio de una opción *call* europea es la siguiente:

$$C_e = ST \cdot N \left[ \frac{\log \frac{ST}{E} + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right] - E e^{-rT} N \left[ \frac{\log \frac{ST}{E} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right]$$

Donde  $r$  es la tasa de interés corriente,  $\sigma$  es la desviación estándar anualizada del rendimiento del *stock* y  $N(\cdot)$  es una función de densidad de la normal.

Para mayor detalle ver Michael U. Dothan. "Prices in Financial Markets." Oxford University Press, 1990.

<sup>7</sup> Este modelo toma sus siglas de las iniciales de Barone, Adesi y Whaley. Ver G. Barone-Adesi y R. E. Whaley "Efficient Analytic Approximation of American Option Values." *Journal of finance*, Vol. 4, No. 2, Junio 1987, 301-320.

Donde

$$h = \frac{\sqrt{\left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma^2} - 1\right)^2 + \frac{8r}{\sigma^2(1-e^{-rT})}} - \left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma^2} - 1\right)}{2}$$

$$N(l) = N \left[ \frac{\log \frac{ST^*}{E} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right]$$

$ST^*$  = Precio crítico del stock.

$\delta$  = Tasa anual.

$T$  = Tiempo para su expiración.

$\sigma^2$  = Varianza anualizada del rendimiento del stock.

$N(\cdot)$  = Función de densidad Normal.

$ST^*$  se encuentra resolviendo la siguiente ecuación:

$$ST^* = C_e^* + E + \frac{ST^* [1 - e^{-\delta T} N(l)]}{h} \quad (11b)$$

Donde

$C_e^*$  = Precio de una opción call europea calculada por Black & Scholes cuando  $ST^*$  es el precio del stock.

### 3 BURSATILIZACIÓN DEL CRÉDITO HIPOTECARIO.

La bursatilización del crédito hipotecario se ha vuelto muy popular en varios países en los últimos años. Su idea es simple, esta radica en que las instituciones financieras venden parte de sus carteras hipotecarias a inversionistas. La forma en que se realiza esta venta, es en primer lugar, creando un *pool* de créditos hipotecarios,<sup>1</sup> para después vender este *pool* en unidades a los inversionistas interesados. Cada unidad representa una parte del *pool* de hipotecas por lo que el inversionista recibirá la proporción de pagos que realicen los deudores hipotecarios correspondiente a la cantidad de unidades que posea el inversionista.

Lo atractivo de este instrumento financiero es que por una parte las instituciones financieras al invitar a más participantes al mercado hipotecario tendrán a su disposición mayores recursos, mientras que por el lado del inversionista tendrá acceso a un mercado que de otra manera sería o muy riesgoso o muy caro ingresar.

Para comprender mejor la forma en que se crea la bursatilización a continuación se expondrá un ejemplo.

Como se vió en la primera sección de esta parte un crédito hipotecario ofrece al acreditado un flujo de pagos, los cuales son el pago mensual de la hipoteca que se divide en dos partes, una parte corresponde al pago de intereses y otra al pago del principal, y los prepagos, que son la diferencia entre el pago mensual y el pago recibido. Debido a su importancia los prepagos se analizarán con más detalle en una subsección más adelante.<sup>2</sup>

Entonces si un inversionista desea ser el tenedor de la hipoteca, estará recibiendo este flujo de pagos, pero también estará enfrentando los riesgos de un prepagos. Una forma en que

---

<sup>1</sup> El *pool* puede ser formado por varios miles de créditos hipotecario o por unos cuantos.

<sup>2</sup> Entre las causas del prepagos se encuentra el que los residentes de la casa deciden mudarse y los nuevos inquilinos no asumen la deuda hipotecaria o el acreditado no puede realizar su pago mensual “*default*” porque se ha reducido su poder de pago, también puede ocurrir que el dueño de la casa se mude de casa y liquide la deuda hipotecaria de la primera o cuando baja la tasa de interés existen incentivos para que el acreedor hipotecario realice un pago mayor con el fin de renegociar la deuda a una tasa menor. A las primeras dos causas se les conoce como prepagos subóptimos y a las últimas como prepagos.

el inversionista puede reducir este riesgo es adquiriendo un mayor número de hipotecas idénticas, de esta forma la fracción de prepagos se controla mejor, reduciendo así el riesgo. Sin embargo, esta manera de reducir el riesgo es muy costosa, es ahí donde entran las instituciones financieras las cuales tienen la capacidad de crear *pools* de créditos hipotecarios, los cuales van a servir como colateral para la emisión de un valor cuyo flujo de pagos refleja el flujo de pagos de todos los créditos en el *pool*. Ahora bien, este valor se fracciona en  $X$  unidades, entonces el inversionista que tenga una de estas unidades recibirá  $100/X$  por ciento del flujo de pagos. El valor creado de esta forma se llama un valor *pass-through* hipotecario.

Todos los créditos hipotecarios que conforman el *pool* que es utilizado para crear un *pass-through* se dicen que están bursatilizados.

En el siguiente apartado de este capítulo, se tratarán las distintas características de los valores *pass-through* enfatizando las referentes a los valores GNMA *pass-through* que son emitidos en los Estados Unidos.

### **3.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS VALORES *PASS-THROUGH*.**

Como ya se vió, un valor *pass-through* se crea cuando se venden partes o participaciones certificadas de un *pool* de créditos hipotecarios.

Los tenedores del valor *pass-through* van a recibir un flujo de pagos el cual depende del flujo de pagos de los créditos hipotecarios suscritos. Este consiste en los pagos hipotecarios mensuales a intereses y a principal, y cualquier prepagó.

Sin embargo, el flujo de pagos que sale de los deudores hipotecarios y el flujo de pagos que reciben los tenedores del valor no coinciden ni en la cantidad ni en el tiempo.

El flujo de pagos de un valor *pass-through* es menor que el flujo de pagos mensual de las hipotecas suscritas por una cantidad igual al préstamo de servicios y otros honorarios, que

son aquellos cargados por el emisor o aval del *pass-through* para garantizar su emisión.<sup>3</sup> El tiempo del flujo de pagos también difiere. Existe un atraso en transferir el correspondiente flujo de pagos mensuales a los tenedores de los valores, el cual varía dependiendo del tipo de *pass-through*. Lo más importante es que a causa de los prepagos, el flujo de pagos de un valor *pass-through* es desconocido.

Por tanto la emisión de valores *pass-through* debe estar respaldada. En Estados Unidos existen varias instituciones que respaldan este tipo de valores que son la *Government National Mortgage Association* (GNMA), *Federal Home Loan Mortgage Corporation* (FHLMC) y la *Federal National Mortgage Association* (FNMA).

Las características del *pass-through* no únicamente varían entre agencias sino entre programa ofrecido. Las características del *pass-through* tiene un gran impacto sobre su inversión ya que afectan las características de prepago. Estas características pueden clasificarse en seis grupos que son los siguientes:

a) *Tipo de garantía*. Una agencia puede proveer dos tipos de garantía. Una de ellas consiste en garantizar todos los pagos tanto de intereses como de principal en el momento oportuno, a pesar de que alguno o algunos de los deudores hipotecarios no realicen su pago hipotecario, valores *pass-through* con este tipo de garantía se llaman *pass-throughs* completamente modificados. El segundo tipo garantiza el pago de intereses y principal, pero únicamente garantiza el pago oportuno de los intereses. El saldo insoluto del principal se queda pendiente pero se garantiza que se va a pagar antes de una fecha específica; *pass-through* con esta garantía se les llama *pass-through* modificados.

b) *Número de prestatarios permitidos en el pool*. Un *pool* puede estar compuesto por hipotecas originadas por un sólo prestatario o por múltiples prestatarios, por ejemplo, de 1000 hipotecas que comprendan un *pool*, puede ser que todas hayan sido emitidas por varios bancos o hayan sido emitidas solamente por uno.

---

<sup>3</sup> Para proveer el servicio el emisor recibe mensualmente honorarios por administración de 0.44% anuales del saldo insoluto del *pool* y para garantizar el *pool* el GNMA carga honorarios por 0.06% por año del saldo insoluto del *pool*. Por lo que un valor GNMA es emitido con una tasa de cupón menor que la tasa de contrato de los créditos hipotecarios otorgados.

c) *Diseño de las hipotecas que componen el pool*. Se refiere a los distintos diseños que pueden tener las hipotecas en el *pool*, es decir si son hipotecas con tasa fija, con tasa ajustable, tasas duales, etc.

d) *Características de los créditos hipotecarios que conforman el pool*. No cualquier crédito hipotecario puede ser usado como colateral. Cada agencia va a estandarizar los créditos que va a suscribir al *pool*. Entre los estándares principales se tienen el tamaño del crédito hipotecario, su vencimiento, cuanto tiempo lleva de ser contratado, etc.

e) *Procedimiento de pago*. Este puede variar dependiendo del tiempo que se acuerde que debe haber entre el pago de los deudores hipotecarios, al pago a los tenedores del *pass-through* y del método de pago que se refiere a cuantos cheques se deben mandar a cada uno de los tenedores del *pass-through*.

f) *Tamaño mínimo del pool*. Para crear un *pass-through* cada agencia debe determinar un tamaño mínimo del *pool*, es decir, el número mínimo de hipotecas que lo forman.

Por ejemplo un valor GNMA *pass-through* está garantizado por el gobierno de los Estados Unidos. Por esta razón, el valor se aprecia como un *pass-through* libre de riesgo de *default*, tal y como los valores del tesoro. En México, puede darse el caso de que, a pesar de que se de la burSATILIZACIÓN del crédito hipotecario, no se tenga la suficiente confianza de que el gobierno sea capaz de garantizar realmente los valores emitidos.

Los valores GNMA *pass-through* se han emitido bajo dos programas el GNMA I y el GNMA II, por ser este último el más completo se expondrán sus características.

- *Tipo de garantía*. Todos los valores GNMA *pass-through* son completamente modificados.
- *Número de prestatarios permitidos en el pool*. Bajo el programa GNMA II se permiten tanto un sólo prestatario como múltiples prestatarios, a cada uno de los *pools* se les conoce como *custom pool* y *jumbo pool* respectivamente.
- *Diseño de las hipotecas que componen el pool*. Los *pools* están respaldados por hipotecas con pagos ajustables, entre los que se encuentran las hipotecas con tasas ajustables, HTA, aunque no todas las HTA son aceptadas para conformar el *pool*,

solamente aquellas que se ajustan anualmente y las indizadas al rendimiento promedio de un bono anual del tesoro.

- *Características de los créditos hipotecarios que conforman el pool.* Sólo hipotecas aseguradas o garantizadas tanto por el *Federal Housing Administration* (FHA) o por el *Veterans Administration* (VA), o por el *Farmers Home Administration* pueden incluirse en un *pool* garantizado por el GNMA. Todos los créditos hipotecarios garantizados por el FHA y VA pueden ser prepagados, es decir, los acreditados puede ejercer su opción *call* en cualquier tiempo y sin una penalidad de prepago. Además los créditos son asumidos, es decir, el acreditado puede transferir su obligación por la deuda. Entonces con garantía FHA y VA no van a existir restricciones contractuales que limiten las estrategias *call* de los acreditados y cuando no existan costos de transacción, los deudores ejercerán su política de opción *call* únicamente cuando pueden refinanciar su préstamo existente con un préstamo similar que tenga una tasa de interés contractual baja, lo cual se llamará política *call* óptima.

El tamaño máximo del préstamo depende de la cantidad máxima que garantice el FHA o el VA. Únicamente hipotecas recién emitidas y con vencimientos a 15 o 30 años pueden estar en el *pool*. Por último el *spread* neto en la tasa de interés puede variar entre 50 y 100 puntos porcentuales, es decir, si la tasa de contrato es del 25% el *spread* neto puede estar entre 0.25% y 0.125%.<sup>4</sup>

La principal diferencia para los valores *pass-through* emitidos por el FHLMC y por el FNMA con los emitidos por el GNMA es que no están garantizados por el gobierno de los Estados Unidos, a pesar de ello los inversionistas los ven de forma similar en cuanto a solvencia.

A pesar de ser estas tres organizaciones las principales emisoras de valores *pass-through* existen otras instituciones como son las bancos comerciales, instituciones de ahorro e intermediarios bursátiles que emiten *pass-through* convencionales los cuales son llamados

---

<sup>4</sup> El *spread* neto de la tasa de interés es la diferencia entre la tasa de contrato y los pagos por servicios que cobra la agencia emisora.

valores *private label pass-through* y *AA pass-through*. Aunque el monto de *pass-through* convencionales es pequeño comparado con las agencias anteriores<sup>5</sup> se espera que crezca debido al mercado potencial que todavía no han bursatilizado.

