



# EL COLEGIO DE MÉXICO CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

## MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN ECONOMÍA

*NO LINEALIDAD EN LA BOLSA MEXICANA DE VALORES:  
UN ANÁLISIS MEDIANTE FRACTALES Y LA PRUEBA BDS*

*EDUARDO EMILIO THEUREL FÉLIX*

PROMOCIÓN 2000-2002

ASESOR:

ENEAS CALDIÑO GARCÍA

ABRIL DE 2003

*A mi bebé, a Miriam, a mis padres.*

# **Agradecimientos**

- ❑ **A Miriam, por estar siempre involucrada en mis proyectos, por tolerar pacientemente las ausencias y desatenciones que de ellos se derivan y por todo su amor.**
  
- ❑ **A mis padres, por TODO lo que les debo. A mis hermanos, por razones muy parecidas.**
  
- ❑ **A los señores Roberto y Rosaura Durán, por su gran apoyo incondicional.**
  
- ❑ **A mi tío Nicolás Félix, por su ayuda y sus consejos.**
  
- ❑ **A El Colegio de México, por esta oportunidad.**
  
- ❑ **A todos mis profesores, que a lo largo de esta Maestría tantas enseñanzas dejaron en mí. En especial a Eneas Caldiño G., no sólo por haber aceptado amablemente asesorar esta tesis, sino porque de sus lecciones nació en mí este gran interés por el tema de la misma.**
  
- ❑ **A todos mis compañeros, por su insustituible amistad y por todo lo que les aprendí. Particularmente, a mi coterráneo y amigo Lázaro Ávila, por haber encarado juntos muchas de las batallas que ofreció la Maestría.**

## Resumen

*En este trabajo se estudia el comportamiento histórico del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores de más de veintitrés años, a través de la óptica de la geometría fractal y el estadístico de Brock-Dechert-Sheinkman (BDS), para probar la independencia de su serie de rendimientos, lo cual llevó a su rechazo. Además, aquí se presentan argumentos que sostienen la idea de que la dependencia de largo plazo puede estar compuesta por dependencias en el corto plazo. En general, se concluye que el paradigma lineal no es del todo satisfactorio en el presente fenómeno. Los agentes acumulan información, lo cual contradice al supuesto de la martingala, elemento crucial de la Teoría de los Mercados Eficientes. Finalmente, en el presente estudio se logra precisar, mediante las referidas técnicas, el éxito de los modelos de la familia GARCH en periodos anuales, en la tarea de limpiar a las series de los elementos determinísticos que obstaculizan la independencia.*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Los Datos</b>	<b>3</b>
Rendimientos	7
Pruebas de normalidad	8
<b>3. Dimensión Fractal</b>	<b>12</b>
3.1 Exponente de Hurst	13
3.2 Semivariograma	21
<b>4. Estadístico BDS</b>	<b>25</b>
<b>5. Aplicación de modelos GARCH y sus derivados</b>	<b>31</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>39</b>

## 1. Introducción

En el terreno de las finanzas, el uso de técnicas econométricas basadas en la linealidad ha sido, por lo menos hasta hace poco, un lugar común tanto en el medio académico como en el práctico. Sus principales algoritmos, fórmulas y elaborados planteamientos descansan sobre tal supuesto. Quizá sea la usual práctica de obtener las auto correlaciones de las series cotidianas de datos la responsable de sustentar el alegre paradigma lineal. Sin embargo, la linealidad ha sido ya puesta en entredicho en muchas áreas del pensamiento y, por supuesto, también en el relativo a las finanzas. De entrada, parece ser que una de las principales explicaciones para la habitual presencia de rachas en la bolsa de valores es el almacenamiento de la información, lo cual, como ya analizaremos, no concuerda con el principio de linealidad.

De esta forma, se han explorado caminos alternativos en busca de mejores diseños, como lo han sido la no linealidad estocástica y la determinista pero altamente compleja, mejor conocida como Teoría del Caos. Esta última vertiente llama sobremanera la atención porque encarna fluctuaciones *endógenas* al sistema y no *exógenas*, como típicamente se suele manejar. Al propio tiempo, se han incorporado en la teoría financiera y económica confecciones propias de la Física y sus ramificaciones, particularmente la Geoestadística, para enfrentarse a las dificultades que conlleva la ausencia de linealidad.

Básicamente, la eficiencia de los mercados financieros, piedra angular de las construcciones teóricas más relevantes en finanzas, supone que los agentes no almacenan información. Esto es, que *toda* la información de que disponen en un período  $t$ , es usada para tratar de vaticinar alguna variable de su interés en el período  $t+1$ . Así, un corolario de esto es que para hacer lo propio para  $t+2$ ,  $t$  quedará en el olvido y sólo será usada la información generada en  $t+1$  y no prevista en  $t$ . Este hecho es conocido en el argot financiero como la propiedad de la *martingala*. Como ya veremos, existe un vínculo muy íntimo entre este concepto y el de linealidad.

El objetivo de este trabajo consiste en utilizar las referidas confecciones de la Física para determinar en qué medida se viola el gran supuesto de linealidad e independencia en la Bolsa Mexicana de Valores. Así mismo, sin que éste sea el principal propósito del estudio, se proponen algunos modelos de uso reciente para las series financieras con el objeto de indagar si logran éstos corregir el citado problema.

No resulta sorprendente que los estudios más refinados al respecto sean para países de avanzada en las áreas económica y educativa. Así, podemos encontrar investigaciones principalmente para la economía estadounidense, como la de Hsieh (1991), la de Willey (1992) o el libro de Peters (1991), que resultó ser en su tiempo un excelente compendio de ideas relativas al caos en finanzas. Son también dignos de mención los trabajos que Opong, *et al* (1999) y Vessereau (2000) hacen en la misma tónica para el Reino Unido y Francia, respectivamente.

Para México, no obstante, es escaso el trabajo realizado en esta cuestión. A pesar de ello, es necesario reconocer el trabajo de Feliz y Mayer (1992), en el cual se analizan bajo una perspectiva afín varias bolsas de valores, entre ellas la mexicana. Empero, además de que dicho trabajo considera un período más corto que el aquí analizado, al momento de su publicación se carecía de importantes desarrollos tanto teóricos como computacionales que en parte explican la diferencia con el presente estudio.

La organización del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se explica lo referente a la fuente de datos utilizada en el resto de las secciones. Se comenta la obtención de la serie con la cual se habrá de trabajar, sus características, sus inconvenientes y la forma de intentar sortearlos. Posteriormente, la Sección 3 se ocupa de explorar la dimensión fractal de la serie, primero a través del método de Hurst (3.1) y luego a través del semivariograma (3.2). El cálculo de la dimensión fractal de la serie nos dirá qué tan “mordisqueada” o estocástica es la misma. La Sección 4 usa la prueba BDS, la que a su vez emplea integrales de correlación, para determinar la independencia o dependencia de la serie. En la sección 5 se proponen algunos modelos de la familia GARCH para averiguar si éstos son capaces, y en qué grado, de corregir el problema de no linealidad y dependencia que la serie original de rendimientos posee. Finalmente, la Sección 6 manifiesta algunas de las principales conclusiones arrojadas por el presente estudio.

## 2. Los Datos

Para el presente estudio será utilizada la serie histórica del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Dicha serie diaria abarca un período de más de veintitrés años. Específicamente, va del 20 de febrero de 1979 al 15 de noviembre de 2002. Los precios considerados son los del cierre de la jornada bursátil. Descontando días feriados, fines de semana, y cierres forzados de la BMV, la serie que aquí habrá de ser utilizada contiene un total de 5909 observaciones<sup>1</sup>. Los datos fueron obtenidos directamente en la BMV, ya sea a través de sus recursos electrónicos o bien de sus anuarios bursátiles impresos.

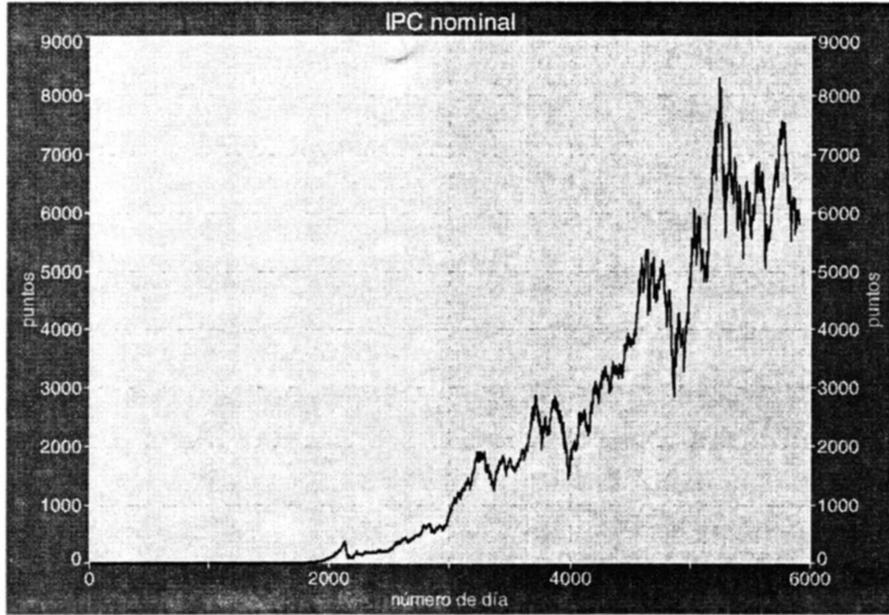
El hecho de manejar una serie tan grande y tan detallada se debe a que los métodos matemáticos aquí empleados, como es el cálculo de la dimensión fractal, así lo precisan. Por otro lado, se podría considerar de igual forma a las series de precios de algunos instrumentos o acciones. Empero, el hecho de que las empresas a través del tiempo hayan estado sometidas a cambios, fusiones, divisiones, etc., pone en entredicho que tales series se refieran al mismo fenómeno, de ahí que se opte por tomar en cuenta sólo al mejor representante de ellas, *i. e.*, al IPC.

El IPC, según la definición dada por la misma BMV, es un “indicador de la evolución del mercado accionario en su conjunto. Se calcula en función de las variaciones de precios de una selección de acciones, llamada muestra, balanceada, ponderada y representativa de todas las acciones cotizadas en la BMV”<sup>2</sup>. Esto nos permite evadir de alguna forma el riesgo implícito al considerar emisoras aisladamente. Si bien la muestra de acciones es dinámica en el tiempo, no deja de ser representativa del conjunto de acciones y emisoras constituyentes de la BMV. En las Gráficas 1 y 2 se muestra el comportamiento del IPC en el lapso considerado.

