



EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

**ACERTIJO DEL PREMIO AL RIESGO
BAJO CHOQUES DE CONSUMO**

RODRIGO LEO PANIAGUA

PROMOCIÓN 2019 – 2021

ASESOR:

DR. DAVID CANTALA

JULIO 2021

Acertijo del premio al riesgo bajo choques de consumo

Rodrigo Leo
Asesor: Dr. David Cantala

Julio 2021

Resumen

Este trabajo intenta formular un modelo de equilibrio general que proporcione –al menos parcialmente– una explicación satisfactoria al «acertijo del premio al riesgo» (*equity premium puzzle*). En primer lugar se ilustra el problema del acertijo del premio al riesgo a través de un modelo simple, y posteriormente se lleva a cabo una revisión general de la literatura que aborda este problema.

La parte central del trabajo presenta la construcción de un modelo de equilibrio general bajo incertidumbre. En él los agentes enfrentan información incompleta sobre las realizaciones futuras de un choque en sus trayectorias de consumo. La solución del modelo se caracteriza como un equilibrio de Radner. Al considerar la especificación más sencilla con tres periodos y dos estados de la naturaleza, se encuentran expresiones cerradas para el precio de los activos en equilibrio.

A partir de estas expresiones se estima el retorno medio de un activo riesgoso representativo y se compara con el retorno medio observado del índice Standard and Poor's 500 y series históricas de consumo e inflación para Estados Unidos. Como resultado fundamental se observa que conforme aumenta la probabilidad de un choque de consumo, los agentes exigen un mayor premio por invertir en activos riesgosos, con lo cual mejora la estimación del premio al riesgo. Sin embargo, en ningún caso es posible replicar exactamente el retorno medio observado para coeficientes de aversión al riesgo razonablemente bajos. Estos resultados son robustos a variaciones en la unidad de medida de los periodos y al uso de datos de dos economías representativas distintas a Estados Unidos.

Dado que en la especificación más sencilla los rendimientos esperados de los activos aumentan conforme incrementa la probabilidad de un choque, es razonable suponer que bajo especificaciones más completas se obtenga una estimación del premio al riesgo que se aproxime mejor al valor observado históricamente. Por este motivo, el trabajo concluye presentando posibles direcciones en las que parece razonable extender el modelo.

Índice

1. Introducción	1
2. Una ilustración del acertijo del premio al riesgo	3
3. Revisión de la literatura	7
3.1. Modelos con preferencias alternativas	7
3.2. Choques de ingreso	9
3.3. Probabilidad de eventos extremos	10
3.4. Restricciones crediticias	11
3.5. Otras aproximaciones recientes en la literatura	12
4. Un modelo con información incompleta	13
4.1. Relevancia de los choques de ingreso en el consumo	13
4.2. Agentes con información incompleta	15
4.3. Descripción del modelo	16
5. Equilibrio general	19
5.1. Marco conceptual general	19
5.2. Aplicación al modelo propuesto	23
6. Evaluación del modelo	27
6.1. Especificación	27
6.2. Datos empleados	30

6.3. Resultados	34
6.4. Pruebas de robustez	38
7. Conclusión	45
Bibliografía	47
A. Apéndices	51
A.1. Solución del modelo básico	51
A.2. Derivación de la cota para el premio al riesgo	52
A.3. Derivación de la aproximación para $\sigma(m)/m$	53
A.4. Cuantificación del efecto de la aversión relativa al riesgo	55
A.5. Solución del modelo de equilibrio general	56
A.6. Derivación de los momentos centrales de δ_t	57

Capítulo 1

Introducción

Históricamente, se observa que el retorno promedio de los activos considerados riesgosos (por ejemplo, la acción de una empresa) es superior al de los activos seguros (por ejemplo, un bono gubernamental). A esta diferencia de rendimientos se le llama premio al riesgo (o prima de riesgo). La existencia de este premio es natural si se parte del supuesto de que los agentes son aversos al riesgo, pues equivale al retorno en exceso que un inversor exige a cambio de aceptar la mayor probabilidad de pérdida asociada al riesgo.

Sin embargo, dado un nivel de aversión al riesgo razonable, los modelos de equilibrio general que incorporan mercados donde se intercambian activos contingentes predicen una prima de riesgo mucho menor a la que se ha observado históricamente, usando todos los datos disponibles de múltiples países y periodos de tiempo. Esta inconsistencia se conoce como «acertijo del premio al riesgo» (*equity premium puzzle* en la literatura en inglés), y se observa en una clase muy general de modelos construidos bajo los supuestos de una economía de Arrow-Debreu. A la fecha se han propuesto múltiples soluciones, pero ninguna de ellas ha recibido un consenso positivo generalizado.

El objetivo de este trabajo es llevar a cabo una revisión de la literatura sobre esta inconsistencia y construir un modelo de equilibrio general que considere choques de consumo en los agentes mediante un mecanismo de información incompleta sobre sus trayectorias de consumo futuras. Este modelo se ajustará estadísticamente para contrastarlo con series históricas de retornos de activos financieros, y así determinar si es capaz de explicar, al menos en parte, el elevado premio al riesgo observado.

La estructura del trabajo es la siguiente. El capítulo 2 (página 3) presenta un modelo sumamente sencillo basado en consumo para valorar activos, con el objetivo de ilustrar en términos simples el acertijo del premio al riesgo. Particularmente se muestra el elevado nivel de aversión al riesgo que se requiere para reconciliar el modelo teórico con los datos observados. El capítulo 3 (página 7) consiste en una revisión de la literatura sobre el tema, a partir del trabajo seminal de Mehra y Prescott (1985). El capítulo 4 (página 13) discute la importancia de los choques esperados futuros

de consumo en las decisiones de inversión de los agentes bajo un entorno de incertidumbre, lo cual motiva la presentación del fundamento de un contexto de información incompleta, modelado mediante una función de utilidad dependiente del estado de la naturaleza. El capítulo 5 (página 19) formaliza este modelo en el contexto de un equilibrio general. En el capítulo 6 (página 27) se especifica estadísticamente el modelo y se contrastan sus predicciones con los datos empíricos. El capítulo 7 (página 45) concluye el trabajo.

Finalmente, se incluye una breve serie de apéndices (página 51 en adelante) con el desarrollo detallado de resultados teóricos que se omiten en el cuerpo principal del trabajo por brevedad y claridad.

Capítulo 2

Una ilustración del acertijo del premio al riesgo

Con el objetivo de ilustrar del modo más explícito posible la naturaleza del acertijo del premio al riesgo, consideramos el siguiente modelo simple: una economía sin producción, con dos periodos (t , $t + 1$), con un agente representativo y un mercado donde se pueden vender y comprar libremente unidades de un activo riesgoso. Intuitivamente, se puede pensar en cada unidad del activo como un título que otorga a su poseedor el derecho a recibir una cantidad determinada de dinero (en cuyo caso el activo es *financiero*) o de bienes de consumo (en cuyo caso el activo es *real*). Se dice que el activo es *riesgoso* porque la cantidad que paga es una variable aleatoria.

El agente obtiene utilidad por consumir. Su consumo en t se denota c_t , y sus preferencias están representadas mediante una función de utilidad $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ creciente y estrictamente cóncava (el agente es averso al riesgo). El problema que enfrenta consiste en maximizar su utilidad esperada eligiendo la cantidad z de activo riesgoso que va a comprar en t . El precio del activo en t es p_t y el pago del activo en $t + 1$ es X_t . Formalmente, el problema del agente es

$$\max_z \quad E_t[u(c_t) + \beta u(c_{t+1})] \quad \text{s.a.} \quad c_t = y_t - zp_t \quad (2.1)$$

$$c_{t+1} = y_{t+1} + zX_{t+1} \quad (2.2)$$

donde β es el factor de descuento subjetivo del consumo futuro y y_t es el ingreso (exógeno) del periodo t . El sentido de la restricción (2.1) es que el agente consume en t su ingreso menos el monto que destina a comprar z unidades de activo riesgoso a precio p_t . La restricción (2.2) expresa que el agente consume en $t + 1$ su ingreso más el pago que obtiene por las z unidades de activo riesgoso que compró en t .

Al resolver el problema (véase apéndice A.1, p. 51) se obtiene la siguiente expresión para p_t :

$$p_t = E_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} X_{t+1} \right] = E_t [m_{t+1} X_{t+1}] \quad (2.3)$$

donde se ha hecho la sustitución $m_{t+1} = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$. La expresión m_{t+1} se conoce como *factor de descuento estocástico*.

La ecuación (2.3) tiene una interpretación económica directa: el precio actual de un activo que pagará en el futuro una cantidad estocástica X_{t+1} es simplemente igual al valor esperado del pago futuro X_{t+1} descontado mediante m_{t+1} (que es la tasa marginal de sustitución intertemporal del consumo).

A continuación se define el *rendimiento bruto* en $t + 1$, denotado R_{t+1} , como el pago X_{t+1} normalizado por su precio p_t : $R_{t+1} = X_{t+1}/p_t$. Advirtiendo que p_t es constante respecto al valor esperado $E_t[\cdot]$ la ecuación (2.3) puede escribirse como

$$1 = E_t [m_{t+1} R_{t+1}] \quad (2.4)$$

Esta misma ecuación se debe cumplir para el caso de un activo sin riesgo (no estocástico) con rendimiento R_{t+1}^f . Por lo tanto (por la ecuación (2.4)),

$$1 = E_t [m_{t+1} R_{t+1}^f] = R_{t+1}^f E_t [m_{t+1}]$$

A partir de esta expresión es sencillo mostrar (véase apéndice A.2, p. 52) que la siguiente relación debe satisfacerse:

$$\frac{|R - R^f|}{\sigma(R)} \leq \frac{\sigma(m)}{m}$$

donde las variables sin subíndices denotan las medias correspondientes. La diferencia $R - R^f$ es la media del premio al riesgo, es decir, el promedio del retorno en exceso R que ofrece un activo riesgoso por encima del retorno R^f de uno no riesgoso, y $\sigma(R)$ es la desviación estándar del retorno del activo riesgoso.

Lo dicho hasta el momento es válido en general, independientemente de la forma que tome u . Para ajustar este modelo a los datos, es necesario hacer algunos supuestos. En primer lugar, se asume que el agente tiene una función de utilidad que presenta aversión relativa al riesgo constante (CRAA): $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, y que la tasa de crecimiento del consumo $\Delta c_{t+1} = c_{t+1}/c_t$ sigue una distribución lognormal con varianza $\sigma^2(\Delta c)$. Entonces, es posible mostrar (véase apéndice A.3, pág. 53) que se satisface

$$\frac{|R - R^f|}{\sigma(R)} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \approx \gamma \sigma(\Delta c)$$

lo que equivale (resolviendo para γ) a

$$\gamma \gtrapprox \frac{|R - R^f|}{\sigma(R)\sigma(\Delta c)}$$

De este modo se ha obtenido una cota inferior para el coeficiente de aversión relativa al riesgo que es fácilmente verificable. Empleando datos para Estados Unidos a partir de la posguerra (Cochrane, 2005), se estiman los siguientes valores: $R - R^f = 8\%$, $\sigma(R) = 16\%$ y $\sigma(\Delta c) = 1\%$ (todos en términos anuales). La tabla (2.1) muestra el premio al riesgo promedio en algunos otros países.

País	Periodo	R	R^f	$R - R^f$
Reino Unido	1947 - 1999	5.7	1.1	4.6
Japón	1970 - 1999	4.7	1.4	3.3
Alemania	1978 - 1997	9.8	3.2	6.6
Francia	1973 - 1998	9.0	2.7	6.3

Cuadro 2.1: Valores medios de los retornos de activos riesgosos y seguros (en porcentaje). Fuente: Mehra y Prescott (2003).

Sustituyendo los valores estimados se obtiene la siguiente cota inferior para γ :

$$\gamma \gtrapprox \frac{|R - R^f|}{\sigma(R)\sigma(\Delta c)} = \frac{8\%}{(16\%)(1\%)} = 50$$

Un coeficiente de aversión al riesgo de 50 es extremadamente alto. De acuerdo con una amplia revisión de la literatura que estima este coeficiente, no es creíble que pueda ser superior a 10, y de hecho se espera que sea cercano a uno (Mehra y Prescott, 1985).

Para dimensionar la forma en que un agente con una aversión al riesgo de tal magnitud se comportaría, considerar el siguiente escenario: suponer que a una persona se le ofrece participar en una (y sólo una) de las siguientes loterías:

- La lotería A consiste en lanzar una moneda. Si sale cara, el premio es de \$100. Si sale cruz, el premio es de \$10.
- La lotería B consiste en recibir \$11 con certeza (sin lanzar ninguna moneda).

Un agente con función de utilidad CRAA (como la que se empleó en este modelo), con un coeficiente de aversión al riesgo mayor o igual a 9, *siempre* elegirá la lotería B porque tiene riesgo cero, aunque el pago esperado de la lotería A (\$55) es mucho mayor que el pago seguro de \$11 que ofrece la lotería B , y el pago de A en el peor de los casos (\$10) no es muy diferente del pago seguro de B (\$11) (véase el apéndice A.4, p. 55, para la descripción de la elaboración de este cálculo).

El modelo presentado en este capítulo, aunque es sencillo, es suficiente para ilustrar el acertijo del premio al riesgo. Como se puede observar, la dificultad principal consiste en reconciliar el premio al riesgo observado con un nivel de aversión al riesgo razonable. El siguiente capítulo se dedica a revisar modelos más complejos que tratan de resolver esta inconsistencia, aunque sin lograrlo del todo.

Capítulo 3

Revisión de la literatura

La primera referencia al acertijo del premio al riesgo aparece en el trabajo de Mehra y Prescott (1985), donde los autores, partiendo del modelo de intercambio propuesto por Lucas (1978), muestran la inconsistencia entre una clase general de modelos de equilibrio general y los datos empíricos para Estados Unidos respecto a la diferencia entre los retornos de activos financieros con riesgo y sin riesgo, para el periodo 1889–1978. Este trabajo es importante no sólo porque identifica y nombra la inconsistencia, sino porque muestra que en principio no es atribuible a la especificación del modelo ni a problemas de medición de los datos. Por ello los autores concluyen que lo más probable es que ésta provenga directamente de modelar la economía bajo un paradigma de Arrow-Debreu, y por lo tanto pueda explicarse únicamente empleando un modelo que no constituya una economía de este tipo.

A partir de este trabajo diversos autores han propuesto una multitud de soluciones, entre las cuales se encuentran: modificar la función de utilidad (para tratar de capturar comportamientos más sofisticados de los agentes), introducir choques aleatorios de ingresos (para motivar a los agentes a ahorrar invirtiendo en activos seguros), considerar la posibilidad de choques extremos al consumo, introducir restricciones crediticias, entre otras.

El resto de este capítulo se dedica a examinar brevemente algunas de estas propuestas.

3.1. Modelos con preferencias alternativas

3.1.1. Utilidad separable

Epstein y Zin (1991) consideran una clase de preferencias que denominan *utilidad esperada gene-*

realizada, que representan mediante funciones de utilidad con la siguiente forma:

$$U_t = \left[(1 - \beta)c_t^\rho + \beta(E_t[\tilde{U}_{t+1}^\alpha])^{\rho/\alpha} \right]^{1/\rho}$$

donde $1 - \alpha$ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo y $\sigma = 1/(1 - \rho)$ es la elasticidad de sustitución intertemporal. Cuando $\rho = \alpha$, esta función de utilidad se transforma en una función de aversión relativa al riesgo constante (CRRA). Esta función de utilidad tiene la ventaja de separar la aversión al riesgo de la elasticidad de sustitución intertemporal, lo que no es posible cuando se utiliza una utilidad CRRA tradicional.

Es posible mostrar (Mehra y Prescott, 2003) que usando esta función de utilidad y bajo el supuesto de una distribución lognormal de los retornos, debe cumplirse que

$$\ln R^f = -\ln \beta + \frac{\mu_x}{\sigma} - \frac{\alpha/\rho}{2\sigma^2}\sigma_x^2 + \frac{\alpha/\rho - 1}{2}\sigma_m^2$$

donde σ_m^2 es la varianza del retorno de un portafolio que contiene activos riesgosos de varianza σ_x^2 y activos libres de riesgo con retornos R^f . De esta expresión se deriva la siguiente observación: es posible obtener una buena aproximación al retorno libre de riesgo observado empíricamente siempre que σ (la elasticidad de sustitución intertemporal) sea «grande». Sin embargo, existen evidencias de que esto no es así (Campbell, 2000).

Existe literatura más reciente que trata de modificar las preferencias introduciendo aversión al riesgo dependiente de la edad, por ejemplo, en DaSilva et al. (2019). Estos autores consideran un modelo de generaciones traslapadas de tres periodos con restricciones crediticias, concluyendo que la diferencia entre los niveles de aversión al riesgo de los jóvenes y los viejos importa más que el nivel medio de aversión al riesgo de la economía.

3.1.2. Formación de hábitos

Una segunda forma de modificar las preferencias de los agentes, que además tiene la ventaja de modelar un fenómeno que parece corresponder intuitivamente al proceso de consumo de los agentes, es mediante la introducción de *hábitos*. Esta idea parte del supuesto de que la utilidad del consumo depende no solamente de lo que se consuma hoy, sino también de lo que se ha consumido en el pasado.

Intuitivamente, tiene sentido pensar que un agente acostumbrado a un alto consumo tendrá una mayor disminución en su utilidad si se enfrenta a un choque de ingreso que un agente que está acostumbrado a un menor nivel de consumo. Una primera aproximación a esta idea se encuentra

en el trabajo de Constantinides (1990), que propone una función de utilidad de la forma siguiente:

$$U(c) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \frac{(c_{t+s} - \lambda c_{t+s-1})^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

donde $\lambda > 0$ es el parámetro que determina la persistencia del nivel de consumo pasado. (Hay que notar que esta versión corresponde (por simplicidad de notación) a un modelo en tiempo discreto. En tiempo continuo la suma se transforma en una integral y el factor de descuento es exponencial). Esta idea, aunque en el modelo parece intuitiva, implicaría en la práctica una muy elevada aversión al riesgo relacionado al consumo, que no se observa en los datos.