Existe una forma tradicional para calcular el precio y el rendimiento de los valores *pass-through* la cual se basa en algunos indicadores de la tasas de prepagos. El fin que persigue la siguiente subsección es de ilustrar la metodología involucrada.

### **3.2 PRECIO Y RENDIMIENTO PARA VALORES *PASS-THROUGH*.**

Para determinar el precio de un activo financiero, como ya se ha visto antes, se tiene que determinar el flujo de pagos y descontar este flujo de acuerdo a una tasa de interés esperada. En el caso de un valor *pass-through* el flujo de pagos es aun más difícil de determinar debido a la incertidumbre que se tiene sobre los prepagos.

A consecuencia del desconocimiento que se tiene acerca de como se van a efectuar los prepagos se necesita hacer un pronostico. Los indicadores que se han utilizado para la tasa de prepagos son la experiencia de la *Federal Housing Administration*, una tasa constante de prepagos y el indicador de prepagos de la *Public Securities Association*.

#### **3.2.1 Experiencia de la FHA.**

En algún momento fue el indicador de tasa de prepagos más usado. Este se deriva de una tabla de probabilidades construida a partir de la experiencia que tiene la FHA. Usando la experiencia de la FHA, se proyecta el flujo de pagos de un *pool* de hipotecas suponiéndose que la tasa de prepagos es la misma (100% FHA) o un múltiplo de la experiencia de la FHA. A pesar de haber sido tan popular, las proyecciones de prepagos basadas en este indicador no son necesariamente confiables. La razón de esta falta de veracidad radica en que este

---

<sup>5</sup> En 1990 las tres organizaciones sumaban un monto de 235,161 millones de dólares mientras las agencias

indicador representa un estimado de los prepagos de todas las hipotecas aseguradas por el FHA que se han originado en distintos periodos de la tasa de interés. Por lo anterior, al pretender hacer un análisis sobre como se comportan los prepagos en distintos ciclos de la tasa de interés, el indicador propuesto por la experiencia de la FHA no será útil.

### 3.2.2 Tasa de prepagos constante.

Otra forma de proyectar tasas de prepagos y flujos de pagos de un valor *pass-through* es suponer que una fracción del principal es prepagado cada mes durante el tiempo que falta para el vencimiento. Esta tasa constante de prepagos, (TCP), esta basada en las características del *pool*, así como en el entorno económico presente y esperado.

Como la TCP es una tasa anual de prepagos, para estimar los prepagos mensuales la TCP se tiene que convertir en una tasa mensual conocida como tasa de mortalidad sencilla mensual, (TMSM), siendo el prepagado para el mes  $t$  el siguiente:

$$\text{prepagado para el mes } t = TMSM(S_{t-1} - S_t)$$

Donde

$$TMSM = 1 - (1 - TCP)^{1/12}$$

### 3.2.3 Indicador de prepagos estándar de la Public Securities Association.

Aunque en un inicio fue desarrollado para obligaciones hipotecarias colateralizadas, el indicador de prepagos estándar de la *Public Securities Association* (PSA) ha sido utilizado para proyectar flujos de pagos para todos los valores que estén relacionados con las hipotecas. Este indicador es presentado en forma de una serie mensual de tasa de pagos constantes anuales. El modelo básico de la PSA supone que la tasa de prepagos es baja en el inicio de la hipoteca y después se incrementará.

El indicador de la PSA supone las siguientes tasas de prepagos para hipotecas por 30 años, una TCP de 0.2% para el primer mes, incrementándose 0.2% por los siguientes 30

---

privadas solo alcanzaban la cantidad de 14,343 millones de dólares.

meses hasta alcanzar el 6% por año y una TCP de 6% para los siguientes años. Este indicador se conoce como un 100% PSA y puede ser expresado de la forma siguiente:

$$\text{Si } t < 30 \Rightarrow \text{TCP} = 6\%t/30$$

$$\text{Si } t \geq 30 \Rightarrow \text{TCP} = 6\%$$

Dado este indicador como punto de referencia se puede proyectar flujos de pagos que correspondan a una tasa de prepagos mayor o menor, es decir, por arriba o por abajo del 100% PSA.

La fórmula para obtener el flujo de pagos proyectado es:

$$PP_t = PP_{t-1} \left[ \frac{i(1+i)^{\tau-t+1}}{(1+i)^{\tau-t+1} - 1} \right] \quad (12)$$

Donde

$PP_t$  = Pago mensual proyectado para el mes  $t$ .

$\tau$  = Plazo original de la deuda en meses.

$i$  = Tasa de interés mensual pactada.

Para calcular la proporción correspondiente al pago de intereses se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$IP_t = PP_{t-1}i \quad (13)$$

Donde

$IP_t$  = Intereses proyectados al mes  $t$ .

La fórmula anterior muestra que el interés mensual proyectado es igual al producto del saldo insoluto del principal al final del mes anterior por la tasa de interés mensual. La tasa de interés mensual puede dividirse en dos partes, la tasa de interés neta mensual proyectada después del pago de servicios y el pago de servicios, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} NIP_t &= PP_{t-1}(i - se) \\ SE_t &= PP_{t-1}se \end{aligned} \quad (14)$$

Donde

$NIP_{t-1}$  = Intereses netos proyectados al mes  $t$ .

$SE_t$  = Pagos de servicios proyectados al mes t.

$se$  = Tasa de pago de servicios.

El pago mensual que se realiza sobre el saldo insoluto se encuentra sustrayendo el pago a intereses del pago total.

$$SPP_t = PP_t - IP_t \quad (15)$$

Donde

$SPP_t$  = Pago proyectado al saldo insoluto en el mes t.

Como se mencionó anteriormente, el prepago mensual proyectado es calculado multiplicando el TMSM por las diferencia entre el saldo insoluto al principio del periodo y el pago al principal hecho en ese lapso.

$$PPP_t = TMSM_t (PP_{t-1} - SPP_t) \quad (16)$$

Donde

$PPP_t$  = Prepago proyectado al mes t.

Siendo entonces el flujo de pagos que recibe el tenedor del valor *pass-through* igual a la suma del pago al saldo insoluto más el pago a intereses neto más el prepago.

$$CP_t = NIP_t + SPP_t + PPP_t \quad (17)$$

Donde

$CP_t$  = Flujo de pagos proyectados para el mes t.

Dado el flujo de prepagos y el precio del valor *pass-through* se puede calcular el rendimiento. El rendimiento, como ya se ha mencionado, es la tasa de interés que se aplica al flujo de pagos para calcular su valor presente el cual es igual al precio del valor.

Para un valor *pass-through* el rendimiento esta definido como una tasa de interés anual. El rendimiento de un valor *pass-through* debe calcularse comparándolo con el rendimiento al vencimiento de un bono. De esta forma se calcula hábilmente el rendimiento de un bono equivalente, el cual es una convención de mercado para cualquier instrumento de renta fija que paga intereses más de una vez al año. El rendimiento del bono se obtiene

doblando el rendimiento semianual. Para un valor *pass-through*, el rendimiento semianual es:

$$\text{Rendimiento del flujo de pagos semianual} = (1 + y)^6 - 1 \quad (18)$$

Donde

$y$  = Rendimiento mensual.

Como la tasa que paga un bono equivalente es anual, el rendimiento del bono se obtiene doblando el rendimiento del flujo de pagos semianuales, esto es:

$$\text{Rendimiento de un bono equivalente} = 2[(1 + y)^6 - 1] \quad (19)$$

Por último dado el rendimiento de un valor *pass-through*, el precio va a ser simplemente el valor presente del flujo de pagos proyectado. Sin embargo, debe tenerse un gran cuidado en obtener la tasa de interés mensual con la que se calculará el valor presente de cada uno de los flujos de pagos mensuales. Lo cual se tratará en la siguiente sección.

### **3.3 PREPAGOS.**

Existen varias razones para que ocurran los prepagos. Entre las más comunes es que el dueño de la propiedad la venda, dando como resultado que el saldo insoluto sea liquidado, otra razón es que el dueño de la casa pueda obtener un mejor financiamiento debido a que las tasas de mercado caen por abajo de la tasa de interés del contrato lo que da como resultado un prepagos para lograr un refinanciamiento de la deuda hipotecaria.

Para el caso de los valores respaldados por el GNMA el *default* puede ser visto como un prepagos ya que si el dueño de la casa no puede pagar o el nuevo dueño dada la venta de la casa no asume la responsabilidad de la deuda hipotecaria el GNMA absorberá la deuda, entonces desde la perspectiva del tenedor del valor esto se verá como un prepagos, por lo tanto, una de las notables características de los deudores de créditos hipotecarios que están

suscritos al valor GNMA es la de pagar sus créditos aun cuando la tasa de interés de mercado esta por arriba de su tasa de contrato. Este tipo de prepago es conocido como prepago subóptimo.

Ahora bien, entre los factores más importantes que afectan la conducta de prepago están la tasa de interés corriente, las características de los créditos hipotecarios que componen el *pool*, factores estacionarios y la actividad económica en general.

En lo que respecta a la tasa corriente se puede decir que es el principal motivo para el refinanciamiento ya que el deudor hipotecario se dará cuenta que es una mejor inversión el hacer pagos extraordinarios para obtener una tasa de contrato menor que el ahorrar este dinero a una tasa pasiva baja. La existencia de tasas corrientes bajas también ofrece la oportunidad de comprar casas de mayor valor creando incentivos para vender la casa actual y adquirir otra.<sup>6</sup>

Las características de los créditos hipotecarios que respaldan al valor son otro factor de prepagos, por ejemplo, si se comparan *pools* que están garantizados por el FHA y VA con *pools* de hipotecas convencionales generalmente el monto del crédito es menor y el nivel de ingresos de los acreditados es también menor para los créditos garantizados por el FHA y VA reduciendo por un lado los incentivos de refinanciar cuando las tasas caen debido al monto del crédito.

Por otro lado, es poca la capacidad que tienen los deudores de tomar ventaja de la caída en la tasa de interés a causa del costo del proceso de refinanciamiento, de ese modo, sugieren tener una tasa de prepagos menor en relación a los créditos convencionales, sin embargo, debido a esta última característica, cuando ocurren cambios desfavorables en la economía se sabe que los primeros en pagar las consecuencias son las personas de bajos ingresos aumentando de esta forma la tasa de prepagos, tanto, que el efecto *default* sobrepasa los dos efectos anteriores.

Los efectos estacionarios se refieren a los patrones relacionados con la actividad del mercado de vivienda primario donde la compra de casas aumenta en la primavera, llegando a

---

<sup>6</sup> Claro que la tasa de interés debe de ser lo suficientemente baja para que las ganancias que se logren con el refinanciamiento sean lo suficientes para compensar el costo del proceso.

un pico en el verano, para después caer desde ese momento hasta el invierno. Esta actividad en el mercado de la vivienda se ve reflejada en las tasas de prepagos, es decir, el cambio de casa sigue el mismo patrón que el de ventas en el mercado de la vivienda, pero debido al retraso que existe en el flujo de pagos a los tenedores del valor, esta fluctuación en la tasa de prepagos se verá trasladada.

Finalmente, la actividad económica afecta la tasa de prepagos de la manera siguiente, un crecimiento económico sostenido implica un crecimiento en el ingreso personal y oportunidades de trabajo mejores ocasionando movilidad del trabajo, ambos efectos ocasionan que se incremente el cambio de casa. En cambio cuando se tienen crisis económicas se da lo opuesto, es decir, se incrementa el riesgo de *default*.

### **3.3.1 El riesgo de prepagos asociado a los valores *pass-through*.**

Debido a que el flujo de pagos es desconocido, es necesario entender el riesgo que implican los prepagos. Suponiendo que un inversionista compra un porcentaje de un valor GNMA cuando la tasa de interés de las hipotecas es por decir 10%, al bajar la tasa de interés de las hipotecas se tendrán dos efectos adversos.

Por un lado el valor presente de los flujos de pagos será mayor porque será descontado a una tasa de interés menor, debido a las propiedades de un bono libre de riesgo.

La evaluación nueva del valor es tal que el dueño del valor puede garantizar el flujo de pagos inicial vendiendo su valor a pesar del bajo rendimiento que esta disponible en el mercado. En el caso de un valor *pass-through* el incremento en el precio no es tan alto como en un bono libre de riesgo debido a la caída en la tasa de interés también aumenta los incentivos a realizar prepagos para refinanciar la deuda hipotecaria a una tasa menor. Con esta situación el dueño del valor recibirá un pago extra pero sólo podrá vender su valor al 10% del precio nominal de la deuda. Enfrentando de esta forma un riesgo de pérdida de capital al no poder garantizar el flujo de pagos inicial al vender su valor.