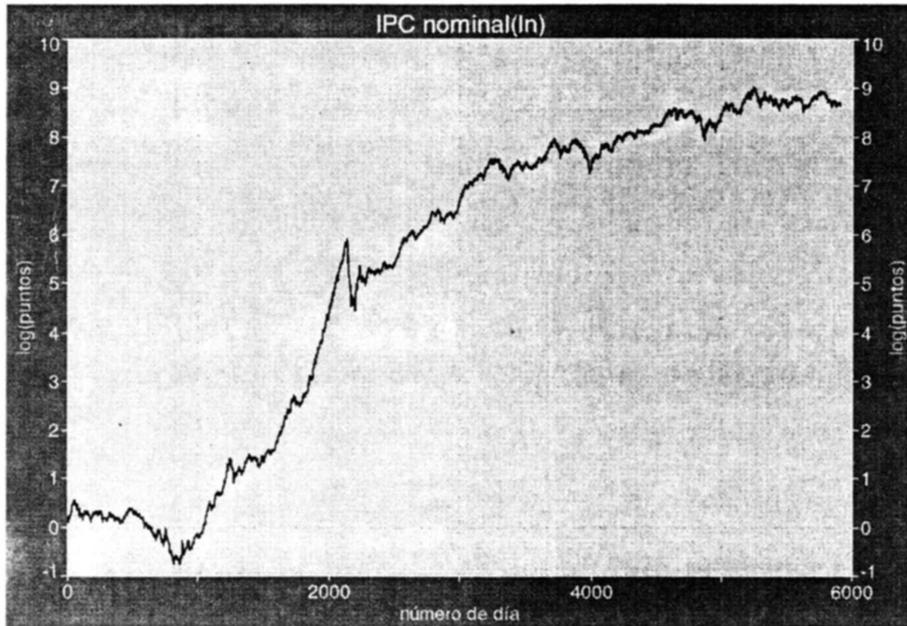
---

<sup>1</sup> Entre las fechas más relevantes de suspensión obligada de actividades, están los primeros días de septiembre de 1982, por motivo de la inestabilidad creada por la nacionalización bancaria que se vivió entonces en México, así como el 24 de marzo de 1994, día siguiente al asesinato del candidato del PRI a las elecciones presidenciales de 1994. Finalmente, no puede obviarse la interrupción debida a los atentados del 11 de septiembre de 2001 en Nueva York.

<sup>2</sup> Definición extraída de la página de la BMV: [www.bmv.com.mx](http://www.bmv.com.mx)



**Gráfica 1. IPC nominal**



**Gráfica 2. IPC nominal en logaritmos**

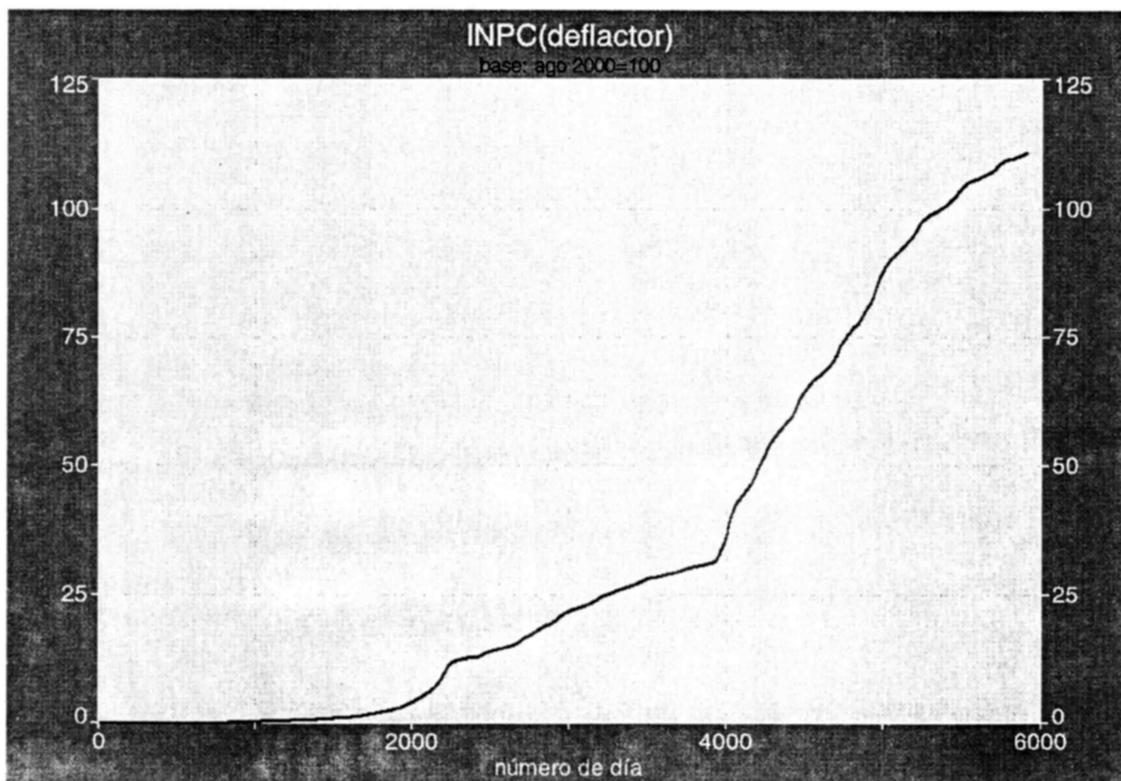
En la escasa literatura que existe respecto al tema de este trabajo, hay una inexactitud que aquí se tratará de sortear: el trabajar con rendimientos derivados de series nominales puede llevarnos a conclusiones erróneas, por no incorporar el crecimiento de los precios en la economía. Para el caso de México, es sabido que el trienio 1986-1988 es caracterizado por un crecimiento muy alto de éstos. De soslayar este hecho, aun si centráramos nuestra atención no en la serie de precios sino en la de rendimientos, estaríamos erróneamente considerando un período de formidable éxito. Esta es la ilusión que causa el obtener los rendimientos sin descontar la inflación. Después de todo, en lo que estamos interesados es en el crecimiento de los precios por los prospectos de las acciones que representan, no porque éste provenga de un proceso inflacionario generalizado.

Si, como sucede en otras economías, la inflación fuera más o menos constante en el tiempo, se reduciría la necesidad de deflactar. En el caso extremo en el que el INPC sea lineal respecto al tiempo y suponiendo que los movimientos de éste sean un buen indicador de la inflación contenida en los del IPC, sería ocioso deflactar las series, ya que los cambios *porcentuales* del IPC nominal serían directamente comparables, como sucede para los del IPC real. Sin embargo, como en México la persistente variabilidad de la inflación ha sido muy importante, no podemos obviar el hecho.

Una vez que hemos decidido deflactar, nos encontramos con que la inexistencia de algún indicador del movimiento de los precios de la economía en frecuencia diaria representa un obstáculo. En los últimos años del período aquí considerado se cuenta con las Unidades de Inversión (UDI's), instrumento financiero que de cierta forma confiesa la dinámica inflacionaria. Desafortunadamente, para los años anteriores sólo se dispone de indicadores mensuales y en algunos casos quincenales.

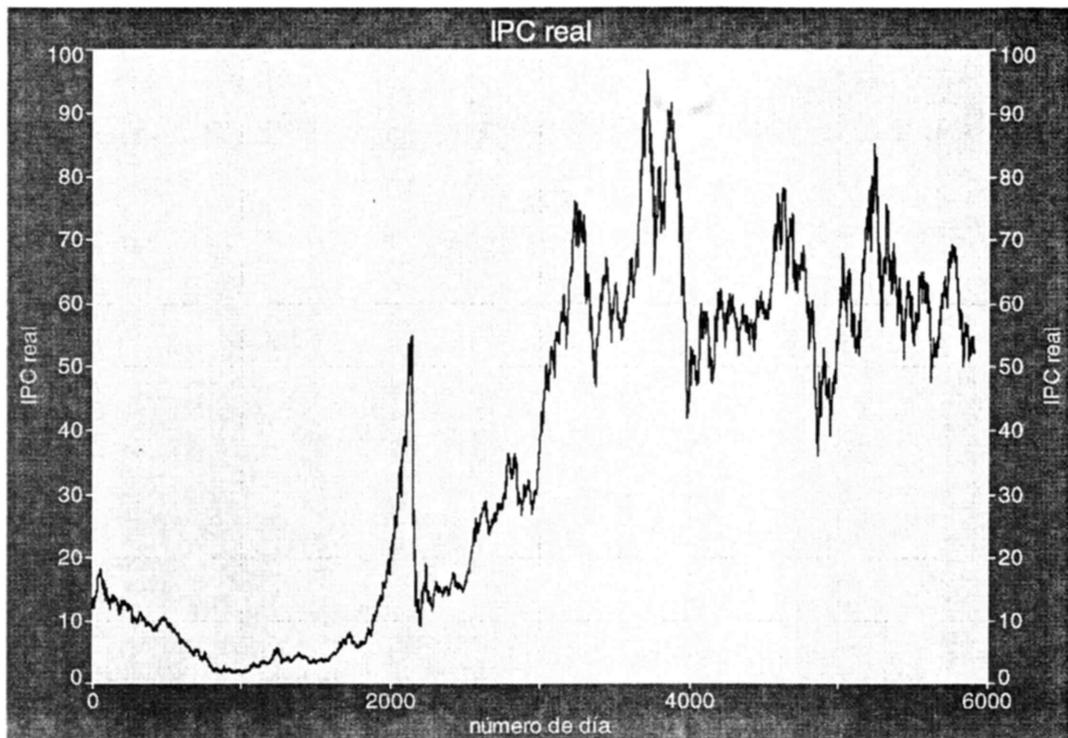
Así pues, para construir una serie de índices que nos permitan deflactar, fue necesario establecer el supuesto de que, a lo largo de un mes, el crecimiento de los precios se proratea por igual en los días que lo componen. Este supuesto obligado, si bien por un lado puede llegar a opacar algunos movimientos en los precios reales al interior del mes, en lo general parece ser salvable. Además, así estaremos contribuyendo de alguna manera a

desestacionalizar la serie, *i. e.* a incorporar la distinta calidad que tienen los lunes y los días siguientes a los feriados, por ejemplo. De esta forma se construyó la serie índice a partir de los datos de inflación mensual proporcionados por el Banco de México. El período base de dicha serie es agosto del 2000 igual a 100. La serie se exhibe en la Gráfica 3.



**Gráfica 3. Serie índice.**

Para intentar ponderar más los cambios en los precios reales de las acciones que los cambios nominales, se utilizó el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) en su versión subyacente para todos los años, con excepción de los primeros, donde ésta no existía aún y fue utilizado el INPC común. La inflación subyacente es la que resulta de excluir del INPC bienes con precios volátiles, por lo que resulta ser una tendencia de mediano plazo, libre de vicisitudes propias del corto plazo. Esto nos permitirá minimizar el ruido creado irremediablemente al deflactar el IPC. Una vez hechas las anteriores aclaraciones, la Gráfica 4 presenta el IPC real o deflactado.