Otra forma en que se pueden introducir los hábitos, explorada por Campbell y Cochrane (1999), consiste en considerar la posibilidad de una recesión como una variable de estado, de modo que la aversión al riesgo del agente aumente cuando la posibilidad de una caída futura en el consumo (un estado recesivo) crezca. Este tipo de modelos sí son consistentes con los datos empíricos disponibles sobre el consumo y el comportamiento de los activos financieros, pero tienen el problema de requerir que los agentes presenten aversión al riesgo contracíclica (y por tanto variable), para lo cual no se ha observado evidencia empírica.

Una tercera vía para modelar hábitos consiste en considerar no tanto los hábitos «internos», sino más bien los hábitos del entorno del agente. La idea general consiste en tratar de modelar la influencia que el entorno ejerce sobre el agente. Bajo este concepto, la utilidad de una persona no depende solamente de cuánto consume, sino de su nivel de consumo *relativo* al consumo de sus vecinos. Un ejemplo de función de utilidad de este tipo se encuentra en Abel (1990):

$$U(c) = E_t \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t / C_{t-1}^\gamma)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]$$

donde C_{t-1} es el consumo agregado del periodo anterior ($t-1$). A partir de la función de utilidad es fácil observar que cuando el consumo particular del agente crece a la misma tasa que el consumo agregado, la utilidad marginal es constante. Sin embargo, este tipo de función de utilidad produce exactamente el mismo premio al riesgo (demasiado bajo) que una función simple CRRA que no considere el consumo agregado.

3.2. Choques de ingreso

Dado que las modificaciones a la función de utilidad no parecen mejorar la inconsistencia entre la estimación de los modelos teóricos y los datos empíricos, tiene sentido pensar en la introducción de choques de ingreso ante los cuales los agentes no se pueden asegurar. Bajo la hipótesis de que los agentes enfrentan choques aleatorios en sus ingresos (debidos, por ejemplo, a emergencias) que

no están cubiertos por un seguro, parece razonable suponer que invertirán parte de su ingreso en activos de bajo riesgo como una estrategia de cobertura para garantizar el consumo futuro, aun cuando los retornos esperados de activos más riesgosos les parezcan más apetecibles.

Un trabajo importante que modela este tipo de choques se debe a Constantinides y Duffie (1996), quienes proponen un modelo con agentes heterogéneos que enfrentan choques independientes e idénticamente distribuidos. En este modelo, el ingreso del agente i en t está dado por $I_{it} = \delta_{it}C_t - D_t$, donde el factor δ está dado por

$$\delta_{it} = \exp \left[\sum_{s=1}^t \left(\eta_{is} y_s - \frac{y_s^2}{2} \right) \right]$$

Los choques $\{\eta_{it}\}_t$ son independientes e idénticamente distribuidos y siguen una distribución normal estándar. La solución de este tipo de modelo es considerablemente más compleja, y para contrastarlo con los datos se busca rechazar o aceptar las ecuaciones de Euler que caracterizan su equilibrio.

Al buscar ajustar la evidencia empírica a un modelo de este tipo, Brav et al. (1999) encuentran que la ecuación de Euler para el consumo por hogar no se puede rechazar usando los datos disponibles y un coeficiente de aversión al riesgo razonable (entre 2 y 4). Sin embargo, la ecuación de Euler para el consumo per cápita se rechaza para cualquier nivel de aversión al riesgo, por lo que la evidencia disponible no es suficiente para aceptar este modelo.

En este punto es conveniente adelantar que el modelo que se propone en el presente trabajo considera también el papel fundamental de los choques en el consumo en las decisiones de inversión de los agentes, pero lo hace introduciéndolos de un modo sustancialmente distinto. El razonamiento es que cuando se modelan los choques como variables aleatorias dentro de la restricción presupuestal del agente (por ejemplo, Constantinides y Duffie (1996)), puede suceder que en el contexto agregado su efecto se anule al compensarse mutuamente. Esto es precisamente lo que sucede en este modelo: el acertijo del premio al riesgo no se observa a nivel de los hogares, pero en el nivel agregado éste reaparece.

3.3. Probabilidad de eventos extremos

Una forma más de aproximarse a una posible solución consiste en considerar con probabilidad positiva eventos extremos donde el consumo caiga drásticamente. El primer trabajo a este respecto se debe a Rietz (1988), quien introduce en el modelo de Mehra y Prescott (1985) un tercer estado de la naturaleza que corresponde a una depresión severa. Bajo el escenario de una disminución del 25 % en el consumo con una probabilidad de 1 en 100, es posible replicar un retorno del activo libre de riesgo suficientemente bajo con un coeficiente de aversión al riesgo igual a 10. En años recientes

se ha tratado de extender este tipo de ideas bajo el supuesto fundamental de que los agentes no conocen la probabilidad real de eventos extremos (por ejemplo, en Wang y Mu (2019)).

El problema con esta clase de modelos es que los escenarios requeridos para generar retornos libres de riesgo similares a los históricos no se han observado en EUA en todo el periodo para el cual se dispone de datos sobre el consumo, lo cual hace dudar incluso acerca de la capacidad de los agentes para estimar este riesgo.

3.4. Restricciones crediticias

También se ha intentado explicar la inconsistencia introduciendo restricciones crediticias en los modelos. La idea fundamental es que, si los agentes tienen restricciones para acceder a créditos cuando requieren mayor liquidez, entonces invertirán en instrumentos de bajo riesgo como una forma de ahorro precautorio. Una aproximación a esta idea se encuentra en el modelo propuesto por Constantinides et al. (2002). Este trabajo es interesante e innovador porque introduce agentes con un ciclo de vida particular: cuando son jóvenes tienen restricciones crediticias que les impiden cubrir choques de liquidez (esto tiene consistencia con la idea de que los jóvenes tienen un menor acceso al crédito que los adultos en general). Además, el modelo se construye sobre el supuesto de que una persona joven tiene incertidumbre respecto a su salario futuro y también respecto al retorno de activos riesgosos, por lo que este retorno no tiene correlación con su consumo. Sin embargo, una persona mayor ya no tiene incertidumbre en su salario, y por lo tanto las fluctuaciones en su consumo necesariamente provendrán de los movimientos en el retorno de los activos riesgosos que posea, por lo que estos retornos están fuertemente correlacionados con el consumo. De aquí se deriva que el ciclo vital de los agentes constituye un factor determinante para valuar los activos.

Partiendo de estos supuestos, los autores muestran que tiene sentido pensar que en una economía con restricciones crediticias para los jóvenes, únicamente los mayores poseerán activos riesgosos, y debido a la alta correlación de sus retornos con el consumo, estos activos mostrarán un elevado premio al riesgo (como se observa en la realidad). Mientras que, eliminando las restricciones crediticias, el premio al riesgo se reduce como en los modelos tradicionales.

Sin embargo, esto funciona sólo entre periodos de tiempo sucesivos. Cuando se considera un modelo de generaciones traslapadas, el desplazamiento en la demanda hacia activos riesgosos por parte de los agentes que envejecen tiende a equilibrar los retornos de ambos, reduciendo de nuevo el premio al riesgo y dejando sin explicación la inconsistencia inicial.

3.5. Otras aproximaciones recientes en la literatura

En los últimos años se ha tratado de explicar el acertijo del premio al riesgo buscando formulaciones alternativas. Por ejemplo, Shirvani et al. (2020) sugieren que la inconsistencia se debe al uso de la distribución lognormal para ajustar los datos de crecimiento en el consumo. Proponen una nueva distribución, llamada «normal compuesta inversa» (NCIG, de *normal compound inverse Gaussian*). Esta distribución, en teoría, es capaz de ajustar adecuadamente las colas pesadas que presenta el histograma del crecimiento del consumo.

Otros autores, como Wilson (2020), argumentan que no existe en realidad un agente representativo, y que por lo tanto los modelos de valuación de activos deben ser probados usando datos de consumo de los hogares, y no datos de consumo agregado.

Por otra parte, hay autores que sostienen que en realidad el acertijo del premio al riesgo no depende del modelo, sino de la poca fiabilidad de los datos disponibles. Un ejemplo extremo es el de Korsos (2020), quien argumenta que el origen de la inconsistencia se encuentra en que la inflación anual está sub reportada entre 2 y 6 puntos porcentuales. Además, sostiene que esto no es producto de errores de medición o de un mal tratamiento estadístico, sino que se debe a incentivos de las instituciones gubernamentales.

En última instancia, sin embargo, ninguna de las propuestas de los últimos treinta y cinco años en la literatura constituye una explicación convincente para el acertijo del premio al riesgo, con lo cual la inconsistencia de la teoría con los datos permanece sin solución aparente.

Capítulo 4

Un modelo con información incompleta

Este capítulo (junto con el siguiente) constituye la parte central del presente trabajo y está organizada en dos partes: en primer lugar se discute la relevancia de los choques de ingreso en el consumo de los agentes, y en segundo lugar se propone una forma de incorporarlos mediante una formulación de información incompleta. La formalización de esta idea en el contexto de un equilibrio general se trata en el capítulo siguiente.

4.1. Relevancia de los choques de ingreso en el consumo

Existen múltiples estudios empíricos que utilizan encuestas a los hogares para determinar el efecto que tienen los choques de ingresos (ya sea reales o estimados) en las decisiones de consumo. Como base se puede considerar el trabajo de Karahan y Ozkan (2013), que estudia la persistencia de los choques de ingreso en el ciclo vital de los hogares. Partiendo del supuesto de que los cambios en los patrones de ingreso se explican por diferentes razones (por ejemplo, en el caso de los jóvenes se debe a transiciones entre empleos, mientras que en personas de edad mediana se debe a bonos o promociones, y en personas de edad avanzada a problemas de salud que afectan su productividad), los autores plantean un análisis diferenciado para estudiar la persistencia de los choques de ingreso. Concluyen que la persistencia de los choques aumenta con la edad: el 70 % de un choque recibido en el inicio de la vida productiva de un trabajador se disipa dentro de los cinco años siguientes, mientras que si el mismo choque se experimenta a los 40 años, sólo se disipará en el mismo periodo el 15 %. Además, un choque de una desviación estándar implica un cambio de 26 % en el consumo de una persona de 24 años de edad, mientras que el mismo choque para una persona de 40 años impacta únicamente el 12 % de su consumo. De esto se extraen dos conclusiones importantes: (1)

los choques de ingresos están correlacionados con el consumo, y (2) la persistencia de estos choques se correlaciona negativamente con la edad.

Por otra parte, un estudio relativamente reciente llevado a cabo por Bunn et al. (2018) revela el comportamiento de los hogares ante choques de ingreso no anticipados y temporales con respecto a sus decisiones consumo, medidos mediante la propensión marginal a consumir (PMC). Las conclusiones fundamentales que se presentan son las siguientes:

1. La propensión marginal al consumo promedio debida a un choque negativo está entre 0.46 y 0.68, mientras que la que se debe a un choque positivo se encuentra entre 0.07 y 0.17.
2. La propensión marginal al consumo es significativa y sistemáticamente mayor en quienes incurren en deuda que en quienes ahorran; y la asimetría entre choques positivos y negativos es menos pronunciada en estos últimos.
3. Los hogares con ahorros pequeños o inexistentes, que enfrentan algún tipo de restricción crediticia y tienen una visión pesimista sobre sus posibles ingresos futuros, tienden a mostrar una propensión marginal al consumo significativamente grande, especialmente después de una caída en su ingreso.
4. Un nivel bajo de riqueza líquida respecto al ingreso y una proporción deuda/ingreso alta son predictores fuertes de un mayor gasto debido a un choque negativo de cierta magnitud respecto a un choque positivo del mismo tamaño.
5. Entre los hogares que experimentan un choque de ingreso negativo, la propensión marginal a consumir es significativamente mayor para aquellos preocupados por su ingreso futuro, lo cual es consistente con motivaciones precautorias asociadas al riesgo de ingreso.

Finalmente, una investigación más reciente (Christelis et al., 2019), empleando una base de datos distinta a partir de una muestra de la población danesa, muestra resultados similares: la propensión marginal a consumir promedio se encuentra en el rango 0.15–0.25, y es mayor cuando se asocia a choques de ingreso negativos; es mayor también cuando el hogar dispone de pocos activos líquidos, y tiende a incrementarse con la edad.

Las conclusiones de estos y otros estudios similares son convergentes: los choques de ingreso tienen correlación con el consumo. El grado de correlación depende de (1) si el choque es negativo o positivo, (2) si el agente cuenta con deudas o ahorros, y (3) si existen preocupaciones sobre posibles caídas futuras en el ingreso.

4.2. Agentes con información incompleta

Una posibilidad natural para modelar el efecto de los choques de consumo en un modelo es hacerlo explícitamente, introduciéndolos como una variable aleatoria en la restricción presupuestal del agente. Sin embargo, en el presente trabajo se propone un enfoque distinto: se supone que existen dos posibles estados de la naturaleza: uno positivo (P) y uno negativo (N). En el estado negativo se observa algún tipo de choque en la vida de los agentes que les obliga a consumir en el corto plazo. Se puede pensar en este tipo de choques como emergencias médicas, pérdidas de empleo o acontecimientos similares para los cuales los agentes no se encuentran asegurados. Por otra parte, en el estado positivo los agentes no enfrentan ningún choque durante su vida y consumen normalmente.

El elemento clave es que los agentes, en el periodo inicial de la economía, no saben qué estado futuro se realizará. En ese sentido se dice que enfrentan información incompleta. Además, es precisamente en ese periodo inicial cuando pueden adquirir los activos que les permitan transferir su riqueza (que reciben como dotación inicial) al futuro. Por lo tanto, al adquirir estos activos deben considerar el riesgo de observar un estado negativo y verse obligados a liquidarlos anticipadamente.

Matemáticamente, esto se puede modelar mediante una función de utilidad dependiente del estado de la naturaleza S . Formalmente: sea una economía con $T+1$ periodos ($t = 0, 1, \dots, T$). Los agentes observan la realización de un estado $S \in \{P, N\}$ en el periodo k ($0 < k < T$). Así, en el estado N los agentes consumen un flujo $c_0, c_1, \dots, c_k$, mientras que en el estado P consumen un flujo $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots, c_T$. Por lo tanto, la utilidad $v(\cdot | S)$ en $t = 0$ es el valor esperado de la utilidad de este flujo de consumos, descontado mediante un factor subjetivo β :

$$v(\{c_t\} | S) = \begin{cases} E_0 \left[\sum_{t=0}^k \beta^t u(c_t) \right] & \text{si } S = N \text{ (estado negativo)} \\ E_0 \left[\sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t) \right] & \text{si } S = P \text{ (estado positivo)} \end{cases}$$

Dadas probabilidades (conocidas por el agente) sobre la ocurrencia de S , la utilidad esperada $U(\cdot)$ en $t = 0$ es

$$U(\{c_t\}) = \Pr[S = N] E_0 \left[\sum_{t=0}^k \beta^t u(c_t) \right] + \Pr[S = P] E_0 \left[\sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t) \right]$$

Dado que $k < T$, la segunda suma se puede escribir como $\sum_{t=0}^k \beta^t u(c_t) + \sum_{t=k+1}^T \beta^t u(c_t)$. Y dado que el espacio muestral de S es el conjunto $\{P, N\}$ y ambos eventos son disjuntos, entonces $\Pr[S = N] + \Pr[S = P] = 1$. Así, la utilidad $U(\cdot)$ se puede expresar como

$$U(\{c_t\}) = E_0 \left[\sum_{t=0}^k \beta^t u(c_t) \right] + \Pr[S = P] E_0 \left[\sum_{t=k+1}^T \beta^t u(c_t) \right] \quad (4.1)$$

4.3. Descripción del modelo

La función de utilidad anterior admite una estructura general de $T + 1$ periodos y una gran variedad de especificaciones para la economía a modelar. Para obtener la mayor simplicidad posible, la forma del modelo particular que se estudiará tiene las siguientes características:

1. Una economía con tres periodos ($t = 0, 1, 2$).
2. Un solo bien de consumo, y en cada periodo un mercado donde puede comprarse y venderse libremente. El bien es perecedero, por lo que no puede almacenarse entre un periodo y los siguientes.
3. Dos activos reales: uno riesgoso y uno libre de riesgo. Los activos son bienes contingentes, por lo que se puede pensar en ellos como títulos que pueden adquirirse, y que otorgan al poseedor el derecho a recibir en t una unidad del bien de consumo. El mercado de activos está abierto únicamente en $t = 0$, pero pueden intercambiarse por el bien de consumo en cualquier periodo. La distinción entre los dos activos es la siguiente: el activo riesgoso se intercambia en $t > 0$ por una cantidad estocástica del bien de consumo, mientras que el activo libre de riesgo se intercambia en $t > 0$ por una cantidad conocida del bien de consumo.
4. Una economía de intercambio puro (sin producción): los agentes reciben en $t = 0$ una dotación inicial que pueden consumir en ese momento o bien invertir en un portafolio de activos. De este modo, los activos constituyen el medio para transferir riqueza a periodos futuros.
5. Dos posibles estados de la naturaleza: uno positivo (N) donde los agentes consumen en todos los periodos, y otro negativo (N) donde los agentes interrumpen su consumo en $t = 2$.
6. Información incompleta de los agentes respecto al estado de la naturaleza: inicialmente los agentes no saben qué estado se realizará, sino que lo observan en el periodo $t = 1$. Sin embargo estiman las probabilidades de cada estado: $\Pr[S = N] = \pi_1$ es la probabilidad del estado negativo (N), mientras que $\Pr[S = P] = 1 - \pi_1 = \pi_2$ es la probabilidad del estado positivo (P). Aunque la información es incompleta, se asume que es simétrica: las probabilidades subjetivas π_1 y π_2 son las mismas para todos los agentes.

Bajo los supuestos descritos para la economía a modelar y de acuerdo con la ecuación (4.1), la utilidad esperada de un agente en $t = 0$ es

$$U(c_0, c_1, c_2) = E_0 [u(c_0) + \beta u(c_1)] + \pi_2 E_0 [\beta^2 u(c_2)] \quad (4.2)$$

Con esto se han esbozado las características fundamentales de la economía a modelar. Resta lo siguiente: (1) proveer de un marco conceptual formal para definir el equilibrio general; (2) introducir

este modelo en dicho marco y encontrar los precios de equilibrio de los activos, y (3) especificar el modelo en equilibrio para contrastarlo con los datos empíricos. Los dos primeros pasos se llevan a cabo en el capítulo siguiente, mientras que el tercero se completa en el capítulo 6 (p. 27).

