EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS
MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TESIS:

CHEAP TALK CON INCERTIDUMBRE EN LAS PREFERENCIAS DEL EXPERTO: Magnitud y Dirección del Sesgo

Por: Juan Eduardo Calderón Sánchez

Asesor: Dragan Filipovich

MÉXICO, D.F. AGOSTO DE 2007

Resumen

En este trabajo *se extiende el modelo de CS* de tal forma que el espacio de tipos del experto es bidimensional, el experto posee información privada sobre dos parámetros, su sesgo y el estado. Si el sesgo no es conocido, tampoco se conocen los intereses del experto. Lo que sí conoce el tomador de decisiones es que b se distribuye uniformemente en el intervalo [-1,1], lo que implica que el tomador de decisiones desconoce tanto la magnitud como la dirección del sesgo. Encontramos que los equilibrios son nuevamente en forma de particiones, pero no existe equilibrio para todo entero positivo k, el equilibrio más informativo existe para una partición de tamaño tres, es decir, sólo puede soportar tres mensajes.

Contenido

1. Introducción

En raras ocasiones la persona que toma decisiones posee toda la información necesaria, es por ello que suelen ser asesorados por uno o más expertos. Sin embargo, la divergencia de intereses es común entre el que debe tomar la decisión y el que aconseja sobre cuál acción elegir; también es común que el individuo en el que recae la toma de decisiones no conozca los verdaderos intereses del experto. Lo anterior se convierte a *priori* en un problema, pues el tomador de decisiones debe hacer inferencia sobre varios parámetros, no sólo sobre aquellos que interesan para la toma de decisiones, sino adicionalmente sobre las preferencias del experto.

Así pues, en este trabajo presentamos un modelo en el que tenemos un tomador de decisiones y un experto. El experto ofrece consejos que sirven al tomador de decisiones para inferir el valor verdadero de una variable de interés, sin embargo, debe también inferir el sesgo del experto, pues suponemos que el tomador de decisiones no conoce ni la magnitud ni el sentido del mismo. Se encuentra que el equilibrio más informativo sólo puede soportar tres mensajes.

Literatura relevante. En el artículo seminal de Crawford y Sobel (1982), en adelante CS, se analiza la transmisión de información entre un experto perfectamente informado y un tomador de decisiones que no lo está. CS estudian la transmisión de información cuando el experto posee información privada sobre un parámetro de interés. Suponen que el experto consultado está sesgado y el tomador de decisiones conoce dicho sesgo.

Morgan y Stocken (2003) (MS) suponen que el experto tiene información privada sobre la variable de interés, que llamaremos estado, y sobre su sesgo. Ellos suponen que el experto puede ser de dos tipos, del tipo bueno cuando el sesgo es igual a cero, o del tipo malo cuando el sesgo del experto es distinto de cero; para cada tipo asignan una probabilidad. Ming Li (2004) (ML) también supone que el espacio de tipos del experto es bidimensional. Él supone que el tomador de decisiones desconoce el sentido del sesgo del experto, es decir, el tomador de decisiones ignora si el experto tiene un sesgo positivo o negativo, pero sí conoce la magnitud del mismo. Levy y Razin (2007), Chakraborty y Harbaugh (2004) y Battaglini (2002) también suponen que el espacio de tipos del experto es multidimensional, pero a diferencia de MS y ML, que suponen que el espacio de acciones del tomador de decisiones es unidimensional, ellos suponen que también es multidimensional.

Dimitrakas y Sarafidis (2006) (DS) siguen la línea de MS y ML. Suponen un espacio de tipos del experto bidimensional y un espacio de acciones del tomador de decisiones unidimensional. El tomador de decisiones no sabe la magnitud del sesgo del experto, lo único que conoce es que éste se distribuye en el intervalo [0,1]. Encuentran que existe un equilibrio de tamaño *k* para cualquier entero positivo, es decir, a diferencia de CS quienes encuentran que existe un entero positivo *N(b)*, tal que el equilibrio más informativo existe para una partición de tamaño *N(b)*, DS encuentran que los equilibrios son en forma de particiones, pero no hay límite para el tamaño de la partición. Por otro lado Li y Madarász (2006) (LM) suponen que el tomador de decisiones no conoce la magnitud ni el sentido del sesgo del experto; el experto puede ser de 3 tipos, *bajo* cuando tiene un sesgo relativamente pequeño, *alto positivo* cuando tiene un sesgo relativamente grande y positivo, y *alto negativo* cuando el sesgo es relativamente grande pero ahora negativo.

