EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

LA AVERSIÓN AL RIESGO Y LA ESTRUCTURA DE VENCIMIENTO DE LA DEUDA

BLANCA CECILIA GARCÍA MEDINA

PROMOCIÓN 1999-2001

ASESOR:

DR. JORGE FERNÁNDEZ RUIZ

FEBRERO DE 2002

Agradecimientos

- A mi mamá por su férreo valor, por su ejemplo, su amor incondicional y su apoyo.

- A la memoria de mi papá y a sus valiosas enseñanzas.

- A mis hermanos Rocío, Ricardo y Laura por sus innumerables e inolvidables muestras de apoyo y amor.

- A Irving por su amor, su apoyo y comprensión sobretodo en momentos importantes; así como por sus enriquecedoras sugerencias.

- Al Dr. Jorge Fernández Ruiz por sus múltiples y valiosas recomendaciones y su apoyo siempre presente.

- A Karina, Fátima, Ricardito y a toda mi familia por su permanente motivación y por tenerme presente en sus pensamientos.

- A Sofía† por la maravilla de su existencia.

- A mis amigos y compañeros.

RESUMEN

Esta tesina presenta un modelo en el cual un agente económico que es averso al riesgo desea realizar un proyecto de inversión pero carece de fondos suficientes para su ejecución. El objetivo es analizar el problema que enfrenta el "prestatario" y con su solución presentar la elección de estructura de deuda óptima que efectuará el agente, y como esperamos, estará en función de su aversión al riesgo y de otras variables que pretenden describir mejor la realidad económica, tal como la probabilidad de que su proyecto resulte exitoso

Se consideran dos formas temporales de endeudamiento: de corto y de largo plazo. Así, ante el problema de información asimétrica entre el prestamista (quien es neutral al riesgo) y el prestatario, éste último decidirá la proporción de deuda que contratará a corto plazo y a largo plazo, considerando que está obligado a enfrentar sus compromisos con su acreedor financiero.

Se demuestra formalmente un resultado que resulta intuitivo: Un prestatario con mayor aversión al riesgo contratará menos deuda de corto plazo y más de largo plazo. Este resultado se cumple en dos escenarios que modelan de manera ligeramente distinta la incertidumbre sobre la situación económica en que está inmerso el proyecto.

INDICE

Introducción……………………………………………………………….…5

Revisión de la Literatura………………………………………………….…. 8

El modelo de Diamond……………….………………………………….. 16

El modelo…….………………………………………………………..……. 20

Supuestos ………………………………………………………………20

El problema del prestatario ...…………………………………………... 23

"Ejemplo base" ...………………………….....……………..………… 24

Modelo del escenario A: Una función logarítmica ....………………… 25

Modelo del escenario B: Funciones con aversión al riesgo constante 27

La mezcla óptima entre deuda de corto y largo plazo considerando aversión al riesgo constante ………………………………….................................... 29

La influencia de la aversión al riesgo sobre la estructura de deuda … 31

Modelo del escenario C: Funciones con aversión al riesgo constante y posibilidad de aumento o reducción de tasa de interés ……........................ 34

La influencia de la aversión al riesgo sobre la estructura de deuda considerando aumentos y reducciones de la tasa de interés 36

Conclusiones…………………………………………………...…………… 40

Bibliografía…………………………………………………… ……………41

Apéndice de tablas y gráficas ……………………………...………………42

Algoritmo "base" en MAPLE ……………………………………….....45

INTRODUCCIÓN

En buena parte de la literatura acerca de estructura de vencimiento de deuda, se asume que los agentes económicos inmiscuidos son neutrales al riesgo. Los resultados que se obtienen varían de acuerdo a los supuestos de los modelos propuestos, dando muy buenas ideas acerca del comportamiento racional de los prestatarios al determinar la estructura de su deuda.

Al hablar de estructura de vencimiento de deuda, entendemos la existencia de una diversidad de plazos y formas de endeudamiento. Muchos de los modelos existentes suponen, por simplicidad, solo dos tipos de deuda: de corto y de largo plazos. La deuda de corto plazo madura antes de que el inversionista tenga liquidez, por lo que se ve obligado a refinanciar su deuda mientras que el proyecto de inversión madure y ofrezca rendimientos. Y la deuda de largo plazo que vence simultáneamente con la realización del proyecto de inversión.

Se asume también, que dependiendo de la naturaleza y de las variables exógenas que lo afecten, un proyecto de inversión presentará rendimientos que pueden ser suficientes para pagar la deuda, en caso de un proyecto exitoso, o rendimientos que sean insuficientes, cayendo en una situación de imposibilidad de pago, que será el caso de un proyecto fracasado.

Lo anterior significa que el proyecto de inversión, por ejemplo de una empresa, dependerá de la naturaleza misma del proyecto, tal como su dimensión, alcance, riesgo en sí mismo, y de las variables exógenas que lo afecten, tales como la tasa de interés, la situación económica del país donde esté situado, de la "salud" del mercado de su producto, de la inflación esperada, e incluso de la posible presencia de un desastre natural.

"Como un hecho estilizado, se adopta la idea de que los prestatarios con buena reputación crediticia contratan deuda de corto plazo (papel comercial) directamente a sus acreedores"[1], con el fin de obtener el mejor provecho posible de la situación económica al tiempo de maduración de dicha deuda, mientras que los prestatarios con mala reputación crediticia, solicitan bonos de largo plazo para su financiamiento o se endeudan con intermediarios financieros como los bancos, debido a la carencia del respaldo económico para salir avante, en caso de presentarse una situación desfavorable como una devaluación o una alza inesperada en la tasa de interés. Finalmente, existe un tipo de prestatarios con aún más mala reputación crediticia, que no tienen la oportunidad de elegir la estructura de maduración de su deuda y tienen, como única opción, la deuda de corto plazo.

La principal contribución de este trabajo, es la incorporación del carácter *averso al riesgo* por parte de los prestatarios y analizar sus implicaciones en un modelo "típico" de optimización de estructura de deuda. Específicamente, consideramos el modelo de Diamond (1991) como "modelo base".

Como es de esperar, al considerar el problema de aversión al riesgo el análisis se hace más interesante y también más complejo, pero al final los resultados son contundentes.

Como variables explicativas tomamos en cuenta la tasa de interés, una variable que clasifica al agente de acuerdo a su reputación crediticia (si es buen o mal cliente financiero), y una variable estocástica que hace alusión a la posibilidad de que aumente la tasa de interés, y en un modelo mejorado, que aumente o se reduzca.

El análisis se realiza en tres etapas: en la primera se plantea una función de utilidad que caracterice la aversión al riesgo del inversionista, en la segunda

[1] Diamond, Douglas (1991) pag. 709

etapa se propone una medida de aversión al riesgo constante, facilitando así la interpretación de los resultados obtenidos; y en la última etapa, se incorpora a la segunda etapa el análisis de la volatilidad en la tasa de interés.

Los resultados se complementan y evalúan usando el paquete matemático MAPLE, permitiéndonos efectuar un importante número de simulaciones en distintos escenarios económicos.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

El tema de la deuda es ampliamente conocido, a nivel informal, pues directa o indirectamente casi todo agente económico ha sido partícipe en contratos de deuda. ¿Quién no ha solicitado un préstamo- o bien otorgado uno-, aunque sea intrafamiliar? y ¿qué gobierno no ha usado el recurso de la deuda, para realizar sus proyectos de desarrollo de infraestructura, etc.?

En la teoría economía referente a la estructura de vencimiento de deuda conocida hasta el momento, tanto el prestatario como el prestamista son considerados **neutrales al riesgo**.

Una de las principales líneas de investigación dentro del tema de estructura de deuda, está el hecho de analizar las asimetrías de información presentes en el mercado de capitales. Estas asimetrías[2], son cruciales para finalmente determinar el tipo de contrato óptimo de deuda, pues la interacción entre los incentivos propias de los prestatarios y las inferencias por parte de los prestamistas, determinan el tipo de equilibrio que prevalece en el mercado de deuda. Tres de los autores más citados en este sentido son Stewart Myers, Mark Flannery y Douglas Diamond.

Flannery (1986) presenta un modelo de dos periodos, en el que analiza la elección de maduración de deuda bajo información asimétrica, enfatizando las implicaciones que surgen de la señalización por parte de las empresas sobre la elección óptima de estructura de maduración de deuda. La tasa de interés se supone completamente independiente en el análisis.

Las conclusiones de Flannery acerca de las decisiones privadas por parte de los prestatarios son: dentro de un escenario sin costos de transacción, el mercado de capitales tendrá un equilibrio agrupador caracterizado por firmas de diferentes tipos que son indistinguibles ante los ojos de los inversionistas financieros o prestamistas[3].