Capítulo 5

Equilibrio general

En este capítulo se presenta el marco conceptual que servirá de contexto para formalizar el modelo desarrollado anteriormente. El objetivo primordial es encontrar precios de equilibrio para activos que se compran y venden en el mercado. El capítulo está estructurado en dos partes: la primera describe la economía que se estudiará y el concepto de equilibrio buscado en los términos más generales posibles (para esto se siguen fundamentalmente los textos de Mas-Colell et al. (1995) y Radner (1982)); mientras que la segunda introduce en esta economía los supuestos del modelo presentado al final del capítulo anterior y caracteriza su equilibrio.

5.1. Marco conceptual general

5.1.1. Estados de la naturaleza

Sea una economía con un conjunto Ω de posibles estados de la naturaleza y $T + 1$ periodos de tiempo, es decir, $t = 0, 1, \dots, T$. Los estados de la naturaleza se realizan en el tiempo final $t = T$, pero en la realización de cada periodo previo $t < T$ ciertos estados quedan descartados. Así, los agentes distinguen perfectamente en cada periodo los posibles estados que se realizarán en el futuro. Formalmente, para cada periodo t existe una partición de Ω , denotada $\mathcal{F}_t$, que se denomina *estructura de información* del tiempo t . Cada elemento de $\mathcal{F}_t$ corresponde a un posible estado parcial de la naturaleza en t . Se asume que en cada periodo la estructura de información se *refina*: si $E \in \mathcal{F}_t$ y $E' \in \mathcal{F}_{t+1}$ con $E \cap E' \neq \emptyset$, entonces necesariamente $E' \subset E$.

Por ejemplo, si $T = 2$ y $\Omega = \{A, B, C, D\}$, entonces $\mathcal{F}_0 = \{\{A, B, C, D\}\}$, es decir, en $t = 0$ cualquier estado es igualmente posible. Si $\mathcal{F}_1 = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}$, entonces en $t = 1$ los agentes saben que ocurrirá A o B o bien C o D (pero no, por ejemplo, A o C). Finalmente, $\mathcal{F}_2 = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}\}$, lo que indica que en $t = 2$ los agentes distinguen perfectamente qué estado se ha realizado. Es

importante notar que, en este ejemplo, cada $\mathcal{F}_t$ es una partición válida de Ω y que las estructuras de van refinando conforme t aumenta.

5.1.2. Bienes, activos y precios

Existen H bienes de consumo en la economía. En cada tiempo t hay un vector de precios (spot) para ellos:

$$\mathbf{p}_t = \begin{pmatrix} p_t^1 \\ \vdots \\ p_t^H \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{++}^H$$

donde $p_t^h : \mathcal{F}_t \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ es el precio spot de una unidad de bien h en el tiempo t .

Hay I agentes. Estos agentes pueden ser heterogéneos en preferencias o dotaciones iniciales, pero se asume que comparten el mismo conjunto de estructuras de información $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_T)$. Cada agente i en el periodo t posee una dotación inicial

$$\boldsymbol{\omega}_t^i = \begin{pmatrix} \omega_t^{1i} \\ \vdots \\ \omega_t^{Hi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^H$$

donde $\omega_t^{hi} : \mathcal{F}_t \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la dotación inicial de bien h en el periodo t para el agente i .

A cada agente i en el periodo t se le asocia un vector de consumo

$$\mathbf{c}_t^i = \begin{pmatrix} c_t^{1i} \\ \vdots \\ c_t^{Hi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^H$$

donde $c_t^{hi} : \mathcal{F}_t \rightarrow \mathbb{R}_+^H$ es la cantidad consumida de bien h en el periodo t por el agente i .

En esta economía hay K activos financieros distintos. Se exige que sean financieros para que sus pagos sean en unidades monetarias, de modo que se simplifique la notación. Se reitera que el activo k es un título que otorga a su poseedor el derecho a recibir $\tilde{X}_t^k$ unidades monetarias en el periodo t (la tilde significa que el pago es en unidades monetarias). El vector $\tilde{\mathbf{X}}_t$ caracteriza los pagos de los activos en t :

$$\tilde{\mathbf{X}}_t = \begin{pmatrix} \tilde{X}_t^1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_t^K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^K$$

donde $\tilde{X}_t^k : \mathcal{F}_t \rightarrow \mathbb{R}_+$ es el pago del activo k en el periodo t , y $t > 0$ (los pagos se realizan en el

futuro).

Cada activo k puede comprarse en $t = 0$ al precio q_k . El vector $\mathbf{q}$ contiene los precios iniciales de todos los activos:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{++}^K$$

Habitualmente se normaliza el pago del activo k mediante su precio en $t = 0$. Este pago normalizado se llama *retorno* y se denota $\tilde{R}_t^k$:

$$\tilde{R}_t^k = \frac{\tilde{X}_t^k}{q_k} \in \mathbb{R}_+$$

Finalmente, se asocia a cada agente i un portafolio de activos representado por el vector

$$\mathbf{z}_t^i = \begin{pmatrix} z_t^{1i} \\ \vdots \\ z_t^{Ki} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K$$

donde z_t^{ki} es la cantidad de activo k que el agente i intercambia en el periodo t . Si esta cantidad es positiva, significa que el agente compró las unidades correspondientes de activo.

5.1.3. Equilibrio

La riqueza monetaria del agente i en el periodo t se denota $\tilde{w}_t^i$ y es igual al valor de su dotación inicial en el periodo más las variaciones provenientes de la compraventa de activos. Así, su riqueza en $t = 0$ es el valor de su dotación inicial menos el valor de los activos que adquiere, mientras que en los tiempos siguientes ($t > 0$) su riqueza es igual a su dotación inicial en t más los rendimientos de los activos que liquida (es decir, que vende):

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0^i &= \mathbf{p}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0^i + \mathbf{q} \cdot \mathbf{z}_0^i \\ \tilde{w}_t^i &= \mathbf{p}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t^i + \tilde{\mathbf{X}}_t \cdot \mathbf{z}_t^i \quad \text{para } t > 0 \end{aligned}$$

La restricción presupuestal del agente i en t es $\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t^i \leq \tilde{w}_t^i$, que en forma expandida se escribe como

$$\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{c}_t^i \leq \mathbf{p}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t^i + \begin{cases} \mathbf{q} \cdot \mathbf{z}_0^i & \text{si } t = 0 \\ \tilde{\mathbf{X}}_t \cdot \mathbf{z}_t^i & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Además de la restricción presupuestal, en el equilibrio se deben vaciar los mercados spot de bienes.

Dado que en esta economía no hay producción, esto equivale a que el consumo agregado total debe ser igual a las dotaciones iniciales agregadas:

$$\forall h, \quad \sum_{i=1}^I \sum_{t=0}^T c_t^{hi} \leq \sum_{i=1}^I \sum_{t=0}^T \omega_t^{hi} \quad (5.2)$$

Finalmente, dado que poseer activos no genera utilidad para el agente, ninguno de ellos dejará sin liquidar los activos que haya adquirido, por lo que la suma total del portafolio de cada activo de cada agente debe ser cero:

$$\forall k, i \quad \sum_{t=0}^T z_t^{ki} = 0 \quad (5.3)$$

Por lo tanto, el equilibrio de la economía se entiende como el conjunto de asignaciones donde cada agente elige (para cada activo k) un portafolio inicial z_0^{ki} de forma que maximice su utilidad esperada sujeta a su restricción presupuestal (5.1), y donde se cumplan además las condiciones (5.2) y (5.3). Formalmente:

Definición. Para la economía descrita, dado un conjunto de dotaciones iniciales $\{\omega_t^i\}$ y un conjunto de activos caracterizados por sus correspondientes retornos $\{\tilde{X}_t\}$, se dice que la asignación $\{c_t^{i*}, z_t^{i*}, p_t^*, q^*\}$ constituye un equilibrio (de Radner) si:

1. Para cada agente i con preferencias representadas por la función de utilidad esperada $U_i(\cdot)$, las asignaciones c_t^{i*}, z_t^{i*} son soluciones del problema

$$\max_{\{z_0^i\}} E_0[U_i(\{c_t^i\})] \quad \text{s.a.} \quad p_t \cdot c_t^i \leq \tilde{w}_t^i$$

2. Para cada $h = 1, \dots, H$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^I \sum_{t=0}^T c_t^{hi*} \leq \sum_{i=1}^I \sum_{t=0}^T \omega_t^{hi}$$

3. Para cada activo $k = 1, \dots, K$ y para cada agente $i = 1, \dots, I$ se cumple que

$$\sum_{t=0}^T z_t^{ki*} = 0$$

En la definición anterior, $E_t[\cdot]$ es la notación compacta para la esperanza condicional $E[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$.

5.2. Aplicación al modelo propuesto

A continuación se adapta el modelo propuesto en el capítulo 4 al contexto descrito anteriormente. En este caso la economía se desarrolla en tres periodos, que se numeran $t = 0, 1, 2$. El tiempo $t = 0$ corresponde al estado donde los agentes realizan sus decisiones de inversión.

Existe un solo bien de consumo ($H = 1$), por lo que los vectores $\mathbf{p}_t$ (precio spot del bien de consumo), $\boldsymbol{\omega}_t^i$ (dotación inicial) y $\mathbf{c}_t^i$ (consumo) son escalares:

$$p_t \in \mathbb{R}_{++}, \quad \omega_t^i \in \mathbb{R}_+, \quad c_t^i \in \mathbb{R}_+$$

Se asume que los agentes tienen idénticas dotaciones iniciales (estrictamente positivas) ω en $t = 0$, mientras que en el resto de los periodos tienen dotaciones iniciales cero: $\omega_0^i = \omega > 0$, $\omega_t^i = 0$ para $t > 0$, para todo i .

Existen dos activos, uno riesgoso y uno seguro. Se denota el pago del activo riesgoso en t como $\tilde{X}_t$, y el pago del activo seguro en t como $\tilde{X}_t^f$. Los portafolios del agente i en t se denotan como r_t^i y s_t^i , para los activos riesgoso (r) y seguro (s) respectivamente.

Como la información es simétrica, todos los agentes tienen la misma utilidad esperada en $t = 0$ dada por la ecuación (4.2):

$$U_i(c_0^i, c_1^i, c_2^i) = E_0[u(c_0^i) + \beta u(c_1^i) + \pi_2 \beta^2 u(c_2^i)]$$

El equilibrio entonces se caracteriza por las siguientes dos condiciones:

1. El agente i resuelve

$$\max_{r_0^i, s_0^i} E_0[u(c_0^i) + \beta u(c_1^i) + \pi_2 \beta^2 u(c_2^i)]$$

sujeto a

$$\begin{aligned} p_0 c_0^i &\leq p_0 \omega + q r_0^i + q^f s_0^i \\ p_t c_t^i &\leq \tilde{X}_t r_t^i + \tilde{X}_t^f s_t^i \quad \text{para } t > 0 \\ r_0^i + r_1^i + r_2^i &= 0 \\ s_0^i + s_1^i + s_2^i &= 0 \end{aligned}$$

2. Se satisface que

$$\sum_{i=1}^I \sum_{t=0}^2 c_t^{i*} \leq I \omega$$

Se asume que la utilidad de Bernoulli $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones de monotonidad (creciente) y concavidad estrictas: $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) < 0$, con lo cual se garantiza la existencia de una solución interior para el problema, donde las restricciones se satisfacen con igualdad.

Al resolver el problema del agente (véase apéndice A.5, pág. 56) se obtiene la siguiente expresión del precio de equilibrio en $t = 0$ del activo riesgoso:

$$q^* = E_0 \left[\beta \frac{u'(c_1^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_1}{p_1} + \pi_2 \beta^2 \frac{u'(c_2^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_2}{p_2} \right] = E_0 \left[\beta \frac{u'(c_1^i)}{u'(c_0^i)} X_1 + \pi_2 \beta^2 \frac{u'(c_2^i)}{u'(c_0^i)} X_2 \right]$$

donde X_t es el pago del activo riesgoso en términos reales (normalizado por el precio del bien spot en t). En este sentido, X_t es el pago de un activo real que sigue la misma dinámica estocástica que $\tilde{X}_t$.

De la ecuación anterior se observa que el parámetro π_2 modela correctamente la valoración del agente respecto a su probabilidad de sufrir un choque. Particularmente (y dado que todos los términos son positivos), se observa que $\partial q^* / \partial \pi_2 > 0$ o bien, de forma equivalente (dado que $\pi_2 = 1 - \pi_1$), $\partial q^* / \partial \pi_1 < 0$. Esto tiene sentido, pues conforme aumenta la probabilidad de sufrir un choque de consumo, el agente valora menos los pagos de largo plazo ($t = 2$), con lo cual disminuye su precio.

A continuación se define una notación para el factor de descuento estocástico dependiente del tiempo t , que denotaremos δ_t , como:

$$\delta_t = \beta^t \frac{u'(c_t^i)}{u'(c_0^i)} \quad (5.4)$$

Empleando el factor de descuento δ_t , la ecuación de valuación resulta

$$q^* = E_0[\delta_1 X_1] + \pi_2 E_0[\delta_2 X_2] \quad (5.5)$$

Esta expresión proporciona la intuición más general del problema de valuación: el precio de un activo riesgoso es igual al valor esperado de sus pagos futuros, descontándolo por un factor δ_t que depende de: 1) la impaciencia del agente por consumir, modelada mediante el factor β ; y 2) la tasa marginal de sustitución intertemporal del consumo.

Para el caso del activo sin riesgo, la expresión para q_f^* es análoga. Así, cuando se satisfacen las ecuaciones de los precios q_* y q_f^* se tienen condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio:

$$\begin{aligned} q^* &= E_0[\delta_1 X_1] + \pi_2 E_0[\delta_2 X_2] \\ q_f^* &= E_0[\delta_1 X_1^f] + \pi_2 E_0[\delta_2 X_2^f] \end{aligned}$$

Dado que los precios q^* , q_f^* se determinan en $t = 0$, son medibles respecto a $\mathcal{F}_0$, y por lo tanto las

ecuaciones se pueden transformar para expresar retornos en lugar de pagos (recordando que, por la definición de retorno, $R_t = X_t/q$):

$$\begin{aligned} 1 &= E_0[\delta_1 R_1] + \pi_2 E_0[\delta_2 R_2] \\ 1 &= E_0[\delta_1 R_1^f] + \pi_2 E_0[\delta_2 R_2^f] \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene

$$E_0[\delta_1 R_1] + \pi_2 E_0[\delta_2 R_2] = E_0[\delta_1 R_1^f] + \pi_2 E_0[\delta_2 R_2^f]$$

Y finalmente, dado que los retornos del activo seguro no son estocásticos, son constantes respecto al operador de esperanza condicional:

$$E_0[\delta_1 R_1] + \pi_2 E_0[\delta_2 R_2] = E_0[\delta_1] R_1^f + \pi_2 E_0[\delta_2] R_2^f \quad (5.6)$$

Esta es la condición que deben satisfacer los retornos de ambos activos en equilibrio.

Capítulo 6

Evaluación del modelo

La ecuación de valuación (5.5) constituye el resultado más general del modelo de equilibrio presentado, mientras que la ecuación (5.6) expresa la condición que deben cumplir simultáneamente los retornos reales tanto del activo riesgoso como del activo seguro en equilibrio. Esta última expresión es la que se empleará para obtener un estimador del premio al riesgo.

El capítulo se divide en cuatro secciones. En la primera se describen la especificación del modelo y sus respectivos supuestos. La segunda sección muestra las series de datos empleadas y verifica que se cumpla el supuesto de lognormalidad de la tasa de crecimiento del consumo. En la tercera sección se describen los resultados obtenidos al estimar el retorno del activo del riesgoso. Finalmente, la cuarta sección describe dos clases de pruebas de robustez sobre el modelo especificado.

6.1. Especificación

El primer supuesto para especificar el modelo consiste en asumir que el agente tiene preferencias sobre el consumo representadas mediante una función de utilidad u que presenta coeficiente de aversión relativa al riesgo constante (CRRA):

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

Esta expresión está bien definida para $\gamma \neq 1$. Para el caso $\gamma = 1$, la función de utilidad se transforma en $\ln(x)$ (esto se justifica calculando $\lim u(x)$ cuando $\gamma \rightarrow 1$). Es fácil advertir que el coeficiente de aversión relativa al riesgo del agente es $r_R(x, u) = -xu''(x)/u'(x) = \gamma$, que es la constante que define la curvatura de la función. Además, $u(\cdot)$ es creciente y convexa.