Gráfica 4. IPC real

## Rendimientos

En la práctica cotidiana el rendimiento del IPC (y de cualquier activo o bolsa en el mundo) se visualiza como la variación porcentual de un período a otro. En este trabajo, sin embargo, usaremos rendimientos logarítmicos, definidos así:

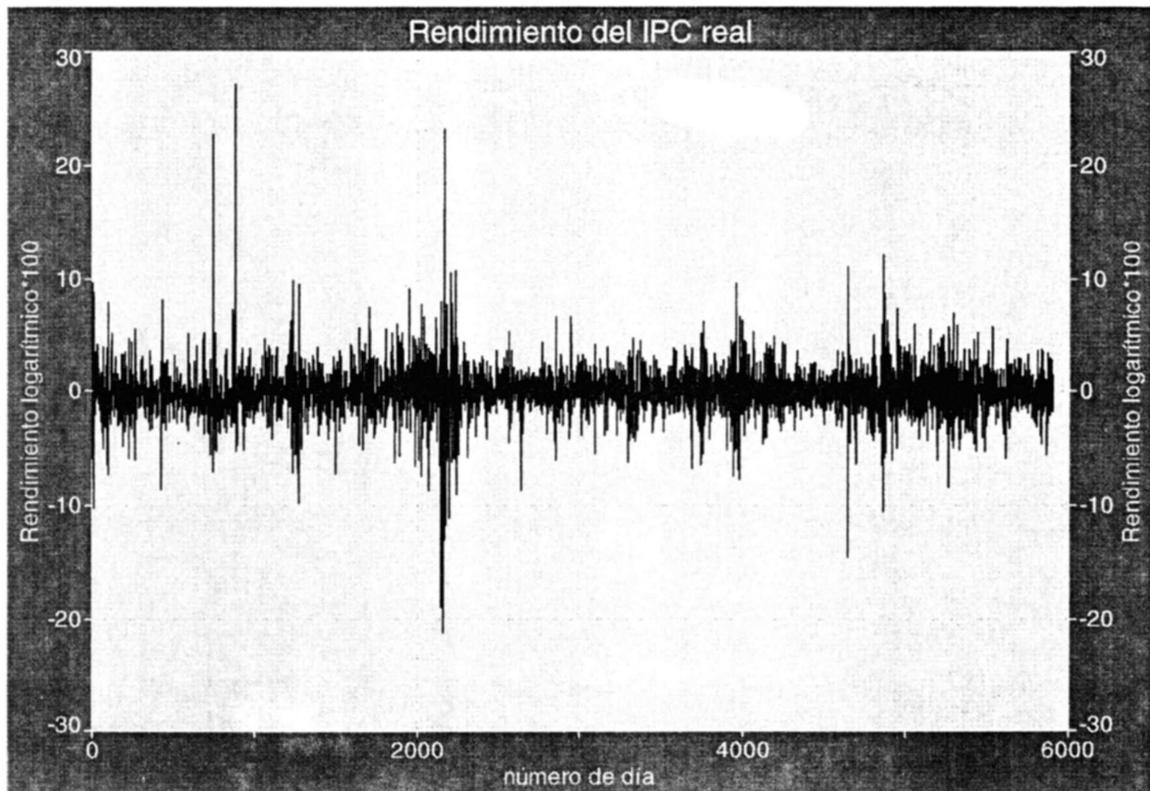
$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

en donde:

$r_t$  = rendimiento logarítmico en el período  $t$ .

$P_t$  = IPC en el período  $t$ .

La ventaja de usar rendimientos logarítmicos en lugar de cambios porcentuales es que la suma de los primeros es igual al rendimiento acumulado, lo que no sucede con los segundos (Peters, 1991, p. 81). La Gráfica 5 da cuenta de los rendimientos logarítmicos de la serie del IPC real.



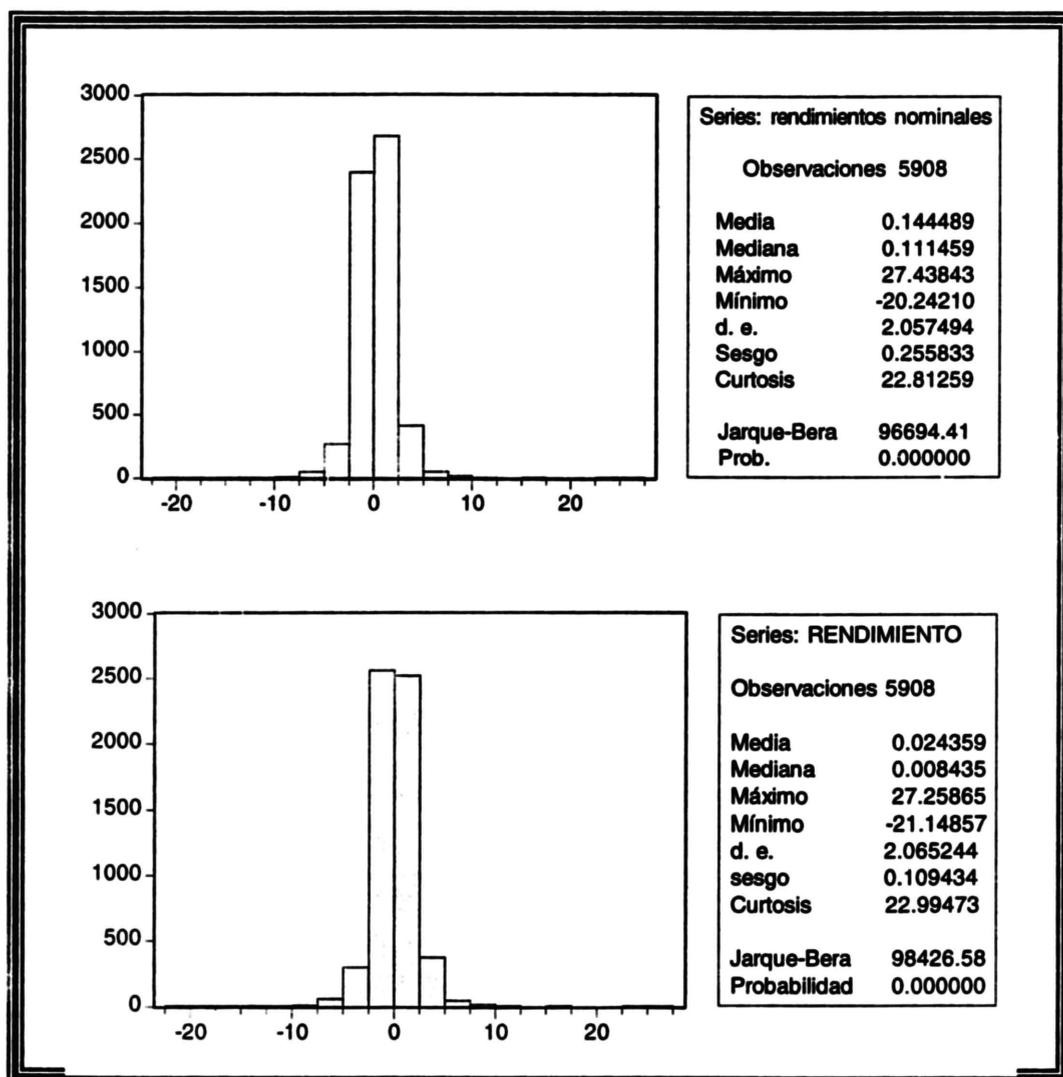
Gráfica 5. Rendimientos logarítmicos de la serie deflactada del IPC.

Vale comentar que los puntos álgidos de la serie de rendimientos son, por un lado, a la baja, el tremendo desplome del 19 de octubre de 1987, el famoso “lunes negro”. A la alza, por otro lado, se da el 22 de septiembre de 1982, aunque aparentemente de manera artificial, ya que corrían entonces justamente los días en que se presenta la nacionalización de la banca mexicana y tal ascenso quizá no sería explicable sin la ingerencia del gobierno en turno.

### Pruebas de normalidad

Al analizar la serie de rendimientos, nos percatamos de que efectivamente se presenta uno de los problemas más típicos de las series financieras: la ausencia de normalidad. En específico, la presencia de una alta curtosis (mayor que 3 en una normal) revela la existencia de colas gordas. Esto es, hay una probabilidad mayor a la que da la distribución normal de que se presenten variaciones extremas. Por otro lado, encontramos que hay un

sesgo positivo. En una distribución simétrica, como la normal, el sesgo es cero. En nuestro caso, tendremos que la cola derecha es más gorda que la izquierda o lo que es su implicación, que la probabilidad de obtener rendimientos positivos es mayor que la de obtenerlos negativos.



**Ilustración 1. Descripción de los datos y prueba de normalidad**

En la Ilustración 1 hemos retomado, por única vez, la serie de rendimientos calculada sobre el IPC nominal para corroborar lo que ya antes habíamos advertido: el no deflactar nos lleva a considerar erróneamente una media (y una mediana) y un sesgo mayores que al hacerlo. Por otro lado, la prueba de Jarque-Bera, habitual en la jerga econométrica, rechaza la normalidad de la serie.

Otra vía para verificar si existe normalidad es mediante pruebas empíricas. La Tabla 1 muestra los resultados de diferentes pruebas. En todas, el valor de probabilidad ínfimo nos indica el rechazo de la hipótesis nula de normalidad.<sup>3</sup>

<b>Prueba de distribución empírica para los rendimientos reales</b>			
<b>Hipótesis: Normal</b>			
<b>Observaciones: 5908</b>			
<b>Método</b>	<b>Valor</b>	<b>Valor ajustado</b>	<b>Probabilidad</b>
Lilliefors (D)	0.083539	NA	0.0000
Cramer-von Mises (W2)	17.48252	17.48400	0.0000
Watson (U2)	17.47731	17.47879	0.0000
Anderson-Darling (A2)	103.7731	103.7863	0.0000

**Tabla 1. Pruebas de distribución empírica**

En esta sección hemos demostrado que no existe normalidad en los rendimientos logarítmicos de la serie del IPC. Este no es un asunto menor. Buena parte de los métodos estadísticos y econométricos de uso frecuente suponen que los errores de una serie son independientes e idénticamente distribuidos (*iid*). En el trabajo de Peters (1991, cap. 3), se pueden encontrar explicaciones muy intuitivas de lo que representa para los mercados financieros (y la literatura detrás de ellos) esta anomalía. Esencialmente, la idea tiene que ver con el rompimiento del paradigma lineal.

<sup>3</sup> La explicación y el análisis de las pruebas empleadas escapa a los propósitos de este trabajo. Sin embargo, quien manifieste particular interés en ellas puede acudir a la ayuda del programa E-Views 4.0 o bien directamente a las fuentes ahí señaladas.

Una buena porción de literatura financiera pionera basó sus aseveraciones en un principio fundamental: la eficiencia de los mercados o, lo que es equivalente, la propiedad de la martingala. Esta última dice, *grosso modo*, que para tratar de pronosticar el valor de alguna serie en el período  $t+1$ , sólo se requiere la información al período  $t$ , ya que en éste se ha incorporado ya toda la información previa.