En este trabajo *se extiende el modelo de CS* de tal forma que el espacio de tipos del experto es bidimensional, pues el experto posee información privada sobre dos parámetros, su sesgo y el estado. El espacio de acciones del tomador de decisiones es unidimensional. Este trabajo está ampliamente relacionado con el trabajo de DS, pues al igual que ellos suponemos que el estado se distribuye en el intervalo [0,1], la diferencia radica en que suponemos que el sesgo del experto se distribuye en el intervalo [-1,1], lo que implica que el tomador de decisiones desconoce tanto la dirección como la magnitud del sesgo del experto. En este sentido, se incorporan las ideas de ML y DS. El presente trabajo se diferencia de LM en el conjunto de tipos del experto, ellos suponen un conjunto discreto, nosotros suponemos un conjunto continuo.

Por una parte DS encuentran que hay un equilibrio en el que cualquier cantidad de mensajes puede ser enviado, y lo asocian con el hecho de que cero está en el soporte de la distribución del sesgo. Por otro lado ML encuentra su equilibrio más informativo cuando la divergencia de interese es menor a un medio, y la probabilidad de cada tipo es un medio ($|b| < 1/2$ y $p = 1/2$), lo que implica que la esperanza del sesgo es cero. Entonces se esperaría que, bajo los supuestos que se emplean en este trabajo, cualquier cantidad de mensajes se puedan enviar en algún equilibrio, sin embargo esto no es así. Encontramos que los equilibrios son nuevamente en forma de particiones, pero a diferencia de DS, no existe equilibrio para todo entero positivo *k*, el equilibrio más informativo, como ya se comentó, existe para una partición de tamaño tres, es decir, sólo puede soportar tres mensajes.

En la sección 2 presentamos el modelo y el concepto de equilibrio que se empleará. En la sección 3 caracterizamos los equilibrios de *no-babbling*; la ***proposición*** es el resultado más importante de este trabajo. Finalmente presentamos las conclusiones.

2. El Modelo

Hay 2 jugadores[1], un Experto *(E)* y un Tomador de Decisiones *(T)*; un parámetro de interés ω (estado). Ambos jugadores conocen que el estado se distribuye uniformemente en el intervalo [0,1]. El juego procede como sigue: la Naturaleza elige ω, sólo *E* observa y envía un mensaje $m \in M$ a *T*, donde supondremos que $M = [0,1]$; una vez que *T* escucha el mensaje, elige una acción $y \in Y$, donde supondremos que $Y = [0,1]$; los pagos $u^E(\cdot)$ y $u^T(\cdot)$ para el experto y tomador de decisiones respectivamente, están dadas por las siguientes funciones:

$$u^E(y, \omega, b) = -(y - (\omega + b))^2$$
$$u^T(y, \omega) = -(y - \omega)^2$$

donde *b* es el sesgo del experto. La acción ideal del tomador de decisiones es $y^*(\omega) = \omega$, mientras que la acción ideal del experto es $y^*(\omega, b) = \omega + b$[2]. De ahí que *b* es un parámetro que mide la divergencia de intereses, si *b = 0* el experto querrá que el tomador de decisiones elija una acción igual al estado, de lo contrario no.

En CS todo lo anterior es comúnmente conocido,[3] en este trabajo *b* es información privada del experto, de esta forma, si el sesgo no es conocido, tampoco se conocen los intereses del experto. Lo que sí conoce el tomador de decisiones es que *b* se distribuye uniformemente en el intervalo [-1,1]; el experto sabe que el tomador de decisiones conoce la distribución de *b* y suponemos que *b* es independiente de ω.