Con esta función de utilidad, el factor de descuento estocástico δ_t definido en la expresión (5.4) tiene la forma $\delta_t = \beta^t (c_t/c_0)^{-\gamma}$. Se denota $\Delta c_{t+1} = c_{t+1}/c_t$ a la tasa bruta de crecimiento del consumo en $t+1$. Así, los factores de descuento δ_1 y δ_2 se escriben explícitamente como

$$\delta_1 = \beta \Delta c_1^{-\gamma}, \quad \delta_2 = \beta^2 \Delta c_1^{-\gamma} \Delta c_2^{-\gamma}$$

El segundo supuesto es que Δc_t sigue una distribución lognormal con media μ y varianza σ^2 . La validez de este supuesto para el conjunto de datos empleados se verifica en la sección siguiente. Además, se supone que las observaciones de Δc_t son independientes e idénticamente distribuidas. Esto permite obtener las siguientes expresiones analíticas cerradas para el primer y segundo momentos centrales de los factores de descuento (para la derivación de estas expresiones véase el apéndice A.6, pág. 57):

$$\begin{aligned} E[\delta_1] &= \beta e^{-\gamma(\mu-1)+\gamma^2\sigma^2/2} \\ E[\delta_2] &= \beta^2 e^{-2\gamma(\mu-1)+\gamma^2\sigma^2} \\ \text{var}(\delta_1) &= \beta^2 e^{-2\gamma(\mu-1)+\gamma^2\sigma^2} (e^{\gamma^2\sigma^2} - 1) \\ \text{var}(\delta_2) &= \beta^4 e^{-4\gamma(\mu-1)+2\gamma^2\sigma^2} (e^{2\gamma^2\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

El objetivo de la especificación del modelo es transformar la ecuación (5.6) en una expresión estimable. Al aplicar valores esperados no condicionales en ambos lados y descomponer los valores esperados $E[\delta_t R_t]$ se obtiene la expresión

$$E[\delta_1]E[R_1] + \text{cov}(\delta_1, R_1) + \pi_2 E[\delta_2]E[R_2] + \pi_2 \text{cov}(\delta_2, R_2) = E[\delta_1]E[R_1^f] + \pi_2 E[\delta_2]E[R_2^f]$$

Además, se asume que el retorno bruto anual del activo riesgoso es una variable aleatoria R con media $\bar{R}$ y varianza $\sigma^2(R)$, que sus ocurrencias son independientes e idénticamente distribuidas, y que cada periodo del modelo contiene el mismo número de años. Entonces, $E[R_1] = \bar{R}$ y $E[R_2] = E[R^2] = \bar{R}^2$. De forma análoga, denotando por R^f el retorno libre de riesgo medio, $E[R_1^f] = R^f$, y $E[R_2^f] = (R^f)^2$. Entonces la ecuación del modelo se escribe como

$$E[\delta_1]\bar{R} + \text{cov}(\delta_1, R_1) + \pi_2 E[\delta_2]\bar{R}^2 + \pi_2 \text{cov}(\delta_2, R_2) = E[\delta_1]R^f + \pi_2 E[\delta_2](R^f)^2$$

La covarianza de dos variables aleatorias se puede escribir como el producto de su coeficiente de correlación y sus respectivas desviaciones estándar. Denotando por ρ_t al coeficiente de correlación $\rho(\delta_t, R_t)$, se tiene

$$E[\delta_1]\bar{R} + \rho_1 \sigma(\delta_1) \sigma(R) + \pi_2 E[\delta_2]\bar{R}^2 + \pi_2 \rho_2 \sigma(\delta_2) \sigma(R^2) = E[\delta_1]R^f + \pi_2 E[\delta_2](R^f)^2$$

Las únicas variables que quedan por determinar son los coeficientes de correlación ρ_1 y ρ_2 . Se argumenta que están determinados por la probabilidad π_2 de la siguiente forma: si $\pi_2 = 0$, el agente no consumirá en $t = 2$, por lo que la correlación del consumo con el retorno del activo riesgoso en dicho periodo debe ser cero. Sin embargo, en tal caso el agente consumirá únicamente en $t = 1$, por lo que la correlación del consumo con el retorno del activo riesgoso en dicho periodo debe ser uno. Por lo tanto, la correlación de δ_1 con R_1 debe ser -1 (pues el consumo tiene un exponente negativo en δ_1). Un análisis análogo para el caso de $\pi_2 = 1$ lleva a concluir que $\rho_1 = 0$ y $\rho_2 = -1$. La tabla (6.1) muestra los valores que debe tomar cada coeficiente de correlación dependiendo del valor extremo de π_2 .

π_2	$\rho_1(\pi_2)$	$\rho_2(\pi_2)$
0	-1	0
1	0	-1

Cuadro 6.1: Valores de los coeficientes de correlación como funciones de π_2 .

Asumiendo además que la relación entre π_2 y ρ_t es lineal, los coeficientes de correlación pueden expresarse como funciones explícitas de π_2 :

$$\rho_1(\pi_2) = \pi_2 - 1, \quad \rho_2(\pi_2) = -\pi_2$$

y al sustituirlos en la ecuación del modelo se obtiene

$$\pi_2 E[\delta_2] \bar{R}^2 + E[\delta_1] \bar{R} + (\pi_2 - 1) \sigma(\delta_1) \sigma(R_1) - \pi_2^2 \sigma(\delta_2) \sigma(R_2) - E[\delta_1] (R^f) - \pi_2 E[\delta_2] (R^f)^2 = 0$$

o, en términos compactos,

$$a \bar{R}^2 + b \bar{R} + c = 0$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \pi_2 E[\delta_2] \\ b &= E[\delta_1] \\ c &= (\pi_2 - 1) \sigma(\delta_1) \sigma(R) - \pi_2^2 \sigma(\delta_2) \sigma(R^2) - E[\delta_1] R^f - \pi_2 E[\delta_2] (R^f)^2 \end{aligned}$$

Al resolver esta ecuación para $\bar{R}$ se obtiene un estimador del retorno medio anual del activo riesgoso que puede compararse con el retorno medio observado en los datos históricos. Dado que la ecuación es de segundo orden en $\bar{R}$, la solución puede obtenerse analíticamente:

$$\bar{R} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde, dado que $a > 0$ y $b > 0$, la solución correcta es la que tiene a $+1$ como coeficiente de la raíz

cuadrada (de lo contrario el retorno sería negativo). El estimador del retorno del activo riesgoso es entonces

$$\bar{R} = \frac{-E[\delta_1] + \sqrt{E[\delta_1]^2 - 4\pi_2 E[\delta_2]c}}{2a} \quad (6.1)$$

donde $c = (\pi_2 - 1)\sigma(\delta_1)\sigma(R) - \pi_2^2\sigma(\delta_2)\sigma(R^2) - E[\delta_1]R^f - \pi_2 E[\delta_2](R^f)^2$.

La expresión (6.1) depende en última instancia de los siguientes parámetros: el factor de descuento subjetivo β , el coeficiente de aversión relativa al riesgo γ , la probabilidad π_2 , la media μ de la tasa bruta de crecimiento del consumo, las varianzas $\sigma^2(R)$ y $\sigma^2(R^2)$ del retorno del activo riesgoso y su cuadrado respectivamente, y del retorno medio R^f del activo libre de riesgo.

6.2. Datos empleados

6.2.1. Series de tiempo

Para obtener los parámetros μ y σ^2 , que corresponden a la media y desviación estándar de la tasa bruta de crecimiento del consumo $\Delta c_{t+1} = c_{t+1}/c_t$, se emplearon los correspondientes estimadores muestrales a partir de la serie del consumo real per cápita para Estados Unidos de la base de datos económicos del Banco de la Reserva Federal de San Luis (U.S. Bureau of Economic Analysis, 2021). Los datos originales de la serie, que son de frecuencia trimestral, se ajustaron a valores anuales usando medias simples. La unidad de los datos son dólares americanos (encadenados a dólares del 2012) con ajuste estacional.

Los retornos de los activos se obtuvieron de la información histórica recopilada por Damodaran (2021), que consiste en los retornos anuales nominales netos desde 1928 hasta 2020 del índice accionario Standard & Poor's 500, del bono cupón cero del Tesoro Estadounidense con madurez de tres meses (*T-bill*), del bono de largo plazo del Tesoro Estadounidense (*T-bond*) y del retorno anual promedio de una muestra de bonos corporativos con calificación Baa. El retorno del activo riesgoso se construyó como el retorno del índice S&P 500, mientras que el retorno del activo libre de riesgo se determinó como el promedio simple de los retornos de los *T-bills*, *T-bonds* y del retorno medio de la muestra de bonos Baa.

Dado que estos retornos son nominales y el modelo considera retornos reales, se ajustaron empleando la inflación anual. Esta última se calculó usando la serie del índice de precios al consumidor medio para todas las ciudades de Estados Unidos de la misma fuente que la serie del consumo (U.S. Bureau of Labor Statistics, 2021). Los datos originales del índice de precios tenían frecuencia mensual, y se ajustaron a valores anuales usando medias simples.

La figura (6.2) muestra los retornos netos calculados del activo riesgoso y del activo libre de riesgo. En ella se observa que ambos presentan las características esperadas según su tipo: el activo ries-

goso muestra una alta volatilidad y frecuentemente alcanza valores negativos, aunque sus valores máximos superan significativamente a los del activo libre de riesgo. Este último presenta menor volatilidad y oscila generalmente en rangos positivos.

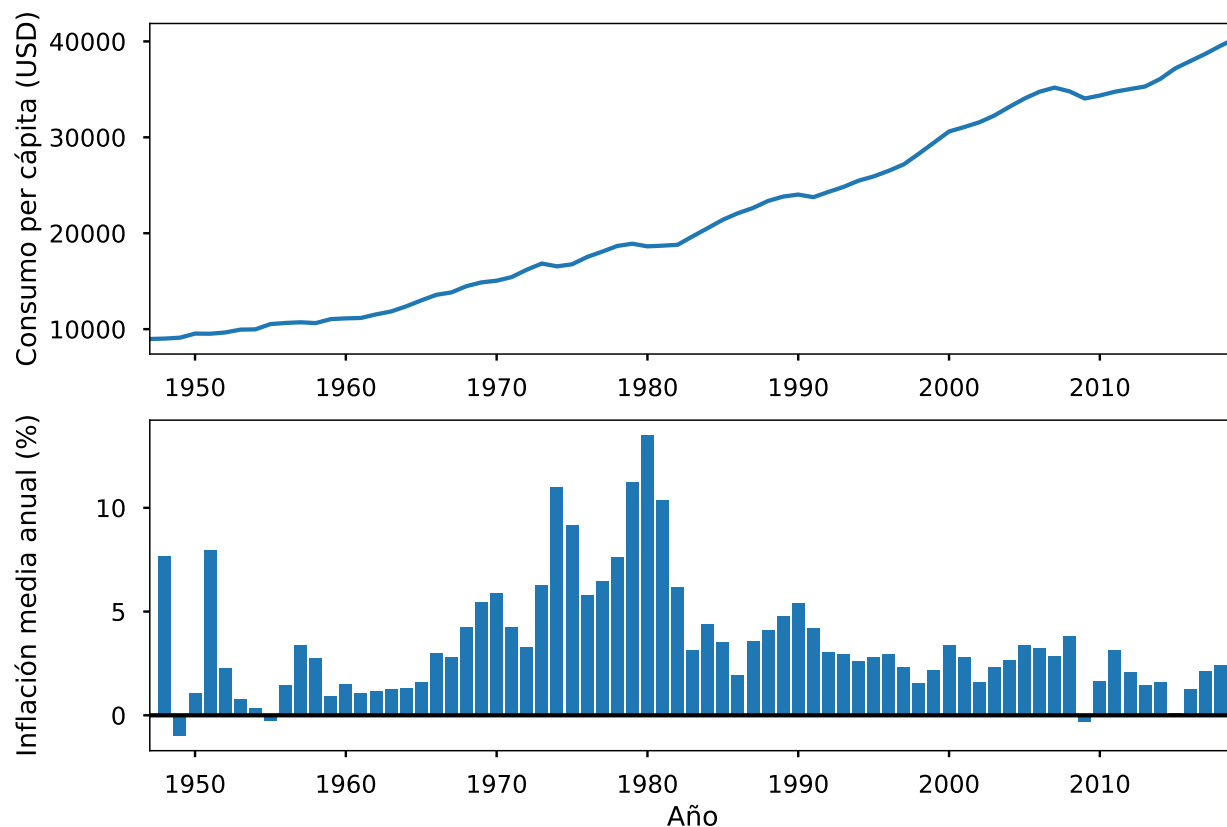


Figura 6.1: *Arriba:* consumo real per cápita (1948–2019) para Estados Unidos en dólares encadenados de 2012, con ajuste estacional; las observaciones originales (trimestrales) se ajustaron a datos anuales usando medias simples. Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis (2021). *Abajo:* inflación media anual para Estados Unidos, calculada como el cambio porcentual en el índice medio de precios al consumidor (1948–2019) para Estados Unidos con base 1982–1984=100, con ajuste estacional; las observaciones originales (mensuales) se ajustaron a datos anuales usando medias simples. Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics (2021).

Por otra parte, el cuadro (6.2) muestra los estadísticos descriptivos de los retornos de ambos activos, calculados para los periodos 1948–2000 y 1948–2019. Como se puede observar, la media del premio al riesgo es de 7.90 % para el periodo comprendido entre 1948 y 2000. Este valor es cercano al 8.4 % reportado por Mehra y Prescott (2003) para el periodo (aproximadamente similar) de 1926 a 2000. Para la totalidad de los datos (1948–2019), el premio al riesgo medio es 6.81 %.

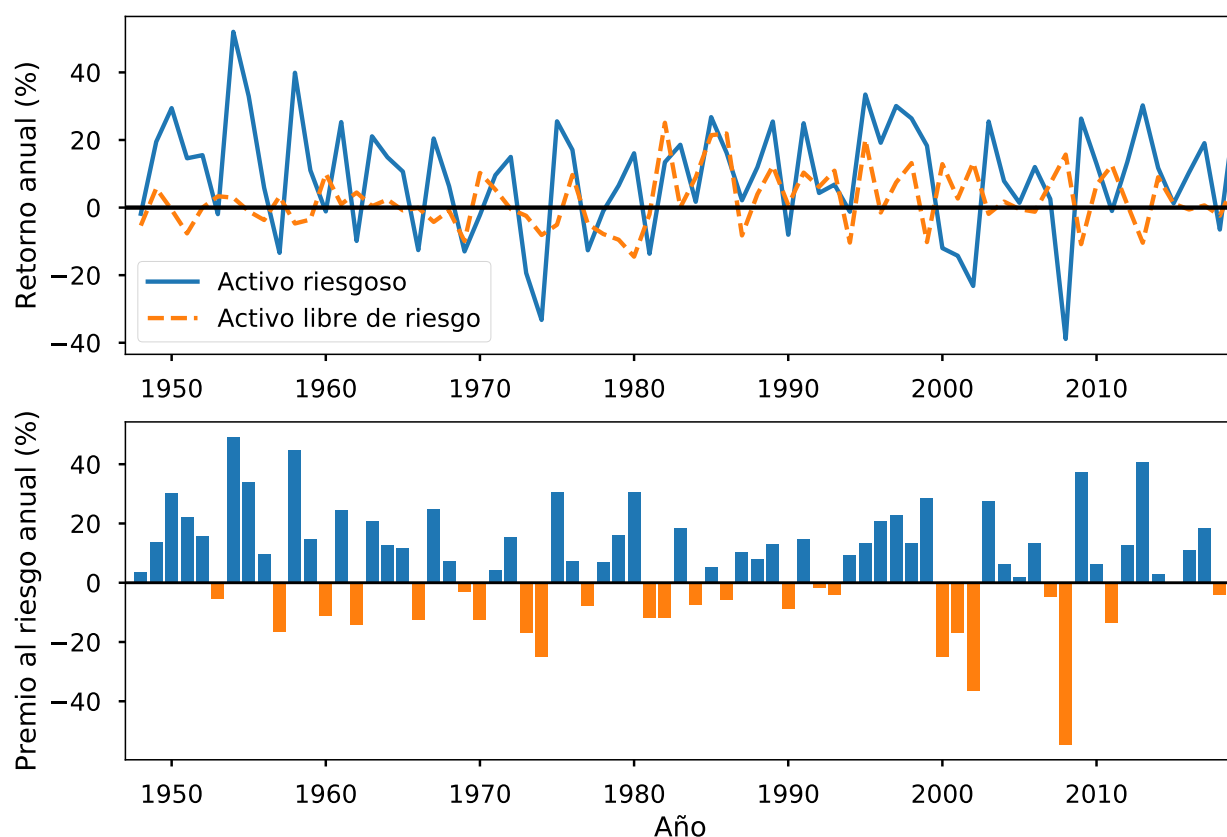


Figura 6.2: Arriba: retornos reales netos anuales del activo riesgoso y del activo libre de riesgo para el periodo 1948–2019, contruidos a partir de los datos históricos recopilados por Damodaran (2021). Abajo: premio al riesgo real anual, calculado como la diferencia entre el retorno del activo riesgoso y el activo libre de riesgo.

Periodo	1948–2000		1948–2019	
Activo	Riesgoso	Libre de riesgo	Riesgoso	Libre de riesgo
Observaciones	53	53	72	72
Mínimo	-33.25	-10.39	-38.88	-10.39
Máximo	52.01	16.95	52.01	16.95
Media	10.03	2.13	9.05	2.24
Desv. estándar	16.65	5.86	16.96	5.25
Premio al riesgo	7.90		6.81	

Cuadro 6.2: Estadísticos descriptivos de los retornos reales netos anuales (en porcentajes) del activo riesgoso y del activo libre de riesgo para los periodos 1947–2000 y 1947–2019, calculados a partir de los datos históricos recopilados por Damodaran (2021). El premio al riesgo corresponde a la diferencia entre las medias del activo riesgoso y el activo libre de riesgo.

6.2.2. Ajuste de la longitud del periodo de inversión

Las series de tiempo ajustadas contienen observaciones anuales, y el modelo considera tres periodos: $t = 0, 1, 2$. Por tanto fue necesario determinar el número de años que contienen los intervalos $t \in [0, 1]$ («corto plazo») y $t \in [1, 2]$ («largo plazo»). Por simplicidad se ha asumido que ambos periodos contienen el mismo número de años T . En otras palabras: de $t = 0$ a $t = 1$ hay T años, lo mismo que de $t = 1$ a $t = 2$.

Así, dado un número de años T , el consumo agregado del periodo se calculó como la suma de los consumos agregados anuales, mientras que para ambos activos el retorno acumulado se obtuvo como el producto de los retornos anuales.

Para el ajuste del modelo se consideraron las siguientes longitudes de los periodos: $T = 1, 3, 5, 10$. A partir de este punto los resultados se presentan especificando la longitud de periodo T a la que se refieren.

6.2.3. Distribución de Δc_{t+1}

Uno supuesto clave del modelo es que la tasa de crecimiento del consumo $\Delta c_{t+1} = c_{t+1}/c_t$ sigue una distribución lognormal. Bajo esta hipótesis, los logaritmos de Δc_{t+1} se distribuyen normalmente. Para evaluar gráficamente este supuesto, se calculó la serie de logaritmos de Δc_{t+1} y se graficaron sus cuantiles (del 1 al 100, en incrementos unitarios), contra los cuantiles teóricos de una distribución normal. El resultado se presenta en la figura (6.3). Se observa que en general los datos parecen ajustarse bien a la distribución.

Adicionalmente, para cada valor de T se efectuaron dos pruebas estadísticas de bondad de ajuste con respecto a una distribución normal para el logaritmo de Δc_{t+1} : Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov. Los resultados se muestran en la tabla (6.3). La hipótesis nula es que la muestra proviene de una población distribuida normalmente, y en ningún caso se puede rechazar para niveles de significancia α menores a 20%.

Prueba	$T = 1$	$T = 3$	$T = 5$	$T = 10$
Shapiro	0.24	0.88	0.79	0.96
Kolmogorov	0.83	0.94	0.92	0.99

Cuadro 6.3: Resultados de las pruebas de Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov sobre el logaritmo de Δc_{t+1} , para cada valor de $T = 1, 3, 5, 10$. Los resultados reportados son valores p .

Como resultado de este breve análisis, se puede concluir que es altamente probable que $\ln \Delta c_{t+1}$ se distribuya normalmente, lo cual implica que Δc_{t+1} sigue una distribución lognormal.