No obstante, en un escenario económico con costos de transacción positivos, habrá un equilibrio separador descrito de la siguiente manera: una empresa con buen proyecto de inversión (entiéndase con finanzas sanas) no tiene problema en revelar su verdadero tipo, empero, esta revelación, dependerá de la "distribución de las firmas en cuanto a su calidad" y de la magnitud de los costos que subyacen a la deuda corporativa, en caso de contar con ésta. Además, las firmas con malos proyectos de inversión, suelen autoseleccionarse al contratar deuda de largo plazo, y dependiendo de la distribución de las firmas, las firmas "buenas" pueden diseñar una estrategia de deuda de corto plazo y generar así, un equilibrio separador.

Por su parte, un modelo propuesto por Diamond y Dybvig (1983), los prestamistas se rehúsan a refinanciar a un prestatario ilíquido en el corto plazo, pero quien será solvente en el largo plazo (como los bancos), debido a la incertidumbre estratégica que sufren los prestamistas acerca de las acciones de los inversionistas. Con esta idea, los autores explican el fenómeno de las corridas bancarias.

Fama (1985) argumenta que los bancos tienen ventaja comparativa sobre cualquier tipo de prestamista, respecto a los costos de monitoreo que se enfrentan si presentara una situación de imposibilidad de pago por parte de algún prestatario. Para maximizar la efectividad de las actividades de monitoreo (y minimizar costos), la mayoría de los contratos de deuda que realizan los

---

[2] Asimetrías donde las empresas están sistemáticamente mejor informadas que los prestamistas, acerca de su situación financiera.

[3] Todo tipo de prestatario prefiere deuda de corto plazo y así tratar de aprovechar la información favorable que pueda suscitarse en el corto plazo. Es conveniente no revelar prematuramente el tipo de empresa (si fuera mala), pues el modelo supone que no hay ningún riesgo de liquidez (a menos que los costos de transacción sean mayores que la utilidad esperada).

bancos con sus deudores financieros son de corto plazo. Así, reduciendo el vencimiento de la deuda, el banco mantiene más fuerte su posición de subasta, afectando así, las políticas de inversión de las empresas.

Barclay y Smith (1995) hacen un interesante estudio empírico acerca de los determinantes de la estructura de maduración de la deuda corporativa. Los autores consideran tres importantes hipótesis, dentro de las cuales, agrupan los determinantes de la estructura de deuda que aparecen en la literatura. Estas tres hipótesis son: La hipótesis de costos contractuales, la hipótesis de señalización y la de impuestos.

De acuerdo a la **hipótesis de costos contractuales,** el conjunto de oportunidades de inversión, la regulación y el tamaño de la empresa son determinantes de la estructura de deuda.

El conjunto de oportunidades de inversión es a su vez una hipótesis propuesta por Myers (1977), quien argumenta que las oportunidades de inversión son como "opciones", y que dependiendo del valor de estas "opciones" y de la verosimilitud con que la empresa las ejerza óptimamente, se elige una estructura de deuda. Myers indica que la maduración tanto de los activos tangibles como de los intangibles de la empresa son críticos para la determinación de estructura de maduración de deuda.

Otro aspecto que a juicio de Barclay y Smith puede aumentar el conjunto de oportunidades de inversión son los "acuerdos" (convenants). Los acuerdos reducen los problemas de riesgo moral[4] que pudieran presentarse una vez que se haya contratado la deuda. Así, cuando un acuerdo restrictivo de deuda es violado, frecuentemente y de manera óptima, se renegocia el acuerdo de deuda

---

[4] Un ejemplo de problema de riesgo moral es la desinversión que podría realizar la empresa, afectando así a su acreedor financiero.

en lugar de sufrir mayores pérdidas si se precisara la bancarrota del prestatario. (esto último sería un subóptimo, contando con el recurso del "acuerdo")

La hipótesis de que la regulación afecta la estructura de la deuda es ofrecida por Smith (1986), quien argumenta que los ejecutivos de empresas reguladas tienen menor grado de discreción sobre sus decisiones futuras de inversión en comparación con las empresas no reguladas. Esto implica que las empresas reguladas contratan más deuda de largo plazo que las empresas no reguladas.

El último determinante considerado en la hipótesis de costos contractuales, es el tamaño de la empresa. Puede argüirse que la estructura de maduración de la deuda está correlacionado con el tamaño de la empresa. Esto es fácilmente explicable, pues las grandes empresas tienen mejores oportunidades para contratar deuda pública y obtener así mayor provecho de las economías de escala, mientras que para las pequeñas empresas es prácticamente imposible acceder a la deuda pública y típicamente contratan deuda privada. Además, las empresas con operaciones internacionales suelen contratar deuda externa y administrarse con divisas. Muchos mercados internacionales son menos líquidos que otros, especialmente para maduraciones de largo plazo. Así las empresas multinacionales contratan más deuda de corto plazo, induciendo la hipótesis de que existe una relación negativa entre el tamaño de empresa y maduración de deuda.

La segunda **hipótesis es la de señalización**, dentro de la cual, los autores consideran la calidad de la empresa y el riesgo crediticio como determinantes de la estructura de deuda.

Flannery (1986) examina las implicaciones de señalización de la empresa sobre la elección de maduración de deuda[5]. Otro modelo de señalización referente al riesgo crediticio es el propuesto por Diamond (1991), en el que se asume que las

[5] Ya mencionamos los resultados de este artículo en la página anterior.

empresas con "buena" o "favorable" información privada, preferirán deuda de corto plazo. El autor supone el riesgo de liquidez como la variable que determinará el tipo de estructura de deuda. Bajo este supuesto, los prestamistas se rehúsan a refinanciar la deuda cuando tienen malas noticias de sus clientes financieros. Este modelo lo describiremos detalladamente en la siguiente sección, pues es la base del modelo propuesto en la tesina.

La tercera **hipótesis** es la **de pago de impuestos**. Brick y Ravid (1985) analizan las implicaciones de los impuestos en la elección de la estructura de deuda. Suponen que si la empresa falla en su promesa de pago, el valor esperado del pago de impuestos por concepto de deuda, depende de la estructura de maduración siempre que la tasa de interés no sea fija.

El objetivo de Barclay y Smith es evaluar cada una de las hipótesis anteriores y determinar si hay suficiente respaldo empírico que justifique su uso. Para tal efecto, obtienen una gran muestra de empresas, con datos tomados de los archivos anuales de industria, del Centro de investigación de precios de seguridad CRSP, de Comercio de stock de Nueva York (NYSE) y de archivos Nasdaq.

Para medir la estructura de maduración de deuda de las empresas, examinan el porcentaje de deuda que madura a más de tres años, y la miden como la relación de deuda de largo plazo entre el total de la deuda contratada.

Los autores encuentran evidencia suficiente que respalda la hipótesis de que las empresas con mayores opciones de crecimiento en su conjunto de oportunidades de inversión, contratan más deuda de corto plazo (consistente con Myers). También encuentran evidencia de que empresas reguladas contratan más deuda de largo plazo, controlando así el problema de desinversión o descapitalización de las empresas.

Similarmente, encuentran fuerte evidencia de que las grandes empresas contratan una proporción significativamente mayor de deuda de largo plazo. Esto es consistente con el hecho de que las pequeñas empresas contratan más deuda de corto plazo en los bancos, por su difícil acceso a la deuda pública de largo plazo.

Respecto a la información asimétrica y la señalización, la evidencia sugiere que las empresas con las más altas y las más bajas reputaciones crediticias, contratan deuda de corto plazo, mientras que las empresas con reputación media, contratan deuda de largo plazo. Observan que el 37% del total de la deuda contratada por la empresa promedio, madura a un plazo mayor que cinco años. La hipótesis de impuestos no es significativa para explicar la estructura de maduración de deuda.

En otro interesante artículo, Goswami, Noe y Rebello (1995) muestran que el diseño de la estructura óptima de deuda está crucialmente relacionada con la distribución temporal de la asimetría en la información.

Los autores analizan la maduración de deuda a través de las variables, "pago de cupones" y "pago no restringido de dividendos". Ellos suponen que si la información asimétrica está concentrada en los flujos de efectivo en el largo plazo, las empresas financian sus proyectos con bonos de largo plazo y realizan pagos de dividendos parcialmente restringidos.

Bajo estas condiciones, pero suponiendo que la información asimétrica se refiere a los flujos de efectivos de corto plazo y, además, existe un considerable riesgo de refinanciamiento, entonces las empresas optarán por deuda de largo plazo con cupones y con pago no restringido de dividendos.

Y si la información asimétrica está uniformemente distribuida entre el corto y largo plazo, las empresas se financiarán con deuda de corto plazo.

Goswami, Noe y Rebello asumen que la empresa no puede liquidar sus activos prematuramente, entre otras cosas por lo costoso del procedimiento y también restringen la transformación de dichos activos. Además, suponen que los fondos retenidos deben ser invertidos en activos casi sin riesgo. Introducen las variable de flujo de efectivo, el rol de las políticas corporativas y las restricciones sobre los dividendos para controlar la deuda de corto plazo.