Cuando la tasa de interés cae las consecuencias adversas que sufre el inversionista de un valor *pass-through* son idénticas a aquellas que experimentan los tenedores de un bono

con opción *call*. En ambos casos la potencial subida en el precio del valor se ve truncada gracias a la opción *call* que tiene el comprador. Por lo anterior no es sorprendente que un crédito hipotecario garantice al comprador el derecho de ejercer la opción *call* al precio nominal del préstamo.

Cuando la tasa de interés del crédito hipotecario se incrementa, el precio del valor *pass-through*, como le pasa a cualquier bono, se reduce. Pero la reducción será mayor debido a que las altas tasas de interés disminuyen la tasa de prepagos al excluir los motivos de refinanciamiento y el de realizar prepagos parciales.

A consecuencia de estos riesgos que enfrentan los valores *pass-through* se crearon valores derivados como los *Collateralized Mortgage Obligations*, (CMO), y *Stripped Mortgage-Backed Securities*, (*stripped* MBS). Como ambos valores salen de los límites que persigue la tesina, sólo se mencionaran sus principales propiedades.

## **3.4 DERIVADOS**

### **3.4.1 Collateralized Mortgage Obligations.**

Este instrumento es creado para reducir el flujo de pagos de productos que estén relacionados con hipotecas, tales como prestamos hipotecarios, *pass-through* y *stripped* MBS, con el fin de reducir el riesgo de los prepagos. La creación de este instrumento no elimina el riesgo del prepagó únicamente lo distribuye en diferentes formas de riesgo entre distintas clases de valores. Por ejemplo lo puede distribuir entre varias clases donde cada una de ellas recibe los prepagos en diferentes etapas y de ello depende su vencimiento y su exposición al riesgo.

Esta forma de redireccionar el flujo de pagos hace más dúctil el instrumento lo que amplía las posibilidades de inversión, por ejemplo habrá instituciones que requieran de inversiones a corto plazo, a mediano plazo, que sean menos o más adversas al riesgo. Hoy en día existe una gran variedad de complicadas estructuras de CMO cuyo propósito es el de

proveer ciertas clases de CMO con menor incertidumbre acerca del riesgo del prepago, lo cual es logrado únicamente trasladando el riesgo a otros CMO.

### **3.4.2 Stripped Mortgage-Backed Securities.**

*Stripped* MBS, son otro ejemplo de producto derivado. Mientras un valor *pass-through* asigna el flujo de pagos de los créditos suscritos en forma de prorrateo a los tenedores del valor, un *stripped* MBS es creado para afectar la distribución del principal e intereses de una distribución prorrateada a una distribución desigual.

Los valores creados de esta forma tienen una relación precio rendimiento distinta a la relación precio rendimiento de los créditos hipotecarios del *pool*. Instrumentos tradicionales como los futuros son creados para cubrirse del riesgo que ocasiona los cambios en la tasa de interés. El *stripped* MBS puede ser usado para cubrirse del riesgo tanto de los prepagos como de la tasa de interés creando dos valores, IO y PO<sup>7</sup> que se mueven en dirección contraria ante cambios en la tasa de interés. Entonces si se desea tener un portafolio con un bajo riesgo se puede incluir alguno de estos dos instrumentos para balancear el riesgo.

---

<sup>7</sup> En el valor IO, *interest only*, se mandan todo el flujo de los pagos a intereses mientras que en el valor PO, *principal only*, se mandan todo el flujo de los pagos a principal

## MODELO.

### 4. MODELO DE FIJACIÓN DE PRECIOS PARA UN VALOR GNMA.

Kenneth B. Dunn y John J. McConnell,<sup>1</sup> desarrollaron un modelo que se utiliza para fijar precio a un valor que este respaldado por un *pool* de créditos hipotecarios que cumplen con los requisitos del GNMA. En este modelo se considera una economía, en donde la tasa de interés instantánea libre de riesgo para dar o pedir crédito, resume completamente toda la información relevante para fijar precio a valores libres de *default* con tasa de interés fija, este modelo está basado en la teoría de equilibrio general de estructura de plazos de la tasa de interés bajo incertidumbre derivada por Cox, Ingersoll y Ross.<sup>2</sup>

El modelo de fijación de precios para un valor GNMA se deriva de las siguientes proposiciones.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> Ver K. B. Dunn y J. J. McConell. "Valuation of GNMA Mortgage- backed Securities," *Journal of Finance*, Vol. 36, No. 3, Junio 1981, 599-616.

<sup>2</sup> J. C. Cox, J. E. Ingersoll, y S. A. Ross. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, Marzo 1985, 385-407. Utilizan en su artículo un modelo de equilibrio general de fijación de precios de activos para estudiar la estructura de plazos de la tasa de interés. En este modelo, los precios corrientes y las propiedades estocásticas de todos los créditos contingentes, incluyendo bonos, son derivados endogenamente. Anticipaciones, aversión al riesgo, alternativas de inversión y las preferencias acerca del tiempo de consumo juegan un papel en la determinación de la estructura de plazos. El modelo incluye los factores tradicionalmente mencionados de tal forma que sea consistente con la conducta maximizadora y las expectativas racionales.

<sup>3</sup> Los primeros seis supuestos expuestos en esta sección, sin tomar en cuenta la variable  $z$  que sigue un proceso *Poisson* y que representa el comportamiento de los prepagos, llevan al modelo de estructura de plazos de la tasa de interés derivado por Cox, Ingersoll y Ross en un marco de equilibrio general para una economía que tiene una única fuente de incertidumbre.

S.1. El precio de un valor con tasa de interés libre de riesgo fija,  $V(r, \tau, z)$ , esta en función únicamente de la tasa instantánea corriente libre de riesgo  $r(t)$ , del tiempo que falta para su vencimiento  $\tau$  y de la variable  $z$  que sigue un proceso *Poisson* y que representa el comportamiento de los prepagos

El supuesto (S.1) nos dice que para un estado variable sencillo, la tasa de interés corriente libre de riesgo, resume completamente toda la información que es relevante para fijar precios a valores que utilizan tasas fijas. Debido a que los cambios en el precio de todos los valores con tasas fijas libres de riesgo están gobernados por la misma variable aleatoria, los rendimientos de tales valores están, por lo menos localmente, perfectamente correlacionados.

S.2. La tasa de interés instantánea libre de riesgo para dar o pedir créditos sigue un proceso de *Markov* continuo y estacionario, es decir, la tasa de interés futura va a depender únicamente de su estado presente y de donde se encontraba un instante antes.

La tasa de interés consta de dos componentes que son la parte predecible y la parte innovativa. Este modelo supone que la parte predecible no es más que la tendencia esperada de la tasa de interés la cual converge a la tasa de interés a largo plazo.

La convergencia de la tasa de interés “tendencia” esta dada por una velocidad de ajuste que es constante durante todo el proceso de la amortización, es decir, si existe alguna diferencia entre la tasa de interés corriente y la tasa de interés a largo plazo, la tasa de interés esperada va a estar dada por la velocidad de ajuste de la tasa de interés corriente.

Por otro lado, se supone que la parte innovativa del modelo sigue una caminata aleatoria simétrica, que es una descripción de los movimientos de una partícula en donde la probabilidad de que se mueva hacia arriba o hacia abajo es la misma y cada movimiento es independiente de los demás, aunque el rango en que puede realizarse este movimiento, esta determinado por la varianza del proceso que para este modelo no es más que la varianza de la tasa de interés multiplicada por la tasa de interés corriente. La formalización del caso límite de una caminata aleatoria simétrica cuando el proceso se vuelve continuo, es el proceso de

*Wiener*, entonces el modelo supone que la parte no predecible de la tasa de interés va a seguir un proceso de *Wiener*.

Lo anterior puede ser escrito en forma de un proceso de *Itô*<sup>4</sup> de la forma siguiente:

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dw \quad (1)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mu(r) &\equiv \kappa(m-r), \quad \kappa, m > 0 \\ \sigma^2(r) &\equiv \sigma^2 r, \quad \sigma^2 \text{ constante,} \end{aligned}$$

$\mu(r)$  = Tendencia instantánea del proceso.

$\sigma^2(r)$  = Varianza instantánea del proceso.

$m$  = Tasa de interés a largo plazo.

$\kappa$  = Velocidad de ajuste del proceso.

$dw$  = Proceso de Wiener con  $E(dw) = 0$  y  $dw^2 = dt$  con probabilidad de 1.

En cuanto a las tasas de interés negativas, estas son excluidas desde un inicio debido a que el proceso de la tasa de interés supone que se regresa a su media. Además como se observa, la varianza del proceso,  $\sigma^2(r)$ , se incrementa cuando la tasa de interés aumenta.

El suponer que la tasa de interés a largo plazo es constante durante toda la amortización de la deuda hipotecaria no es muy real, en cambio, se podría suponer que la tasa de interés a largo plazo tiene una tendencia en función del tiempo, es decir en vez de que  $y = m$  la tasa de interés podría ser  $y = a + bt$  donde  $t$  es el tiempo.

S.3 La covarianza entre cambios en la tasa de interés y cambios porcentuales en las inversiones óptimas de la riqueza,  $qr$ , es igual al precio de riesgo,  $p(r)$ , multiplicado por la desviación estándar del proceso:

$$p(r)\sigma\sqrt{r} = qr, \quad (2)$$

Donde el precio al riesgo, es la diferencia entre el rendimiento instantáneo esperado y el rendimiento libre de riesgo, que al ser multiplicado por la desviación estándar del proceso da como resultado un término ajustado al riesgo, es decir, cuanto están dispuestos a pagar los

inversionistas por cada unidad de riesgo extra. Esta igualdad muestra que el término de ajuste al riesgo es proporcional a la tasa de interés instantánea.

S.4. Individualmente los agentes no se sacian, sus preferencias por el riesgo son consistentes con (S.2) y están de acuerdo con las especificaciones de la ecuación (1).

S.5. El mercado de créditos hipotecarios es perfecto y competitivo.

Los supuestos (S.4 y S.5) aseguran que los deudores hipotecarios van a prepagar su crédito de acuerdo a su política *call* óptima. Específicamente un deudor hipotecario nunca permitirá que el valor de mercado de su crédito exceda a su saldo insoluto, ya que en el instante que se viole esta condición el préstamo puede ser refinanciado con otro crédito idéntico a una tasa efectiva de interés menor que la tasa del crédito existente.

S.6. El flujo de pagos,  $C(\tau)$ , para cualquier valor es pagado continuamente.

Como se vió en la sección tres los tenedores de valores GNMA van a recibir casi la totalidad de los pagos que realicen los deudores hipotecarios, debido a que se le descuenta el servicio de la deuda, pero este flujo de pagos va comprender únicamente la amortización de la hipoteca.<sup>5</sup> El suponer que el flujo de pagos sólo depende del tiempo que falta para su vencimiento quiere decir que si se tienen dos deudas hipotecarias del mismo valor, el monto de los pagos periódicos va a ser mayor para la deuda que tenga el término de vencimiento menor.

El suponer que los pagos se realizan en forma continua además de ser una condición técnica para la aplicación del modelo también es una aproximación de la forma en que los valores con tasa fija son comerciados, porque a pesar de que los pagos de la mayoría de los valores con tasa fija ocurren en intervalos discretos generalmente son comerciados con tasas que se acumulan diariamente.

Una de las características más notable de los deudores hipotecarios, es que en ocasiones ejercen su opción *call* sobre sus préstamos fuera de la ruta de política *call* óptima. Entre estos prepagos (que son sobre los saldos insolutos del crédito) se distinguen dos tipos,

---

<sup>4</sup> Para mayor información de las características del proceso de *Wiener* y del proceso de *Itô* ver Michael U. Dothan. "Prices in Financial Markets." Oxford University Press, 1990, Capítulos 7 y 8.

<sup>5</sup> Los prepagos van a ser agregados independientemente en el siguiente supuesto.

los que se ejercen cuando  $r$  esta por abajo de  $r_c$  y cuando  $r$  esta por arriba de  $r_c$ , a este último le llaman “*prepago subóptimo*”.

El término de subóptimo se utiliza de manera casual, debido a que el prepago es subóptimo únicamente en el sentido en que el monto del prepago excede al valor de mercado de la deuda y como los deudores hipotecarios no tienen acceso directo al mercado de capitales y al no existir tampoco un mercado perfecto sobre ganancias de capital, los deudores no pueden recomprar su deuda al valor de mercado, por ello la decisión de prepago no es subóptima, pero el prepago es subóptimo, en relación a aquellos que se observarían si los deudores tuvieran acceso directo al mercado de capitales o si existiera un mercado perfecto para las ganancias de capital sobre los crédito hipotecarios.

En un mercado eficiente el precio de un valor GNMA reflejaría la posible ocurrencia de prepagos subóptimos y el modelo general de fijación de precios debería ser modificado. Para incorporar tal hecho, Dunn y McConnell agregan las dos suposiciones siguientes:

S.7. Los prepagos que ocurren cuando el precio de un valor GNMA es menor que su saldo insoluto, sigue un proceso *Poisson*.