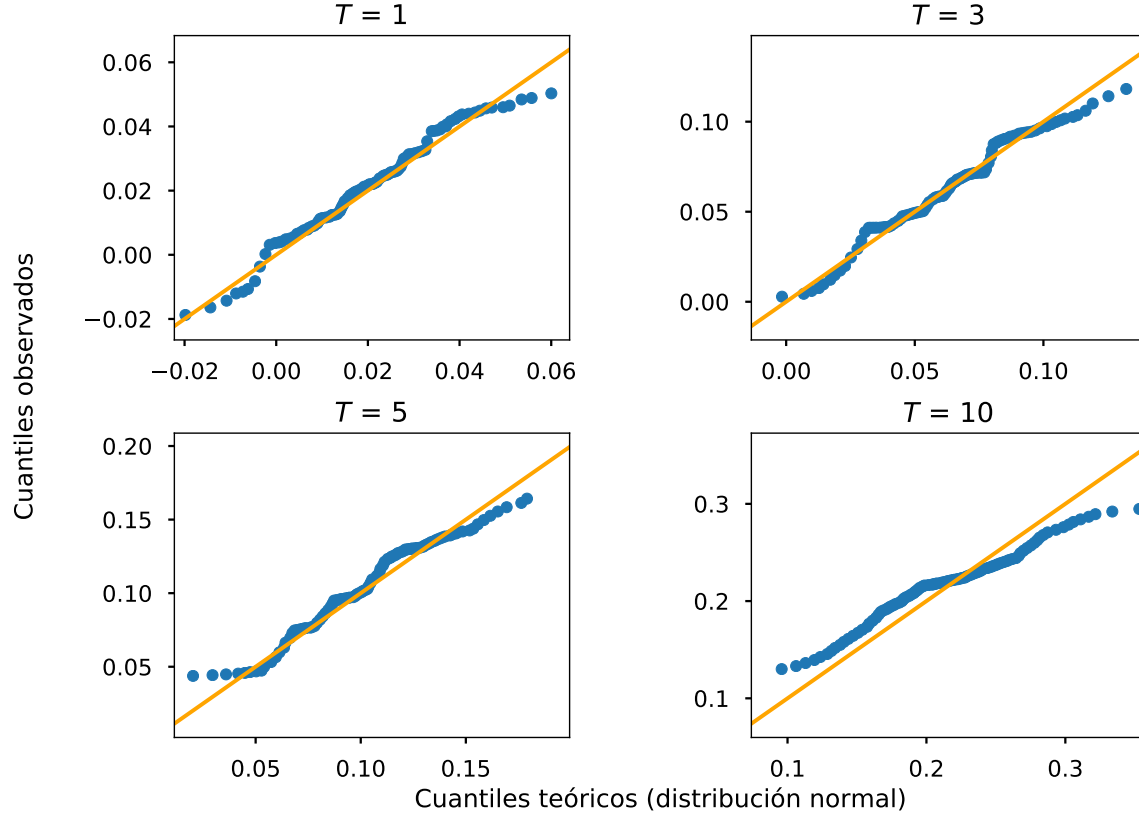


Figura 6.3: Gráfico de cuantiles observados vs. cuantiles teóricos del logaritmo de la tasa de crecimiento anual del consumo, para los posibles valores de T considerados. Los cuantiles teóricos corresponden a una distribución normal con parámetros μ , σ estimados mediante la muestra.

6.3. Resultados

Con los datos presentados y el estimador dado por la ecuación (6.1) se calculó la media estimada por el modelo para el retorno del activo riesgoso y se comparó con la media observada. Antes fue necesario determinar los valores admisibles de los parámetros β , γ y π_2 .

- Para el caso del factor de descuento subjetivo β , existe literatura que ha tratado de realizar estimaciones, basándose tanto en la relación teórica entre el factor de descuento agregado y el tipo de interés real (por ejemplo, Ahmed et al. (2012)) como en cuestionarios realizados a individuos sobre sus posibilidades de ganar loterías distribuidas en el tiempo (por ejemplo, Booij y van Praag (2009)). Para el primer caso, se encuentra un valor de $\beta = 0.9683$ anual para Estados Unidos, usando datos en el periodo 1960–2010. Para el segundo caso, se encuentra un valor de 0.06 mensual asumiendo composición continua, por lo que el valor correspondiente anual es $\beta = \exp(-0.06/12) \approx 0.9950$. En cualquier caso, parece razonable suponer que β debe ser mayor a 0.9. Sin embargo, para considerar también casos extremos, se tomaron como posibles valores de β a 0.10, 0.50, 0.90, 0.95, y 1.00.

- Por otra parte, los valores del coeficiente de aversión relativo al riesgo γ pueden variar desde cero hasta cantidades arbitrariamente grandes. De acuerdo con el consenso generalizado en la literatura (Mehra y Prescott, 1985), no es razonable esperar un coeficiente superior a 10. Además, en el capítulo 2 se ha presentado una breve discusión sobre las implicaciones de un coeficiente de aversión al riesgo «grande» en el comportamiento de los agentes. Sin embargo, para probar el modelo, el rango de valores del parámetro γ fue de 0 a 150.
- El parámetro π_2 es la probabilidad subjetiva de *no* sufrir un choque de consumo ($1 - \pi_2$ es la probabilidad de sí sufrirlo). Se consideraron los siguientes valores para π_2 : 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0.

Para cada combinación posible de los parámetros β , γ y π se obtuvieron valores para $\bar{R}$, que es el estimador del retorno medio anual del activo riesgoso. Estos valores estimados se grafican junto con el retorno medio observado del activo riesgoso.

La figura (6.4) muestra el resultado de la estimación para $\beta = 0.95$ y $T = 1$, junto con las medias observadas del activo riesgoso y libre de riesgo como referencia. Como se puede observar, para ningún valor de π_2 es posible alcanzar el retorno del activo riesgoso para valores razonables de aversión al riesgo ($\gamma \leq 10$). Se requiere $\gamma \geq 30$ para que el modelo alcance un retorno del activo riesgoso estimado igual al observado. Este resultado es precisamente el acertijo del premio al riesgo.

Sin embargo, al aumentar el número de años T que contiene cada periodo, las estimaciones mejoran sustancialmente. La figura (6.5) muestra el resultado de la estimación en la región $0 \leq \gamma \leq 30$ para $\beta = 0.95$ y los cuatro posibles valores de T . Se observa que para $T = 10$, conforme π_2 disminuye el retorno estimado del activo riesgoso aumenta. Sin embargo, aun para $\pi_2 = 0.2$, el modelo no replica el retorno medio observado con un nivel de aversión al riesgo menor a 10.

Sin embargo, es importante observar que en este último caso, la introducción de un choque de consumo con 80 % de probabilidad ($\pi_2 = 0.2$) disminuye el nivel de aversión al riesgo requerido para replicar el retorno observado del activo riesgoso de $\gamma \approx 30$ a $\gamma \approx 15$.

Al variar el parámetro β , que es el factor de descuento subjetivo, los valores estimados por el modelo no cambian sustancialmente. La figura (6.6) muestra los mismos resultados que la figura (6.5) pero para un factor de descuento subjetivo $\beta = 0.10$. El único efecto observado es una mayor dispersión entre las curvas. La especificación del modelo, por lo tanto, es poco sensible a variaciones en el parámetro β .

A partir de los resultados obtenidos se puede argumentar lo siguiente.

1. Empleando periodos de inversión de un año, el modelo no es capaz de replicar el retorno del activo riesgoso para niveles razonables de aversión al riesgo. Conforme aumenta la longitud del

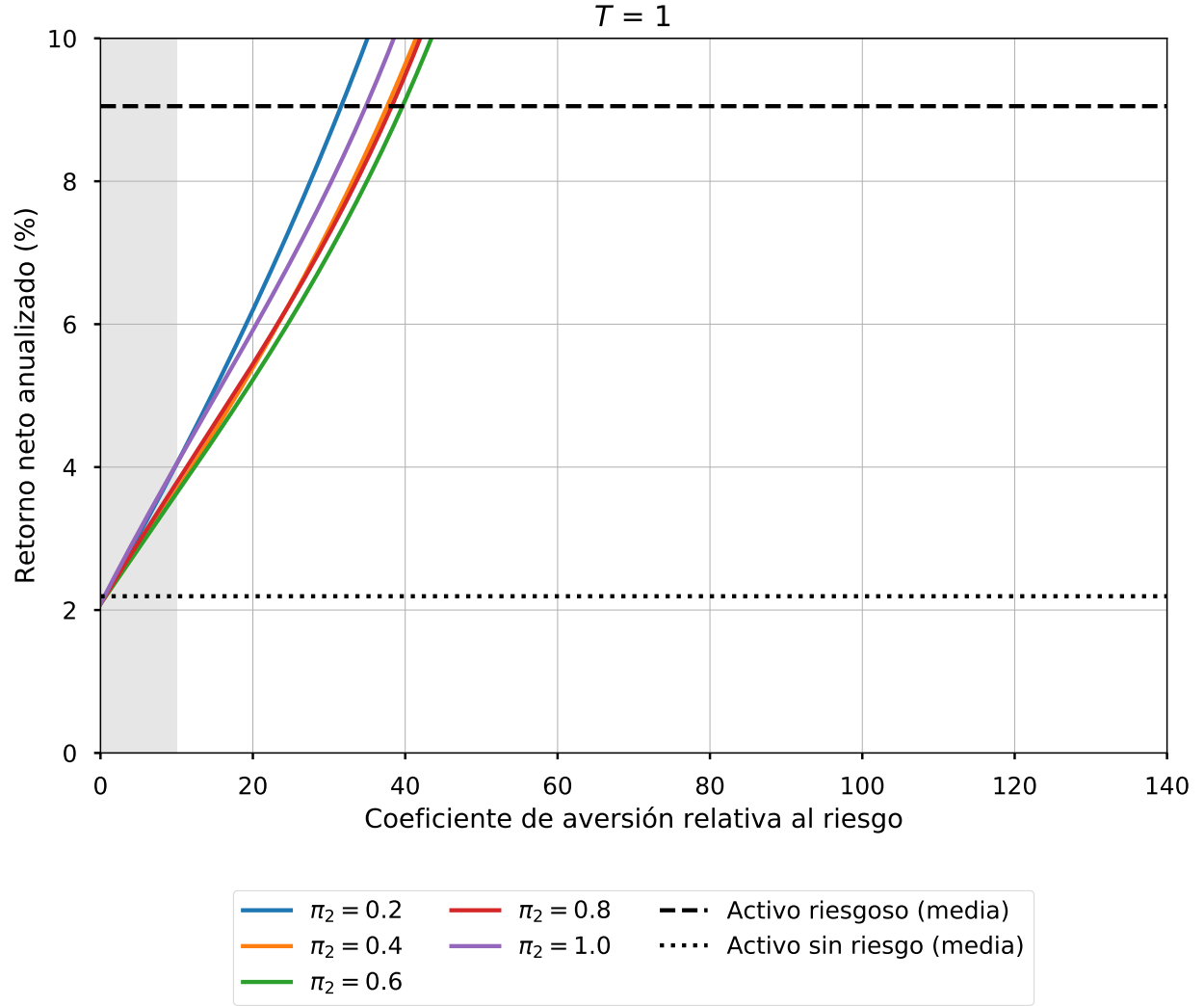


Figura 6.4: Retorno estimado del activo riesgoso con $\beta = 0.95$, $T = 1$ y $0 \leq \gamma \leq 150$. El área sombreada (■) corresponde a la región admisible para γ , entre 0 y 10.

periodo de inversión, el modelo mejora la estimación del retorno del activo riesgoso. Bajo el supuesto de que un agente invierte con un horizonte de diez años estimando una probabilidad de 80 % de sufrir un choque de consumo en dicho periodo, el modelo es capaz de reducir aproximadamente a la mitad el coeficiente de aversión al riesgo requerido para replicar el retorno observado. Sin embargo, aun en este caso extremo, dicho coeficiente es superior a 10, lo cual resulta difícil de conciliar con el comportamiento que se observa en las personas.

2. En todos los casos, conforme aumenta la probabilidad de sufrir un choque de consumo, la estimación del retorno del activo riesgoso mejora, acercándose al retorno medio observado. Esto sugiere que a mayor incertidumbre sobre el consumo futuro, los agentes tienden a exigir un mayor premio al riesgo, lo cual es consistente con la intuición económica.
3. Las variaciones en el factor de descuento subjetivo no son importantes en la estimación del re-

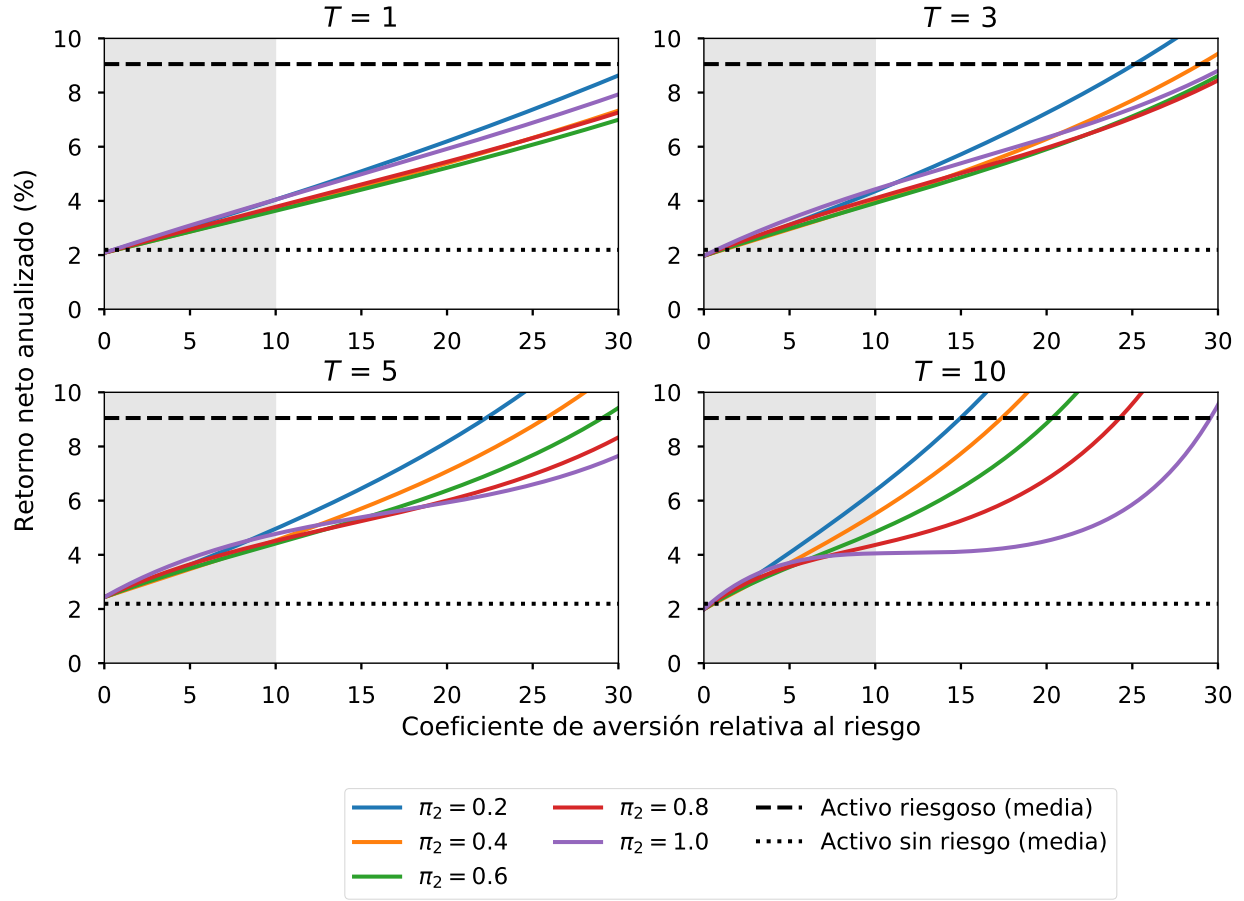


Figura 6.5: Comportamiento del retorno estimado del activo riesgoso en la región $0 \leq \gamma \leq 30$, para $\beta = 0.95$, obtenido al variar el número de años T que contiene cada periodo del modelo ($T = 1, 3, 5, 10$). El área sombreada (■) corresponde a la región admisible para γ , entre 0 y 10.

torno del activo riesgoso. Bajo los supuestos del modelo, tienen mayor peso la probabilidad de un choque de consumo y la longitud del horizonte de inversión. Incluso para valores del factor de descuento subjetivo tan bajos como 10 %, los resultados no cambian significativamente.