Los autores proponen como tema de investigación, generalizar la noción de "distribución temporal de las asimetrías de la información", construyendo mejores "proxies" para dicha distribución (los autores usan el tamaño y la edad de las empresas). Específicamente proponen analizar la evolución de la varianza de los flujos de efectivo de las empresas como proxy.

Finalmente, en un contexto diferente, Chang y Velasco (2000) estudian un tipo particular de deuda, la deuda externa bancaria, que necesariamente introduce elementos nuevos en el modelo. Ellos hacen un estudio sobre la determinación conjunta de: la estructura de maduración de deuda externa de los bancos, su nivel de reservas internacionales y la estructura de la tasa de interés.

Los autores suponen la posible existencia de corridas bancarias, donde los bancos actúan en consecuencia para la elegir óptimamente su estructura de activos y obligaciones. La forma de abordar el problema, es buscando la mejor asignación disponible para el banco con la visión del "óptimo social".

Suponen una economía pequeña pero abierta, con tres periodos. El único bien de consumo no tiene aranceles y su precio es único en todo el "mundo". La economía es poblada por un continuo normalizado de idénticos individuos dotados de una cantidad *e* del bien numerer, que pueden invertir a largo plazo y recibir R en t=2, o pueden invertirlo a corto plazo y recibir r<1 en t=1. Pueden endeudarse solicitando, únicamente al extranjero, cuando mucho *f* unidades del numerer, o bien pueden consumirlo. Hay dos tipos de individuos: con probabilidad λ son impacientes (deseosos de consumir en t=1) y con probabilidad 1-λ son pacientes (consumen hasta t=2). Se asume la tasa de interés igual a cero.

Con los supuestos anteriores, analizan el principio de revelación de tipos y la restricción que se refiere al límite de endeudamiento externo *f* para encontrar la estructura óptima de maduración de deuda.

Ellos concluyen que la estructura de maduración de deuda, el nivel de las reservas internacionales[6] y la estructura de tasa de interés son conjuntamente determinadas. Los bancos toman en cuenta la posibilidad de una corrida para elegir la estructura óptima de sus activos y obligaciones. Si la probabilidad de que ocurra una corrida es suficientemente pequeña, los bancos pueden elegir deliberadamente una posición ilíquida y provocar así la corrida.

[6] La tenencia de reservas internacionales tiene un costo de oportunidad importante, pero no tenerlas, podría acarrear serios problemas si sucede una corrida bancaria.

EL MODELO DE DIAMOND

Diamond (1991) analiza la estructura de maduración de la deuda para el caso en que los prestatarios tienen información privada acerca de su reputación crediticia. El autor propone un modelo en función del riesgo de liquidez. El riesgo que el prestatario tiene de perder el "control de rentas" no asignables, debido a que los prestamistas tienen grandes incentivos para liquidarlo, incluso antes de que el proyecto de inversión madure y ofrezca rendimientos, se conoce como *riesgo de liquidez*.

Así, el prestario se enfrenta ante la disyuntiva entre contratar deuda de corto plazo y esperar a que en su vencimiento, haya mejorado la situación económica y de paso sean clasificados con buena reputación crediticia, o por otro lado, no enfrentar al riesgo de liquidez contratando deuda de largo plazo para financiar su proyecto.

Diamond concluye que los prestatarios con buena reputación crediticia, prefieren deuda de corto plazo, mientras que los de mala reputación estarían deseosos de contratar deuda de largo plazo, pues son indiferentes entre perder el control de rentas no asignables ó, con una mínima probabilidad, obtener un proyecto exitoso en las mejores condiciones económicas.

Supuestos:

- Modelo de dos periodos indexados por t=0,1,2.
- Todos los agentes de la economía *son neutrales al riesgo* y la tasa de interés se asume libre de riesgo.
- Mercados financieros competitivos, es decir, beneficios esperados igual a cero.
- Tecnología con rendimientos constantes a escala, que ofrece R unidades por periodo y por unidad invertida

- En t=0, toda empresa tiene acceso a un proyecto con valor presente neto positivo, que requiere de una inversión indivisible y normalizada ***I***.
- El proyecto produce efectivo solo en t=2
- Hay dos tipos de prestatarios, tipo G (el bueno) y tipo B (el malo)
- El tipo de prestatario es solo conocido por él mismo, así que se presenta el problema de información asimétrica.
- Toda deuda de corto plazo madura en t=1 y debe refinanciarse (pues el proyecto aún no produce efectivo)
- Riesgo de liquidez es el riesgo que tiene un prestatario solvente pero no líquido en t=1, no pueda refinanciar su deuda y pueda ser liquidado por su acreedor financiero.
- La liquidación se lleva a cabo, si en t=2, el pago esperado de refinanciar es menor que el pago por la liquidación más el control de rentas que se transfiere al prestamista.
- El proyecto es exitoso si genera ***X>0*** más un monto por control de rentas no asignables ***C***
- Hay dos tipos de proyectos que difieren en la probabilidad de que sean exitosos.
    - Tipo G: con probabilidad 1 el proyecto produce $X>R^2$
    - Tipo B: con probabilidad π produce ***X*** y con probabilidad 1−π, produce cero.
- En t=0 el prestamista asigna a priori una probabilidad ***f*** de que el prestatario sea de tipo ***G*** y probabilidad ***1-f*** de que sea del tipo ***B,*** así el pago esperado es

$$f+\pi(1-f)$$

- En t=2 hay información nueva respecto a la reputación crediticia de las empresas, y solo hay dos realizaciones: ***u,*** un aumento en la clasificación crediticia o ***d,*** una disminución en la misma.

Con los supuestos dados, tenemos que usando la regla de Bayes, la probabilidad de que una empresa sea de tipo **G**, dado que en t=1 se beneficie con un aumento en su clasificación crediticia es

$$f^{u} = P(G|\, u) = 1$$

y similarmente, la probabilidad de que una empresa sea de tipo **G**, dado que en t=1 se vio afectado con un decremento en su reputación crediticia es

$$f^{d} = P(G|\, d)$$

y entonces tenemos una probabilidad de error para el caso en que la empresa tipo **G** reciba un descenso en su reputación crediticia, que es

$$e = \frac{f^{d}(1-f)}{f(1-f^{d})}$$

y la probabilidad de que una empresa que haya recibido un descenso en su reputación crediticia pueda pagar se denota por

$$q^{d} = \pi + f^{d}(1-\pi)$$

<u>Elección de maduración de deuda</u>

Deuda de largo plazo: con maduración en t=2, no enfrenta riesgo de liquidez y la información en t=1 no influye en el valor nominal de la deuda en t=2, denotado por ρ.

$$\rho = \frac{R^{2}}{f+(1-f)\Pi} \leq X$$

Deuda de corto plazo: cuya maduración se da en t=1 con valor nominal r_1

En t=1 pueden suceder dos cosas:

1) Refinanciar la deuda a una tasa contingente en función de la realización de la clasificación crediticia
   a) Dado u, el valor nominal en t=2 de la deuda refinanciada es $r_u = r_1 R$
   b) Dado d, el valor nominal en t=2 de la deuda refinanciada es $r_d = \dfrac{r_1 R}{q^{d}}$

2) Liquidar a la empresa al monto ***L*** si $r_d < L$. Los valores de mercado de la deuda en t=1 son:

   a) Dado u, $V_s^u = r_1$

   b) Dado d, $V_s^d = \min\left[r_1, \max\left\{L, q^d \dfrac{X}{r}\right\}\right]$

Algunos resultados

- Sin considerar liquidación, una empresa tipo G prefiere deuda de corto plazo porque disminuye sus costos de financiamiento esperados (la probabilidad de recibir malas noticias es menor que la empresa promedio)
- Comparando estructuras de deuda que difieren tanto en información como en liquidación, la maduración de deuda preferida por empresas tipo G es también preferida por los tipo B. (Si G elige deuda de corto plazo, aunque B prefiera deuda de largo plazo, no querrá revelar su tipo)
- Encuentra un valor de liquidación cercano al eficiente (cuando el control de rentas C=0)

$$L \geq \frac{q^d X + f^d C}{R}$$

- Si el control de rentas C>0 y L no es cercano al eficiente, para empresas con reputación crediticia suficientemente bajo (menores a S), las empresas tipo G prefieren deuda de largo plazo, donde S es:

$$S = \frac{\Pi\left[R^2 - LR + f^d (C + X - R^2)\right]}{(1-\Pi)\left[LR - f^d (C + X)\right]}$$

EL MODELO

Supuestos

El modelo propuesto en esta tesina es una extensión de Diamond (1991), en la que hemos relajado algunos supuestos para poder estudiar nuevos fenómenos. Por eso, la mayoría de los supuestos se conservan; sin embargo, para evitar confusión, repetiremos su mención.

El inversionista, que puede ser un empresario, una persona física o un país, no cuenta con los fondos necesarios para financiar su proyecto de inversión. Supondremos que el proyecto es indivisible y sin pérdida de generalidad lo normalizamos a 1.