En otras palabras, los inversionistas deberían reaccionar a la información conforme ésta es recibida. En la misma tesitura, no es nada heroico el supuesto de que los hechos de los que la información se nutre, al ser estocásticos, se distribuyan aproximadamente como una normal.

De todo lo anterior concluimos que la inexistencia de normalidad tiene en su seno (al menos) una de dos explicaciones: que los inversionistas no usen de forma lineal la información, o bien, que sí la usen de forma lineal, pero que ésta no les llegue de forma lineal. En cualquier caso, no obstante, se violan los supuestos fundamentales utilizados para construir la Hipótesis de los Mercados Eficientes (EMH por sus siglas en inglés) y como consecuencia algunos modelos desarrollados sobre esta base, como el célebre Capital Asset Pricing Model (CAPM).

### 3. Dimensión Fractal

En las próximas secciones estudiaremos el comportamiento de la serie de rendimientos del IPC, visto a través de una óptica de uso no muy extendido en economía y finanzas pero sí en las ciencias exactas, como la Física y sus derivadas. Como una alternativa a la clásica geometría creada por Euclides, Benoit Mandelbrot, notable matemático polaco, desarrolló una versión de la geometría más rica y comprehensiva (Mandelbrot, 1982). Mientras que la primera trata sólo con formas y cuerpos fáciles y puros e.g. líneas, cuadrados, circunferencias, conos, esferas, etc., la segunda estudia formas más complicadas cuya dimensión no podría ser explicada por los desarrollos de Euclides, dada su descomunal imperfección.

Explicuemos concisamente la esencia de la geometría fractal. En la geometría euclidiana, por ejemplo, un punto tiene dimensión cero, una línea uno y un plano dos. Sin embargo, una línea quebrada -pensemos en las que caracterizan a los rendimientos- tiene más que una dimensión uno pero menos que dos. De ser totalmente estocástica y de prolongarse al infinito, pensaremos que esta figura podrá llenar todos los puntos del plano y llegar así a una dimensión 2. Así, la referida línea quebrada, se dice, tendrá una dimensión fraccionaria o *fractal* (Vanouplines). Esta dimensión también se conoce como de Hausdorff. Mandelbrot (1982) pone sobre la mesa la siguiente definición:

Un fractal es por definición un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff excede la dimensión topológica.

Otra definición pertinente para un fractal es la siguiente (Feder, 1988):

Un fractal es un objeto en el cual las partes están en cierta forma relacionadas al todo.

Ciertamente, una peculiaridad de los fractales es que gozan de auto afinidad, esto es, cualquier porción del todo es cualitativamente igual al todo mismo.

La importancia de la dimensión fractal en el tema que aquí nos ocupa estriba en que si logramos encontrar que la serie de rendimientos tiene una dimensión fractal menor a dos, nunca alcanzará a llenar un plano, dejará algunos huecos, con lo que podremos establecer que no es del todo estocástica. El movimiento browniano o proceso de Wiener, piedra de toque de las finanzas modernas, tiene naturalmente una dimensión fractal de dos, dada su perfecta aleatoriedad. En las siguientes secciones habremos de establecer algunos métodos que nos acerquen a la dimensión fractal de la serie de rendimientos del IPC.

### 3.1 Exponente de Hurst

Esta sección nos introducirá a la técnica llamada *exponente de Hurst, Rango re-escalado* o *R/S* (Hurst, 1965). Harold Edwin Hurst, un hidrólogo británico de principios del siglo XX que trabajaba para el gobierno de su país, analizó el nivel que el río Nilo tomó en 800 años. Logró establecer que luego de un año bueno (malo) había cierta proclividad para que el siguiente también fuera bueno (malo). Esto es, no había independencia en niveles de años sucesivos (Grabbe, 1995). En el terreno de las series de tiempo, de forma análoga, este método nos sirve para detectar correlaciones de largo plazo en procesos estocásticos.

Hurst desarrolló la técnica de rango re-escalado o R/S, la cual será esclarecida en las siguientes líneas<sup>4</sup>.

Primero consideremos el rendimiento medio en un lapso de  $N$  períodos:

$$\bar{r}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad (1)$$

donde  $r_i$  es el rendimiento durante la jornada  $i$ .

---

<sup>4</sup> Este desarrollo proviene del trabajo de Vessereau (2000).

Sea:

$$X_{j,N} = \sum_{i=1}^j (r_i - \bar{r}_N), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

la desviación acumulada.

Ahora definamos al *rango*,  $R$ , como la diferencia entre la desviación máxima y la mínima del rendimiento a la media acumulada:

$$R = \text{Max}\{X_{j,N}\}_{j=1}^N - \text{Min}\{X_{j,N}\}_{j=1}^N \quad (3)$$

Luego, cada rango  $R$  es redimensionado con la finalidad de hacer la medición independiente de la longitud  $N$  del período; esto se logra al dividir el rango entre la desviación estándar de las observaciones en tal lapso, definida por:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r}_N)^2} \quad (4)$$

Finalmente, dividiendo (3) entre (4) obtenemos el rango re-escalado ( $R/S$ ).

Hurst encontró que:

$$(R/S) \rightarrow kN^H, \quad \text{si } N \rightarrow \infty.$$

Donde, en particular,

$$k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

y  $H$  es el exponente de Hurst.

Tomemos como dado que:

$$(R/S) = kN^H \quad (6)$$

Para calcular  $H$ , basta tomar logaritmos de ambos lados de (6):

$$\ln(R/S) = \ln(k) + H \ln(N) \quad (7)$$

luego, se corre una regresión lineal para estimar  $b$  en:

$$\ln(R/S) = a + b \ln(N). \quad (8)$$

Finalmente,  $b$  será nuestro estimado del coeficiente de Hurst.

Hurst también encontró que según el valor de  $H$ , la serie se puede clasificar así:<sup>5</sup>

- i)  $H = .5$ : la serie es plenamente aleatoria, las observaciones siguen una caminata aleatoria.
- ii)  $0 \leq H < .5$ : hay antipersistencia o reversión hacia la media. Esto es, si el sistema estuvo alto en un período, hay proclividad para que esté bajo en el siguiente y viceversa. De ser así, el sistema se dice *ergódico*.
- iii)  $.5 < H \leq 1$ : la serie es *persistente*. La tendencia se refuerza, es decir, se presentan rachas. La probabilidad de que la observación en  $t+1$  se desvíe de la media hacia el mismo lado que lo hizo la observación en  $t$  es alta y crece conforme  $H$  se acerca a 1.

---

<sup>5</sup> Peters. *op. cit.* pp 64-65.

En la regresión lineal, podemos revisar si la  $H$  obtenida es estadísticamente diferente de 0.5 mediante la prueba  $t$ <sup>6</sup>:

$$t = \frac{b - .5}{s} \quad (9)$$

donde  $s$  es el error estándar, definido así:

$$s = \frac{1}{N} \frac{s_y}{s_x} \sqrt{1 - r^2}$$

donde a su vez,  $r$  es la correlación entre la variable dependiente  $x$  y la independiente  $y$ , en tanto que  $s_x$  y  $s_y$  son sus respectivas desviaciones estándar.

Finalmente, mencionemos el vínculo existente entre la  $H$  de Hurst y la dimensión fractal.<sup>7</sup> Hay dos formas de relacionarlas. La primera es geométrica (misma que habíamos ya adelantado) y mide a qué grado la serie llena el espacio  $2D$ . Esta medida se logra con  $2-H$ . Un ruido blanco acumulativo tendría una dimensión fractal de 1.5, una línea la tendría de 1 y una serie altamente antipersistente la tendría de 2, es decir, llenaría  $2D$ .

La segunda forma de relación se da con  $1/H$ . La ventaja de esta alternativa es que usa el espacio de probabilidad y no el espacio geométrico como la anterior. Aquí, un ruido blanco acumulado o movimiento browniano tendría una dimensión de 2 y llenaría así el espacio de la esperanza. Una serie con efecto de memoria tendrá una dimensión fractal entre uno y dos. Dicho de otra forma, si la dimensión fractal es menor a 2 las variaciones de la serie no serán independientes.

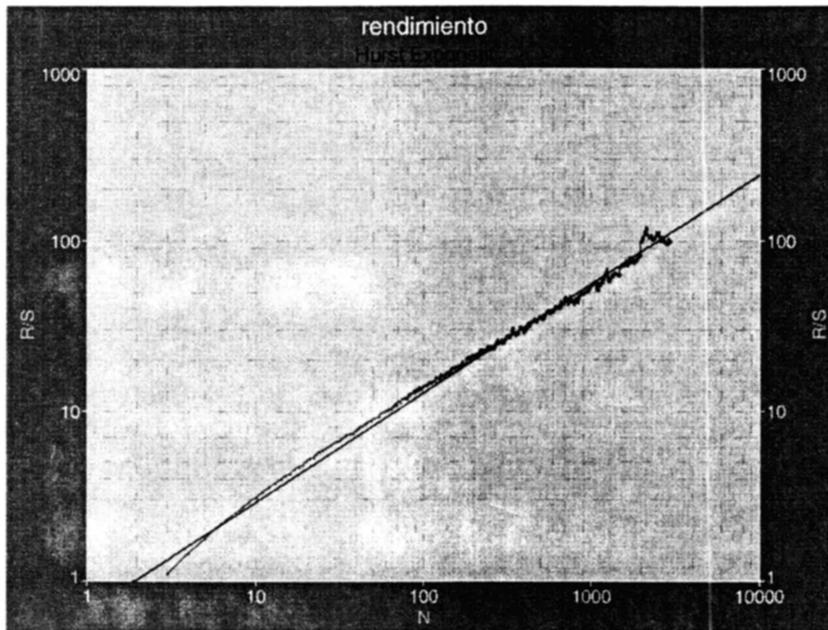
---

<sup>6</sup> Vessereau (2000), *op. cit.*.

<sup>7</sup> Relaciones obtenidas del menú de ayuda del programa Autosignal.

## Resultados empíricos

La Gráfica 6 muestra los resultados del cálculo del exponente de Hurst.<sup>8</sup> En ella podemos observar a  $(R/S)$  en función de  $N$  (en escala logarítmica). También, se ha incluido una línea que expresa la pendiente obtenida a través de regresión lineal, es decir, la  $H$  de Hurst.



Gráfica 6. Exponente de Hurst para la serie de rendimientos.

Los resultados aparecen en la Tabla 2. Como vemos, la  $H$  de Hurst obtenida es estadísticamente mayor que 0.5. Esto nos indica que en el devenir de la serie de rendimientos del IPC existe proclividad hacia las rachas: es probable (más que lo contrario) que a un buen día le siga uno también bueno y lo propio sucede con los días malos. La dimensión fractal resultante para el espacio geométrico es de poco menos de 1.36. Esto implica que la persistencia hace que no se llene el espacio 2D. Por su parte, en el espacio de probabilidad, tenemos una dimensión fractal de 1.56, esto nos dice que

<sup>8</sup> Estos cálculos fueron hechos utilizando el programa Autosignal.