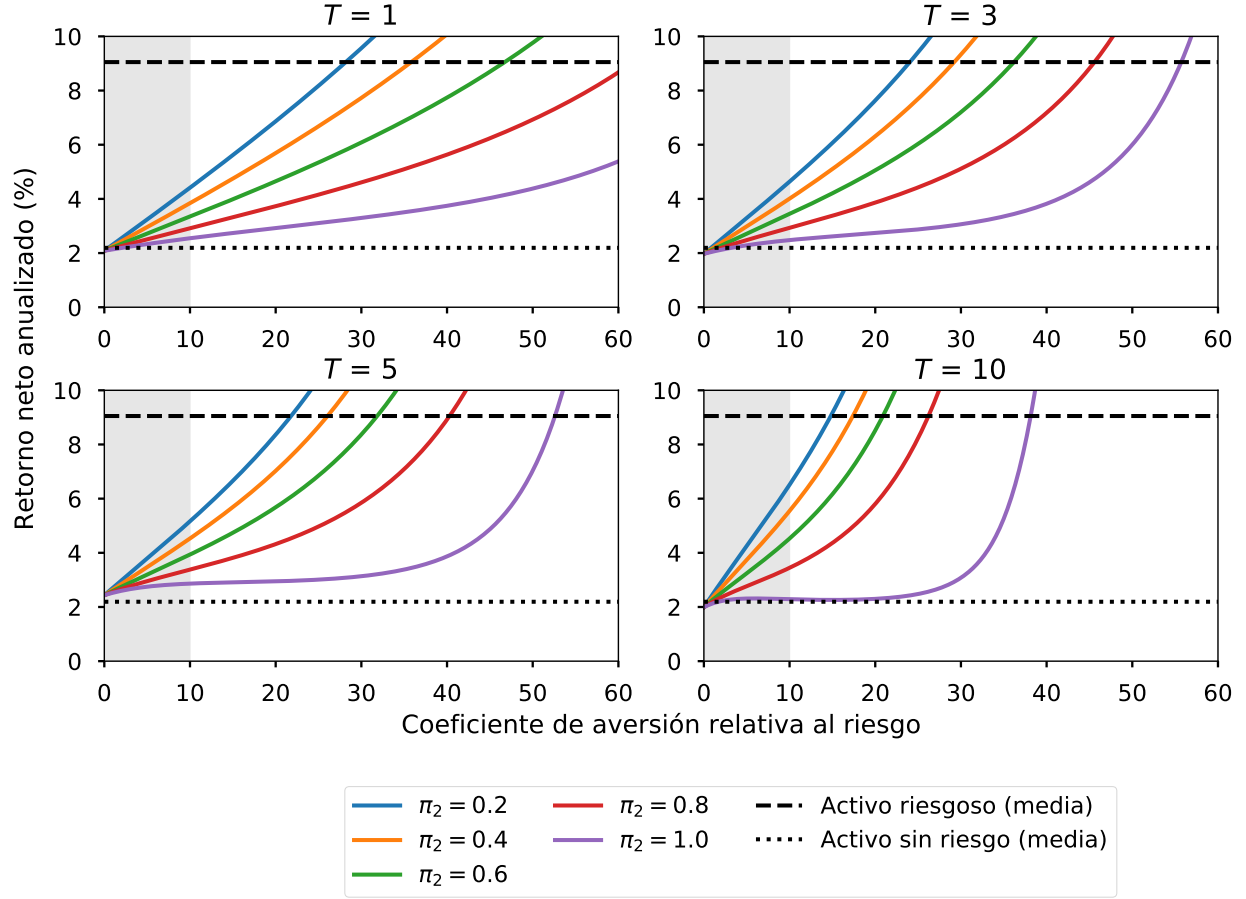


Figura 6.6: Comportamiento del retorno estimado del activo riesgoso en la región $0 \leq \gamma \leq 30$, para $\beta = 0.10$, obtenido al variar el número de años T que contiene cada periodo del modelo ($T = 1, 3, 5, 10$). El área sombreada (■) corresponde a la región admisible para γ , entre 0 y 10.

6.4. Pruebas de robustez

Con el objetivo de evaluar la robustez de los resultados presentados respecto a variaciones en los datos empleados para estimar el modelo, se llevaron a cabo dos clases de pruebas: en primer lugar, el empleo de unidades de tiempo distintas a un año, y en segundo lugar, el uso de datos de países distintos a los Estados Unidos.

6.4.1. Unidades de tiempo distintas a un año

En la especificación original del modelo, el número T representa la cantidad de años que hay en cada periodo del modelo. Sin embargo, no existe ningún motivo para que los periodos estén compuestos por meses o trimestres (por ejemplo) en lugar de años. Para probar este tipo de variaciones, se ajustaron los datos a las siguientes frecuencias: 6 meses, 3 meses, 1 mes, 15 días y 7 días. En el caso de las variables para las cuales la frecuencia máxima es mensual (es el caso del índice de precios y

el consumo real per cápita), los datos de frecuencias mayores se estimaron mediante interpolación lineal directa.

Un supuesto fundamental sobre el que está construida la especificación del modelo es la distribución lognormal de la tasa de crecimiento del consumo, por lo que los resultados de esta prueba de robustez sólo pueden ser válidos para aquellos casos en los que este supuesto se cumple. Para verificarlo, se llevaron a cabo las pruebas de normalidad de Shapiro-Wilks y Kolmogorov-Smirnov sobre el logaritmo de la tasa de crecimiento del consumo. Los resultados se muestran en la tabla (6.4).

Unidad	Prueba	$T = 1$	$T = 3$	$T = 5$	$T = 10$
6 meses	Shapiro	0.86	0.85	0.70	0.99
	Kolmogorov	0.97	0.85	0.77	0.99
3 meses	Shapiro	0.00	0.19	0.66	0.70
	Kolmogorov	0.00	0.87	0.87	0.77
1 mes	Shapiro	0.00	0.00	0.10	0.58
	Kolmogorov	0.00	0.00	0.35	0.87
15 días	Shapiro	0.00	0.00	0.00	0.10
	Kolmogorov	0.00	0.00	0.00	0.35
7 días	Shapiro	0.00	0.00	0.00	0.00
	Kolmogorov	0.00	0.00	0.00	0.00

Cuadro 6.4: Resultados de las pruebas de Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov sobre el logaritmo de Δc_{t+1} , para cada valor de $T = 1, 3, 5, 10$ en la unidad de tiempo indicada (*no* son años). Los resultados reportados son valores p .

Se observa que, conforme aumenta la frecuencia de los datos, el supuesto de lognormalidad de c_{t+1}/c_t se debilita. Sin embargo, el supuesto es válido (dado un nivel de significancia $\alpha = 0.05$) para los siguientes casos:

- Frecuencia de seis meses: $T = 1, 3, 5, 10$.
- Frecuencia de tres meses: $T = 3, 5, 10$
- Frecuencia de un mes: $T = 5, 10$.
- Frecuencia de 15 días: $T = 10$.
- Frecuencia de 7 días: ninguno.

Para todos estos casos, los resultados son consistentes con los obtenidos inicialmente: el modelo no replica el valor observado del retorno del activo riesgoso, aunque su estimación mejora conforme π_2 disminuye. Esto sugiere que el modelo y su especificación es robusto respecto al uso de unidades de tiempo menores a un año. A modo de ejemplo, la figura (6.7) muestra el comportamiento del modelo para datos semestrales.

En todos los casos, el modelo estimado presenta la misma baja sensibilidad al parámetro β que al inicio.

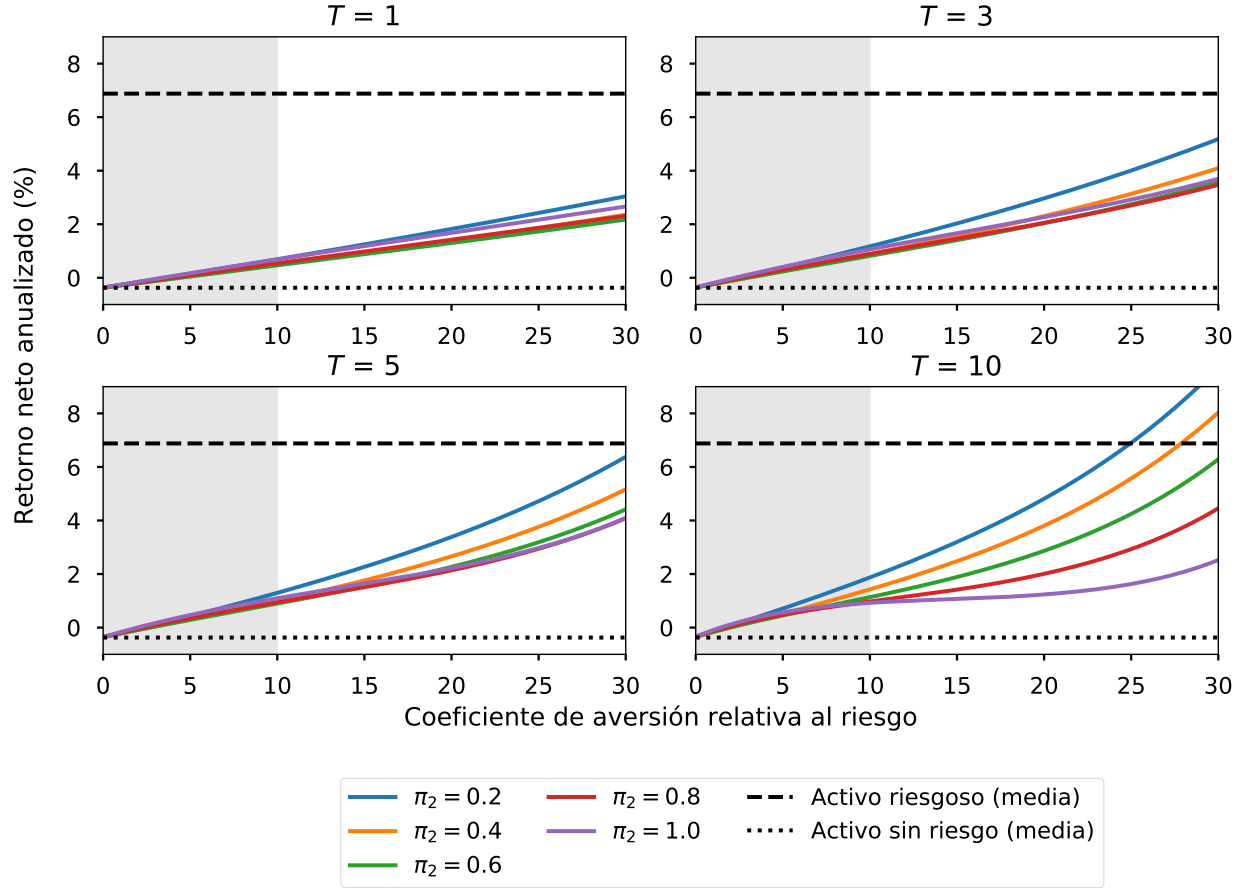


Figura 6.7: Comportamiento del retorno estimado del activo riesgoso en la región $0 \leq \gamma \leq 30$, para $\beta = 0.95$, obtenido al variar el número de semestres T que contiene cada periodo del modelo ($T = 1, 3, 5, 10$). El área sombreada (■) corresponde a la región admisible para γ , entre 0 y 10.

6.4.2. Datos para países distintos a Estados Unidos

De acuerdo con los datos presentados en el cuadro (2.1), se observa que el premio al riesgo existe también en países fuera de los Estados Unidos. Por lo tanto, para probar la validez del modelo para estos casos, es necesario emplear series de datos no estadounidenses.

Se seleccionaron dos países para llevar a cabo esta prueba: Reino Unido y Japón. Esta elección se debe a la disponibilidad de datos y a la diferenciación clara que tienen respecto a Estados Unidos: uno de ellos es una gran economía europea y el otro es una economía emergente asiática. Como activo riesgoso representativo se eligieron índices accionarios sobresalientes de ambos países (FTSE 100 para el caso del Reino Unido y Nikkei 225 para Japón). Como activo seguro representativo se eligieron los retornos de bonos del gobierno inglés a 8 años (Bank of England, 2021) y los retornos

de los bonos JGB japoneses a 10 años (Ministry of Finance, Japan, 2021). Los datos del consumo real per cápita y el índice de precios se obtuvieron de la base de datos del Banco Mundial (Banco Mundial, 2021a).

El cuadro (6.5) muestra los estadísticos descriptivos de los retornos de los activos riesgoso y seguro para ambos países. Se observa que la información es consistente con lo esperado para los dos países: la media del retorno del activo riesgoso es superior a la del activo seguro (lo que indica un mayor rendimiento), mientras que la desviación estándar del retorno del activo seguro es menor a la del activo riesgoso (lo que indica una menor volatilidad, que se asocia directamente al nivel de riesgo del activo).

País	Japón (1974 – 2018)		Reino Unido (1988 – 2019)	
Activo	Riesgoso	Libre de riesgo	Riesgoso	Libre de riesgo
Observaciones	44	44	31	31
Mínimo	-44.57	-2.91	-30.49	-1.41
Máximo	56.18	5.69	32.33	5.99
Media	4.43	1.57	7.33	2.48
Desv. estándar	21.76	1.99	14.85	2.25
Premio al riesgo	2.86		4.85	

Cuadro 6.5: Estadísticos descriptivos de los retornos reales netos anuales (en porcentajes) del activo riesgoso y del activo libre de riesgo para Japón y el Reino Unido. El premio al riesgo corresponde a la diferencia entre las medias del activo riesgoso y el activo libre de riesgo.

En este caso también es necesario llevar a cabo las pruebas de normalidad sobre el logaritmo de la tasa de crecimiento del consumo, para verificar que dicha tasa siga una distribución lognormal. El cuadro (6.6) muestra los resultados de estas pruebas. Para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, en ningún caso se rechaza la hipótesis nula de normalidad, por lo que puede suponerse que la tasa de crecimiento del consumo es lognormal.

País	Prueba	$T = 1$	$T = 3$	$T = 5$	$T = 10$
Japón	Shapiro	0.76	0.70	0.54	0.81
	Kolmogorov	0.99	0.91	0.89	0.99
Reino U.	Shapiro	0.18	0.88	0.84	0.54
	Kolmogorov	0.76	0.99	0.99	0.94

Cuadro 6.6: Resultados de las pruebas de Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov sobre el logaritmo de Δc_{t+1} , para cada valor de $T = 1, 3, 5, 10$ (en años) para los datos de Japón y el Reino Unido. Los resultados reportados son valores p .

Las figuras (6.8) y (6.9) muestran los resultados de la estimación, para longitudes de los periodos del modelo de 1, 3 5 y 10 años, para ambos países, usando un factor de descuento subjetivo de

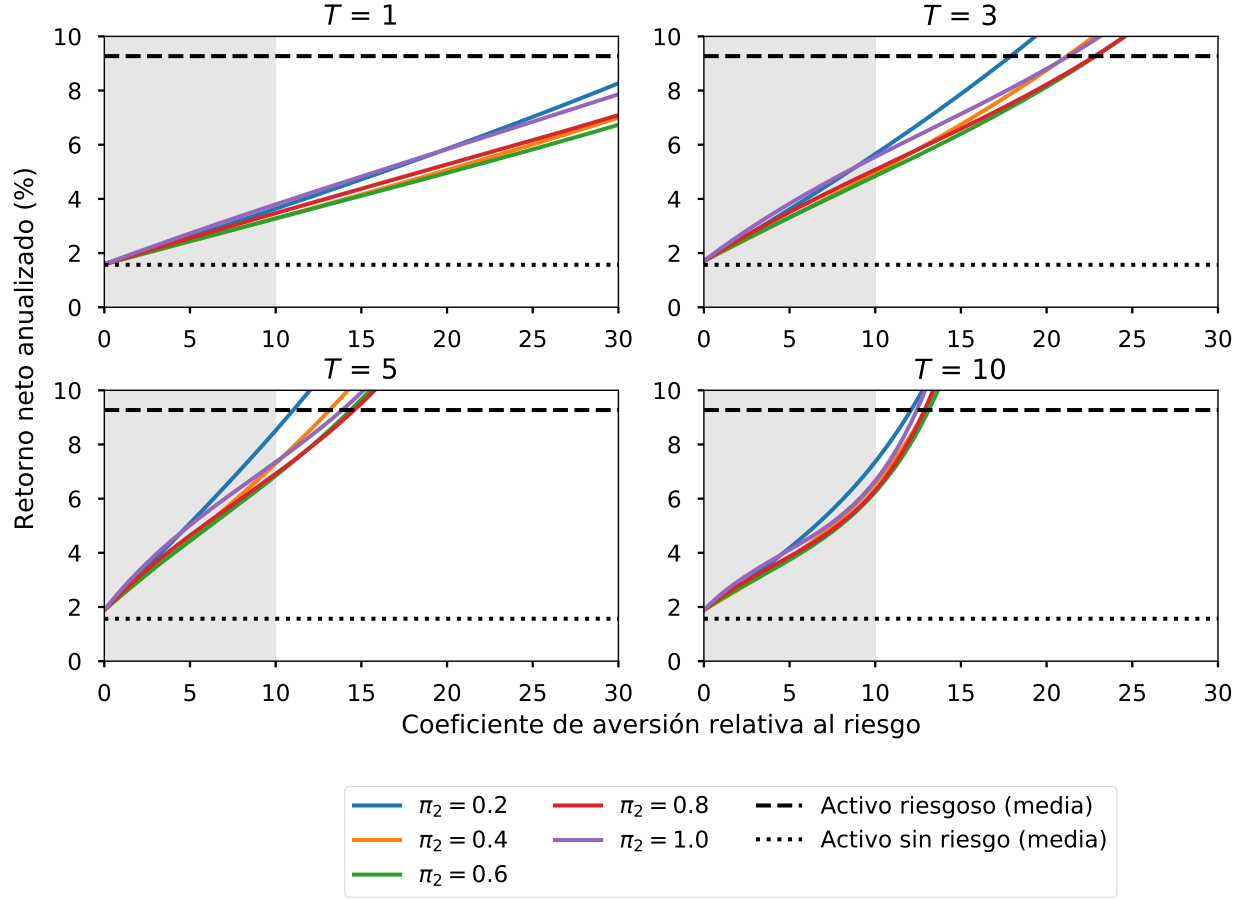


Figura 6.8: Comportamiento del retorno estimado del activo riesgoso obtenido con datos de Japón en la región $0 \leq \gamma \leq 30$, para $\beta = 0.95$, obtenido al variar el número de años T que contiene cada periodo del modelo ($T = 1, 3, 5, 10$). El área sombreada (■) corresponde a la región admisible para γ , entre 0 y 10.

$\beta = 0.95$. Se aprecia que conforme aumenta el número de años T la estimación mejora para valores del coeficiente de aversión al riesgo menores o iguales a 10 (región sombreada).

Los resultados al estimar el retorno del activo riesgoso son consistentes con los obtenidos inicialmente, lo cual indica que el modelo y su especificación son robustos a variaciones provenientes de datos de otros países, al menos para la información disponible para Japón y el Reino Unido. Las estimaciones muestran, al igual que para la especificación con los datos originales, una muy baja sensibilidad al parámetro β .