El prestatario tiene información privada de los flujos de efectivo obtenidos al cabo de la realización del proyecto, y si aunado a esto, suponemos que para que el prestamista se cerciore de que su cliente puede sufragar los gastos de su deuda, incurrirá en costos de monitoreo que no está dispuesto a pagar, el problema de información asimétrica se hace patente.

El inversionista debe asegurar el pago de sus compromisos financieros, para que al final del periodo de inversión, obtenga un beneficio neto al menos igual a cero. El proyecto de inversión dará rendimientos X si es exitoso.

Los prestamistas son neutrales al riesgo, pero los ***prestatarios son aversos*** a él. Así que se presentará el análisis en tres escenarios económicos:

- Escenario A. en el que se considera una función de utilidad que muestre aversión al riesgo, sin prestar atención al grado de aversión Particularmente nos referimos a una función logarítmica simple.
- Escenario B. La función de utilidad del agente muestra aversión al riesgo constante para sus diferentes niveles de ingreso; pero diferentes agentes pueden tener diferentes grados de aversión al riesgo.

- Escenario C. La función de utilidad es como en el escenario B, pero en lugar de que la tasa de interés pueda sufrir un incremento de cero a i, es posible que suba o baje.

Supondremos que hay solo dos tipos de prestatarios:

- Tipo **G**: Inversionista con buen proyecto de inversión, que llamaremos " G", y
- Tipo **B**: Inversionista con mal proyecto de inversión, que llamaremos "B"

Asumiremos que el prestatario tipo **G** tiene la capacidad de pagar con seguridad el monto de la deuda y cubrir cabalmente sus intereses. Tiene un proyecto de inversión con valor presente neto positivo en términos de flujo de efectivo.

Por su parte, los prestatarios con baja reputación crediticia lograrán que su proyecto sea exitoso con probabilidad π, o no será exitoso y ofrecerá cero rendimientos, con probabilidad $1-\pi$. En el último caso, el proyecto tendrá un valor presente neto negativo en términos de flujo de efectivo.

Para una mejor descripción de la realidad, supondremos que ex-ante, el prestamista desconoce el verdadero tipo del prestatario, así que asignará una probabilidad a priori f de que sea el tipo bueno, o $1-f$ de que sea del tipo malo. Con esta distribución de probabilidad, el prestamista conocerá la probabilidad q con que le será pagado el monto del préstamo

$$q = f + (1-f)\pi$$

Deuda de corto plazo.

Al vencimiento de la deuda de corto plazo se presentan nuevas noticias respecto a la economía que afectan directamente los contratos de deuda mediante la tasa de interés, y nuevas noticias sobre la calidad crediticia de los agentes.

Dado un descenso en la reputación crediticia, independientemente de si se trata un prestatario tipo **G** o tipo **B**, la deuda de largo plazo será pagada con probabilidad $\mathbf{q^d}$ (down) obtenida usando la Regla de Bayes:

$$q^d = \frac{fe + (1-f)r\pi}{fe + (1-f)r}$$

Similarmente, definimos la probabilidad con que será pagada la deuda de largo plazo, si un prestatario de cualquier tipo recibe la buena noticia de un incremento en su clasificación crediticia, denotada por $\mathbf{q^u}$, (up)

$$q^u = \frac{f(1-e) + (1-f)(1-r)\pi}{f(1-e) + (1-f)(1-r)}$$

El problema del prestatario.

El prestatario elige S y D sujeto a la restricción de que pague la deuda contraída, capital e intereses.. Siguiendo a Diamond, buscamos el contrato que maximiza la utilidad esperada de un prestatario con un buen proyecto.

$$\begin{aligned} Max \quad & e(1-\lambda)u(X - \frac{S(1+i)}{q^d} - D) + e\lambda u(X - \frac{S}{q^d} - D) + (1-e)(1-\lambda)u(X - \frac{S(1+i)}{q^u} - D) + \\ & (1-e)\lambda u(X - \frac{S}{q^u} - D) \\ sujeto. \ a \quad & D[f + (1-f)\pi] + S[\lambda + (1-\lambda)(1+i)] \geq I[\lambda + (1-\lambda)(1+i)] \end{aligned}$$

El problema de maximización considera todos los escenarios que pueden presentarse. El primer sumando de la función objetivo indica la probabilidad de "error" siendo tipo **G**, ***e***, por la probabilidad de que surjan malas noticias para la economía $1-\lambda$ (viéndose reflejado esto en el aumento de la tasa de interés), por la utilidad del prestatario que está a su vez en función de la producción del proyecto ***X*** menos el valor nominal de la deuda de corto plazo $\frac{S(1+i)}{q^d}$ dadas las malas noticias sobre la economía y sobre la calidad del proyecto, menos la deuda de largo plazo.

Todo lo anterior solo para el caso en que hubo malas noticias respecto al proyecto y para la economía, faltaría agregar los otros tres casos posibles: el caso en que hay "error" en su designación pero además recibe buenas noticias de la economía, más el caso en que recibe buenas noticias sobre su calidad pero las condiciones económicas no son favorables y de todas maneras sube la tasa de interés y por último el caso en que recibe un aumento en su reputación crediticia y además hay buenas noticias en la economía (por lo que no se incrementa la tasa de interés).

"Ejemplo base"

Repetidamente hemos hecho mención, de que este trabajo incorpora el carácter averso al riesgo del prestatario, haciendo una aportación a la literatura conocida.

Esta aversión será incorporada a través de dos formas funcionales distintas de la función de utilidad. Además, y a manera de ilustración, definiremos valores numéricos para las probabilidades ex-ante, que ejemplificarán los cálculos con las que trabajaremos repetidamente a lo largo de la tesina:

$$f = \frac{1}{2}, \quad e = \frac{1}{4}, \quad r = \frac{1}{2}, \quad \pi = \frac{1}{2} \quad y \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

además $X = 2, \quad I = 1$

Por simplicidad, asumimos que la tasa de interés en t=0 es cero, y que la probabilidad de que un agente tipo **B** puedo pagar sea $\pi = \frac{1}{2}$. Además, consideramos que la probabilidad de comer un error siendo tipo **G** es $e = \frac{1}{4}$, y la probabilidad de que un prestatario tipo **B** reciba malas noticias es $r = \frac{1}{2}$. Y por último, la probabilidad de que un prestatario sea tipo G dada la información pública ex -ante (la reputación crediticia al inicio del ciclo de inversión) es $f=\frac{1}{2}$, es decir, la mitad de los prestatarios son de tipo **G** y la otra mitad son "malos". Por tanto la deuda de largo plazo es pagada por todos los prestatarios de tipo **G** y por la fracción π de quienes son de tipo **B**.

Bajo estas condiciones , la probabilidad de pago es

$$q=f+(1-f)\pi=\frac{3}{4}$$

y el valor nominal de la deuda de largo plazo es entonces de 4/3.

Debe señalarse, además, que si hay malas noticias sobre el proyecto y éstas se hacen notar con un descenso en la reputación crediticia, la probabilidad de pago al prestamista es

$$q^{d}=\frac{fe+(1-f)r\pi}{fe+(1-f)r}=\frac{2}{3}$$

Similarmente, la probabilidad de pago dado que se presentan buenas noticias acerca del proyecto es:

$$q^{u}=\frac{f(1-e)+(1-f)(1-r)\pi}{f(1-e)+(1-f)(1-r)}=\frac{4}{5}$$

Los proyectos tienen rendimientos X=2 si son exitosos, y el monto del préstamo como ya mencionamos está normalizado, es decir, I=1.

ESCENARIO A: Una función logarítmica.

El primer escenario es caracterizado por las probabilidades arriba definidas y por tener una función de utilidad logarítmica

$$u(x)=\ln(x)$$

La aversión aumenta o disminuye según sea la tasa de interés, lo cual limita la posibilidad de inferencia y de interpretación, pero que nos da una primera aproximación a la solución y naturaleza del problema[7].

El problema de maximización de la utilidad esperada del prestatario si consideramos *i=0* es

$$\underset{D}{Max}\ \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4+D}\right)-\frac{3}{4}\ln\left(\frac{1}{12-D}\right)$$

cuyo resultado es ***S=1*** y ***D=0,*** que además es muy intuitivo, pues si la tasa de interés que se espera en el peor de los escenarios económicos es igual a cero, el proyecto de inversión será totalmente financiado con deuda de corto plazo y no se contrata deuda de largo plazo.