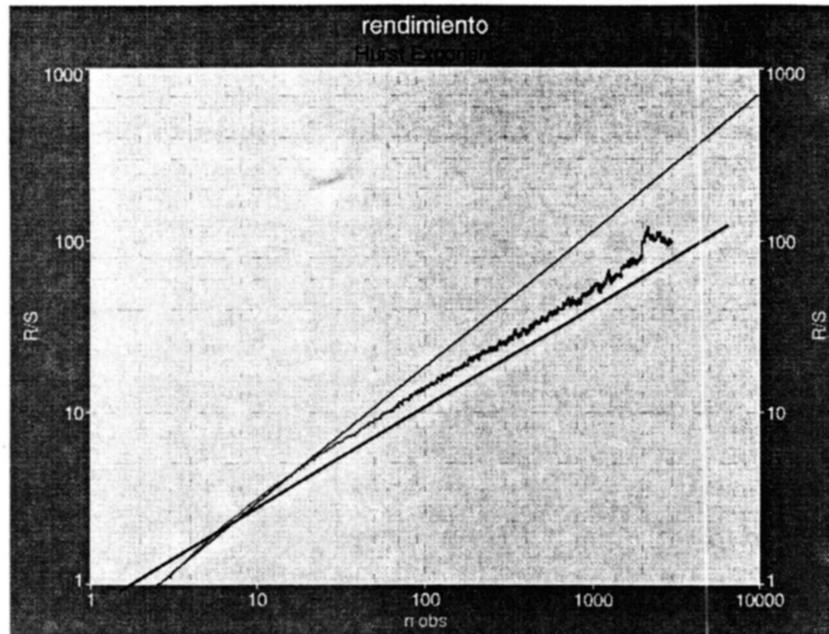
efectivamente hay memoria en la serie, contrario a lo que supondría el que la serie de rendimientos siga una caminata aleatoria.

<i>N</i>	<i>H</i>	error estándar	Estadístico <i>t</i> (respecto a 0.5)	dimensión fractal	
				2- <i>H</i> (espacio geométrico)	1/ <i>H</i> (espacio de probabilidad)
Completo	<b>0.64109</b>	0.00121601	116.027006	<b>1.35891</b>	<b>1.55984339</b>
Completo y Desordenado	<b>0.531409</b>	0.00339574	9.24953029	1.468591	1.8817897
3-20	<b>0.794845</b>	.0080571	36.59443224	1.205155	1.25810693
20-2945	<b>0.598457</b>	.000891912	110.3886931	1.401543	1.67096383

**Tabla 2. Resultados para la *H* de Hurst.**

Para verificar que existe estructura en la serie, ahora procedemos a desordenar la serie de rendimientos, a intercambiar fechas arbitrariamente siguiendo un orden aleatorio. Los resultados de este experimento se expresan en el segundo renglón de la Tabla 2. Aunque sigue siendo *H* estadísticamente distinto de un medio, ahora está más cercano a dicho valor que con la serie original. Después de todo, lo que le falta para llegar a 0.5 se explica por las imperfecciones que inevitablemente pueda tener el método con el cual se haya desordenado la serie.

La dependencia que recién hemos señalado ha sido obtenida realizando la regresión para obtener *H* considerando *N* desde 3 hasta 2945. Podemos, a partir de cambiar este rango, obtener dependencias de corto y de largo plazo. En la Gráfica 7 aparecen dos regresiones obtenidas de esta forma. En la primera, *N* corrió de 3 a 20 días, y se obtiene una *H* de 0.79. Esto nos revela que en el muy corto plazo, 20 días en este caso, mismos que coinciden aproximadamente con un mes bursátil, la relación de persistencia es aún más fuerte. En cambio, en un horizonte más amplio, dicha relación se debilita pero sin llegar a manifestar aleatoriedad completa (*H* sigue siendo mayor a 0.5). Ello aparece en el último renglón de la Tabla 2.

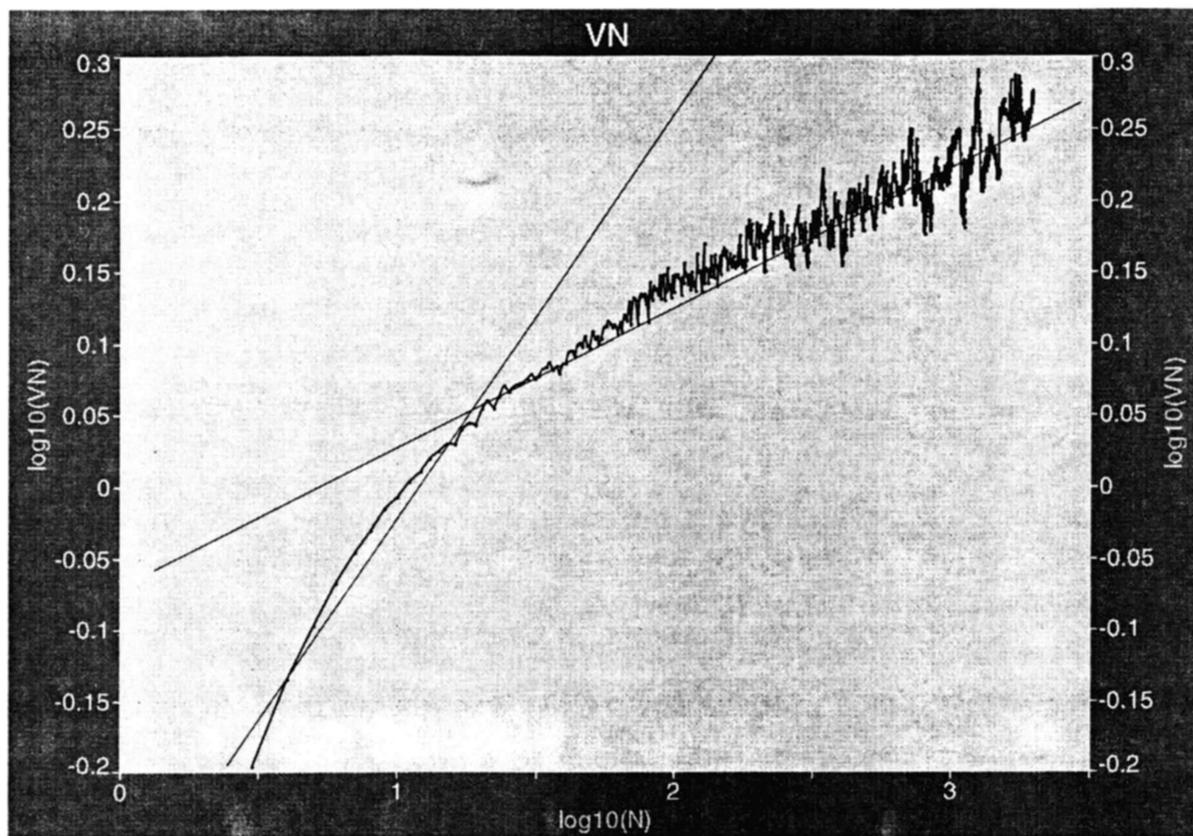


**Gráfica 7.  $H$  de Hurst para diferentes lapsos**

Un estadístico usado por Vessereau (2000) para detectar de forma más directa los posibles quiebres temporales en la dependencia es  $V_N$ , que está dado por:

$$V_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{R}{S} \right)_N \quad (10)$$

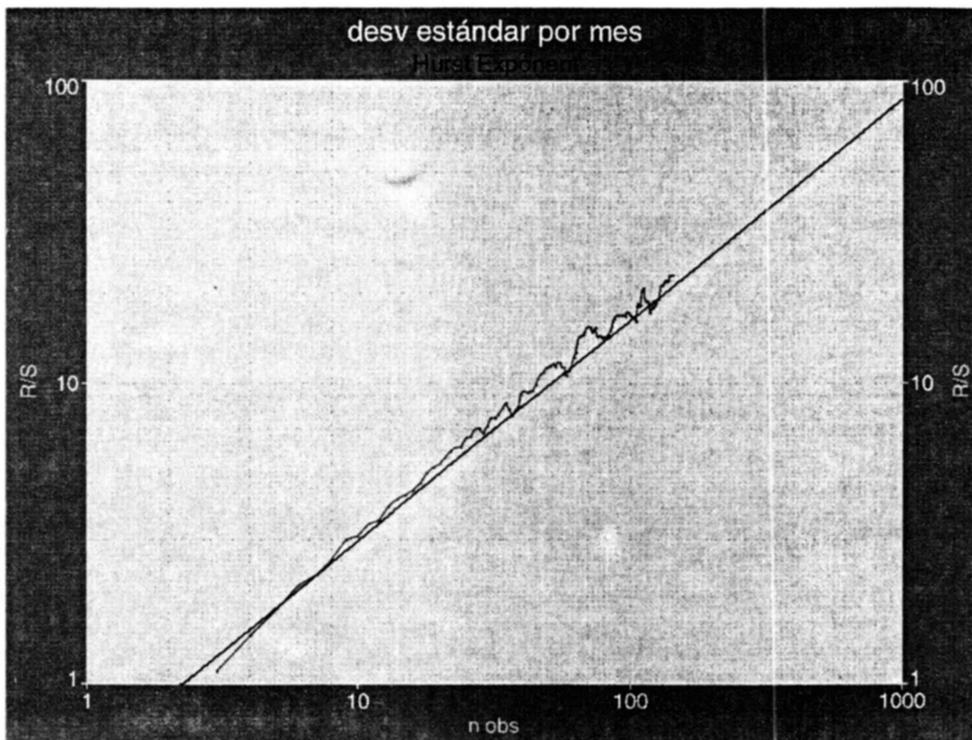
En la siguiente gráfica aparece el resultado de calcular tal estadístico. En la misma, hemos puesto dos pendientes resultantes de llevar a cabo la regresión con rangos de  $N$  distintos. Por ejemplo, si  $\log_{10}(N)$  está entre 0 y 1.3 (es decir, aproximadamente 20 días bursátiles) la pendiente es 0.28. A partir de ahí, en el segmento restante, la pendiente resultante es 0.09. Esto da cuenta de una fuerte dependencia en el corto plazo, dependencia que en el mediano y largo plazo paulatinamente se desvanece.



**Gráfica 8. Obtención de  $V_N$**

Vale la pena emprender, bajo este mismo enfoque, un análisis para la variabilidad que ha manifestado el IPC en el período de estudio. Hemos construido la serie de desviación estándar mensual a partir de los datos reales diarios. Con ella fue calculado el coeficiente de Hurst respectivo. En la Gráfica 9 se ilustra lo anterior. Ahí aparece una pendiente de 0.732157, que es dicho coeficiente. La implicación que este hecho conlleva es clara: la volatilidad, enfocada en una frecuencia mensual, también ostenta rachas. Esto es, si en un mes la volatilidad estuvo por encima de la media, existe una tendencia para que en el mes siguiente ocurra lo mismo.