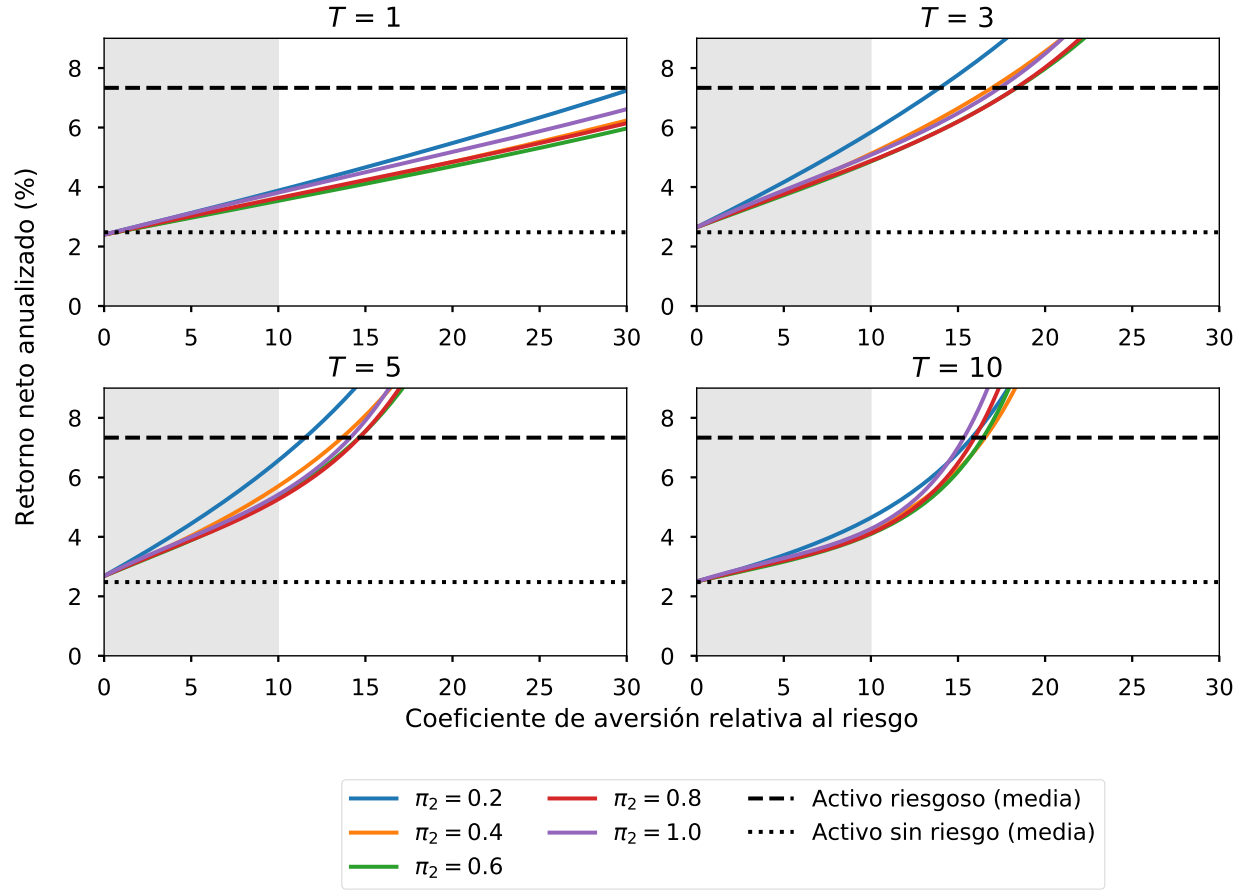


Figura 6.9: Comportamiento del retorno estimado del activo riesgoso obtenido con datos del Reino Unido en la región $0 \leq \gamma \leq 30$, para $\beta = 0.95$, obtenido al variar el número de años T que contiene cada periodo del modelo ($T = 1, 3, 5, 10$). El área sombreada (■) corresponde a la región admisible para γ , entre 0 y 10.

Capítulo 7

Conclusión

En este trabajo se ha presentado una clase de modelos de equilibrio general que introducen choques de consumo en la vida de los agentes, modelándolos como un problema de información incompleta. Esta característica es la diferencia fundamental que tiene respecto otro tipo de modelos donde los choques exógenos se introducen en forma de variables aleatorias en la restricción presupuestal.

Con el objeto de llevar a cabo una prueba lo más sencilla posible, se eligió una especificación elemental, que considera únicamente tres periodos de tiempo y una economía de intercambio puro. Al estimarla y compararla con los datos disponibles para Estados Unidos, la observación más relevante es que la estimación del retorno de un activo riesgoso (y por lo tanto del premio al riesgo esperado) aumenta conforme: (1) la probabilidad subjetiva de observar un choque de consumo en el segundo periodo del modelo se incrementa; y (2) el horizonte de inversión del agente se hace más prolongado. Sin embargo, aunque esta estimación constituye una mejora respecto al escenario base que no considera choques de consumo, no es capaz de replicar el retorno observado del activo riesgoso elegido para coeficientes razonables de aversión al riesgo, incluso para probabilidades de choque tan altas como 80 %.

Hay, sin embargo, una observación fundamental que se deriva de este resultado, y es que efectivamente los agentes exigen un mayor premio al riesgo cuando consideran que es más probable sufrir un choque en su trayectoria futura de consumo. Es posible que la incapacidad del modelo para estimar exactamente el premio al riesgo observado se deba a la simplicidad de la especificación elegida. Por tal motivo parece razonable esperar que al modificarla adecuadamente se obtengan mejores resultados. En este sentido hay al menos dos direcciones obvias en las que el modelo se puede extender:

1. Una primera posibilidad es aumentar el número de periodos del modelo. La especificación estimada en este trabajo es de tres periodos, pero se puede elegir un número arbitrariamente

grande o incluso infinito.

2. Como segunda posibilidad se puede introducir producción en la economía del modelo, de forma que el consumo se vuelva una variable endógena. Bajo este tipo de modelo, los activos riesgosos pueden considerarse como acciones (*shares*) cuyos valores dependen de la productividad de las firmas. La ventaja de una economía de este tipo es que al aumentar el número de parámetros a estimar es más probable capturar con precisión los efectos que se buscan modelar. La desventaja es que el tratamiento del equilibrio y su caracterización teórica se vuelven ligeramente más complejas.

Sin embargo, aun sin considerar estas extensiones, el objetivo planteado inicialmente se ha cumplido: se ha probado que la información incompleta respecto a choques futuros afecta el premio que los inversores exigen por adquirir activos riesgosos, y hay motivos para pensar que bajo especificaciones ligeramente más complejas la relación entre ambos puede fortalecerse. En un equilibrio general bajo incertidumbre, esto determina el precio en equilibrio de los activos, y por lo tanto modifica su retorno. Así, —y esta es la observación fundamental que se desprende del trabajo— parece factible que la solución al acertijo del premio al riesgo sea formulable en términos de un modelo de equilibrio general bajo incertidumbre con información incompleta.

Desde la publicación del trabajo clásico de Mehra y Prescott (1985), que utiliza como modelo fundamental la economía de intercambio propuesta por Lucas (1978), la literatura que trata el acertijo del premio al riesgo ha crecido en complejidad, pues mientras los modelos más sencillos han fallado en explicarlo satisfactoriamente, se han propuesto gradualmente formulaciones más abstractas, más generales y más difíciles de interpretar, requiriendo frecuentemente herramientas matemáticas menos accesibles. En este sentido, una ventaja importante de la clase de modelos presentada en este trabajo es que preserva la simplicidad de las aproximaciones «clásicas» al problema de valuación de activos, donde la única modificación sustancial se encuentra en una función de utilidad esperada dependiente del estado de la naturaleza y en los supuestos que se hagan sobre la distribución de probabilidad de dichos estados.

Bibliografía

- ABEL, ANDREW B. (1990). «Asset Prices Under Habit Formation and Catching Up with the Joneses». *The American Economic Review*, **80**, pp. 38–42. ISSN 00028282.
<http://www.jstor.org/stable/2006539>.
- AHMED, WAQAS; HAIDER, ADNAN y IQBAL, JAVED (2012). «Estimation of Discount Factor (Beta) and Coefficient of Relative Risk Aversion (Gamma) in Selected Countries». *MPRA*.
<https://EconPapers.repec.org/RePEc:pra:mpapa:39736>.
- BANCO MUNDIAL (2021a). «Consumer Price Index (2010 = 100) - Japan».
<https://data.worldbank.org/indicator/FP.CPI.TOTL?locations=JP>.
- (2021b). «Consumer Price Index (2010 = 100) - United Kingdom».
<https://data.worldbank.org/indicator/FP.CPI.TOTL?locations=GB>.
- (2021c). «Final Consumption Expenditure (Constant LCU) - Japan».
<https://data.worldbank.org/indicator/NE.CON.TOTL.KN?locations=JP>.
- (2021d). «Final Consumption Expenditure (Constant LCU) - United Kingdom».
<https://data.worldbank.org/indicator/NE.CON.TOTL.KN?locations=GB>.
- BANK OF ENGLAND (2021). «British Government Securities (calculated using VRP model) - Nominal Par Yields».
<https://www.bankofengland.co.uk/boeapps/database/BankStats.asp>.
- BOOIJ, ADAM S. y VAN PRAAG, BERNARD M.S. (2009). «A Simultaneous Approach to the Estimation of Risk Aversion and the Subjective Time Discount Rate». *Journal of Economic Behavior and Organization*, **70**, pp. 374–388. ISSN 01672681. doi: 10.1016/j.jebo.2009.01.005.
<https://doi.org/10.1016/j.jebo.2009.01.005>.
- BRAV, ALON; CONSTANTINIDES, GEORGE y GECZY, CHRISTOPHER (1999). «Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and Limited Participation: Empirical Evidence». doi: 10.3386/w7406.
<https://doi.org/10.3386/w7406>.
- BUNN, PHILIP; ROUX, JEANNE LE; REINOLD, KATE y SURICO, PAOLO (2018). «The Consumption Response to Positive and Negative Income Shocks». *Journal of Monetary Economics*, **96**. ISSN 03043932. doi: 10.1016/j.jmoneco.2017.11.007.
<https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2017.11.007>.
- CAMPBELL, JOHN Y. (2000). «Asset Pricing at the Millennium». *The Journal of Finance*, **55**. ISSN 00221082. doi: 10.1111/0022-1082.00260.
<https://doi.org/10.1111/0022-1082.00260>.

- CAMPBELL, JOHN Y. y COCHRANE, JOHN H. (1999). «By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior». *Journal of Political Economy*, **107**. ISSN 0022-3808. doi: 10.1086/250059.
<https://doi.org/10.1086/250059>.
- CHRISTELIS, DIMITRIS; GEORGARAKOS, DIMITRIS; JAPPELLI, TULLIO; PISTAFERRI, LUIGI y VAN ROOIJ, MAARTEN (2019). «Asymmetric Consumption Effects of Transitory Income Shocks*». *The Economic Journal*, **129**. ISSN 0013-0133. doi: 10.1093/ej/uez013.
<https://doi.org/10.1093/ej/uez013>.
- COCHRANE, JOHN H. (2005). *Asset pricing: (Revised Edition)*. Princeton University Press. doi: 10.1016/j.jebo.2005.08.001.
<https://doi.org/10.1016/j.jebo.2005.08.001>.
- CONSTANTINIDES, G. M.; DONALDSON, J. B. y MEHRA, R. (2002). «Junior Can't Borrow: A New Perspective on the Equity Premium Puzzle». *The Quarterly Journal of Economics*, **117**. ISSN 0033-5533. doi: 10.1162/003355302753399508.
<https://doi.org/10.1162/003355302753399508>.
- CONSTANTINIDES, GEORGE M. (1990). «Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle». *Journal of Political Economy*, **98**. ISSN 0022-3808. doi: 10.1086/261693.
<https://doi.org/10.1086/261693>.
- CONSTANTINIDES, GEORGE M. y DUFFIE, DARRELL (1996). «Asset Pricing with Heterogeneous Consumers». *Journal of Political Economy*, **104**, pp. 219–240. ISSN 00223808, 1537534X. doi: 10.1086/262023.
<https://doi.org/10.1086/262023>.
- DAMODARAN, ASWATH (2021). «Historical Returns on Stocks, Bonds and Bills: 1928-2020». http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/histretSP.html.
- DASILVA, AMADEU; FARKA, MIRA y GIANNIKOS, CHRISTOS (2019). «Age-Dependent Increasing Risk Aversion and the Equity Premium Puzzle». *Financial Review*, **54**. ISSN 0732-8516. doi: 10.1111/fire.12191.
<https://doi.org/10.1111/fire.12191>.
- DIAMOND, DOUGLAS W. y DYBVIG, PHILIP H. (1983). «Bank runs, deposit insurance, and liquidity». *Journal of Political Economy*, **91**, pp. 401–419. ISSN 1537534X. doi: 10.1086/261155.
<https://doi.org/10.1086/261155>.
- EPSTEIN, LARRY G. y ZIN, STANLEY E. (1991). «Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis». *Journal of Political Economy*, **99**. doi: 10.1086/261750.
<https://doi.org/10.1086/261750>.
- HEIBERGER, CHRISTOPHER (2020). «Labor Market Search, Endogenous Disasters and the Equity Premium Puzzle». *Journal of Economic Dynamics and Control*, **114**. ISSN 01651889. doi: 10.1016/j.jedc.2020.103899.
<https://doi.org/10.1016/j.jedc.2020.103899>.
- KARAHAN, FATIH y OZKAN, SERDAR (2013). «On the Persistence of Income Shocks Over the Life Cycle: Evidence, Theory, and Implications». *Review of Economic Dynamics*, **16**. ISSN 10942025.

- doi: 10.1016/j.red.2012.08.001.
<https://doi.org/10.1016/j.red.2012.08.001>.
- KORSOS, LASZLO (2020). «The Equity Premium Puzzle Solution: Incentives to Under-Report Inflation». *SSRN Electronic Journal*. ISSN 1556-5068. doi: 10.2139/ssrn.3559856.
<https://doi.org/10.2139/ssrn.3559856>.
- LUCAS, ROBERT E (1978). «Asset Prices in an Exchange Economy». *Econometrica*, **46**, pp. 1429–1445. doi: 10.2307/1913837.
<https://doi.org/10.2307/1913837>.
- MAS-COLELL, ANDREU; WHINSTON, MICHAEL y GREEN, JERRY (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- MEHRA, RAJNISH y PRESCOTT, EDWARD C. (1985). «The Equity Premium, a Puzzle». *Journal of Monetary Economics*, **15**, pp. 145–161. doi: 10.1016/0304-3932(85)90061-3.
[https://doi.org/10.1016/0304-3932\(85\)90061-3](https://doi.org/10.1016/0304-3932(85)90061-3).
- (2003). «The Equity Premium in Retrospect». *Handbook of the Economics of Finance*, pp. 889–938. doi: 10.1016/S1574-0102(03)01023-9.
[https://doi.org/10.1016/S1574-0102\(03\)01023-9](https://doi.org/10.1016/S1574-0102(03)01023-9).
- MINISTRY OF FINANCE, JAPAN (2021). «Interest Rates: Historical Data (1974-)».
https://www.mof.go.jp/english/jgbs/reference/interest_rate/index.htm.
- RADNER, ROY (1982). «Equilibrium Under Uncertainty». *Handbook of Mathematical Economics*, **2**. doi: 10.1016/S1573-4382(82)02015-3.
[https://doi.org/10.1016/S1573-4382\(82\)02015-3](https://doi.org/10.1016/S1573-4382(82)02015-3).
- RIETZ, THOMAS A. (1988). «The Equity Risk Premium - A Solution». *Journal of Monetary Economics*, **22**. ISSN 03043932. doi: 10.1016/0304-3932(88)90172-9.
[https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90172-9](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90172-9).
- SHIRVANI, ABOOTALEB; STOYANOV, STOYAN VESELINOV; FABOZZI, FRANK J. y RACHEV, SVETLOZAR T. (2020). «Equity Premium Puzzle or Faulty Economic Modelling?» *SSRN Electronic Journal*. ISSN 1556-5068. doi: 10.2139/ssrn.3530635.
<https://doi.org/10.2139/ssrn.3530635>.
- SIDDIQI, HAMMAD (2017). «A New Perspective on the Equity Premium Puzzle». *SSRN Electronic Journal*. ISSN 1556-5068. doi: 10.2139/ssrn.2908646.
<https://doi.org/10.2139/ssrn.2908646>.
- U.S. BUREAU OF ECONOMIC ANALYSIS (2021). «Real Personal Consumption Expenditures Per Capita [A794RX0Q048SBEA]».
<https://fred.stlouisfed.org/series/A794RX0Q048SBEA>.
- U.S. BUREAU OF LABOR STATISTICS (2021). «Consumer Price Index for All Urban Consumers: All Items in U.S. City Average [CPIAUCSL]».
<https://fred.stlouisfed.org/series/CPIAUCSL>.
- WANG, YUANPING y MU, CONGMING (2019). «Can Ambiguity About Rare Disasters Explain Equity Premium Puzzle?» *Economics Letters*, **183**. ISSN 01651765. doi: 10.1016/j.econlet.2019.

108555.

<https://doi.org/10.1016/j.econlet.2019.108555>.

WILSON, MATTHEW S. (2020). «Disaggregation and the Equity Premium Puzzle». *Journal of Empirical Finance*, **58**. ISSN 09275398. doi: 10.1016/j.jempfin.2020.05.002.

<https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2020.05.002>.

Apéndice A

Apéndices

A.1. Solución del modelo básico

En este apéndice se muestra el procedimiento para resolver el problema

$$\begin{aligned} \max_z \quad & E_t[u(c_t) + \beta u(c_{t+1})] \quad \text{s.a.} \quad c_t = y_t - zp_t \\ & c_{t+1} = y_{t+1} + zX_{t+1} \end{aligned}$$

El problema se puede resolver optimizando directamente sin emplear multiplicadores de Lagrange. La condición de primer orden es

$$E_t \left[u'(c_t) \frac{dc_t}{dz} + \beta u'(c_{t+1}) \frac{dc_{t+1}}{dz} \right] = 0$$

Al derivar las restricciones presupuestales con respecto a la variable z se obtienen

$$\begin{aligned} \frac{dc_t}{dz} &= -p_t \\ \frac{dc_{t+1}}{dz} &= X_{t+1} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la condición de primer orden y resolviendo para p_t se obtiene

$$p_t = \frac{\beta E_t[u'(c_{t+1})X_{t+1}]}{E_t[u'(c_t)]} = E_t \left[\frac{\beta u'(c_{t+1})X_{t+1}}{u'(c_t)} \right]$$

Finalmente, haciendo $m_{t+1} = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$, se obtiene

$$p_t = E_t [m_{t+1} X_{t+1}]$$

que es la expresión correspondiente a la ecuación (2.3).