Si además aumentamos la tasa de interés cuando hay malas noticias sobre la economía a $i=\frac{1}{4}$, el problema de maximización que enfrenta la empresa es

$$\underset{S}{Max}\ \frac{1}{8}\left[\ln\left(\frac{8-6S}{16}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{3}{8}\left[\ln\left(\frac{8-S}{16}\right)+\ln\left(\frac{8-4S}{16}\right)\right]$$

cuyo resultado es

$$S=\frac{16-10\sqrt{2}}{7}\approx 0.2654$$

$$D=\frac{3(1-S)}{2}\approx 1.1018$$

Lo anterior nos da idea de que conforme mayor sea la tasa de interés, menor será la proporción de deuda de corto plazo que se contrate y mayor la deuda de largo plazo. Es fácil argumentar que el prestatario tratará de protegerse del alza en la tasa de interés, evitando endeudarse a corto plazo, porque finalmente deberá cubrir sus compromisos de pago al final del segundo periodo, y evitará en lo posible perder el control de sus propios recursos.

---

[7] Como ya se mencionó, en el escenario B se utiliza una función de utilidad que amplía las posibilidades de análisis.

ESCENARIO B: Funciones con aversión al riesgo constante.

A diferencia del escenario A, en este marco económico se considera una familia de funciones de utilidad que varían en su grado de aversión al riesgo –aunque esta aversión es constante para los distintos niveles de ingreso- lo que permite hacer inferencias más generales acerca del comportamiento optimizador del agente que quiere invertir.

Con este propósito, hacemos alusión al coeficiente de aversión al riesgo absoluto, mejor conocida como medida de Arrow-Pratt ***r(x)***, en el que la concavidad de una función de utilidad es normalizada por su pendiente en cada punto, haciéndola independiente del valor de ***x***.

Nuestro objetivo en este escenario, es contar con una medida de aversión que sea constante e igual a θ, para cuyo efecto, resolveremos la ecuación diferencial que caracteriza la medida de Arrow-Pratt:

$$r_u(x) = -\frac{u''}{u'} = \theta$$

Resultando la forma funcional de la función de utilidad que nos permitirá analizar el problema del prestatario con mayor libertad:

$$u_\theta(x) = a + be^{-\theta x}$$

Para efectos de una adecuada interpretación económica en nuestro problema, imponemos que $b<0$ para así lograr la concavidad en la función de utilidad, que $\theta>0$, como medida de la intensidad de la aversión al riesgo (recordar que es constante para toda x), es decir, entre mayor sea θ, mayor será el carácter averso del inversionista. Y por último, mencionar que a representa un factor de desplazamiento vertical de la función de utilidad, que no afecta cualitativamente la proporción de la estructura del vencimiento de deuda.

Sin pérdida de generalidad asumiremos que ***a=0***, y ***b= -1***

Incorporando estos valores en el problema del prestatario, la maximización de la utilidad esperada es

$$\underset{S,D}{Max} \; e(1-\lambda)u_\theta\left[X-\frac{S(1+i)}{q^d}-D\right]+e\lambda u_\theta\left(X-\frac{S}{q^d}-D\right)+$$

$$(1-e)(1-\lambda)u_\theta\left[X-\frac{S(1+i)}{q^u}-D\right]+(1-e)\lambda u_\theta\left[X-\frac{S}{q^u}-D\right]$$

sujeto a $\quad D[f+(1-f)\pi]+S[\lambda+(1-\lambda)(1+i)]\geq I[\lambda+(1-\lambda)(1+i)]$

como puede observarse, solucionar este problema no es algo trivial, así que será conveniente mostrar un ejemplo numérico.

Si consideramos los valores de las variables descritas en el ejemplo base, el hecho de que a=0, b= -1 y además suponemos que i=0, después de hacer algunas simplificaciones, el problema de maximización es

$$\underset{D}{Max} \; -\frac{\exp(-2\theta)}{4}\left[\exp\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{8}D\theta\right)+3\exp\left(\frac{5}{4}\theta+\frac{1}{16}D\theta\right)\right]$$

que al resolverlo, obteniendo las condiciones de primer orden tenemos que

$$D=\frac{4}{3}+\frac{16}{3\theta}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$S=-\frac{4}{\theta}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

y si en particular $\theta=1$, se tiene que $S\approx 1.6218 \quad y \quad D\approx -0.8291$.

Podemos observar que la elección óptima de estructura de deuda es contratar 1.6218 unidades a corto plazo y –0.8291 unidades a largo plazo (el signo negativo se puede interpretar como la posibilidad de que el prestatario pueda tomar una "*posición corta*" en su portafolio de inversión).

La mezcla óptima entre deuda de corto y largo plazo considerando aversión al riesgo constante.

Recordemos la restricción presupuestaria que enfrenta el inversionista. Observamos que ésta se cumple con igualdad, pues al maximizar su utilidad esperada no contemplará pagarle en exceso a su acreedor financiero, así que despejando ***D*** de dicha restricción tenemos

$$D=\frac{[\lambda+(1-\lambda)(1+i)]}{f+(1-f)\pi}(I-S)=\varphi(I-S)$$
$$donde\quad \varphi=\frac{\lambda+(1-\lambda)(1+i)}{f+(1-f)\pi}$$

Así, el problema de maximización del inversionista se expresa de la siguiente manera:

$$\underset{S}{Max}-e(1-\lambda)\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S(1+i)}{q^{d}}-\varphi(I-S)\right]\right\}-e\lambda\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S}{q^{d}}-\varphi(I-S)\right]\right\}-$$
$$(1-e)(1-\lambda)\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S(1+i)}{q^{u}}-\varphi(I-S)\right]\right\}-(1-e)\lambda\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S}{q^{u}}-\varphi(I-S)\right]\right\}$$

y la condición de primer orden es:

$$0=e(1-\lambda)\left[\frac{\varphi q^{d}-(1+i)}{q^{d}}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^{d}}\right]+e\lambda\left[\frac{\varphi q^{d}-1}{q^{d}}\right]\exp\left(\frac{\theta S}{q^{d}}\right)+$$
$$(1-e)(1-\lambda)\left[\frac{\varphi q^{u}-(1+i)}{q^{u}}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^{u}}\right]+(1-e)\lambda\left[\frac{\varphi q^{u}-1}{q^{u}}\right]\exp\left(\frac{\theta S}{q^{u}}\right)\qquad(1)$$

A pesar de haber cierta simetría entre los términos, resolver la condición de primer orden es una tarea entretenida, porque el signo de los coeficientes de los términos exponenciales pueden ser negativos, y al aplicar la función logaritmo para poder despejar la variable S, surgen logaritmos de números no positivos.

Creamos las variables auxiliares:

$$t_1:=\frac{\varphi q^{d}-(1+i)}{q^{d}}\qquad t_2:=\frac{\varphi q^{d}-1}{q^{d}}$$
$$t_3:=\frac{\varphi q^{u}-(1+i)}{q^{u}}\qquad t_4:=\frac{\varphi q^{u}-1}{q^{u}}$$

pues la forma de la solución al problema del inversionista dependerá de los signos de estos cuatro términos, que a su vez dependen de la tasa de interés incluida en el término φ. Resolver algebraicamente la ecuación (1) es muy complicado para la mayoría de los valores de la tasa de interés *i*, así que procedemos a resolver el problema de maximización con aproximaciones usando el paquete matemático MAPLE. Véase el algoritmo al final del apéndice de tablas y gráficas.

Con los valores propuestos en el ejemplo base, tenemos que la condición de primer orden es:

$$0 = 2(5i+1)\exp\left(\theta\frac{S}{6}(5i+1)\right) + 2(-4i+1)\exp\left[\theta\frac{S}{6}(-4i+1)\right] +$$
$$3(7i-1)\exp\left[\theta\frac{S}{12}(7i-1)\right] + 3(-8i-1)\exp\left[\theta\frac{S}{12}(-8i-1)\right]$$

Si observamos, la resolución de la condición de primer orden depende directamente del valor de *i*.

Por ejemplo, para el caso más simple, con *i*=0, y después de algunas simplificación de la condición de primer orden es:

$$S = -\frac{4}{\theta}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$D = \frac{4}{3} + \frac{16}{3\theta}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

donde si suponemos que θ=1, se tiene que $S \approx 1.6218$ y $D \approx -0.8291$, tal como resultó anteriormente.

Los resultados de las simulaciones con MAPLE, para tasas de interés distintas de cero, al fijar el valor de la aversión al riesgo a θ=0.9, se muestran en la tabla 1.

i	S	D
0	1.8021	-1.0694
1/20	1.6308	-0.8620
1/5	0.7824	0.3191
¼	0.6070	0.5896
3/10	0.4800	0.7974
½	0.4151	0.9098
¾	0.1192	1.6148

Tabla 1. Mezcla óptima de deuda de corto y largo plazo. θ=0.9

Como puede observarse, los resultados muestran que a mayor tasa de interés, un prestatario que conserve su aversión al riesgo, se comporta óptimamente cauteloso y es más conservador en la proporción de deuda de corto plazo que contrata.

Es probable que el lector desee observar los resultados que se presentan en las tablas 2 y 3 del apéndice de tablas y gráficas, al final de la tesina.

La influencia de la aversión al riesgo sobre la estructura de deuda.