Con esto concluimos esta sección en la que hemos puesto en evidencia la dependencia de largo plazo que existe en la serie. En la siguiente sección veremos el método alternativo del semivariograma.



**Gráfica 9.  $H$  de Hurst para la variabilidad de los rendimientos.**

### 3.2 Semivariograma

En la presente sección nos dedicaremos a aproximar la dimensión fractal de la serie de rendimientos del IPC a través de un método que de nueva cuenta se importa de la rama de las disciplinas provenientes de la Física. Concretamente, el método del semivariograma, la técnica aquí empleada, tiene sus raíces en la geoestadística. Ésta, a diferencia de la mera estadística que sólo considera la magnitud de los datos, se preocupa por la posición de cada punto y su relación con la de otros puntos.<sup>9</sup>

La idea básica estriba en estimar las varianzas medias  $\gamma(h)$  de la serie de rendimientos utilizando diferentes intervalos de tiempo  $h$ , a través de la siguiente relación:<sup>10</sup>

<sup>9</sup> Ordóñez, Almudena. "Cálculo de reservas". Universidad de Oviedo, Escuela de Minas.

<http://www.etsimo.uniovi.es/usr/almudena/Documentos/CALCULO%20DE%20RESERVAS.pdf>

<sup>10</sup> Vessereau (2000), *op cit*

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [r_{i,h}]^2 \quad (11)$$

donde  $r_{i,h}$  es el rendimiento del IPC en el lapso que va de  $i$  a  $i+h$ , en tanto que  $N(h)$  es el número de posibles pares  $r_{i,h}$  que se pueden construir sobre la serie.

Bajo la hipótesis de auto afinidad, se da la siguiente relación:

$$\gamma(h) = \gamma(1)h^{2H} \quad (12)$$

por lo que, tomando logaritmos de ambos lados de la anterior ecuación, podemos estimar la codimensión fractal  $H$  a través de la siguiente regresión:

$$\ln(\gamma(h)) = \alpha + \beta \ln(h) + \varepsilon \quad (13)$$

Puede demostrarse que la relación entre nuestro estimador y la dimensión fractal está dada por (Kenkel, *et al*, 1996):

$$\beta = 4 - 2D \quad (14)$$

por lo que, despejando:

$$D = 2 - \frac{1}{2}\beta \quad (15)$$

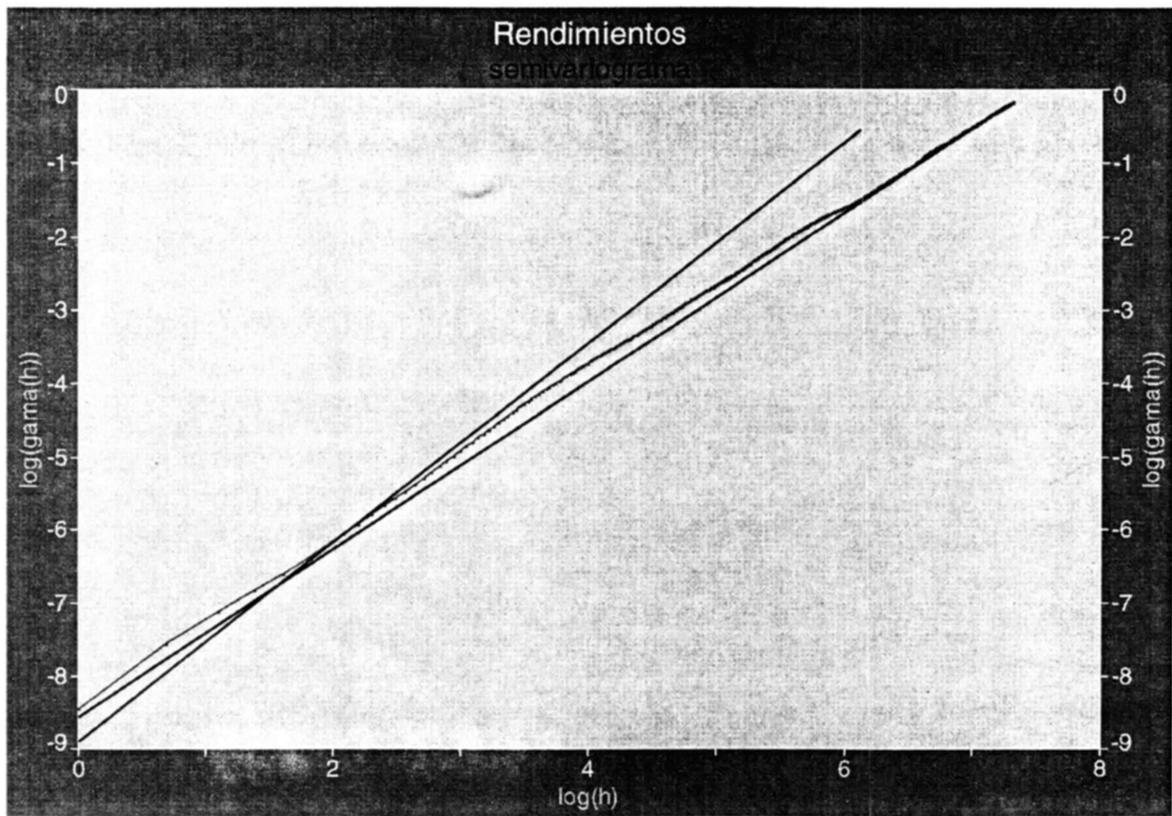
La interpretación es similar a la usada en la sección precedente para el caso del espacio geométrico (euclideo). En el *ruido blanco*  $\beta = 0$  y la dimensión fractal será  $D=2$ ; para una simple tendencia lineal (dependencia espacial plena)  $\beta = 2$  y  $D=1$ ; el caso más interesante, en tanto, será el de series estadísticamente auto afines, que arrojará  $\beta = 1$  y por lo tanto una dimensión fractal de 1.5, un ejemplo pertinente es el de un movimiento browniano geométrico.

## Resultados

En la Gráfica 10 se muestran los valores del logaritmo de  $\gamma(h)$  en función del logaritmo de  $h$ , así como dos líneas resultantes de sendas regresiones entre éstos. La primer regresión, con  $h$  corriendo de 1 a 1750, arrojó una  $R^2 = 0.99$  y una pendiente de  $b = 1.08518$ ; en tanto que la segunda, con  $h$  de 1 a 48, tramo con el que la pendiente toma un valor crítico (máximo), causó  $R^2 = 0.99$  y  $b = 1.20607$ . Con ello, obtenemos que las respectivas dimensiones son  $D_1 = 1.457408$   $D_2 = 1.396986$ .

Esto nos permite extraer algunas conclusiones. En primer lugar, las altas  $R^2$  nos indican que es viable modelar la serie de rendimientos en la forma de fractales auto afines. En segundo lugar, ya estando ciertos de dicha viabilidad, vemos que el resultado obtenido coincide a grandes rasgos con el de la anterior sección: en el corto plazo, con  $D_2$  menos cercana a 1.5 y más a 1, existe una fuerte dependencia, misma que parece disiparse al considerar períodos más largos, como el que tiene que ver con  $D_1$ .

Sería muy optimista esperar que los valores numéricos de la dimensión fractal obtenida por ambos métodos fueran el mismo. Sin embargo, el que esto no se cumpla no representa serios problemas siempre y cuando la intuición que ellos representan sea la misma, como efectivamente sucede en este caso. Según Vessereau (2000), es verosímil el hecho de que sean precisamente las dependencias en el corto plazo las que, al acumularse, explican la dependencia en el largo plazo. Así, en la serie de rendimientos reales del IPC, la acumulación de información cotidiana puede ser la responsable de la dependencia en períodos largos. En las secciones siguientes este punto podrá quedar más claro.



**Gráfica 10. Semivariograma**

## 4. Estadístico BDS

En esta sección será utilizada la prueba elaborada por Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996)<sup>11</sup> para confrontar la hipótesis de independencia en contra de algunas desviaciones, como son dependencia lineal y dependencia no lineal (caos).

La intuición sobre la que reposa este método es muy sencilla. Primeramente, elegimos una distancia dada por  $\varepsilon > 0$ . Luego, tomamos dos puntos cualesquiera de nuestras observaciones. De ser los rendimientos independientes e idénticamente distribuidos (*iid*), la probabilidad de que la distancia entre esos dos puntos en el espacio de fase (o diagrama de fase) sea menor o igual que  $\varepsilon$ , que denominaremos  $c_1(\varepsilon)$ , será constante.<sup>12</sup>

Este mismo ejercicio lo podemos hacer si desplegamos el espacio de fase en  $m$  dimensiones. Con ello, obtendremos un número determinado de vectores de  $m$  componentes o “ $m$ -historias”. La forma de hacerlo es la siguiente:

Consideremos las observaciones  $s$  y  $t$  de la serie  $X$ . A partir de ellas, podemos construir el conjunto de pares:

$$\{\{X_s, X_t\}, \{X_{s+1}, X_{t+1}\}, \{X_{s+2}, X_{t+2}\}, \dots, \{X_{s+m}, X_{t+m}\}\} \quad (16)$$

donde  $m$  es la dimensión del espacio de fase, conocida como “dimensión de inserción” (*embedding dimension*). Análogamente, la probabilidad conjunta de que cada pareja de

---

<sup>11</sup> Una exposición muy clara del significado de la prueba BDS, misma que aquí es empleada, proviene del menú de ayuda del programa EViews 4.1. Existen múltiples trabajos en donde de igual forma se pueden encontrar tanto desarrollos teóricos del BDS como aplicaciones prácticas. Un buen ejemplo se halla en el trabajo de Mauro Galleta y Domenico Mignacca. “Is US real GNP Chaotic?”, cuya referencia está al final de este trabajo.

<sup>12</sup> Para entender mejor el concepto de “espacio de fase”, veamos el ejemplo para el cual  $m=2$ . En este caso, para una serie  $X$  de  $N$  elementos, el espacio de fase estará dado por el conjunto de los  $N-1$  puntos bidimensionales:

$$\gamma(2) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{pmatrix}, \dots. \text{ Su representación gráfica será la del espacio 2D, con } x_t \text{ en el eje}$$

horizontal y  $x_{t+1}$  en función de  $x_t$  en el eje vertical (Balacco y Maradona, 2000).

puntos esté distanciada en una cantidad menor o igual a  $\varepsilon$  será denotada por  $c_m(\varepsilon)$ . Naturalmente, de ser independientes las observaciones, la probabilidad conjunta será igual al producto de las probabilidades marginales, esto es:

$$c_m(\varepsilon) = c_1^m(\varepsilon) \quad (17)$$

A grandes rasgos, el estadístico BDS prueba si estadísticamente la serie puede soportar esta igualdad. Para estimar la probabilidad para una dimensión  $m$ , usando una serie de  $n$  elementos usamos la siguiente expresión:

$$c_{m,n}(\varepsilon) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=1}^{n-m+1} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} \prod_{j=0}^{m-1} I_\varepsilon(X_{s+j}, X_{t+j}) \quad (18)$$

donde  $I_\varepsilon$  es la función indicadora, la cual tomará un valor de 1 si  $|x-y| \leq \varepsilon$  o cero de lo contrario.