El concepto de equilibrio que se emplea en este juego es el de ***Equilibrio Secuencial Débil***[4], el cual requiere que:

---

[1] Adicionalmente incluimos a la Naturaleza.
[2] Siempre que $(\omega + b) \in Y$, en otro caso ω
[3] A excepción de ω que también es información privada del experto.
[4] Para más información consultar *Microeconomic Theory* de Mas Colell y otros (1995).

- Las creencias $P(\cdot|m)$ sean formadas usando la Regla de Bayes.
- La acción $y(m)$ que elige *T* después de escuchar el mensaje, maximice su utilidad esperada para todo *m*.
- Dado $y(m)$, el mensaje del experto $m(\omega,b)$ maximiza su utilidad para todo $(\omega,b)\in[0,1]\,\mathrm{x}\,[-1,1]$.

Equilibrio de *babbling* siempre existe[5].

3. Equilibrios

En esta sección caracterizamos los equilibrios de *no-babbling*. Notemos que las dos observaciones hechas por DS se cumplen. La *Observación 2* tiene una pequeña modificación.

Observación 1: Suponiendo que para un tipo del experto (ω_1,b_1) el experto envía un mensaje m_1 que induce la acción $y_1=y(m_1)$, entonces en equilibrio, para todo $(\omega,b)\in[0,1]\,\mathrm{x}\,[-1,1]$ tal que $\omega+b=\omega_1+b_1$, el experto enviará mensajes que inducen la acción y_1.

Esto se desprende de la función de utilidad, ya que para dos tipos del experto que cumplen la condición anterior, al enviar el mismo mensaje o dos mensajes que inducen al tomador de decisiones a ejecutar la misma acción, la utilidad será la misma para cada uno de los dos tipos del experto.

Observación 2: En equilibrio, para todo tipo del experto $(1,b)$ donde $b\in[0,1]$, el experto envía mensajes que inducen la acción más alta posible; y para todo tipo del experto $(0,b)$ donde $b\in[-1,0]$, el experto envía mensajes que inducen la acción más baja posible.

Lo anterior se desprende del hecho de que el conjunto de acciones del tomador de decisiones es el intervalo [0,1][6], de esta forma, un experto que observa el estado más alto, es decir $\omega=1$, y su sesgo

[5] Equilibrio en el que el experto envía mensajes que no llevan significado y por lo tanto son siempre ignorados por el tomador de decisiones. Esto es un equilibrio ya que si los mensajes son siempre ignorados, el experto no tiene incentivos a mandar alguna información relevante en sus mensajes; y si los mensajes no proveen información al tomador de decisiones, este siempre los ignorará.

[6] Si $y\in\Re$, las acciones individualmente racionales están en el intervalo [0, 1], en ese sentido la *Observación 2* es independiente del espacio de acciones de *T*.

es no negativo, querrá que el tomador de decisiones elija la acción más grande posible, y ésta es $y(m)=1$. De manera análoga, si observa $\omega=0$, y su sesgo es no positivo, entonces enviará mensajes que inducen la acción más baja posible, es decir $y(m)=0$.

Al igual que hacen DS, en este trabajo, sin pérdida de generalidad, restringiremos la atención a equilibrios con la siguiente propiedad:

Propiedad: Si m_i y m_j son dos distintos mensajes en la senda de equilibrio, entonces $y(m_i)\neq y(m_j)$.

La *Observación 1* implica que en una recta de pendiente menos uno, en el espacio de *tipos del experto*, el experto envía el mismo mensaje. De la misma manera, el conjunto de *tipos del experto*, cuando sus mensajes inducen distintas acciones, está separado por dicha recta, a la derecha todo *tipo del experto* preferirá una acción más grande que la que se prefiere a la izquierda; por esta razón envía distintos mensajes

La *Observación 2* implica que no podemos partir el espacio de *tipos del experto* de forma arbitraria, es decir, no podemos tener una curva de indiferencia a la derecha de la recta de pendiente menos uno que une los *tipos del experto* (0,1) y (1,0); tampoco se puede poner una curva de indiferencia a la izquierda de la recta de pendiente menos uno que une los *tipos del experto* (0,0), (0,-1).