Dado que el inversionista es averso al riesgo, suponemos que su estructura de deuda óptima estará en función de la magnitud de su aversión. La intuición nos dice que una persona "muy" aversa al riesgo, tratará de protegerse y optará por contratar una tasa de interés segura con deuda de largo plazo y así evitar una "posible" alta tasa de interés al contratar deuda de corto plazo. Esta intuición resulta ser correcta, tal como enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Comparando dos contratos óptimos con igual escenario económico, mismas probabilidades, misma tasa de interés y que difieren únicamente en la magnitud de la aversión al riesgo, el contrato con aversión al riesgo mayor está constituido con una menor proporción de deuda de corto plazo y una mayor proporción de deuda de largo plazo en comparación con el contrato caracterizado por la menor aversión al riesgo.*

Prueba:

Para verificar lo que la intuición nos dice, tenemos que de la condición de primer orden se deriva la solución de elección óptima de estructura de deuda, es decir la proporción de deuda de corto y de largo plazo que elegirá el inversionista.

$$0 = e(1-\lambda)\left[\frac{\varphi q^d - (1+i)}{q^d}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^d}\right] + e\lambda\left[\frac{\varphi q^d - 1}{q^d}\right]\exp\left[\frac{\theta S}{q^d}\right] +$$
$$(1-e)(1-\lambda)\left[\frac{\varphi q^u - (1+i)}{q^u}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^u}\right] + (1-e)\lambda\left[\frac{\varphi q^u - 1}{q^u}\right]\exp\left[\frac{\theta S}{q^u}\right]$$

Así, si derivamos implícitamente la condición de primer orden con respecto a la aversión al riesgo θ, y hacemos uso de las definiciones de t_1, t_2, t_3 y t_4 tenemos que

$$0 = e(1-\lambda)t_1\frac{S(1+i)}{q^d}\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^d}\right] + e(1-\lambda)t_1\frac{\theta(1+i)}{q^d}\frac{\partial S}{\partial\theta}\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^d}\right] + e\lambda t_2\frac{S}{q^d}\exp\left[\frac{\theta S}{q^d}\right] +$$
$$e\lambda t_2\frac{\theta}{q^d}\frac{\partial S}{\partial\theta}\exp\left[\frac{\theta S}{q^d}\right] + (1-e)(1-\lambda)t_3\frac{S(1+i)}{q^u}\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^u}\right] +$$
$$(1-e)(1-\lambda)t_3\frac{\theta(1+i)}{q^u}\frac{\partial S}{\partial\theta}\exp\left[\frac{\theta S(1+i)}{q^u}\right] + (1-e)\lambda t_4\frac{S}{q^u}\exp\left[\frac{\theta S}{q^u}\right] + (1-e)\lambda t_4\frac{\theta}{q^u}\frac{\partial S}{\partial\theta}\exp\left[\frac{\theta S}{q^u}\right]$$

entonces

$$\frac{\partial S}{\partial\theta} = -\frac{S\left\{\begin{array}{l}\frac{e}{q^d}\left[(1-\lambda)t_1(1+i)\exp\left(\frac{\theta S(1+i)}{q^d}\right) + \lambda t_2\exp\left(\frac{\theta S}{q^d}\right)\right]\\ +\frac{1-e}{q^u}\left[(1-\lambda)t_3(1+i)\exp\left(\frac{\theta S(1+i)}{q^u}\right) + \lambda t_4\exp\left(\frac{\theta S}{q^u}\right)\right]\end{array}\right\}}{\theta\left\{\begin{array}{l}\frac{e}{q^d}\left[(1-\lambda)t_1(1+i)\exp\left(\frac{\theta S(1+i)}{q^d}\right) + \lambda t_2\exp\left(\frac{\theta S}{q^d}\right)\right]\\ +\frac{1-e}{q^u}\left[(1-\lambda)t_3(1+i)\exp\left(\frac{\theta S(1+i)}{q^u}\right) + \lambda t_4\exp\left(\frac{\theta S}{q^u}\right)\right]\end{array}\right\}}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial\theta} = -\frac{S}{\theta}$$

□

Hay varias observaciones importantes que hacer. Para empezar el signo de la derivada es negativo, es decir, un aumento en la aversión al riesgo por parte de un mismo inversionista, se verá reflejado por una disminución en la proporción de deuda de corto plazo que contrate manteniendo el resto de las variables sin alterar.

Es también interesante observar que si $\theta \in (0,1)$, el impacto de un aumento en la aversión será un decremento de mayor magnitud en la deuda de corto plazo, que la disminución que se tendría en el caso de una aversión al riesgo $\theta \in (1,\infty)$.

Retomando los valores del ejemplo base, resolvemos el problema de maximización para distintos valores de aversión al riesgo, cuando i=0 y obtenemos los resultados:

i=0			
theta	Proporción S	S	D
10	1.27E-01	0.1622	1.1171
4	3.38E-01	0.4055	0.7927
2.5	5.69E-01	0.6187	0.4683
2	7.63E-01	0.8109	0.2521
1.8	8.72E-01	0.9010	0.1320
1.65	9.77E-01	0.9829	0.0227
1.621	1.00E+00	1.0005	0.0000

Tabla 4. Resultados de mantener constante *i*=0 y variar la magnitud de la medida de aversión al riesgo.

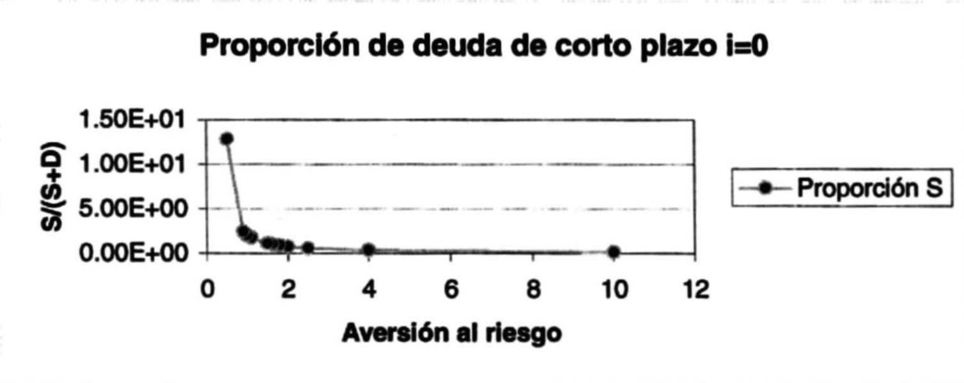

Figura 1. Proporción de deuda de corto plazo con mismo escenario económico i=0 y variando la magnitud de la aversión al riesgo.

En la figura 1 se observa cómo, a medida que aumenta la aversión al riesgo, se reduce la proporción de deuda de corto plazo en el total de deuda.

Similarmente, cuando la tasa de interés es $i = \frac{1}{4}$ presentamos los resultados en la tabla 5 y en la figura 2 del apéndice de tablas e ilustraciones.

Escenario C. Posibilidad de aumento o reducción en la tasa de interés.

A diferencia del escenario B, en que la tasa de interés inicial es cero y existe una probabilidad positiva de que aumente, ahora suponemos que se parte de una tasa inicial positiva i_0 que puede subir o bajar.

Consideramos una tasa de interés inicial $\boldsymbol{i_0}$ la cual sufrirá una variación $\boldsymbol{h}$ positiva o negativa, es decir, con probabilidad λ la tasa de interés aumentará a $\boldsymbol{i_0+h}$, mientras que con probabilidad **(1-λ)**, la tasa de interés disminuirá a $\boldsymbol{i_0-h}$.

Nótese que, para que al variar el parámetro $\boldsymbol{h}$ se mantenga constante la tasa de interés ("mean preserving spread"), se requiere que $\lambda = \frac{1}{2}$

Con estas consideraciones el problema del prestatario nuevamente consiste en maximizar su utilidad esperada sujeto a la restricción de obligación de pago al prestamista:

$$Max \;\; e(1-\lambda)u(X-\frac{S(1+i_0+h)}{q^d}-D)+e\lambda u(X-\frac{S(1+i_0-h)}{q^d}-D)+(1-e)(1-\lambda)u(X-\frac{S(1+i_0+h)}{q^u}-D)+$$
$$(1-e)\lambda u(X-\frac{S(1+i_0-h)}{q^u}-D)$$
$$sujeto \;\; a \;\; D[f+(1-f)\pi]+S[\lambda(1+i_0-h)+(1-\lambda)(1+i_0+h)]\geq I[\lambda(1+i_0-h)+(1-\lambda)(1+i_0+h)]$$