Sea “ $z$ ” la variable aleatoria que sigue un proceso *Poisson*, esta variable aleatoria es igual a cero hasta que ocurra un prepago subóptimo. Al efectuarse el prepago subóptimo la variable brinca a uno y el valor deja de existir. Entonces el proceso de *Poisson*  $z$  es el siguiente:

$$dz = \begin{cases} 0 & \text{si un prepago suboptimo no ocurre} \\ 1 & \text{si un prepago suboptimo ocurre} \end{cases}$$

Donde

$$E(dz) = \lambda(r, \tau)dt \quad (3)$$

$\lambda(r, \tau)dt$  es la probabilidad por unidad de tiempo de que ocurra un prepago subóptimo al tiempo de maduración  $\tau$  y tasa de interés  $r$ . Entonces el proceso *Poisson* es no homogéneo con respecto al tiempo.

Como se puede apreciar las probabilidades de ocurrencia de un prepago únicamente dependen del tiempo que falta para el vencimiento y de la tasa de interés en el tiempo  $\tau$ .

S.8. Los prepagos que ocurren cuando el precio de un valor GNMA es menor que su saldo insoluto, no están correlacionados con alguno de los factores relevantes del mercado y por lo tanto, no son sistemáticos.

Esta suposición significa que dado el estado de la economía, al principio de cualquier intervalo de tiempo el proceso de *Poisson* no está correlacionado con cambios en las variables de estado durante tal intervalo.

Gracias a (S.7) el precio de un valor GNMA  $V(r, \tau, z)$  es una función de dos estados variables,  $r$  e  $z$  el cual está gobernado por un proceso mixto.

Este proceso puede deducirse a través de analizar como las diferentes variables afectan al precio del valor. Por un lado, la parte predecible del proceso está compuesta por la tasa de rendimiento esperada, el flujo de pagos y la probabilidad de que ocurra un prepago subóptimo. La tasa de rendimiento esperada afecta de manera positiva al precio del valor, porque a mayor rendimiento de un valor los inversionistas estarán dispuestos a pagar más por el incrementándose de esta forma el precio. Mientras que, el flujo de pagos y la probabilidad de que ocurra un prepago subóptimo disminuye el precio del valor, esto es porque se reduce la tasa de riesgo y por consiguiente el rendimiento esperado.

Por otro lado, se encuentra la parte innovativa del proceso, la cual está compuesta por la desviación estándar del rendimiento y la ocurrencia de prepagos subóptimos, donde ambos tienen un efecto positivo sobre el precio del valor. Lo anterior puede fácilmente explicarse, porque como se trata de valores con opción *call*, el crecimiento de la desviación estándar ofrece un rendimiento esperado mayor, por último, la ocurrencia de prepagos subóptimos es simplemente un rendimiento extra no esperado.

Ante esto, el proceso mixto que gobierna el precio de un valor puede escribirse de la siguiente forma:

$$dV(r, \tau, z) = \left[ a(r, \tau)V(r, \tau, z) - C(\tau) - \lambda(r, \tau)(F(\tau) - V(r, \tau, z)) \right] dt + s(r, \tau)V(r, \tau, z)dw + [F(\tau) - V(r, \tau, z)]dz \quad (4)$$

Donde

$F(t)$  es el valor nominal de la deuda cuando falta  $\tau$  para su vencimiento,  $a(r, \tau)$  es la tasa de rendimiento instantánea total esperada y  $s(r, \tau)$  es la desviación estándar instantánea del rendimiento, condicionada a que el prepago subóptimo no ocurra.

Del lema de  $It\hat{o}$ <sup>6</sup> y de un lema análogo para procesos *Poisson* expuesto por R. C. Merton,<sup>7</sup> Dunn y McConnell obtienen:

$$\begin{aligned} a(r, \tau) &= \left[ \frac{1}{2} \sigma(r)^2 V_{rr} + \mu(r)V_r - V_r + C(\tau) + \lambda(r, \tau)(F(\tau) - V) \right] / V \\ s(r, \tau) &= \sigma(r)V_r / V \end{aligned} \quad (5)$$

Es necesario saber si existe una prima asociada a los prepagos subóptimos, Dunn y McConnell proponen construir un portafolio que contenga un valor GNMA y cualquier otro valor que dependa de la tasa de interés de tal forma que se elimine la incertidumbre dada por los cambios no esperados en la tasa de interés, es decir, el otro valor responderá en sentido opuesto a un valor GNMA ante cambios en la tasa de interés. Sea  $b(r, \tau)$  la tasa instantánea de rendimiento esperado y  $g(r, \tau)$  la desviación estándar del rendimiento del otro valor.

Por lo que corresponde a la tasa de riesgo, esta puede ser eliminada invirtiendo la proporción  $g/(g-s)$  en el valor GNMA e invertir la proporción  $-s/(g-s)$  en el otro valor. Siendo la tasa de rendimiento de este portafolio igual al rendimiento que ofrece un valor GNMA más el rendimiento que ofrece el otro valor multiplicados respectivamente por la proporción que se invierte en cada uno de ellos, más el rendimiento no esperado de un prepago subóptimo.

$$\frac{dP}{P} = \left( \frac{g}{g-s} \right) \left[ \left( a - \lambda \left( \frac{F-V}{V} \right) - \frac{s}{g} b \right) dt + \left( \frac{F-V}{V} \right) dz \right] \quad (6)$$

<sup>6</sup> Ver Michael U. Dothan. "Prices in Financial Markets." Oxford University Press, 1990, pag. 200.

<sup>7</sup> Ver Roberto C. Merton. "Optimum Consumption and portafolio Rules in a Continuos-Time Model." Journal of Economic Theory, Vol. 3, No. 4, Diciembre 1971, 373-413.

Durante la mayor parte del tiempo el rendimiento realizado por este portafolio será igual al coeficiente de  $dt$  en (6), pero, cuando existe un prepago subóptimo habrá un rendimiento no esperado igual a la proporción del portafolio invertido en el valor GNMA por  $\left(\frac{F-V}{V}\right)$ .

Con los supuestos (S.7) y (S.8) y el portafolio anterior puede decirse que los prepagos son únicos para cada valor y la incertidumbre causada por los prepagos subóptimos puede ser diversificada a un bajo costo. Como consecuencia no existe una prima asociada a los prepagos subóptimos y el rendimiento esperado del portafolio debe ser igual a la tasa de rendimiento sin riesgo  $r$ .

Entonces tomando el valor esperado de (6) igual a  $rdt$  se obtiene:

$$rdt = E\left\{\left(\frac{g}{g-s}\right)\left[\left(a - \lambda\left(\frac{F-V}{V}\right) - \frac{s}{g}b\right)dt + \left(\frac{F-V}{V}\right)dz\right]\right\}$$

$$rdt = \left(\frac{g}{g-s}\right)\left[\left(a - \lambda\left(\frac{F-V}{V}\right) - \frac{s}{g}b\right)dt + \left(\frac{F-V}{V}\right)E\{dz\}\right]$$

$$rdt = \left(\frac{g}{g-s}\right)\left(a - \frac{s}{g}b\right)dt$$

$$\frac{a-r}{s} = \frac{b-r}{g} \quad (7a)$$

Si el riesgo de un valor GNMA es diversificable, entonces el valor GNMA, debe evitar oportunidades de arbitraje fijando su precio de tal forma que el rendimiento esperado es igual a la tasa sin riesgo más una prima de riesgo.

$$a(r, \tau) = r + p(r)s(r, \tau)$$

por lo tanto

$$\frac{a-r}{s} = \frac{b-r}{g} = p(r) \quad (7b)$$

Donde  $p(r)$  es el precio de la tasa de riesgo para todos los valores interés dependientes. Debido a que  $V_r$  es generalmente negativa,  $s(r, \tau)$  es negativa y la prima de riesgo es positiva cuando  $p(r)$  es negativa.

Finalmente se obtiene la ecuación diferencial parcial para el valor GNMA sustituyendo de (5)  $a(r, \tau)$  y  $s(r, \tau)$  en (7b):

$$\frac{\left[ \frac{1}{2} \sigma(r)^2 V_{rr} + \mu(r) V_r - V_r + C(\tau) + \lambda(r, \tau)(F(\tau) - V) \right] / V - r}{\sigma(r) V_r / V} = p(r)$$

$$\frac{1}{2} \sigma(r)^2 V_{rr} + \mu(r) V_r - V_r + C(\tau) + \lambda(r, \tau)(F(\tau) - V) - rV = p(r) \sigma(r) V_r$$

Sustituyendo  $\mu(r)$  y  $p(r)\sigma(r)$  de (1) se obtiene

$$\frac{1}{2} \sigma^2(r) V_{rr} + [\kappa m - (\kappa + q)r] V_r - V_r - rV + C(\tau) + \lambda(r, \tau)(F(\tau) - V) = 0 \quad (8)$$

La combinación de los dos primeros términos del lado izquierdo de la ecuación, es el cambio en el precio ajustado al riesgo esperado de un valor GNMA, (condicionado al conjunto de información al tiempo  $\tau$ ), dado que un prepago subóptimo no ocurra.

Los últimos dos términos son el cambio esperado en el valor de un prepago subóptimo y el flujo de pagos cuando el tiempo faltante para el vencimiento es  $\tau$  y la tasa corriente de interés libre de riesgo es  $r$ . Estos términos no están ajustados al riesgo debido que  $C(\tau)$  y  $F(\tau)$  son libres de *default* y no existe una prima de riesgo asociada con el prepago subóptimo. Entonces tanto (8) como (7b) requieren que el rendimiento ajustado al riesgo esperado de un valor GNMA sea igual al rendimiento libre de riesgo.

El supuesto de la ocurrencia de prepagos subóptimos se ve reflejado en la ecuación (8) en el término  $\lambda(r, \tau)(F(\tau) - V(r, \tau, z))$ . Este término es el valor esperado de un prepago subóptimo cuando el tiempo que falta para el vencimiento es  $\tau$  y la tasa libre de riesgo es  $r$ .

Si el evento *Poisson* ocurre, los inversionistas recibirán  $F(\tau)$ . En tal punto, el precio de mercado del valor tendrá un "salto" por la cantidad  $F(\tau) - V(r, \tau, z)$ . Entonces,

$\lambda(r, \tau)(F(\tau) - V(r, \tau, z))$  es un componente adicional del cambio esperado en el precio del valor GNMA.

Ahora bien, de acuerdo al modelo general de fijación de precios, las diferencias entre reclamos que dependen de la tasa de interés estarán reflejadas en la forma en que se da su flujo de pagos y algunas condiciones límite que la ecuación (8) debe de satisfacer las cuales son:

a) Al llegar al vencimiento,  $\tau = 0$ , el valor de un bono libre de *default* debe ser igual a su valor nominal o al saldo insoluto,  $F(0)$ . Lo anterior provee la condición inicial.

$$V(r, 0, z) = F(0) \quad (9)$$

Cabe notar que para un bono con pagos de amortización continuos  $F(0)$  es cero y para un bono no amortizado  $F(0)$  es igual al valor nominal del bono.

b) El precio de un valor que depende de la tasa de interés se aproxima a cero cuando la tasa de interés tiende a infinito. Esto nos lleva a la condición límite.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \tau, z) = 0 \quad (10)$$

c) Como no se permiten tasas de interés negativas un límite natural es  $r = 0$ . Tomando  $r = \lambda = 0$  en (8) obtenemos la condición límite para un bono no *call* a la tasa  $r = 0$ .

$$\kappa m V_r + C(\tau) = V_r \quad (11a)$$

Este resultado, muestra que un aumento en el tiempo de vencimiento es igual a un flujo de pagos extra más variaciones adicionales que pueden darse en la tasa de interés, como consecuencia del aumento en el tiempo de vencimiento, multiplicado por la tasa promedio que es aproximadamente el producto de la velocidad de ajuste y la tasa de interés a largo plazo.

d) La utilización óptima de la opción *call*, es decir, no existen prepagos subóptimos  $\lambda = 0$ , depende de un proceso estocástico gobernado por la tasa de interés libre de riesgo. Entonces para cada  $\tau$  existe algún nivel de tasa de interés libre de riesgo, por

decir  $r_c(\tau)$ , para la cual  $V[r_c(\tau), \tau] = F(\tau)$  y la opción *call* será ejercida. Lo anterior sólo es válido cuando se conoce  $r_c(\tau)$ , en caso contrario la opción se ejercerá en una vecindad alrededor de la  $r_c(\tau)$  verdadera.

Con tasas de interés por abajo de  $r_c(\tau)$  la opción *call* siempre será ejercida por lo tanto tales tasas de interés no serán relevantes para fijar precio a los bonos con opción *call*.