Gráficamente se observa lo siguiente:

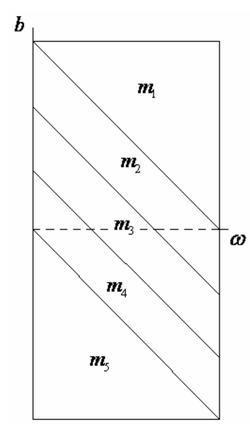

Figura 1. Ejemplo de partición

En este ejemplo el experto envía cinco mensajes, el espacio de *tipos del experto* se parte en cinco. Por la *Observación 1*, para todo *tipo del experto* a la derecha de la recta de indiferencia más hacia el noreste, el experto preferirá la acción que se tome cuando se escucha el mensaje uno (m_1), a la izquierda de dicha recta preferirá la acción que se tome cuando el tomador de decisiones escucha el mensaje dos (m_2). Sobre la misma recta el experto está indiferente entre ambas acciones; con las demás rectas pasa lo mismo.

Por la *Observación 2,* no podemos tener una recta de indiferencia más a la derecha de la recta más hacia el noreste que se muestra aquí, ni más a la izquierda de la recta de indiferencia más al suroeste que se muestra en la Figura 1.

3.1 Equilibrio de tamaño 2:

Especificamos la siguiente regla de señalización:

$$m(\omega,b) = \begin{cases} m_1 & \text{si } \omega + b \geq x \\ m_2 & \text{si } \omega + b < x \end{cases}$$

La regla nos dice que *tipos del experto* tal que su sesgo es no negativo, cuando $b \leq x$, parte el soporte de los estados en [*0, x*-*b*) y [*x*-*b, 1*]; mientras que para *tipos del experto* cuando el sesgo es no positivo y $|b| \leq |-(1-x)|$, igualmente parte el soporte de los estados en [*0, x*-*b*) y [*x*-*b, 1*][7]. En cada intervalo el experto envía un mensaje distinto, para este caso m_1 y m_2 respectivamente[8].

Con la regla de señalización, el conjunto de *tipos del experto* se divide como se muestra en la Figura 2. Todo *tipo del experto* sobre la recta de indiferencia o a la derecha, enviará el mensaje 1; todo *tipo del experto* a la izquierda de la recta de indiferencia, enviará el mensaje 2.

[7] Hay que recordar que la segunda parte siempre se refiere a $b \in [-1,0]$

[8] Para un sesgo no negativo, si *b* > *x*, entonces el experto no parte el soporte de estados. Análogamente para un sesgo no positivo.

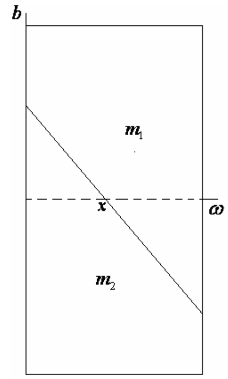

Figura 2. Partición de tamaño 2

Dada la regla de señalización, el tomador de decisiones calcula sus creencias, que en este caso son[9]:

$$f(\omega|m_1) = \frac{2-2x+2\omega}{3-2x}$$

$$f(\omega|m_2) = \frac{2+2x-2\omega}{1+2x}$$

Por la forma de la función de utilidad de *T*, la esperanza del estado condicionada al espacio de *tipos del experto* donde escucha el mensaje *i*, es igual a su acción óptima; por lo tanto tenemos[10]:

$$y_1 = E[\omega|m_1] = \frac{1}{3}\left(\frac{3x-5}{2x-3}\right)$$

$$y_2 = E[\omega|m_2] = \frac{1}{3}\left(\frac{3x\ \ +1}{2x\ \ +1}\right)$$

Para que la regla de señalización y las acciones que elije el tomador de decisiones constituyan un equilibrio, un experto de tipo (*x*, *0*), que llamaremos *tipo frontera*, debe estar indiferente entre las acciones $y_1 = y(m_1)$ y $y_2 = y(m_2)$[11].