Para efectos de simplificación, ya mencionamos la razón por la que la restricción de obligación de pago se cumple con estricta igualdad, entonces

$$D=\frac{[1+i_0+h(1-2\lambda)]}{f+(1-f)\pi}(I-S)=\beta(I-S)$$

$$donde \;\; \beta=\frac{1+i_0+h(1-2\lambda)}{f+(1-f)\pi}$$

Y *el problema de maximización* se reduce a

$$\underset{s}{Max}-e(1-\lambda)\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S(1+i_0+h)}{q^d}-\beta(I-S)\right]\right\}-e\lambda\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S(1+i_0-h)}{q^d}-\beta(I-S)\right]\right\}-$$
$$(1-e)(1-\lambda)\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S(1+i_0+h)}{q^u}-\beta(I-S)\right]\right\}-(1-e)\lambda\exp\left\{-\theta\left[X-\frac{S(1+i_0-h)}{q^u}-\beta(I-S)\right]\right\}$$

y la condición de primer orden es:

$$0=e(1-\lambda)\left[\frac{\beta q^d-(1+i_0+h)}{q^d}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^d}\right]+e\lambda\left[\frac{\beta q^d-(1+i_0-h)}{q^d}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^d}\right]+$$
$$(1-e)(1-\lambda)\left[\frac{\beta q^u-(1+i_0+h)}{q^u}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^u}\right]+(1-e)\lambda\left[\frac{\beta q^u-(1+i_0-h)}{q^u}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^u}\right]$$

Similar al escenario B, resolver la condición de primer orden es una tarea entretenida por la posibilidad de que los signos de los coeficientes de los términos exponenciales sean negativos y el despejar S de la condición de primer orden dependerá entonces directamente de las siguientes variables auxiliares:

$$t_1'=\frac{\beta q^d-(1+i_0+h)}{q^d} \qquad t_2'=\frac{\beta q^d-(1+i_0-h)}{q^d}$$
$$t_3'=\frac{\beta q^u-(1+i_0+h)}{q^u} \qquad t_4'=\frac{\beta q^u-(1+i_0-h)}{q^u}$$

pues son los términos exponenciales de la condición de primer orden que a su vez dependen de la tasa de interés incluida en el término β. Nuevamente usamos los valores propuestos en el escenario A y auxiliándonos con MAPLE tenemos que al fijar el valor de la aversión al riesgo a $\theta=0.9$ y $h=\frac{1}{10}$ tenemos:

i	*S*	*D*
0	0.7749	0.3001
1/20	0.7797	0.3085
1/5	0.7830	0.3472
¼	0.7812	0.3647
3/10	0.7782	0.3845
½	0.7575	0.4849
¾	0.7202	0.6529

Tabla 6. Mezcla óptima de deuda de corto y largo plazo

Suponiendo volatilidad h=1/10 y aversión θ=0.9

Los resultados de la tabla 6 nos ilustran el comportamiento de la estructura de la deuda para diferentes valores de la tasa de interés inicial.

Es probable que el lector desee observar más resultados para lo cual puede observar las tablas 7 y 8 en el apéndice de tablas y gráficas.

La influencia de la aversión al riesgo sobre la estructura de deuda cuando la tasa de interés puede subir o bajar.

Similar al caso del escenario sin análisis de volatilidad en la tasa de interés, se espera que la estructura de deuda óptima este en función de la magnitud de su aversión.

Proposición 2. *Comparando dos contratos óptimos con igual escenario económico, mismas probabilidades, misma tasa de interés y misma volatilidad en la tasa de interés. Si lo único en lo que difieren es en la magnitud de la aversión al riesgo, el contrato con aversión al riesgo mayor estará constituido con una menor proporción de deuda de corto plazo y una mayor proporción de deuda de largo plazo en comparación con el contrato constituido con una menor aversión al riesgo.*

Prueba:

Similar al caso del escenario B, derivamos implícitamente la condición de primer orden con respecto a la aversión al riesgo θ, haciendo uso de las variables auxiliares t_1', t_2', t_3' y t_4' tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 = {} & e(1-\lambda)t_1'\left[\frac{S(1+i_0+h)}{q^d}+\frac{\theta(1+i_0+h)}{q^d}\frac{\partial S}{\partial \theta}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^d}\right]+\\
& e\lambda t_2'\left[\frac{S(1+i_0-h)}{q^d}+\frac{\theta(1+i_0-h)}{q^d}\frac{\partial S}{\partial \theta}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^d}\right]+\\
& (1-e)(1-\lambda)t_3'\left[\frac{S(1+i_0+h)}{q^u}+\frac{\theta(1+i_0+h)}{q^u}\frac{\partial S}{\partial \theta}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^u}\right]+\\
& (1-e)\lambda t_4'\left[\frac{S(1+i_0-h)}{q^u}+\frac{\theta(1+i_0-h)}{q^u}\frac{\partial S}{\partial \theta}\right]\exp\left[\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^u}\right]
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\frac{S\left\{\begin{aligned}&\frac{e}{q^d}\left[(1-\lambda)t_1'(1+i_0+h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^d}\right)+\lambda t_2'(1+i_0-h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^d}\right)\right]+\\&\frac{1-e}{q^u}\left[(1-\lambda)t_3'(1+i_0+h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^u}\right)+\lambda t_4'(1+i_0-h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^u}\right)\right]\end{aligned}\right\}}{\theta\left\{\begin{aligned}&\frac{e}{q^d}\left[(1-\lambda)t_1'(1+i_0+h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^d}\right)+\lambda t_2'(1+i_0-h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^d}\right)\right]+\\&\frac{1-e}{q^u}\left[(1-\lambda)t_3'(1+i_0+h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0+h)}{q^u}\right)+\lambda t_4'(1+i_0-h)\exp\left(\frac{\theta S(1+i_0-h)}{q^u}\right)\right]\end{aligned}\right\}}
$$

por lo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\frac{S}{\theta}$$

□

Al igual que el caso sin análisis de volatilidad, el impacto del aumento de una unidad de aversión al riesgo, la proporción de deuda de corto plazo disminuirá en $-\frac{S}{\theta}$

Además, si $\theta \in (0,1)$, el impacto de un aumento en la aversión será una disminución de mayor magnitud en la deuda de corto plazo, que la disminución que se tendría en el caso de una aversión al riesgo $\theta \in (1,\infty)$.

Ilustración: Con los mismos datos del ejemplo base, pero ahora fijando tanto la tasa de interés como la volatilidad y al variar la aversión al riesgo obtenemos los resultados de la tabla 9.

h=1/10, i=1/4			
theta	**Proporción S**	**S**	**D**
1000.1	4.22E-04	7.0E-04	1.7E+00
10	4.34E-02	7.0E-02	1.5E+00
4	1.13E-01	1.8E-01	1.4E+00
2.5	1.90E-01	2.8E-01	1.2E+00
1.5	3.46E-01	4.7E-01	8.9E-01
1.1	5.15E-01	6.4E-01	6.0E-01
1	5.87E-01	7.0E-01	4.9E-01
0.9	6.82E-01	7.8E-01	3.6E-01
0.8	8.13E-01	8.8E-01	2.0E-01
0.75	9.00E-01	9.4E-01	1.0E-01

Tabla 9. Proporción de deuda de corto plazo cuando la volatilidad es h=0.10, la tasa de interés i_0=0.25 y varía la aversión al riesgo.

Y analizando la proporción de deuda de corto plazo que se contrata, obtenemos la siguiente gráfica

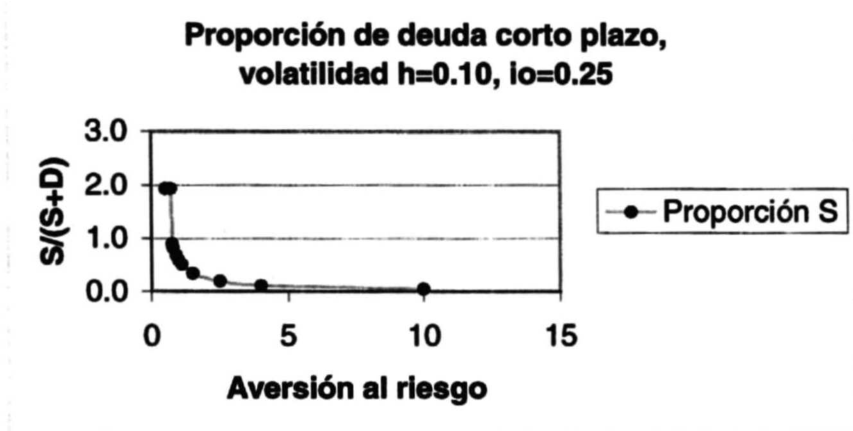

Figura 3. Proporción de deuda de corto plazo cuando la volatilidad es h=0.10, i_0=0.25 constantes y varía la aversión al riesgo.

Si el autor así lo desea, puede ver los resultados para el caso en que se mantienen constantes los valores de $i_0 = \frac{1}{5}$ y $h = \frac{1}{10}$, remítase al apéndice de tablas y resultados a la tabla 10 y a la figura 4.

CONCLUSIONES

Hemos analizado mediante un modelo sencillo basado en el de Diamond (1991), la estructura óptima del vencimiento de la deuda, incorporando un aspecto crítico de las características reales de los prestatarios, que es su **aversión al riesgo**.