El efecto de políticas *call* óptimas es el de excluir el valor de mercado de un bono que exceda a su saldo insoluto, por lo tanto la condición límite de un bono con opción *call* óptima es:

$$V(r, \tau) \leq F(\tau) \quad (11b)$$

Con la condición inicial (9) y las condiciones límite (10) y (11b), (8) puede ser resuelta numéricamente para el precio de un valor GNMA *pass-through*. Se realizará un análisis de las características del valor GNMA, obteniendo en primer lugar la solución de la ecuación diferencial parcial (8), que nos servirá para ver como se comporta el precio del valor GNMA a distintos niveles de la tasa de interés.

## 5. ANÁLISIS DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS VALORES GNMA.

La forma en que se realiza el análisis es encontrando primero la forma en que se comporta el modelo y proponiendo una manera para solucionar la ecuación diferencial del precio del valor GNMA. Posteriormente, se compararán las diferentes combinaciones de características que pueden derivarse a partir de las características de amortización y de opción *call* que poseen los valores GNMA.

### 5.1 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL PRECIO DE UN VALOR GNMA.

La ecuación para fijar precio a un valor GNMA es:

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 r V_{rr} + (\kappa m - (\kappa + q)r) V_r - rV + C(\tau) - V_r + \lambda(F(\tau) - V)$$

Sin pérdida de generalidad, se supone  $F(\tau) = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si este no es el caso, se hace una transformación lineal de la variable  $V$ . Además se supone, con el fin de simplificar el cálculo, que  $C(\tau) = 0$  y  $\lambda(r, \tau) = c$ .

Por lo tanto la ecuación del precio de un valor GNMA es la siguiente:

$$V_r = \frac{1}{2} \sigma^2 r V_{rr} + (\kappa m - (\kappa + q)r) V_r - rV - cV \quad (12)$$

Si la solución del estado estable para el precio del valor de la ecuación (12) existe, entonces  $V \rightarrow cte.$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , y por tanto  $V_r \rightarrow 0$ . El resolver la ecuación diferencial para el estado estable tiene su justificación en que las hipotecas tiene un largo tiempo para su

vencimiento, por lo tanto podemos suponer que estamos en estado estable desde el principio, dado que los parámetros sean bien comportados.

Entonces la ecuación del estado estable, es ahora una ecuación diferencial ordinaria quedando de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r V_{rr} + (\kappa m - (\kappa + q)r)V_r - rV - cV = 0 \quad (13)$$

Suponiendo que el precio del valor es bien comportado, es decir, que no crece de forma explosiva. Utilizando la  $\sigma^2 = 0.08$  y  $r = 0.08$  que obtienen Dunn y MacConnell en su artículo se tiene que,  $\frac{1}{2}\sigma^2 r V_{rr} \approx 0$ , por lo que se puede ignorar este término y tener aún una buena aproximación de la ecuación, la cual queda de la siguiente forma:

$$(\kappa m - (\kappa + q)r)V_r = (r + c)V \quad (14a)$$

Despejando  $V_r$ ,

$$V_r = \frac{(r + c)}{(\kappa m - (\kappa + q)r)} V \quad (14b)$$

Por lo tanto, la solución estándar de esta ecuación diferencial es:

$$V = Ae^{-\frac{r}{\kappa+q}} e^{-\left(\frac{\kappa m}{\kappa+q} + c\right) \ln|\kappa m - (\kappa+q)r|} = Ae^{-\frac{r}{\kappa+q}} (\kappa m - (\kappa + q)r)^{\left(\frac{\kappa m + c(\kappa+q)}{(\kappa+q)^2}\right)} \quad (15)$$

Entonces como  $\kappa m + (\kappa + q)c > 0$ , implicando que el exponente  $-\frac{\kappa m + (\kappa+q)c}{(\kappa+q)^2} < 0$ , por lo que va a existir una singularidad en;

$$r = r_c = \frac{\kappa m}{\kappa + q}$$

Por lo tanto,  $V \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow r_c$ , lo cual se puede apreciar en la figura 1. Pero por otro lado ya sabemos que la opción *call* que tiene el valor va a causar que para tasas de interés por abajo de  $r_c$  la opción *call* se ejerce al precio de ejercicio,  $E$ , lo que causa la línea recta que también se muestra en la figura 1.

De la ecuación del estado estable (13) se tiene que  $\frac{1}{2}\sigma^2 r V_{rr} \approx 0$ , es decir,  $V_{rr}$  no tiene un comportamiento explosivo, entonces para la ecuación (14a) no se va a tener una buena aproximación para aquellos valores que estén alrededor del valor crítico de la tasa de interés,  $r_c$ , pero para tasa de interés no tan cercanas a  $r_c$  la ecuación va a dar una buena aproximación, donde el precio del valor GNMA va a caer cuanto mayor sea la tasa de interés.

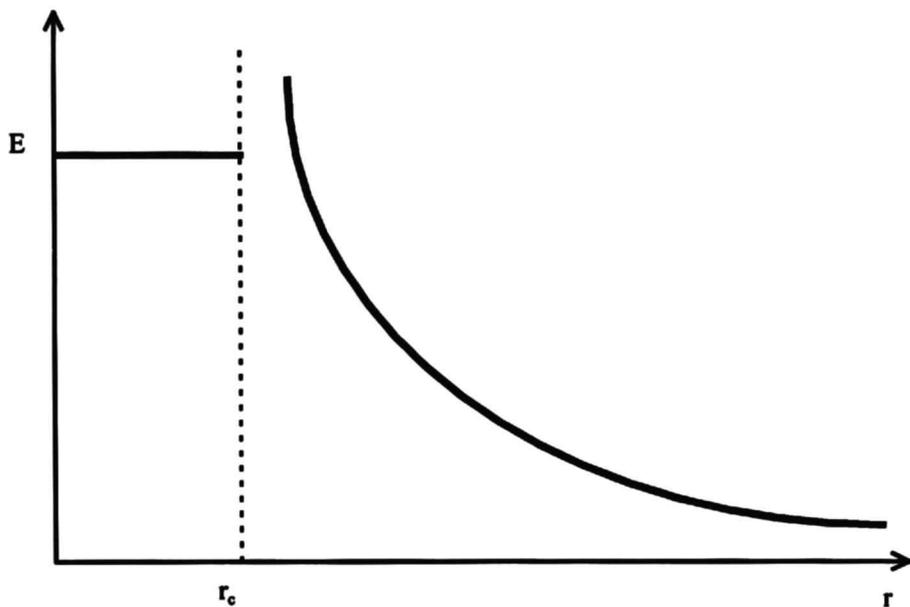


Figura 1.

Por lo tanto, el estado estable ofrece una buena aproximación para el cálculo de  $V$ , excepto en una vecindad,  $\gamma$ , a la derecha de  $r_c$ , por la singularidad que se mostró anteriormente.

La idea básica para poder resolver la ecuación (13) es partiendo del valor inicial que es conocido,  $V(r) = E$ , para toda  $r < r_c$ , a partir  $r_c$  se utiliza la mejor aproximación posible en la vecindad  $\gamma$  para calcular los valores del punto (a) al punto(b) y finalmente para valores de  $r$  por arriba de la vecindad  $\gamma$  se vuelve a utilizar la buena aproximación que ofrece la

solución del estado estable, tomando como valor inicial el valor que se tenga en el punto (b).  
Lo cual se ilustra en la figura 2.

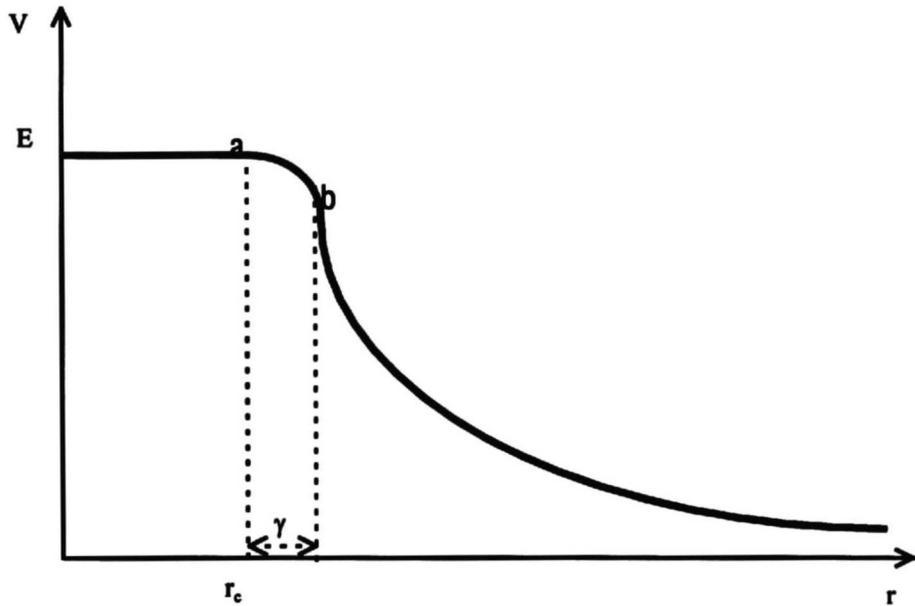


Figura 2.

La tarea ahora es encontrar la mejor aproximación de los valores del punto (a) al punto (b), para lo cual se utiliza la ecuación (13) para toda  $r$  en  $\gamma$ .

Para no confundirse se cambiara de notación tomando  $P$  en vez de  $V$ , quedando la ecuación (13) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + (\kappa m - (\kappa + q)r)P_r - rP - cP = 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + (\kappa + q)\left(\frac{\kappa m}{(\kappa + q)} - r\right)P_r - rP - cP = 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + (\kappa + q)(r_c - r)P_r - rP - cP = 0$$

Sea  $\alpha = -(\kappa + q)$ , entonces,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + \alpha (r - r_c)P_r - rP - cP = 0$$

Como  $r \in \gamma \Rightarrow r \approx r_c$ . Si se sustituye  $r$  por  $r_c$  en la ecuación anterior, pero sólo en el primer y tercer término, porque el segundo término es el término de transición, es decir, es el que ocasiona el cambio de signo en la ecuación, por lo que se tiene que mantener en caso contrario se estaría perdiendo completamente la singularidad de la ecuación. Entonces la ecuación que queda es la siguiente:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r_c P_{rr} + \alpha(r - r_c)P_r - r_c P - cP = 0$$

Haciendo un cambio de variable:  $x = r - r_c$  y dividiendo por  $\frac{1}{2}r_c$  se obtiene:

$$\sigma^2 P_{xx} + \beta P_x - \phi P = 0 \quad (16)$$

Donde

$$\beta = \frac{2\alpha}{r_c}$$

$$\phi = 2\left(1 + \frac{c}{r_c}\right), \quad \phi > 0, \text{ porque } r_c > c.$$

La ecuación diferencial (16) puede resolverse a través de transformadas de *Laplace*.<sup>1</sup>

Entonces las ecuaciones para las transformaciones de *Laplace* son las siguientes:

$$P(x) = \int_c e^{sx} \tilde{P}(s) ds \quad (17a)$$

$$P_x(x) = \int_c s e^{sx} \tilde{P}(s) ds \quad (17b)$$

$$P_{xx}(x) = \int_c s^2 e^{sx} \tilde{P}(s) ds \quad (17c)$$

Donde  $c$  es un camino apropiado el cual se selecciona posteriormente.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Para mayor información acerca del método de transformadas de *Laplace* para solucionar ecuaciones diferenciales ver Ford, Lester R. "Differential Equations." New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.

<sup>2</sup> La variables es una variable compleja, es decir, se está hablando de transformadas de *Laplace* en el sentido de la teoría de funciones complejas

Multiplicándola por  $x$  e integrando por partes la ecuación (17b) se obtiene:

$$\begin{aligned} xP_x(x) &= x \int_c s e^{sx} \tilde{P}(s) ds = \int_c x e^{sx} s \tilde{P}(s) ds = \int_c \left( \frac{d}{ds} e^{sx} \right) s \tilde{P}(s) ds \\ &= e^{sx} s \tilde{P}(s) \Big|_c - \int_c e^{sx} \frac{d}{ds} s \tilde{P}(s) \end{aligned}$$

Entonces  $\tilde{P}(x)$  satisface lo siguiente:

$$\sigma^2 s^2 \tilde{P}(x) - \beta \frac{d}{ds} s \tilde{P}(x) - \phi \tilde{P}(x) = 0$$

Sea  $\beta = -\mu$  con  $\mu > 0$ .