Lo anterior implica que:

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3x-5}{2x-3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)\right]$$

[9] Formadas mediante la regla de Bayes. Ver Apéndice.
[10] Ver Apéndice
[11] Condición de Indiferencia.

que tiene una única solución en el intervalo [0,1] y es: $x = 1/2$. Por lo tanto, si $\omega + b \geq 1/2$ el experto enviará un mensaje que induce la acción $y(m_1) = 7/12$; en otro caso enviará el mensaje que induce la acción $y(m_2) = 5/12$ [12]. En particular el experto envía $m_1 = 7/12$ y $m_2 = 5/12$.

Así pues, la regla de señalización, las acciones del tomador de decisiones y las creencias, forman un *Equilibrio Secuencial Débil*.

3.2 Equilibrio de tamaño 3:

En este caso se especifica la siguiente regla de señalización:

$$m(\omega, b) = \begin{cases} m_1 & si \ \ \omega + b \geq x_1 \\ m_2 & si \ \ x_1 > \omega + b \geq x_2 \\ m_3 & si \ \ \omega + b < x_2 \end{cases}$$

Para tipos del experto tal que su sesgo es no negativo y $b \leq x_1$, el experto estará dispuesto a dividir el soporte de estados en dos, de tal forma que al menos, *ex-ante*, podrá enviar dos distintos mensajes [13]; de manera análoga, para tipos del experto tal que su sesgo es no positivo y $|b| \leq |-(1 - x_2)|$, el experto estará dispuesto partir el soporte de estados en dos, lo que implica que *ex-ante*, por lo menos envía dos mensajes distintos.

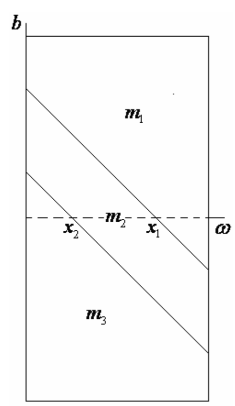

Figura 3. Partición de tamaño 3

[12] Para todo tipo del experto tal que $\omega + b = 1/2$, el experto está indiferente entre las acciones $y_1 = 7/12$ y $y_2 = 5/12$.

[13] Si $b \leq x_2$, entonces aseguramos que el experto dividirá el soporte de los estados en 3; de manera análoga para el caso cuando b es negativo.

La Figura 3 muestra la forma en que dividimos el conjunto de tipos del experto.

Conociendo esta regla de señalización, el tomador de decisiones computa sus creencias[14]:

$$f\left(\omega \middle| m_1\right)=\frac{2-2x_1+2\omega}{3-2x_1}$$
$$f\left(\omega \middle| m_2\right)=1$$
$$f\left(\omega \middle| m_3\right)=\frac{2+2x_2-2\omega}{1+2x_2}$$

Con ellas obtiene la esperanza condicional del estado dado que escucha el mensaje *i*, por lo tanto sus acciones óptimas serán:

$$y(m_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{3x_1-5}{2x_1-3}\right)$$
$$y(m_2)=\frac{1}{2}$$
$$y(m_3)=\frac{1}{3}\left(\frac{3x_2+1}{2x_2+1}\right)$$

Nuevamente, para que esta regla de señalización y estas acciones formen un equilibrio, debe cumplirse que el *tipo frontera* $(x_1, 0)$ esté indiferente entre $y(m_1)$ y $y(m_2)$, mientras que el *tipo frontera* $(x_2, 0)$ esté indiferente entre $y(m_2)$ y $y(m_3)$. Por lo tanto:

$$x_1=1-\frac{1}{12}\sqrt{30}\approx 0.5435$$
$$x_2=\frac{1}{12}\sqrt{30}\approx 0.4564$$

De esta forma, la regla de señalización, las acciones óptimas y las creencias, forman un *Equilibrio Secuencial Débil*.

[14] Ver Apéndice.