Los resultados teóricos son bastante intuitivos, pues confirman el hecho de que un agente (una empresa, un gobierno, etc) que es más averso al riesgo que otro, bajo el mismo entorno económico y con proyectos de inversión idénticos, contratará una menor proporción de deuda de corto plazo y por ende mayor de deuda de largo plazo, que las correspondientes proporciones del agente menos averso.

El anterior resultado se muestra en dos versiones ligeramente diferentes del modelo. Adicionalmente, se ilustran los valores óptimos de la estructura de deuda mediante simulaciones computacionales.

BIBLIOGRAFÍA

Barclay, Michael J. y Smith, Clifford W. Jr. (1995). "The Maturity Structure of Corporate Debt" *Journal of Finance, 50(2), pages 609-631*

Chang, Roberto y Velasco, Andrés. (2000). "Banks, debt maturity and financial crises"
Journal of International Economics, 51, pags 169-194

Diamond, Douglas W (1991) "Debt Maturity Structure and Liquidity risk"
Quarterly Journal of Economics, 106, pags 709-737

Fama, Eugene F. (1978). "The effects of a firm´s investment and financing decisions" *American Economic Review, 68, pags 272-284*

Flannery, Mark J. (1986) "Asymmetric Information and Risky Debt Maturity Choice"
The Journal of Finance, 41(1), pags 19-37

Goswami, Gautam; Noe, Thomas y Rebello, Michael. (1995) "Debt Financing under Asymmetric Information" *Journal of Finance, 50(2), pags 633-654*

Myers, Stewart C. (1977) "Determinants of corporate borrowing". *Journal of Financial Economics. 5, pags. 147-175*

Varian, Hal R. (1998) "Análisis Microeconómico" *Antoni Bosch Editor, 3ra. ed. Capítulo 11.*

Apéndice de tablas y gráficas

Resultados de la mezcla óptima entre deuda de corto y largo plazo. Con aversión al riesgo constante:

i	S	D
0	16.2186	-20.2915
1/20	14.6769	-18.6917
1/5	7.0419	-8.8614
1/4	5.4626	-6.6938
3/10	4.3196	-5.0901
1/2	2.0405	-1.7342
3/4	1.0727	-0.1333

Tabla 2. $\theta=0.1$

i	S	D
0	0.6187	0.4683
1/20	0.5871	0.5643
1/5	0.2817	1.0535
1/4	0.2185	1.1722
3/10	0.1728	1.2684
1/2	0.0816	1.5306
3/4	0.0262	1.7854

Tabla 3. $\theta=2.5$

Resultados de optimización manteniendo la tasa de interés constante y variando la magnitud de la aversión al riesgo:

	I=1/4		
theta	**Proporción S**	**S**	**D**
1000.1	3.64E-04	5.46E-04	1.50E+00
10.1	3.71E-02	5.46E-02	1.42E+00
4.01	9.51E-02	1.36E-01	1.30E+00
2.5	1.57E-01	2.19E-01	1.17E+00
1.5	2.76E-01	3.64E-01	9.54E-01
1.01	4.40E-01	5.41E-01	6.89E-01
0.9	5.07E-01	6.07E-01	5.90E-01
0.8	5.89E-01	6.83E-01	4.76E-01
0.7	7.03E-01	7.80E-01	3.29E-01

Tabla 5. Resultados de mantener constante *i*=0.25 y variar la magnitud de la medida de aversión al riesgo.

Y visto gráficamente, la proporción de deuda de corto plazo es:

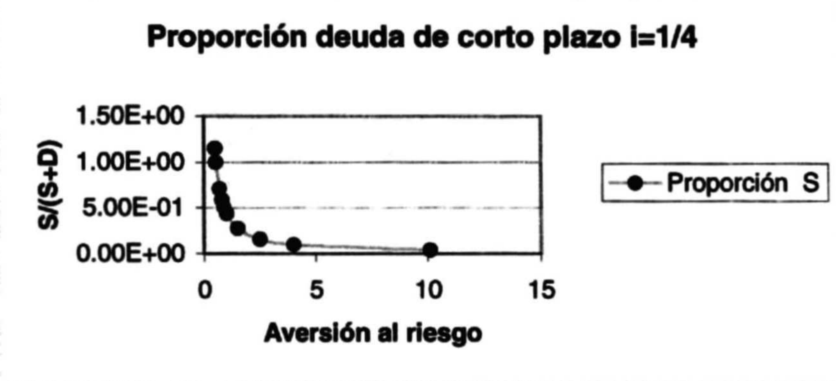

Figura 2. . Proporción de deuda de corto plazo con mismo escenario económico y variando la magnitud de la aversión al riesgo.

Resultados de la mezcla óptima entre deuda de corto y largo plazo para el escenario C. Con aversión al riesgo y volatilidad en la tasa de interés constantes:

i	S	D
0	6.9744	-7.9659
1/20	7.0169	-8.4237
1/5	7.0469	-9.6751
1/4	7.0306	-10.0509
3/10	7.0037	-10.4065
1/2	6.8179	-11.6357
3/4	6.4816	-12.7904

Tabla 7. θ=0.1 y $h=\frac{1}{10}$

i	S	D
0	0.2790	0.9614
1/20	0.2807	1.0071
1/5	0.4698	0.8483
1/4	0.4687	0.8855
3/10	0.2801	1.2477
1/2	0.2727	1.4546
3/4	0.2593	1.7284

Tabla 8. θ=2.5 y $h=\frac{1}{10}$

Análisis del impacto de la aversión al riesgo a los contratos óptimos en el escenario que considera la volatilidad en la tasa de interés.

i=1/5			
Theta	**Proporción S**	**S**	**D**
10.1	4.48E-02	6.98E-02	1.49E+00
4.1	1.15E-01	1.72E-01	1.32E+00
2.5	1.97E-01	2.82E-01	1.15E+00
1.5	3.56E-01	4.70E-01	8.48E-01
1.1	5.27E-01	6.41E-01	5.75E-01
1.01	5.91E-01	6.98E-01	4.84E-01
0.9	6.93E-01	7.83E-01	3.47E-01
0.8	8.22E-01	8.81E-01	1.91E-01
0.7	1.01E+00	1.01E+00	1.07E-02

Tabla 10. Resultados del escenario C, variando la magnitud de la aversión Al riesgo y manteniendo constantes la volatilidad h=0.10 e i_0=0.20

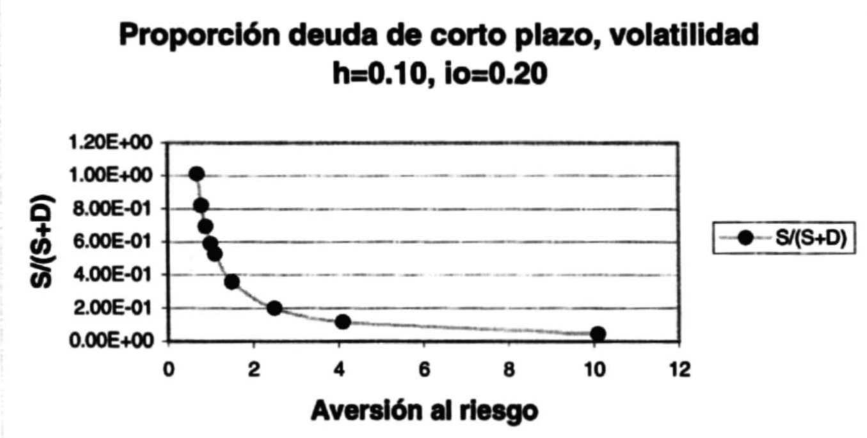

Figura 4. Proporción de deuda de corto plazo variando la magnitud de La aversión al riesgo y manteniendo constante la volatilidad h=0.10 e i_0=0.20

Algoritmo "base" de MAPLE

Algoritmo más simple de MAPLE, para el caso en que i=0, θ=1, y no hay análisis de volatilidad. Escenario B.

```
> restart:
> i:=0:
> pi:=1/2:f:=1/2:In:=1:equis:=2:qd:=2/3:qu:=4/5:e:=1/4:lambda:=1/2:
> u:=y->-exp(-y);

                    u := y -> -exp(-y)

>     cl:=e*(1-lambda)*u(equis-(s*(1+i)/qd)-d)+e*lambda*u(equis-(s/qd)-d)+(1-
e)*(1-lambda)*u(equis-(s*(1+i)/qu)-d)+(1-e)*lambda*u(equis-(s/qu)-d):
>rest:=d*(f+(1-f)*pi)+s*(lambda+(1-lambda)*(1+i))-((lambda+(1-
lambda)*(1+i))*In):
> lagr:=cl+mu*rest:
> exp1:=diff(lagr,s):
> exp2:=diff(lagr,d):
> exp3:=diff(lagr,mu):
> exp4:=solve({exp1=0,exp2=0,exp3=0},{s,d,mu}):
> evalf(");

      {s = 1.621860434, mu = .6727667482, d = -.829147245}
```