Entonces,

$$\sigma^2 s^2 \tilde{P}(x) + \mu \frac{d}{ds} s \tilde{P}(x) - \phi \tilde{P}(x) = 0$$

$$\sigma^2 s^2 \tilde{P}(x) + \mu s \frac{d}{ds} \tilde{P}(x) + \mu \tilde{P}(x) - \phi \tilde{P}(x) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{P}(x) = -\frac{\mu - \phi}{\mu} \cdot \frac{\tilde{P}(s)}{s} - \frac{\sigma^2}{\mu} s \tilde{P}(s)$$

Con lo cual, utilizando la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$P(x) = A \int_c s^{\mu-1} e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2} + sx} ds \quad (18)$$

Con esta ecuación se obtiene directamente  $P_x(x)$  y  $P_{xx}(x)$ .

Para evitar la singularidad se puede integrar sobre la línea  $y = 1$  y  $y = -1$ , obteniendo las soluciones  $P_1(x)$  y  $P_2(x)$ , estas soluciones son complejos conjugados, por lo tanto  $P(x)$  es dos veces la parte real de cualquiera de las dos soluciones, es decir:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) = \text{Re } P_1(x) = \text{Re } P_2(x)$$

Este  $P(x)$  sirve como solución y es lo más cerca que uno puede llegar en una forma explícita.

Una evaluación numérica de esta integral puede servir como alternativa para resolver la ecuación diferencial original. Sin embargo, esto sólo da una aproximación estacionaria y la fuerza de esta solución es su forma explícita que permite analizar la influencia de los parámetros directamente.

A continuación, como se dijo anteriormente, se analizarán las combinaciones de características que poseen los valores GNMA, es decir, se compararán los siguientes valores:

1. Un bono no amortizable y sin opción *call*.
2. Un bono no amortizable y con opción *call*.
3. Un bono amortizable y sin opción *call*.
4. Un valor GNMA, el cual es un valor amortizable y con opción *call*, cuando se sigue una política *call* óptima.
5. Un valor GNMA con prepagos subóptimos.

## 5.2 LA OPCIÓN CALL.

Uno de los atributos que tienen los valores con opción *call* es el de no exceder a su precio de ejercicio, porque cuando  $r_c > r$  se ejercerá la opción *call*,<sup>3</sup> mientras que un valor sin opción *call* si lo podrá exceder.

Ahora bien, para bonos no amortizables con opción *call* se tiene mayor tolerancia para ejercer la opción que en bonos amortizables con opción *call*, esto es a causa de que el costo por el error que se puede cometer al ejercer la opción, si la tasa de interés futura es mayor a  $r$  debido a la incertidumbre que se tiene acerca de  $r$ , va a ser menor en los valores

---

<sup>3</sup> Como se menciono antes, en  $r_c$  el valor de un bono libre de *default* es igual a su valor nominal o al saldo insoluto, por lo cual la opción *call* se ejerce.

amortizables por que el saldo insoluto es menor en comparación al saldo insoluto de un valor no amortizable.

Cuanto más alta sea la tasa de interés mayor será la probabilidad de que  $r > r_c$  causando que la probabilidad de ejercer una política *call* óptima sea pequeña. Entonces a altos niveles de  $r$  la opción *call* tiene una menor participación en el precio del valor en comparación a cuando  $r$  es baja.

El precio de un valor con opción *call* es igual al precio de un valor idéntico sin opción *call* menos el precio de la opción *call*. La razón de porque el precio de la opción se sustrae del precio del valor sin opción es que cuando el tenedor del bono vende la opción, el recibe el precio de la opción.

El efecto de la opción es reducir el riesgo y por ende el rendimiento esperado de un valor GNMA, a pesar de que los precios de ambos valores decrecen cuando  $r$  aumenta el precio del valor con opción *call* es menos sensitivo a los cambios en  $r$  que el valor sin opción *call*, es decir, la magnitud de la caída en el precio es mayor para valores sin opción *call* que para valores con opción *call*.

Lo anterior se manifiesta así, porque para bajos niveles de  $r$  la opción *call* se ejerce hasta que  $r > r_c$ , a partir de ese momento ambos valores decrecen pero el precio de la opción aun tiene una participación considerable en el precio del valor por tanto la diferencia en sensibilidades es aun considerable, sin embargo esta diferencia en sensibilidades es pequeña a las altas tasas de interés instantáneo, lo cual se debe nuevamente a que es menos probable ejercer la opción cuando la tasa de interés es alta, implicando que la opción tiene un pequeño efecto sobre el precio de un valor con opción *call* a altos niveles de  $r$ .

### **5.3 LA CARACTERÍSTICA DE AMORTIZACIÓN.**

El flujo de pagos de un valor amortizable siempre es mayor que la de un no amortizable hasta el vencimiento, que es cuando el total del principal del no amortizable es pagado. Si se analiza en valor presente este flujo de pagos es claro que si la tasa de interés es

alta la liquidación del bono no amortizable es severamente descontada. Entonces cuando  $r$  es alta, el precio de un bono amortizable sin opción *call* es mayor que el precio de un no amortizable sin opción *call*, pero cuando la  $r$  es baja ocurre lo opuesto, por que el flujo de pagos que ofrecen los amortizables únicamente va a poder ser reinvertido a una tasa de interés baja. Por lo tanto va a depender de la tendencia que sigue  $r$  para saber cual de los bonos vale más a largo plazo. Además, esta diferencia de precios entre un bono amortizable con un bono no amortizable va a depender de la velocidad de ajuste de la tasa de interés,  $k$ , porque a menor  $k$ ,<sup>4</sup> mayor será el impacto de una variación en la tasa de interés causando que la diferencia sea mayor.

Existe un efecto interactivo entre las características de amortización y la opción *call*, el precio de un valor no amortizable sin opción *call* es mayor que el de un valor amortizable sin opción *call* cuando ambos son vendidos a una prima mayor de sus valores nominales ( $r$  es baja), pero cuando son vendidos a descuento ( $r$  alta) el precio del amortizable es mayor. Además, como la opción *call* impide que el valor sea vendido con una prima, un valor amortizable con opción *call* tiene mayor precio que un valor idéntico no amortizable con opción *call*.

Volviendo a la diferencia que existe entre el saldo insoluto de un valor no amortizable y el de un valor amortizable, como se vió anteriormente, el riesgo que enfrenta un valor no amortizable ante bajas en la tasa de interés es más alto que el de un amortizable, por lo que la opción *call* es más importante para el primero. El último efecto es causado por el hecho de que la opción *call* impide que el valor sea vendido con una prima.

Entonces mientras que la diferencia de precios para un valor amortizable y un no amortizable depende de la tendencia de  $r$ , el valor de la opción *call* es siempre más valiosa para un no amortizable, considerando lo anterior, la diferencia de precio entre un valor no amortizable sin opción *call* y un valor idéntico amortizable con opción *call* va a deberse principalmente a la opción *call* y no a la característica de amortización, siempre y cuando no sean muy drásticas las variaciones de  $r$ .

---

<sup>4</sup> Una  $\kappa$  chica es equivalente a tener incertidumbre sobre la tasa de interés a largo plazo

Los precios de los amortizables son menos sensitivos a las fluctuaciones de la tasa de interés, por el saldo insoluto comprometido, pero como la característica de amortización disminuye el riesgo al que se enfrenta el tenedor de un valor amortizable el rendimiento esperado de un valor GNMA es menor que el rendimiento esperado de un valor no amortizable con opción *call* y como la opción *call* impide que el valor sea vendido con prima se tendrá que para cada plazo de vencimiento, el precio del valor GNMA con política *call* óptima es mayor que el precio de un valor no amortizable con opción *call*.

Si disminuye el tiempo de vencimiento el valor esta expuesto a un menor riesgo, entonces, el valor de la opción *call* cae cuando el plazo de vencimiento disminuye. Ahora bien, cuando el plazo de vencimiento se acorta y se espera que la tasa de interés caiga, es decir, la estructura de plazos tiene pendiente negativa, los flujos de pagos que generan los amortizables van a ser reinvertidos a una tasa baja pero al reducirse el plazo al vencimiento, el rendimiento que genera este flujo de pagos va a aumentar en relación rendimiento de un no amortizable, por lo tanto, el precio de los valores de los amortizables aumentan en relación al de los no amortizables.

Por lo que se acaba de señalar, la opción *call* tiene un mayor impacto sobre el precio de un valor GNMA que la característica de amortización cuando el plazo de vencimiento es grande. Sin embargo, la característica de amortización tiene un mayor impacto sobre el precio que la opción *call*, cuando el plazo de vencimiento es menor.

#### **6.4 PREPAGOS SUBÓPTIMOS.**

El incremento en la riqueza del tenedor de un valor GNMA causado por un prepago subóptimo aumenta en relación a si el descuento del precio del valor de su precio nominal es mayor, es decir, a mayor descuento menor será el precio que paga el inversionista por el valor y agregando que el prepago subóptimo es un ingreso no esperado para los inversionistas, este ingreso extra podrá ser reinvertido a una tasa mayor, cuanto más alta sea

la tasa de interés. Entonces los prepagos subóptimos incrementan el valor de un GNMA y el efecto crece en cuanto mayor sea  $r$ .

Por otro lado, si la tasa esperada de prepagos subóptimos aumenta, se incrementa la probabilidad de obtener un rendimiento extra creciendo de esta forma el precio del valor. Ahora bien, si se combinan estos dos efectos y se supone que la probabilidad de prepagos disminuye cuando  $r$  aumenta,<sup>5</sup> entonces el precio debido a los prepagos subóptimos se reducirá en algo, porque a mayor  $r$  mayor será el impacto de los prepagos, pero como simultáneamente la probabilidad de que ocurran disminuye, el impacto total se verá disminuido.

El mercado de capitales no recompensa riesgos no sistemáticos,<sup>6</sup> como es el asociado a los prepagos subóptimos, aunado a que los prepagos subóptimos reducen el riesgo de los valores, porque con altas tasas esperadas de prepagos el efecto de cambios en  $r$  sobre el precio del valor va a ser menor, ya que con una tasa alta de prepagos la caída en el precio por un alza en  $r$  va a ser compensada, lo cual implica que la elasticidad precio-tasa de interés sea menos elástica cuando disminuye la tasa de riesgo asociada al valor GNMA.

Cuando el plazo de vencimiento cae, es menor la varianza que puede experimentar la tasa de interés, por que cuanto más breve sea el lapso de tiempo que se toma en cuenta es menos probable que existan cambios muy significativos en la tasa de interés, haciendo que el efecto de prepagos subóptimos eventuales sea mayor que el impacto de prepagos óptimos. Así que el valor GNMA se hace más valioso que el valor de un bono amortizable sin opción *call*.

En general, las características de amortización y prepagos incrementan el precio de un valor GNMA y la característica de poseer la opción *call* lo va a disminuir.

Cuando el plazo para vencimiento es grande, la opción *call* tiene un mayor impacto sobre el precio del valor, en términos absolutos, que cualquiera de las otras dos

---

<sup>5</sup> En la practica se espera que las probabilidades de prepagos caigan cuando  $r$  aumenta, porque como se menciono antes una de las principales causas de prepagos va a ser que los deudores se muden de casa y la obligación de la hipoteca no es asumida por el comprador de la casa, pero al subir la tasa de interés el nuevo comprador no tendrá incentivos a reestructurar la deuda porque no podrá obtener un crédito con una tasa menor que la establecida en el crédito anterior.

características. Sin embargo, la amortización tiene un fuerte impacto sobre el precio del valor cuando el vencimiento del valor es pequeño.

El efecto de la tres características es el reducir el riesgo de la tasas de interés y por ello el rendimiento esperado de un valor GNMA en relación a los otros valores analizados.<sup>7</sup>

Finalmente, en la siguiente sección se realizará una discusión acerca de las posibilidades de aplicar el modelo de fijación de precios en la economía mexicana.

---

<sup>6</sup> Son riesgos que no están correlacionados con alguno de los factores relevantes del mercado.

<sup>7</sup> La discusión anterior concuerda con los resultados numéricos obtenidos por Dunn y McConnell, en las tablas 1 y 2 de "Valuation of GNMA Mortgage-backed Securities." Utilizan la ecuación (13) tomando  $\lambda = 0$  y cambiando tanto las condiciones límites y/o la forma funcional de los flujos de efectivos futuros, para resolver (13) para los precios de otros valores de tasa fija.

## 6. EVALUACIÓN DEL MODELO DE FIJACIÓN DE PRECIOS DE UN VALOR GNMA PARA SU APLICACIÓN EN MÉXICO.

Para saber si se puede aplicar el modelo en México es necesario demostrar que los supuestos en los cuales se basa el modelo se conservan en el escenario económico mexicano.

Partiendo de lo anterior se tratara de comprobar si la tasa de interés libre de riesgo cumple el supuesto de ser estacionara (S.1). Como se trata de un modelo continuo se utilizará como tasa libre de riesgo instantánea la tasa diaria de los CETES a 28 días, mejor conocida como reporto diario de los CETES a 28 días, durante el periodo de octubre de 1991 hasta el 12 de septiembre de 1996, el comportamiento de estas tasas se muestra en la figura 3.