3.3 Equilibrio de tamaño k[15]*:*

Se especifica la regla de señalización:

$$m(\omega,b)=\begin{cases} m_1 & \text{si } \omega+b\geq x_1 \\ m_i & \text{si } x_i\leq \omega+b< x_{i-1},\ \text{para } i=2,3,...,k \end{cases}$$

donde $x_k = 0$

Computamos las creencias del tomador de decisiones, calculamos su esperanza condicional y vemos que las acciones óptimas son[16]:

$$y(m_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{3x_1-5}{2x_1-3}\right)$$
$$y(m_i)=\frac{1}{2} \qquad \text{para } i=2,...k-1$$
$$y(m_k)=\frac{1}{3}\left(\frac{3x_{k-1}+1}{2x_{k-1}+1}\right)$$

Por la condición de indiferencia debe cumplirse que:

$$x_1=1-\frac{1}{12}\sqrt{30}$$
$$x_i=\frac{1}{2} \qquad \text{para } i=2,...,k-2$$
$$x_{k-1}=\frac{1}{12}\sqrt{30}$$

Gráficamente partimos el conjunto de tipos del experto de la forma que se muestra en la Figura 4.

---

[15] Para $k\geq 3$
[16] Ver Apéndice.

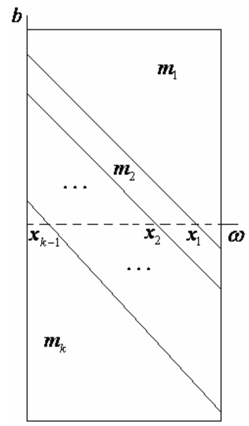

Figura 4. Partición de tamaño *k*

Proposición: Si b se distribuye uniformemente en el intervalo [-1.1], ω uniformemente en el intervalo [0, 1] y son independientes, entonces no existe equilibrio de tamaño k, para $k > 3$. El equilibrio más informativo se alcanza para $k = 3$.

Demostración: Por la condición de indiferencia, x_i es igual para todo $i = 2,...,k-2$, lo cual se reduce a tener sólo tres tipos frontera, que identificamos por $\{(x_1,0),\ (x_2,0),\ (x_{k-1},0)\}$; esto implica que el tamaño más grande de una partición es 4. El equilibrio de tamaño 4 induce al tomador de decisiones a elegir sólo 3 distintas acciones, las mismas que se eligen en el equilibrio de tamaño 3. Más aún, el equilibrio de tamaño 4 no cumple con la *propiedad*, ya que los mensajes 2 y 3 inducen la misma acción. ■

4. Conclusiones:

En este trabajo se caracterizaron los dos únicos equilibrios de *no-babbling*, los equilibrios de tamaño 2 y 3, pues con la ***proposición*** vemos que no hay equilibrio para $k > 3$ que cumpla con la *propiedad*.

Como vimos, no por el hecho de que 0 esté en el soporte de la distribución del sesgo, ni porque su esperanza sea 0, el equilibrio más informativo puede soportar cualquier cantidad de mensajes. En este trabajo se mostró que bajo ciertas condiciones, aún cuando se cumple lo que DS y ML argumentan que es necesario para tener equilibrios en los que cualquier cantidad de mensajes se puedan enviar, el equilibrio más informativo sólo puede soportar 3 mensajes. Lo anterior ocurre porque para todo mensaje *i* que el tomador de decisiones escuche, donde $i = 2, \ldots, k-1$, su creencia es una función de densidad condicional uniforme, por lo tanto su esperanza siempre es *1/2*.

Ex post, el equilibrio más informativo es mejor para valores grandes de *b*. Recordemos que en CS si $b \geq 1/4$, sólo existe equilibrio de *babbling*. En el equilibrio más informativo de DS si $|b| \geq 0.314$ [17] el experto no divide el soporte de los estados. ML encuentra que si $|b| \geq 1/2$ el equilibrio sólo puede soportar un mensaje. En este trabajo encontramos que si $|b| < 0.5435$ el experto divide el soporte de los estados, en ese sentido este equilibrio se vuelve más informativo para valores grandes del sesgo, es decir, permite la comunicación aún cuando la divergencia de intereses es amplia.