Así,  $c_{m,n}(\varepsilon)$  resulta ser la razón de los pares que satisfacen la condición de distancia para un  $\varepsilon$  dado y el total de pares posibles. En la literatura afín se le conoce como *integral de correlación*. Bajo independencia, esperamos que este estadístico sea estadísticamente indistinto de cero.

Sea :

$$b_{m,n}(\varepsilon) = c_{m,n}(\varepsilon) - c_{m,n-m+1}(\varepsilon)^m \quad (19)$$

Brock, et al (1996) demostraron que:

$$(\sqrt{n-m+1}) \frac{b_{m,n}(\varepsilon)}{\sigma_{m,n}(\varepsilon)} \rightarrow N(0,1) \quad (20)$$

donde  $\sigma_{m,n}(\varepsilon)$  es la desviación estándar de las integrales de correlación.

Como es fácil percibir, los resultados a obtener son sensibles al parámetro  $\varepsilon$ , de ahí que su elección sea muy importante. Vessereau (2000) propone usar  $\varepsilon = \sigma$ , donde  $\sigma$  es la desviación estándar de la serie.

La relevancia del estimador BDS se pone de manifiesto en la medida en que la simple correlación puede dar cuenta de independencia de una serie que, al ser evaluada con el BDS, resulta no serlo.<sup>13</sup> Esta pifia suele ser común en los análisis financieros.

Antes de pasar a los resultados obtenidos, vale la pena mencionar que el antecedente inmediato al estadístico BDS fue elaborado por Grassberger y Procaccia (1983). El estadístico obtenido por ellos, conocido en el argot como GyP, es usado por Feliz y Mayer (1992) en un trabajo que explora la hipótesis del caos determinista en las variaciones diarias de los índices de algunas bolsas, entre ellas la de México, para el período 1986 a inicios de 1990. Sin embargo, como lo señala Hsieh (1991) en un artículo de obligada referencia de la teoría del caos en finanzas, es sensato priorizar al estadístico BDS sobre el GyP. Adicional a las muchas razones técnicas para esto, se tiene que GyP precisa de series de datos excesivamente grandes, lo que no necesariamente sucede con BDS. Así, pese a que el referido trabajo de Feliz y Mayer es ciertamente bueno, manifiesta un inconveniente al modelar con una serie relativamente corta.

## Resultados

Se han calculado los estadísticos BDS para diferentes dimensiones, como lo podemos constatar en la Tabla 3. Notemos que en todo caso se rechaza la hipótesis nula de que el estadístico BDS es estadísticamente igual a cero, con lo que al propio tiempo estamos rechazando la hipótesis de independencia.

---

<sup>13</sup> Por ejemplo, si consideramos la serie  $y_t = u_t + 8u_{t-1}u_{t-2}$ , donde  $u_t$  es variable aleatoria distribuida como una normal, encontraremos que su correlograma nos indica que no existen correlaciones significativas, no bien la prueba BDS rechaza independencia. Ver el menú de ayuda de EViews 4.1.

<b>Prueba BDS para los rendimientos</b>				
<b>Período completo</b>				
<b>Dimensión</b>	<b>estadístico BDS</b>	<b>Error estándar</b>	<b>Estadístico z</b>	<b>Probabilidad</b>
<b>2</b>	0.03343	0.001222	27.36503	0
<b>3</b>	0.054034	0.001752	30.84902	0
<b>4</b>	0.062904	0.001883	33.41154	0
<b>5</b>	0.063459	0.001772	35.81878	0
<b>6</b>	0.059547	0.001543	38.59535	0
<b>7</b>	0.053644	0.001277	42.01215	0
<b>8</b>	0.04669	0.001019	45.80414	0
<b>9</b>	0.039722	0.000792	50.14088	0
<b>10</b>	0.033236	0.000603	55.11482	0
<b>15</b>	0.011939	0.000127	94.28198	0
<b>20</b>	0.004069	2.21E-05	183.7599	0
<b>30</b>	0.000473	5.30E-07	892.6717	0
<b>40</b>	5.32E-05	1.09E-08	4872.97	0
<b>50</b>	6.70E-06	2.10E-10	31865.82	0

**Tabla 3. Pruebas BDS para los rendimientos.**

Para evadir el riesgo de que sean el período excesivamente largo que aquí consideramos y los inminentes cambios de estructura a lo largo del mismo, los responsables del rechazo de la independencia, hemos dividido la serie en muestras anuales. Los resultados aparecen en la Tabla 4. En ésta, los valores no indistintos estadísticamente de cero, a un nivel de confianza del 95% aparecen en negritas. Para el resto de los casos podemos decir que no existe independencia. Llama particularmente la atención los años de 1999, 2000 y 2001, para los cuales la prueba indica independencia. Vale mencionar que en este período, al igual que en 1993, la inflación no sólo fue baja sino también estable. Eso probablemente hace que, ante un panorama de mayor certidumbre para los inversionistas, las variaciones reales sean efectivamente independientes.

Prueba BDS para subperíodos				
periodo	Dimensión del espacio de fase			
	m=2	m=5	m=10	m=20
1979	0.048561*	0.05731*	0.018141*	0.000328*
1980	0.046385*	0.079105*	0.029269*	0.002255*
1981	0.047857	0.079845	0.030433	0.000303
1982	0.046323	0.112165	0.098149	0.027212
1983	0.041389	0.055594	0.015659	3.15E-05
1984	0.037418	0.070036	0.031112	0.001529
1985	0.032334	0.040399	0.011239	0.000602
1986	0.024901	0.033527	0.013734	0.000686
1987	0.056794	0.140915	0.106345	0.022201
1988	0.049813	0.110101	0.057727	0.011111
1989	0.031476	0.046946	0.017273	0.001199
1990	0.015638	0.020589	0.004116	-1.37E-05
1991	0.018586	0.025465	0.009329	0.000477
1992	0.026218	0.030211	0.005537	-3.30E-06
1993	<b>0.000408</b>	0.015418	0.003862	-2.91E-06
1994	0.019213	0.019484	0.00443	0.000134
1995	0.033905	0.043494	0.014099	0.000887
1996	<b>0.000454</b>	<b>0.005779</b>	0.002922	3.31E-05
1997	0.028877	0.057395	0.029098	0.00257
1998	0.016439	0.023879	0.012023	0.000879
1999	<b>0.000761</b>	<b>0.007092</b>	0.001325	-2.68E-06
2000	-0.002688	<b>0.004316</b>	<b>0.000542</b>	-4.18E-06
2001	<b>0.007899</b>	<b>0.006709</b>	<b>0.000346</b>	-1.08E-05
2002	0.012492	0.016824	0.001963	-4.91E-06
1999-2001	0.005693	0.013217	0.003521	4.31E-05

Tabla 4. BDS para subperíodos.

Sin embargo, para aclarar el punto hemos realizado el análisis para un período de tres años que inicia en 1999. Es decir, hemos hecho un alejamiento en nuestra visión (*zoom out*) para, por un lado, llevar a cabo un análisis más comprensivo y por otro, aumentar el número de observaciones, potenciando con ello el BDS. El resultado aparece en el último renglón de la tabla. Notemos que nuevamente parece haber independencia. Sirva ello para desvanecer la posible duda que se originó al ver dichos años por separado. Así, como ya lo habían hecho las pruebas de la sección anterior, aquí el BDS nos muestra que los rendimientos reales no siguen un movimiento browniano. En la siguiente sección habremos de aplicar las técnicas aquí esbozadas para analizar los residuales de algunos modelos de uso frecuente en estas tareas.

## 5. Aplicación de modelos GARCH y sus derivados

En las secciones previas hemos establecido la existencia de dependencia en la serie de rendimientos del IPC. Aunque la óptica ahí utilizada da cuenta de una dependencia de largo plazo, ésta bien puede estar conformada por el aglutinamiento de dependencias de corto plazo, como ya lo apuntamos ligeramente.

En esta sección emplearemos algunos modelos enormemente usados en las finanzas para intentar eliminar, en la medida de lo posible, la parte determinística que evita que los rendimientos sean independientes. No está por demás indicar que el propósito último de este trabajo no es precisamente el de obtener *el modelo* mejor para el comportamiento de la serie, sino que a través del uso de estos modelos, veremos cómo se comporta la parte no explicada por el mismo, en función de las técnicas que a lo largo del presente trabajo se han esbozado.

Concretamente, los procesos aquí implementados pertenecen a la familia de los modelos Auto Regresivos de Heteroscedasticidad Condicional (ARCH por sus siglas en inglés) y su principal peculiaridad es que se adecuan a series cuya dispersión varía por conglomerados (Engel, 1982). Usaremos, pues, los modelos GARCH, TARARCH y EGARCH. De manera muy compendiosa asentaremos su derivación teórica para posteriormente apuntar algunos resultados obtenidos. El lector que quede insatisfecho con la misma, como siempre, deberá remitirse a las fuentes aquí citadas.

### GARCH

Este tipo de modelos consisten básicamente en generalizar los modelos ARCH, razón por la cual se conocen como Modelos Generalizados de Heteroscedasticidad Condicional (GARCH por sus siglas en inglés). Su precursor fue Bollerslev (1986).

Detallemos el caso de un GARCH(1,1), adicionado con un rezago de la variable dependiente como regresor:

$$r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (21)$$

con:

$$\varepsilon_t \sim (0, h_t) \quad (22)$$

donde a su vez:

$$h_t = \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (23)$$

las anteriores ecuaciones describen un modelo en donde el rendimiento de hoy depende del de ayer, pero el error esperado depende a su vez del de ayer e igualmente su varianza. Es decir, en  $r_t$  se incorpora a través de (23) la *volatilidad* que el mercado ha presenciado en el pasado reciente.

A partir de los residuales  $\varepsilon_t$ , podemos construir la serie estandarizada  $Z_t$ , con (Vessereau, 2000):

$$Z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \quad (24)$$

El carácter (1,1,) del modelo GARCH se debe a que en la ecuación (23) hemos incluido un rezago para  $h_t$ , así como uno para  $\varepsilon_t^2$ . La generalización es inmediata a un GARCH( $p,q$ ) si tomamos  $p$  rezagos para  $h_t$  y  $q$  para  $\varepsilon_t^2$ , con lo que (23) quedaría:

$$h_t = \alpha_1 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (25)$$

## TARCH

En razón de que frecuentemente se observa en los mercados que movimientos a la baja son seguidos por volatilidades mayores que en el caso de movimientos alcistas de la misma magnitud, es que nace la idea de considerar un modelo asimétrico (Engel y Ng, 1993 ). Esto es, las malas noticias producen más fluctuaciones que las buenas.