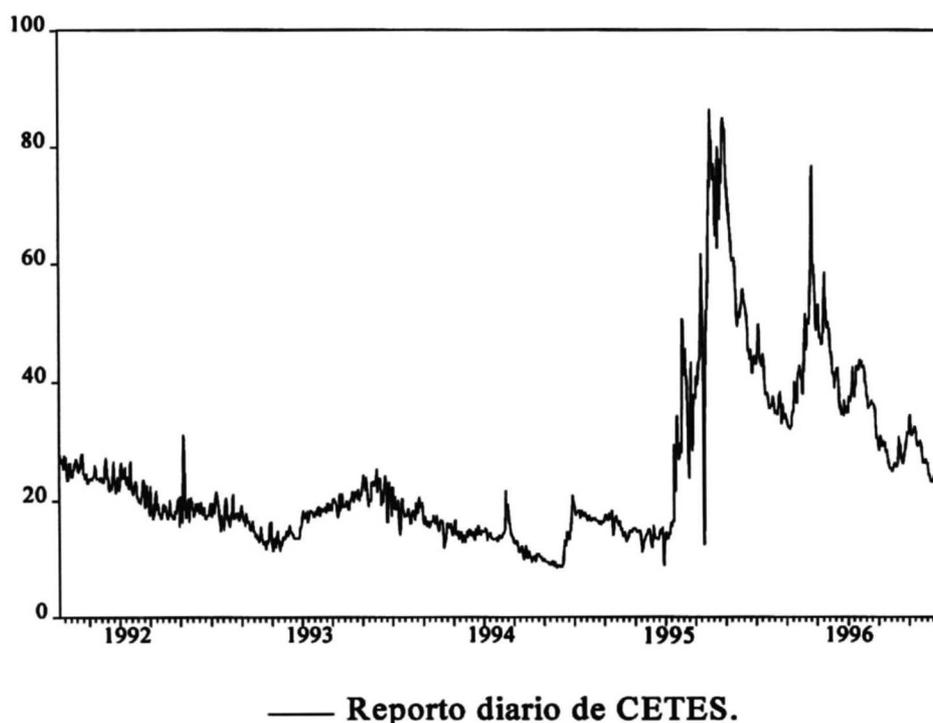


Figura 3.

Como se puede apreciar la tasa de interés libre de riesgo no es estacionaria ya que muestra tendencias lineales en ambas direcciones, es decir, por intervalos de tiempo cambia de tendencia positiva a tendencia negativa y viceversa.

La no estacionariedad se ratifica al observar el autocorrelograma (figura 4) el cual presenta en su primera autocorrelación un valor muy cercano a uno y aunque los siguientes valores son menores, todavía se encuentran por arriba de 0.9 por un largo tiempo. Esta alta autocorrelación significa que la tasa libre de riesgo regresa muy lentamente a su nivel normal ante una perturbación.

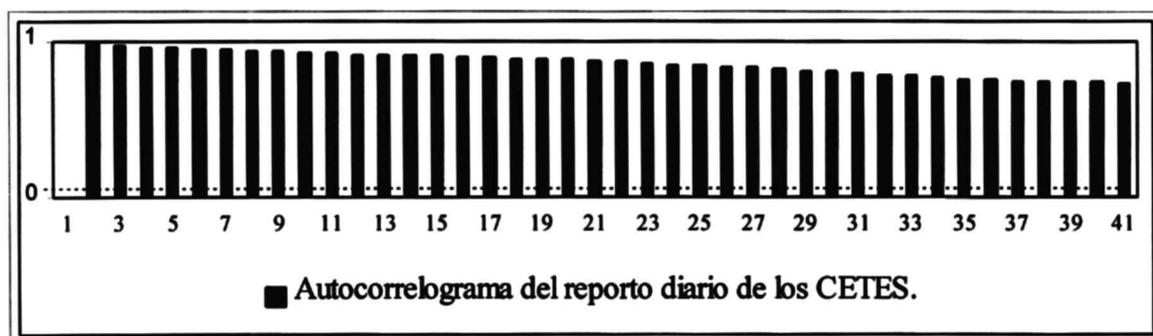
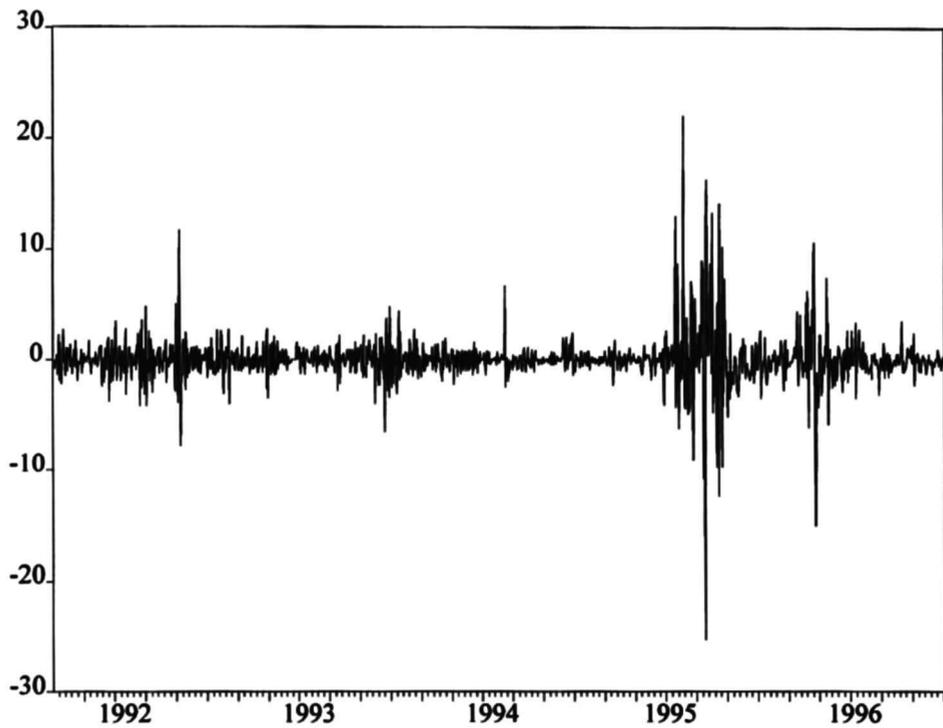


Figura 4.

Este tipo de tendencias lineales generalmente son eliminadas obteniendo la primera diferencia de la serie, esto es, restándole a cada valor de la serie el valor que lo antecede. El resultado se muestra en la figura 5.

Nuevamente esta serie no es estacionaria, lo cual es causado por la alta volatilidad que mostró la tasa de interés en el año de 1995, debido como todos sabemos a la inestabilidad generada por la devaluación de diciembre de 1994.

Lo no estacionario de la tasa de interés no podrá ser eliminado sacando más diferencias, por que a pesar de que el rango en el cual se mueven las diferencias disminuya estas siempre se van a presentar los dos últimos flachazos que se ven en la figura 5.



— 1ª diferencia de CETES.

Figura 5.

Lo anterior se puede apreciar mejor si se analizan los autocorrelogramas de la primera diferencia de los CETES a 28 días hasta septiembre de 1996 y la primera diferencia de los CETES a 28 días hasta diciembre de 1994.



Figura 6.

Como se puede ver en el autocorrelograma para la serie completa, figura 6, la serie no es estacionaria ya que rezagos bastante lejanos de la tasa de interés son significativos (nivel de significancia 0.051),<sup>1</sup> es decir afectan de manera importante al valor actual de la tasa de interés.

Mientras que el autocorrelograma para la serie truncada con primeras diferencias, figura 7, se tiene que ahora si, la serie es estacionaria.<sup>2</sup>

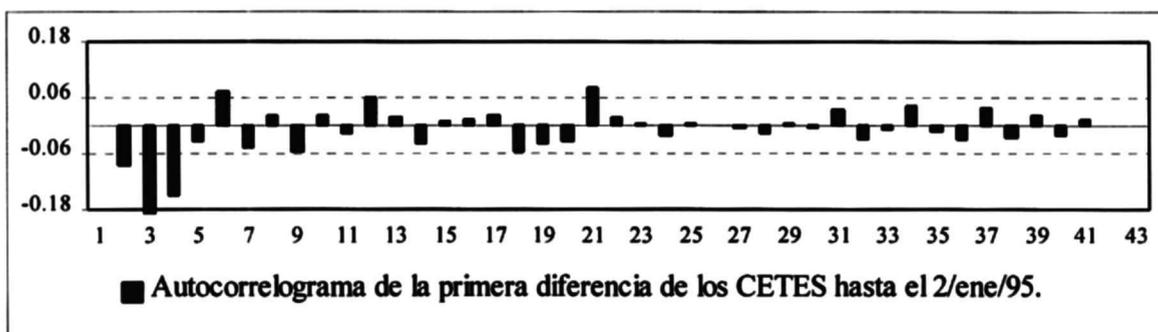


Figura 7.

El análisis anterior demuestra que la tasa de interés libre de riesgo no es estacionaria, ni tampoco sigue un proceso *Markov*, porque la tasa de interés corriente se ve afectada de forma significativa por varios rezagos. Por lo tanto no puede ser directamente aplicado el modelo a México.<sup>3</sup>

Si se agrega también, el hecho de que existen problemas en lo que respecta a los prepagos. Esto es provocado por la ausencia de información confiable disponible. Además, los bancos no llevan un registro adecuado para formar un indicador de prepagos, porque generalmente sus bases de datos no mapean de forma consistente, por ejemplo si se observa la base de datos del historial de recibos no pagados se aprecia que no hace diferencia entre el

<sup>1</sup> La forma estándar de calcular el nivel de significancia es el dividir 1.96 por la raíz cuadrada del número de datos.

<sup>2</sup> Cabe mencionar que la serie truncada sin diferencia tampoco es estacionaria.

<sup>3</sup> Para mayor información sobre pruebas de estacionariedad ver Hamilton, James D. "Time Series Analysis." Princeton, New Jersey: Princeton University, 1994.

registro de un pago extraordinario hecho por el acreditado para disminuir el número de recibos no pagados y el refinanciamiento del crédito.

Hechos como el anterior hace imposible el realizar un análisis adecuado de la tasa de prepagos, sin embargo, se sabe que a partir de la devaluación de 1994 la cartera vencida se a incrementado a tal grado que a causado hasta problemas sociales y políticos. Por lo cual, es claro que la tasa de prepagos no se comporta de manera uniforme implicando que no sigue un proceso *Poisson*.

Entonces el problema radica en como capturar la posibilidad de devaluación. En este modelo si se agrega una variable más que capture la devaluación, en términos computacionales, no sería factible aplicarlo, por que se tendra una ecuación con tres variables implicando que si se necesitan 10000 datos para resolver el modelo con dos variables al introducir una extra se necsecitaría 1000000 de datos y el tiempo en que tardaría en correr el proceso sería 100 veces más.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Para mayor información acerca de como afecta el número de variables a la elaboración de un programa ver Press, William H; Teukolsky, Saul A., Vetterling, William T. y Flannery, Brian P. "Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing." 2a ed.; New York: Cambridge Universty Press, 1992.

## 7.CONCLUSIONES.

En esta investigación, se expusieron las características más importantes de las hipotecas mexicanas, de la bursatilización del crédito hipotecario y del modelo de fijación de precios de un valor GNMA, el cual tiene las propiedades de ser amortizable, con opción *call* y libres de *default*, es decir, los deudores hipotecarios pueden prepagar su deuda en cualquier momento y no existe riesgo para los inversionistas de que no se les transfiera por lo menos el pago mensual de las hipotecas menos el pago de servicios.

Este modelo de fijación de precios se basa en dos principales suposiciones, que se plantearon a lo largo de la investigación: la primera es que la tasa de interés libre de riesgo sigue un proceso de *Markov* continuo y estacionario, y la segunda es que la conducta de prepagos sigue un proceso *Poisson*.

En el cuerpo de este trabajo, se desarrollo el modelo y se analizo como afectan al precio del valor las características de prepagos subóptimos, opción *call* y la amortización. Lo anterior fue hecho con el fin de elaborar un análisis, para conocer la factibilidad del modelo y si este puede ser aplicado en México.

Como resultado, y conclusión de este análisis es, como se pudo apreciar en el desarrollo de este trabajo, que no se puede aplicar directamente el modelo en nuestro país, debido a que la tasa de interés libre de riesgo no es estacionaria y que los prepagos no siguen un proceso *Poisson*.