Sin embargo, no ocurre lo mismo para valores pequeños de *b*, pues en el equilibrio más informativo siempre que $|b| < 0.4564$ el experto divide el soporte de estados en 3. En CS si *b* tiende a cero, el equilibrio más informativo se vuelve plenamente revelador, al igual que en el equilibrio más informativo de ML. En DS si *b* tiende a cero, en el equilibrio más informativo, el experto divide el soporte de estados en infinito.

[17] Es aproximado.

Referencias:

Battaglini, M. (2002) “Multiple referrals and multidimensional cheap talk”, *Econometrica* 70, 1379—1401.

Chakraborty, Archishman, y Rick Harbaugh (2004), “Ordinal cheap talk”, *workingpaper*.

Crawford, V., y J. Sobel (1982): “Strategic Information Transmission”, *Econometrica*, 50(6), 1431-1452.

Dimitrakas, V., y Y. Sarafidis (2006): “Advice from an Expert with Unknown Motives", *mimeo, INSEAD*.

Levy, Gilat, y Ronny Razin (2007), “On the Limits of Communication in Multidimensional Cheap Talk: A Comment”, *Econometrica*, 75(3), 885-893.

Li, Ming (2004), “To Disclose or Not to Disclose: Cheap Talk with Uncertain Biases”, mimeo, Concordia University.

Li, M., y Madarázs, K. (2006), “Does Disclosure Help? Cheap talk and Conflicts of Interest”, mimeo, Concordia University.

Mas Colell, Andreu, Michael D. Winston y Jerry Green (1995). *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York, Oxford, pp. 285.

Morgan, J., y P. Stocken (2003): “An Analysis of Stock Recommendations", *Rand Journal of Economics*, 34(1), 183-203.

Apéndice

Calculo de las creencias del tomador de decisiones, formadas usando la Regla de Bayes; y de la esperanza condicional que es igual a la acción óptima del mismo.

Para m_1.

$$F\left[\omega \leq \varpi \middle| m_1\right] = P\left[\omega \leq \varpi \middle| m_1\right] = \frac{P\left[(\omega \leq \varpi) \cap m_1\right]}{P\left[m_1\right]}$$

$$P\left[m_1\right] = \frac{1 - \frac{x_1^2}{2} + \frac{(1-x_1)^2}{2}}{2} = \frac{2 - x_1^2 + 1 - 2x_1 + x_1^2}{4} = \frac{3 - 2x_1}{4}$$

$$P\left[(\omega \leq \varpi) \cap m_1\right] = \begin{cases} \dfrac{(1-x_1)\omega + \omega^2/2}{2} = \dfrac{2\omega - 2\omega x_1 + \omega^2}{4} & si\ \omega < x_1 \\ \dfrac{\omega - x_1^2/2 + (\omega - x_1)^2/2}{2} = \dfrac{2\omega - 2\omega x_1 + \omega^2}{4} & \text{si } \omega \geq x_1 \end{cases}$$

$$\therefore F\left[\omega \leq \varpi \middle| m_1\right] = \frac{\frac{2\omega - 2\omega x_1 + \omega^2}{4}}{\frac{3 - 2x_1}{4}} = \frac{2\omega - 2\omega x_1 + \omega^2}{3 - 2x_1} \quad \Rightarrow \quad f\left(\omega \middle| m_1\right) = \frac{2 - 2x_1 + 2\omega}{3 - 2x_1}$$

$$E\left[\omega \middle| m_1\right] = \int_0^1 \omega \frac{2 - 2x_1 + 2\omega}{3 - 2x_1} d\omega = \frac{1}{3 - 2x_1}\int_0^1 2\omega - 2\omega x_1 + \omega^2 d\omega = \frac{1}{3 - 2x}\left[\left(\omega^2 - \omega^2 x_1 + \tfrac{2}{3}\omega^3\right)\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{1 - x_1 + 2/3}{3 - 2x_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{3x_1 - 5}{2x_1 - 3}\right)$$

Para m_i.