A.2. Derivación de la cota para el premio al riesgo

En este apéndice se muestra el procedimiento algebraico para llegar a la expresión

$$\frac{|E[R - R^f]|}{\sigma(R)} \leq \frac{\sigma(m)}{E[m]}$$

a partir de las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= E_t [m_{t+1} R_{t+1}] \\ 1 &= R_{t+1}^f E_t [m_{t+1}] \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores implican simultáneamente que

$$\begin{aligned} E_t [m_{t+1} R_{t+1}] &= R_{t+1}^f E_t [m_{t+1}] \\ E_t [m_{t+1}] E_t [R_{t+1}] + \text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}) &= R_{t+1}^f E_t [m_{t+1}] \\ \text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}) &= R_{t+1}^f E_t [m_{t+1}] - E_t [m_{t+1}] E_t [R_{t+1}] \end{aligned}$$

La covarianza condicional de m_{t+1} y R_{t+1} puede escribirse como

$$\text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}) = \rho_t(m_{t+1}, R_{t+1}) \sigma_t(m_{t+1}) \sigma_t(R_{t+1})$$

donde $\rho_t(m_{t+1}, R_{t+1})$ es el coeficiente de correlación condicional entre m_{t+1} y R_{t+1} , $\sigma_t(m_{t+1})$ es la desviación estándar condicional de m_{t+1} y $\sigma_t(R_{t+1})$ es la desviación estándar de R_{t+1} . Por lo tanto, se tiene

$$\rho_t(m_{t+1}, R_{t+1}) \sigma_t(m_{t+1}) \sigma_t(R_{t+1}) = R_{t+1}^f E_t [m_{t+1}] - E_t [m_{t+1}] E_t [R_{t+1}]$$

Resolviendo para el coeficiente de correlación condicional se obtiene

$$\rho_t(m_{t+1}, R_{t+1}) = \frac{R_{t+1}^f E_t [m_{t+1}] - E_t [m_{t+1}] E_t [R_{t+1}]}{\sigma(m) \sigma(R)}$$

que puede escribirse mediante álgebra simple (y advirtiendo el hecho de que R_{t+1}^f es constante

respecto a la información en t , lo que implica que $R_{t+1}^f = E_t[R_{t+1}^f]$ como

$$\rho_t(m_{t+1}, R_{t+1}) = \frac{E_t[m_{t+1}](R_{t+1}^f - E_t[R_{t+1}])}{\sigma_t(m_{t+1})\sigma_t(R_{t+1})} = -\frac{E_t[m_{t+1}]E_t[R_{t+1} - R_{t+1}^f]}{\sigma_t(m_{t+1})\sigma_t(R_{t+1})}$$

El coeficiente de correlación está acotado entre -1 y 1 , por lo que

$$\left| -\frac{E_t[m_{t+1}]E_t[R_{t+1} - R_{t+1}^f]}{\sigma_t(m_{t+1})\sigma_t(R_{t+1})} \right| \leq 1$$

Dado que $\sigma_t(\cdot) \geq 0$ y $m_{t+1} = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t) \geq 0$ (esto se deriva del supuesto de que $u(\cdot)$ es creciente), se tiene que

$$\frac{E_t[m_{t+1}]|E_t[R_{t+1} - R_{t+1}^f]|}{\sigma_t(m_{t+1})\sigma_t(R_{t+1})} \leq 1$$

Tomando los valores esperados (no condicionales) en ambos lados de la desigualdad se obtienen términos independientes del tiempo que corresponden a los valores esperados (que se denotan sin subíndices):

$$\frac{m|R - R^f|}{\sigma(m)\sigma(R)} \leq 1$$

Reescribiendo se obtiene

$$\frac{|R - R^f|}{\sigma(R)} \leq \frac{\sigma(m)}{m}$$

que es la expresión buscada.

A.3. Derivación de la aproximación para $\sigma(m)/m$

En este apéndice se muestra la forma en que puede derivarse la aproximación

$$\frac{\sigma(m)}{m} \approx \gamma\sigma(\Delta c)$$

a partir de dos supuestos: (1) que la tasa de crecimiento del consumo $\Delta c_{t+1} = c_{t+1}/c_t$ sigue una distribución lognormal con media μ y varianza $\sigma^2(\Delta c)$, y (2) que la función de utilidad es isoelástica (CRRA): $u(c) = (c^{1-\gamma} - 1)/(1 - \gamma)$.

En primer lugar se sabe que $m_{t+1} = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$, lo que implica que

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} = \beta (\Delta c_{t+1})^{-\gamma}$$

Dado que Δc_{t+1} es lognormal, entonces $Y = \ln(\Delta c_{t+1})$ es normal con media μ_Y y varianza σ_Y^2 . A su vez, esto implica que $(\Delta c_{t+1})^{-\gamma} = \exp(Y)^{-\gamma} = \exp(-\gamma Y)$.

Entonces, la esperanza condicional de m_{t+1} es:

$$\begin{aligned} E_t[m_{t+1}] &= E_t [\beta(\Delta c_{t+1})^{-\gamma}] \\ &= \beta E_t [\exp(-\gamma Y)] \\ &= \beta \exp(-\gamma E_t[Y] + \gamma^2 \text{var}_t(Y)/2) \end{aligned}$$

Siguiendo un procedimiento análogo, observamos que $E[m_{t+1}^2] = \beta^2 \exp(-2\gamma E_t[Y] + 2\gamma^2 \text{var}_t(Y))$. Con esto podemos calcular la varianza condicional de m_{t+1} :

$$\begin{aligned} \text{var}_t(m_{t+1}) &= E_t[m_{t+1}^2] - E_t[m_{t+1}]^2 \\ &= \beta^2 \exp(-2\gamma E_t[Y] + 2\gamma^2 \text{var}_t(Y)) - [\beta \exp(-\gamma E_t[Y] + \gamma^2 \text{var}_t(Y)/2)]^2 \\ &= \beta^2 \exp(-2\gamma E_t[Y] + 2\gamma^2 \text{var}_t(Y)) - \beta^2 \exp(-2\gamma E_t[Y] + \gamma^2 \text{var}_t(Y)) \end{aligned}$$

Tomando los valores esperados no condicionales (y recordando que $E[Y] = \mu_Y$ y $\text{var}(Y) = \sigma_Y^2$) se obtienen términos independientes del tiempo:

$$\begin{aligned} m &= \beta \exp(-\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2/2) \\ \text{var}(m) &= \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + 2\gamma^2 \sigma_Y^2) - \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2) \end{aligned}$$

(Es importante recordar que m denota el valor esperado del factor de descuento estocástico, se escribe sin el operador $E[\cdot]$) para simplificar la notación).

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(m)}{m} &= \frac{\sqrt{\beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + 2\gamma^2 \sigma_Y^2) - \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2)}}{\beta \exp(-\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2/2)} \\ &= \sqrt{\exp(\gamma^2 \sigma_Y^2) - 1} \end{aligned}$$

La función exponencial se escribe en forma de serie de potencias como $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, por lo cual se puede aproximar empleando los dos primeros términos de la serie como $\exp(x) \approx 1 + x$.

Entonces:

$$\frac{\sigma(m)}{m} = \sqrt{\exp(\gamma^2 \sigma_Y^2) - 1} \approx \sqrt{(1 + \gamma^2 \sigma_Y^2) - 1} = \gamma \sigma_Y$$

Finalmente, dado que $Y = \ln(\Delta c_{t+1}) \approx \Delta c_{t+1} - 1$, entonces $\sigma_Y \approx \sigma(\Delta c)$. Así,

$$\frac{\sigma(m)}{m} \approx \gamma \sigma(\Delta c)$$

que es la expresión buscada.

A.4. Cuantificación del efecto de la aversión relativa al riesgo

En este apéndice se muestra la forma de determinar la elección de un agente entre dos loterías, dependiendo del nivel de aversión relativa al riesgo γ . Se asume que las preferencias del agente están representadas por la función de utilidad $u(x) = (x^{1-\gamma} - 1)/(1 - \gamma)$ (CRRA) y que la utilidad esperada admite una representación von Neumann-Morgenstern.

Se considera una lotería $\mathcal{L}$ con dos posibles resultados α y β . Las probabilidades de ocurrencia son p , $1 - p$ respectivamente: $\mathcal{L} = (p \circ \alpha, (1 - p) \circ \beta)$. La utilidad esperada que obtiene el agente al jugar la lotería $\mathcal{L}$ es

$$U(\mathcal{L}) = pu(\alpha) + (1 - p)u(\beta) = p \frac{\alpha^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} + (1 - p) \frac{\beta^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} = \frac{p\alpha^{1-\gamma} + (1 - p)\beta^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

Para calcular los resultados del ejemplo considerado en el texto, suponer que existen dos loterías: la lotería A ofrece \$100 o \$10, ambos con probabilidad $1/2$ (lanzando una moneda por ejemplo); mientras que la lotería B ofrece \$11 siempre, sin riesgo (es una lotería degenerada). Formalmente, $\mathcal{L}_A = (1/2 \circ 100, 1/2 \circ 10)$ y $\mathcal{L}_B = (1 \circ 11)$. Las utilidades esperadas correspondientes son

$$U(\mathcal{L}_A) = \frac{(1/2)100^{1-\gamma} + (1/2)10^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}, \quad U(\mathcal{L}_B) = \frac{11^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

El agente prefiere débilmente $\mathcal{L}_A$ si y sólo si $U(\mathcal{L}_A) \geq U(\mathcal{L}_B)$, lo cual implica que $U(\mathcal{L}_A) - U(\mathcal{L}_B) \geq 0$. Las expresiones para las utilidades esperadas pueden tabularse fácilmente para diferentes valores de γ . Al calcular la diferencia $U(\mathcal{L}_A) - U(\mathcal{L}_B)$ mediante un algoritmo de Python se obtienen los resultados de la tabla (A.1).

Se observa que para $\gamma \geq 9$ la diferencia $U(\mathcal{L}_A) - U(\mathcal{L}_B)$ es negativa, lo que implica que la preferencia del agente es $U(\mathcal{L}_B) \succsim U(\mathcal{L}_A)$.

γ	$U(\mathcal{L}_A) - U(\mathcal{L}_B)$	Lotería preferida
5	4.57×10^{-06}	A
6	2.42×10^{-07}	A
7	1.07×10^{-08}	A
8	1.88×10^{-10}	A
9	-4.19×10^{-11}	B
10	-8.43×10^{-12}	B
11	-1.14×10^{-12}	B
12	-1.36×10^{-13}	B

Cuadro A.1: Diferencia entre la utilidad esperada de la lotería A y la lotería B para valores dados del coeficiente de aversión relativa al riesgo γ .

A.5. Solución del modelo de equilibrio general

Se resolverá el problema

$$\max_{r_0^i, s_0^i} E_0[u(c_0^i) + \beta u(c_1^i) + \pi_2 \beta^2 u(c_2^i)]$$

sujeto a

$$\begin{aligned} p_0 c_0^i &\leq p_0 \omega + q r_0^i + q^f s_0^i \\ p_t c_t^i &\leq \tilde{X}_t r_t^i + \tilde{X}_t^f s_t^i \quad \text{para } t > 0 \\ r_0^i + r_1^i + r_2^i &= 0 \\ s_0^i + s_1^i + s_2^i &= 0 \end{aligned}$$

donde $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y cóncava.

Se observa en primer lugar que la función de utilidad se puede escribir como $u(c_0^i) + E_0[\beta u(c_1^i) + \pi_2 \beta^2 u(c_2^i)]$ pues el consumo en $t = 0$ es $\mathcal{F}_0$ -medible. La condición de primer orden para r_0^i es

$$u'(c_0^i) \frac{\partial c_0^i}{\partial r_0^i} + E_0 \left[\beta u'(c_1^i) \frac{\partial c_1^i}{\partial r_0^i} + \pi_2 \beta^2 u'(c_2^i) \frac{\partial c_2^i}{\partial r_0^i} \right] = 0$$

Empleando el conjunto de restricciones se encuentran las siguientes formas para las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \partial c_0^i / \partial r_0^i &= q/p_0 \\ \partial c_t^i / \partial r_0^i &= -\tilde{X}_t/p_t \quad \text{para } t > 0 \end{aligned}$$

Al sustituir en la condición de primer orden se obtiene

$$u'(c_0^i) \frac{q}{p_0} - E_0 \left[\beta u'(c_1^i) \frac{\tilde{X}_1}{p_1} + \pi_2 \beta^2 u'(c_2^i) \frac{\tilde{X}_2}{p_2} \right] = 0$$

y, resolviendo para q :

$$q^* = \frac{p_0}{u'(c_0^i)} E_0 \left[\beta u'(c_1^i) \frac{\tilde{X}_1}{p_1} + \pi_2 \beta^2 u'(c_2^i) \frac{\tilde{X}_2}{p_2} \right]$$

Dado que $u'(c_0^i)$ es $\mathcal{F}_0$ -medible, se puede tratar como constante respecto al operador E_0 . Así, el precio en equilibrio se puede expresar como

$$q^* = p_0 E_0 \left[\beta \frac{u'(c_1^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_1}{p_1} + \pi_2 \beta^2 \frac{u'(c_2^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_2}{p_2} \right] = E_0 \left[\beta \frac{u'(c_1^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_1}{p_1} + \pi_2 \beta^2 \frac{u'(c_2^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_2}{p_2} \right]$$

que es la ecuación de valuación del activo riesgoso, donde en la última expresión el precio del bien de consumo en $t = 0$ se ha normalizado a $p_0 = 1$. El problema respecto al activo riesgoso (al elegir s_0^i) es simétrico, por lo que la solución es análoga:

$$q_f^* = E_0 \left[\beta \frac{u'(c_1^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_1^f}{p_1} + \pi_2 \beta^2 \frac{u'(c_2^i)}{u'(c_0^i)} \frac{\tilde{X}_2^f}{p_2} \right]$$

Resta verificar que en el óptimo efectivamente se alcance un máximo. Para ello se calcula la condición de segundo orden para r_0^i , que es

$$u'' > (c_0^i) \left(\frac{q}{p_0} \right)^2 + E_0 \left[\beta u'' > (c_1^i) \left(\frac{\tilde{X}_1}{p_1} \right)^2 + \pi_2 \beta^2 u'' > (c_2^i) \left(\frac{\tilde{X}_2}{p_2} \right)^2 \right]$$

Dado que $u'' > (\cdot) < 0$, $\beta \geq 0$ y $\pi_2 \geq 0$, la condición de segundo orden es estrictamente negativa, por lo que el óptimo (q^*, q_f^*) corresponde a un máximo de la función de utilidad. El caso respecto a s_0^i es idéntico.

A.6. Derivación de los momentos centrales de δ_t

Se parte de las siguientes expresiones para δ_1 y δ_2 :

$$\delta_1 = \beta \Delta c_1^{-\gamma}, \quad \delta_2 = \beta^2 \Delta c_1^{-\gamma} \Delta c_2^{-\gamma}$$

y del supuesto de que Δc_t tiene una distribución lognormal con media μ y varianza σ^2 , y que sus observaciones son independientes. Por lo tanto, $Y = \ln(\Delta c_t)$ tiene una distribución normal con media μ_Y y varianza σ_Y^2 . Entonces, $\Delta c_t = \exp(Y)$, y por lo tanto $\Delta c_t^{-\gamma} = \exp(-\gamma Y)$.

Además, se sabe que si Y es normal $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, entonces el valor esperado de su exponencial es $E[\exp(Y)] = \exp(E[Y] + \frac{1}{2}\text{var}(Y))$. Con esto es posible calcular los momentos de δ_1 y δ_2 :

$$\begin{aligned} E[\delta_1] &= E[\beta \Delta c_1^{-\gamma}] \\ &= \beta E[\exp(-\gamma Y)] \\ &= \beta \exp(-\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2 / 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\delta_2] &= E[\beta^2 \Delta c_1^{-\gamma} \Delta c_2^{-\gamma}] \\ &= E[\beta \Delta c_1^{-\gamma}] E[\beta \Delta c_2^{-\gamma}] \\ &= E[\delta_1]^2 \\ &= \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\delta_1] &= E[\delta_1^2] - E[\delta_1]^2 \\ &= E[\beta^2 \Delta c_t^{-2\gamma}] - \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2) \\ &= \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + 2\gamma^2 \sigma_Y^2) \\ &\quad - \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2) \\ &= \beta^2 \exp(-2\gamma \mu_Y + \gamma^2 \sigma_Y^2) (\exp(\gamma^2 \sigma_Y^2) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\delta_2] &= \text{var}(\beta^2 \Delta c_1^{-\gamma} \Delta c_2^{-\gamma}) \\ &= \text{var}(\delta_1 \delta_1) \\ &= \text{var}^2(\delta_1) + 2E[\delta_1]^2 \text{var}(\delta_1) \\ &= \beta^4 \exp(-4\gamma \mu_Y + 2\gamma^2 \sigma_Y^2) (\exp(\gamma^2 \sigma_Y^2) - 1)^2 \\ &\quad + 2\beta^4 \exp(-4\gamma \mu_Y + 2\gamma^2 \sigma_Y^2) (\exp(\gamma^2 \sigma_Y^2) - 1) \\ &= \beta^4 \exp(-4\gamma \mu_Y + 2\gamma^2 \sigma_Y^2) (\exp(\gamma^2 \sigma_Y^2) - 1) (\exp(\gamma^2 \sigma_Y^2) + 1) \\ &= \beta^4 \exp(-4\gamma \mu_Y + 2\gamma^2 \sigma_Y^2) (\exp(2\gamma^2 \sigma_Y^2) - 1) \end{aligned}$$

Sin embargo, las expresiones de los momentos están en términos de los parámetros μ_Y y σ_Y^2 . Se observa que, por la definición de Y ,

$$\mu_Y = E \left[\ln \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right) \right] \approx E \left[\frac{c_t - c_{t-1}}{c_{t-1}} \right] = E \left[\frac{c_t}{c_{t-1}} - 1 \right] = E[\Delta c_t - 1] = \mu - 1$$

y análogamente para la varianza:

$$\sigma_Y^2 = \text{var} \left(\ln \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right) \right) \approx \text{var} \left(\frac{c_t - c_{t-1}}{c_{t-1}} \right) = \text{var} \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} - 1 \right) = \text{var}(\Delta c_t - 1) = \sigma^2$$

Sustituyendo en las expresiones de los momentos centrales de δ_1 y δ_2 se obtienen las expresiones en términos de μ y σ^2 :

$$\begin{aligned} E[\delta_1] &= \beta e^{-\gamma(\mu-1)+\gamma^2\sigma^2/2} \\ E[\delta_2] &= \beta^2 e^{-2\gamma(\mu-1)+\gamma^2\sigma^2} \\ \text{var}(\delta_1) &= \beta^2 e^{-2\gamma(\mu-1)+\gamma^2\sigma^2} (e^{\gamma^2\sigma^2} - 1) \\ \text{var}(\delta_2) &= \beta^4 e^{-4\gamma(\mu-1)+2\gamma^2\sigma^2} (e^{2\gamma^2\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$