Así mismo, se concluye que no existe la posibilidad de generalizar el modelo para cubrir el problema de intereses significativamente no estacionarios. Lo anterior, porque la estructura del modelo esta basada en ecuaciones estocásticas lo cual siempre impone restricciones como es la estacionariedad y el ser un proceso *Markoviano*. Además si se intenta incluir parámetros para cubrir la no estacionariedad lo que se va a ocasionar es que el modelo se vuelva insolucionable en términos computacionales, lo que no es deseable.

Por lo que, la mejor opción sería es un nuevo modelo que capture el comportamiento de las hipotecas en nuestro país. Desafortunadamente, este modelo ideal no se puede hacer en un ambiente estocástico como se vió en la investigación ya que con un ambiente *Markoviano* se va a requerir de más de dos parámetros para cubrir los riesgos que enfrenta la economía mexicana.

Ahora bien, posiblemente se pueda implementar un modelo discreto, sin embargo, el incluir la posibilidad de alta inflación causaría que el precio de la opción *call* aumente, lo cual recaería en el encarecimiento de las hipotecas. Además, es difícil el pronosticar devaluaciones implicando dificultades en predecir el verdadero precio de la opción *call*, por lo que no será fácil convencer a los inversionistas a que compren el valor.

Otra conclusión, parte de aplicar un principio que se utiliza en seguros, el cual es no cubrir eventos catastróficos, como sería un terremoto, por que, de otra forma en ese momento se colapsarían todos los reclamos. Con este principio, en mente no habría nadie interesado en garantizar las hipotecas, ya que en el momento de una devaluación gran parte de los deudores hipotecarios ejercerían su opción *call*, quedando la institución que garantiza estos valores en un serio problema de liquidez al grado que no pueda saldar sus reclamos, como esto lo conocen tanto los emisores del valor como los inversionistas no habrá quien tenga incentivos a adquirir el valor.

Por lo tanto, la conclusión general es que sin importar el modelo que se utilice este no podrá ser aplicado con éxito, mientras no se logre un crecimiento sostenido y confianza en las acciones del gobierno.

## Glosario de abreviaturas.

<b>BAW</b>	Modelo de Barone, Adesi y Whaley, que da una aproximación para fijar precio a opciones <i>call</i> americanas.
<b>CMO</b>	Collateralized Mortgage Obligations.
<b>CNB</b>	Comisión Nacional Bancaria.
<b>CPP</b>	Costo Porcentual Promedio de Fondo de los Bancos.
<b>FHA</b>	Federal Housing Administration.
<b>FHLMC</b>	Federal Home Loan Mortgage Corporation.
<b>FNMA</b>	Federal National Mortgage Association.
<b>GNMA</b>	Government National Mortgage Association.
<b>HHTA</b>	Hipotecas Híbridas con Tasas Ajustables.
<b>HID</b>	Hipotecas con Índice Dual.
<b>HTA</b>	Hipotecas con Tasas Ajustables.
<b>HTD</b>	Hipotecas con Tasa Dual.
<b>HTF</b>	Hipotecas con Tasa Fija.
<b>HUDIs</b>	Hipotecas en UDIs.
<b>IO</b>	Interest Only.
<b>MBS</b>	Mortgage-Backed Securities.

<b>PO</b>	<b>Principal Only.</b>
<b>PSA</b>	<b>Public Securities Association.</b>
<b>TCP</b>	<b>Tasa Constante de Pagos.</b>
<b>TIIP</b>	<b>Tasa de Interés Interbancaria Promedio.</b>
<b>TMSM</b>	<b>Tasa de Mortalidad Sencilla Mensual.</b>
<b>UDIs</b>	<b>Unidades de Inversión.</b>
<b>VA</b>	<b>Veterans Association.</b>

## Glosario de notación.

$a(r, \tau)$	Tasa instantánea de rendimiento total esperada de un valor GNMA.
$b(r, \tau)$	Tasa instantánea de rendimiento esperada de otro valor.
$B$	Precio del bono.
$C_t$	Flujo de pagos, “cupones y capital” al tiempo $t$ .
$CP_t$	Flujo de pagos proyectados para el mes $t$ .
$C(\tau)$	Flujo de pagos.
$CU$	Cupón de un bono.
$C_e^*$	Precio de una opción <i>call</i> europea calculada por <i>Black &amp; Scholes</i> cuando $ST^*$ es el precio del <i>stock</i> .
$C_a$	Precio de una opción <i>call</i> americana.
$D_{m,t}$	Tasa de deuda o tasa activa de mercado.
$DU$	Medida de duración para bonos.
$E$	Precio de ejercicio de una opción.
$F(\tau)$	Valor nominal de la deuda.
$F_0$	Valor del principal contratado en términos nominales.
$f$	Margen en la tasa de deuda expresado como factor multiplicativo.
$g(r, \tau)$	Desviación estándar del rendimiento de otro valor.

$I_t$	Pago de intereses en UDIs. en el periodo $t$ .
$IP_t$	Intereses proyectados al mes $t$ .
$i$	Tasa de interés mensual pactada.
$\kappa$	Velocidad de ajuste de la tasa de interés instantánea.
$m$	Tasa de interés instantánea a largo plazo.
$N(\cdot)$	Función de densidad normal.
$NIP_{t-1}$	Intereses netos proyectados al mes $t$ .
$P_t$	Pago de la mensualidad efectuado en el periodo $t$ .
$PD_t$	Pago de capital en UDIs en el periodo $t$ .
$PP_t$	Pago mensual proyectado al mes $t$ .
$PPP_t$	Prepago proyectado al mes $t$ .
$PR$	Principal de un bono.
$p(r)$	Precio del riesgo.
$qr$	Covarianza entre cambios en la tasa de interés y cambios porcentuales en las inversiones óptimas de la riqueza.
$r(t)$	Tasa de interés instantánea corriente libre de riesgo.
$r_c(\tau)$	Nivel de tasa de interés libre de riesgo para la cual la opción <i>call</i> se ejerce.
$rm$	Tasa líder de mercado.
$S_t$	Saldo insoluto al final del periodo $t$ .

$SE_t$	Pagos de servicios proyectados al mes $t$ .
$SPP_t$	Pago proyectado al saldo insoluto en el mes $t$ .
$ST$	Precio del stock.
$ST^*$	Precio crítico del stock.
$se$	Tasa de pago de servicios.
$s(r, \tau)$	Desviación estándar instantánea del rendimiento de un valor GNMA, condicionada a que el prepago subóptimo no ocurra.
$T$	Fecha de vencimiento o expiración de un crédito hipotecario bono y opción.
$T_{m,t}$	Tasa de pagos para el periodo $t$ .
$U_0$	Valor de las UDIs al inicio del contrato.
$V$	Precio de equilibrio de cualquier crédito eventual, los subíndices indican derivadas parciales.
$V(r, \tau)$	Precio del valor.
$y$	Rendimiento mensual.
$z$	Variable aleatoria que sigue un proceso <i>poisson</i> .
$\tau$	Tiempo que falta para el vencimiento, del valor o del crédito, $\tau = T - t$ .
$\delta$	Tasa de interés anual.
$\eta$	Factor de refinanciamiento a seleccionar por el acreditado.
$\xi$	Margen en la tasa de deuda expresado como un parámetro fijo.

$\Pi_t$	Tasa de inflación al final del periodo $t$ , calculada como una tasa <i>expost</i> entre $t$ y $t+1$ .
$\mu(r)$	Tendencia instantánea del proceso.
$\sigma^2(r)$	Varianza instantánea del proceso.
$\sigma$	Desviación estándar anualizada del rendimiento del stock.
$dw$	Proceso de <i>Wiener</i> .
$dz$	Proceso de <i>Poisson</i> .
$\lambda(r, \tau)dt$	Probabilidad por unidad de tiempo de que ocurra un prepago subóptimo.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

Achour, D. y Castañeda, Gonzalo. *Bienes y Raíces con Aplicaciones a la Economía Mexicana*. México: Limusa. 1993.

Bancomer. *Crédito Hipotecario: Grupo de Crédito, División de Políticas y Capacitación de Crédito, Plan Integral de Capacitación de Crédito (PICEC)*. México: Bancomer, 1981.

Bartlett, William W. *Mortgage-Backed Securities: Products, Analysis, Trading*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989.

Black, Fischer y Scholes, Myron. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *Journal of political Economy*, Vol. 8, No. 1, Mayo-Junio 1973, 637-659p.

Bolsa Mexicana de Valores. *Boletín Diario Bursátil. Mercado de Dinero y Metales*. México: BMV, 1990-1996.

Bookstaber, Richard M. *Option Pricing and Investment Strategies*. 3 ed.; Chicago Illinois: Probus Publishing Company, 1991.

Brennan, Michael J. y Schwartz, Eduardo S. *Saving Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds*. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 1, Agosto 1977, 67-88p.

Bruck, Nicholas. *Editor. Capital Markets Under Inflation*. New York: Praeger, 1982.

Buckley, Robert; Lipman, Barbara y Persaud, Thakoor. *Mortgage Design Under Inflation and Real Wage Uncertainty: The Use of a Dual Index Instrument*. *World Development*, Vol. 21, Marzo 1993, 455-464p.

Castañeda, Gonzalo; Christopher, Barry B. y Joseph, Lipscomb B. *Análisis y Perspectivas de los Créditos Hipotecarios en México*. *Inversión y Finanzas*, Vol. 3, No.1, Enero-Junio 1995, 21-55p.

Cohane, Tim y Rasserdy, Larry *Servicing Mortgage Portafolios: Strategies & Applications for Buying, Selling and Mortgage Loan Portafolios*. Chicago Illinois: Probus Publishing Company, 1994.

Cox, John C. y Rubinstein, Mark. *Options Markets*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1985.

Cox, John C., Ingersoll Jonathan E. Jr. y Ross, Stephen A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, Marzo 1985, 385-407p.

Cox, John C., Ingersoll Jonathan E. Jr. y Ross, Stephen A. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, Marzo 1985, 363-383p.

Chance, Don M. *An Introducción to Options & Futures*. 2 ed.; New York: Dryden, 1992.

Dothan, Michael U. *Prices in Financial Markets*. New York: Oxford University, 1990.

Dunn, Kenneth B. y Kenneth Singleton J. An empirical analysis of the Pricing of Mortgage -Backed Securities. *The Journal of Finance*. Vol. 38, No. 2, Mayo 1983, 613-623p

Dunn, Kenneth B. y McConnell, John J. A Comparison of Alternative Models for Pricing GNMA Mortgage-Backed Securities. *The Journal of Finance*, Vol. 36, No. 2 Mayo 1981, 471-487p.

Dunn, Kenneth B. y McConnell, John J. Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities. *The Journal of Finance*, Vol. 36, No. 3, Junio 1981, 599-616p.

Fabozzi, Frank J. *Advances & Innovations in the Bond and Mortgage Markets*. Chicago Illinois: Probus Publishing Company, 1989.

Fabozzi, Frank J. Editor. *The Handbook of Mortgage-Backed Securities*. Chicago Illinois: Probus Publishing Company, 1992.

Fabozzi, Frank J. y Modigliani, Franco. *Mortgage and Mortgage-Backed Securities Markets*. Boston Massachusetts: Harvard Business School Press. 1992.

Ford, Lester R. *Diferential Equations*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.

**Hamilton, James D. Time Series Analysis. Princeton, New Jersey: Princeton University, 1994.**

**Hines, Mary A. Financing Real State with Securities. New York: John Wiley & Sons, 1988.**

**Hull, John C. Options, Futures, and other Derivate Securities. 2 ed.; Englewood Clifs, New Jersey: Prentice Hall, 1993.**

**Lederman, Jess. Editor. The Handbook of Asset-Backed Securities. New York: Institute of Finance, 1990.**

**Merton, Robert C. Continuos-Time Finance. Cambridge, Massachusetts: Basil Blackwell, 1990.**

**Merton, Robert C. Optimum Consumption and Portafolio Rules in a Continuous Time Model. Journal of Economic Theory, Vol. 3, No. 4, Diciembre 1971, 373-413p.**

**Merton, Robert C. Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Managment Science, Vol. 4, No. 1, Primavera 1973, 141-182p.**

**Press, William H; Teukolsky, Saul A., Vetterling, William T. y Flannery, Brian P. Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing. 2a ed.; New York: Cambridge Universty Press, 1992.**

**Quigley, John M. Interes Rates Variations, Mortgage Prepayment and Household Mobility. Review of Economics and Statistics, Vol. 69, No. 4, Noviembre 1987, 636-643p.**

**Schwartz, Eduardo S. y Torous, Walter N. Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities. The Journal of Finance, Vol. 46, No. 2, Junio 1989, 375-392p.**

**Zorn, Peter M. Mortgage Down Payment and Income Criteria: The Impact on Homeownership and Housing Demand. Human Ecology Forum, Vol. 19, Verano 1991, 17-20p.**