$$F\left[\omega \le \varpi | m_i\right] = P\left[\omega \le \varpi | m_i\right] = \frac{P\left[(\omega \le \varpi) \cap m_i\right]}{P\left[m_i\right]} \qquad i = 2,\ldots k-1 \qquad k \ge 3$$

$$P\left[m_i\right] = \frac{(x_{i-1} - x_i)x_i + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2} + (1 - x_{i-1})(x_{i-1} - x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2}}{2} = \frac{x_{i-1} - x_i}{2}$$

$$P\left[(\omega \le \varpi) \cap m_i\right] = \begin{cases} \frac{(x_{i-1} - x_i)\omega}{2} & \text{si } \omega < x_i \\ \frac{(x_{i-1} - x_i)x_i + \frac{(\omega - x_i)^2}{2} + (\omega - x_i)(x_{i-1} - \omega) + \frac{(\omega - x_i)^2}{2}}{2} = \frac{(x_{i-1} - x_i)\omega}{2} & \text{si } x_i \le \omega < x_{i-1} \\ \frac{(x_{i-1} - x_i)x_i + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2} + (x_{i-1} - x_i)(\omega - x_{i-1})}{2} = \frac{(x_{i-1} - x_i)\omega}{2} & \text{si } \omega \ge x_{i-1} \end{cases}$$

$$\therefore F\left[\omega \le \varpi | m_i\right] = \frac{\frac{(x_{i-1} - x_i)\omega}{2}}{\frac{x_{i-1} - x_i}{2}} = \omega \quad \Rightarrow \quad f(\omega | m_i) = 1$$

$$E\left[\omega | m_i\right] = \int_0^1 \omega d\omega = \left[\frac{1}{2}\omega^2 \Big|_0^1\right] = \frac{1}{2}$$

Para m_k.

$$F\left[\omega \le \varpi | m_k\right] = P\left[\omega \le \varpi | m_k\right] = \frac{P\left[(\omega \le \varpi) \cap m_k\right]}{P\left[m_k\right]} \qquad k \ge 2$$

$$P\left[m_k\right] = \frac{1 + \frac{x_{k-1}{}^2}{2} - \frac{(1 - x_{k-1})^2}{2}}{2} = \frac{2 + x_{k-1}^2 - 1 + 2x_{k-1} - x_{k-1}^2}{4} = \frac{1 + 2x_{k-1}}{4}$$

$$P\left[(\omega \le \varpi) \cap m_k\right] = \begin{cases} \frac{\omega + \omega^2/2 + \omega(x_{k-1} - \omega)}{2} = \frac{2\omega + 2\omega x_{k-1} - \omega^2}{4} & si\ \omega < x_{k-1} \\ \frac{\omega - (\omega - x_{k-1})^2/2 + x_{k-1}^2/2}{2} = \frac{2\omega + 2\omega x_{k-1} - \omega^2}{4} & \text{si } \omega \ge \text{x}_{\text{k-1}} \end{cases}$$

$$\therefore F\left[\omega \le \varpi | m_k\right] = \frac{\frac{2\omega + 2\omega x_{k-1} - \omega^2}{4}}{\frac{1 + 2x_{k-1}}{4}} = \frac{2\omega + 2\omega x_{k-1} - \omega^2}{1 + 2x_{k-1}} \quad \Rightarrow \quad f(\omega | m_k) = \frac{2 + 2x_{k-1} - 2\omega}{1 + 2x_{k-1}}$$

$$E\left[\omega | m_k\right] = \int_0^1 \omega \frac{2 + 2x_{k-1} - 2\omega}{1 + 2x_{k-1}} d\omega = \frac{1}{1 + 2x_{k-1}} \int_0^1 2\omega + 2\omega x_{k-1} - \omega^2 d\omega = \frac{1}{1 + 2x_{k-1}}\left[\left(\omega^2 + \omega^2 x_{k-1} - 2/3\,\omega^3\right)_0^1\right]$$

$$= \frac{1 + x_{k-1} - 2/3}{1 + 2x_{k-1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{3x_{k-1} + 1}{2x_{k-1} + 1}\right)$$