Esta es una extensión a los modelos ARCH en el sentido de que se trata de manera asimétrica a la varianza condicional. Lo más común es que el umbral (*threshold*, en inglés, de ahí el prefijo T) sea el origen y que por lo tanto se trate de manera distinta a los residuales positivos que a los negativos (Zakoian, 1990). Sencillamente, la diferencia con lo que hemos desarrollado es que la ecuación 23 ahora será:

$$h_t = \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 + d_{t-1} \gamma \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (26)$$

donde la variable  $d_t$  toma el valor 1 si  $\varepsilon_t < 0$ , y 0 en otro caso.

## EGARCH

Estos modelos manejan también la asimetría pero con otra metodología. Propuestos por Nelson (1991), consideran a la varianza de los términos de error de la siguiente forma:

$$\log(h_t) = \omega_1 + \omega_2 \log(h_{t-1}) + \omega_3 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| + \omega_4 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \quad (27)$$

en este esquema habrá asimetría si  $\omega_4 \neq 0$ .

## Resultados

En la tabla 5 se muestran los resultados de aplicar algunos modelos supradichos a los residuales estandarizados de cada modelo, según la ecuación (24). En las primeras dos columnas aparece el estadístico BDS para dimensiones de inserción de 2 y 5 respectivamente. Si bien en general son muy cercanos, no son estadísticamente distintos de 0 (los valores de probabilidad, *p-values*, en todos los casos son casi cero y no aparecen en la tabla por motivos de presentación). Esto podría ser desalentador ya que estaría implicando que de poco han servido los modelos aquí empleados. Sin embargo, hay razones para no sentir que este análisis ha sido estéril. Por un lado, sería muy ambicioso pedirle a algún modelo, por complicado, sofisticado o atinado que pudiera ser, ajustarse a las observaciones diarias de más de 23 años de datos. Es irrefutable que en tan amplio período muchas modificaciones han sufrido los fenómenos de los que el IPC es el mero indicador.

	BDS		H Hurst		
	m=2	m=5	H	Error estándar	t(-=.5)
<b>GARCH(1,1)</b>	0.00847	0.00921	0.56266	0.0027	23.56
<b>GARCH(1,1)c</b>	0.01308	0.02023	0.55664	0.0022	26.03
<b>EGARCH(1,1)</b>	0.00809	0.00839	0.57207	0.0025	28.76
<b>TARCH(1,1)</b>	0.00759	0.00868	0.56485	0.0026	25.26
<b>TARCH(1,1)c</b>	0.01309	0.02022	0.5543	0.0013	40.26
<b>GARCH(2,2)c</b>	0.00564	0.00649	0.55393	0.0026	20.81

**Tabla 5. Pruebas BDS y de H de Hurst para algunos modelos.**

Nota: *H* calculada a partir del segmento de la regresión en el que una tendencia parece tomar forma. En todos los casos, se homologó tal segmento para *N* de 60 a 600.

No obstante, no todo está perdido. Hemos calculado la  $H$  de Hurst para las mismas series de residuales y los resultados se aprecian en las últimas columnas de la tabla. En ellas aparece la prueba  $t$  para detectar si las  $H$  obtenidas son diferentes de 0.5. Si bien en todos los casos no es posible rechazar esta diferencia, es consolador el hecho de que son más cercanas a 0.5 que los valores de  $H$  calculados para los rendimientos mismos, de los cuales ya arriba comentamos.

Para encarar esta aparente debilidad de los modelos de la familia GARCH al lidiar con los residuales, y bajo la justificación de que resulta harto difícil modelar para períodos tan prolongados, hemos hecho el mismo análisis pero ahora para cada año. Podría objetarse que en el presente trabajo desde el principio se ha considerado a la serie completa y que sería un tanto tramposo enfocar ahora series anuales. El objetivo de este ejercicio, vale aclarar, tiene sustento en el manifestado en la Tabla 4, donde, para la misma periodicidad de un año, en la mayoría de los casos se rechazaba que los rendimientos fueran *iid*.

En la tabla 6, por el contrario, vemos que para diferentes modelos en la generalidad de los años hay algún modelo que, por lo menos para una dimensión, arroja residuales estandarizados que sí son *iid*. La salvedad de la regla, es interesante apuntarlo, se da no de manera fortuita para los años de 1982 y 1995, años en los que la volatilidad fue la mayor (junto con 1987). En el referido cuadro, como las muestras son relativamente pequeñas, se usan valores probabilísticos generados por el método del *bootstrap*, ya que la distribución del estadístico BDS puede resultar muy diferente de la distribución normal asintótica.<sup>14</sup>

---

<sup>14</sup> El procedimiento detrás del método *bootstrap* consiste en primero calcular el BDS en el orden en el que aparece en la serie. Después, se realiza un número muy grande de repeticiones donde en cada una se extrae aleatoriamente sin reemplazo un conjunto de observaciones de tamaño igual al original. Para cada conjunto se calcula el BDS y se divide el menor del número de repeticiones debajo o encima del estadístico original por el

De todo lo anterior, podemos concluir que de los modelos de la familia GARCH, los elementales (o de corto plazo), como (1,1), son exitosos en la tarea de limpiar las series de rendimientos de aspectos determinísticos. Esto se traduce en que el fracaso de la independencia en el largo plazo bien puede estar nutrido por fracasos en el corto plazo, como ya arriba lo habíamos conjeturado.

Año	Especificación	BDS		Año	Especificación	BDS	
		m=2	m=5			m=2	m=5
1979	GARCH(1,1)	<b>0.0054</b>	<b>0.0004</b>	1991	GARCH(1,1)c	<b>0.0013</b>	<b>-0.0013</b>
1980	GARCH(1,1)c	<b>-0.0005</b>	<b>0.0008</b>	1992	GARCH(1,1)	<b>0.0032</b>	<b>0.0047</b>
1981	GARCH(1,1)c	<b>0.0041</b>	<b>0.0044</b>	1992	EGARCH(1,1)	<b>0.0022</b>	<b>0.004</b>
1982	TARCH(1,1)	0.0487	0.1177	1993	GARCH(2,1) (*)	<b>-0.0002</b>	<b>0.0079</b>
1982	EGARCH(1,1)	0.0443	0.0976		GARCH(1,1)	0.0063	-0.0005
	GARCH(1,1)	<b>-0.0075</b>	<b>-0.0006</b>	1994			
	TARCH(1,1)	<b>-0.0091</b>	<b>0.0003</b>		EGARCH(1,1)c	<b>0.0063</b>	<b>0.0051</b>
1983	EGARCH(1,1)	<b>-0.0083</b>	<b>0.0002</b>	1995	EGARCH(1,1)	0.0206	0.0229
1984	GARCH(1,1)	<b>0.0024</b>	<b>0.007</b>	1996	GARCH(1,1) (*)	<b>0.0033</b>	<b>0.0097</b>
	TARCH(1,1)	<b>0.0014</b>	<b>0.0071</b>		GARCH(1,1)	<b>0.0021</b>	<b>-0.0077</b>
	EGARCH(1,1)	<b>0.0025</b>	<b>0.0071</b>	1997			
1985	GARCH(0,1)	<b>0.0075</b>	0.016		EGARCH(1,1)	<b>0.0052</b>	<b>-0.0035</b>
1986	GARCH(1,1)	<b>0.0028</b>	<b>-0.0004</b>	1998	ARCH(0,1)	<b>-0.0076</b>	<b>-0.0033</b>
1987	GARCH(1,1)c	<b>0.0044</b>	<b>0.0036</b>	1999	GARCH(1,1)(**)	<b>0.0039</b>	0.0099
1988	GARCH(1,1)c	<b>0.0004</b>	<b>0.0119</b>		GARCH(3,1)	-0.0094	<b>-0.0053</b>
	TARCH(1,1)	<b>0.0014</b>	0.0096	2000	TARCH(1,1)	<b>0.0017</b>	<b>-0.0019</b>
	GARCH(1,1)	<b>0.0012</b>	0.0102	2001	EGARCH(1,1)	<b>0.003</b>	<b>-0.0006</b>
1989	GARCH(0,1)	<b>0.0064</b>	0.0255	2002	EGARCH(0,1) (***)	<b>0.0058</b>	<b>0.0099</b>
1990	EGARCH(1,1)	<b>0.0064</b>	<b>0.0048</b>				

**Tabla 6. BDS para subperíodos anuales, modelos GARCH.**

Notas: el nivel de significancia considerado para los modelos es del 95%, salvo el caso de: (\*) al 94%, (\*\*) al 90% y (\*\*\*) al 84%. La letra c indica que la regresión fue corrida con una constante (intercepto) diferente de cero y sin constante cuando no aparece. Las negritas indican valores estadísticamente indistintos de cero al 95% de significancia.

número de repeticiones total y se multiplica por dos, por las dos colas de la distribución. Ver el menú de ayuda de EViews 4.1.

## 6. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo se han empleado algunas técnicas de los campos de la geoestadística, la matemática fractal y de la econometría para determinar en qué medida se viola el supuesto de linealidad e independencia en la serie de rendimientos del IPC de la Bolsa Mexicana de Valores. Para un período de poco más de veintitrés años, se obtuvo una serie diaria de rendimientos logarítmicos nominales del IPC, con casi 6000 observaciones. Para depurar esta serie y eliminar su contenido inflacionario, ella fue deflactada usando una serie diaria, construida a partir de los datos mensuales de inflación subyacente.

La referida serie deflactada fue sometida a pruebas para verificar si cumple con el supuesto de normalidad. A través de la prueba de Jarque-Bera, así como de algunas pruebas de distribución empírica, se logró determinar que tal serie no se distribuye como una normal. Lo anterior, vinculado con el supuesto de que los hechos de los que se nutre la información de los agentes sí pueden distribuirse normalmente, nos despierta la sospecha de que también se viola la independencia de los rendimientos cotidianos. Este hecho, a la par, pone en jaque a los planteamientos convencionales de la teoría financiera, los cuales hacen descansar la eficiencia de los mercados en la propiedad de la martingala o la no acumulación de información.

El exponente de Hurst (o técnica del rango reescalado o  $R/S$ ), por un lado y la técnica del semivariograma, por otro, fueron utilizados para tratar de aproximar la dimensión fractal de la serie. En ambos casos se arribó al resultado de que la serie no puede considerarse como una caminata aleatoria. Existe memoria en su comportamiento y muestra inclinación hacia la persistencia. Esta condición está ligada a la presencia de rachas, tanto negativas como positivas, que con mucha frecuencia se suelen presentar. Es decir, si un día fue bueno para la bolsa, existe cierta proclividad para que el día siguiente también lo sea, por ejemplo.

En estos mismos análisis pudo ser detectado un hecho que sin duda llama la atención: la dependencia en el largo plazo de la serie es construida por sucesivas dependencias en el

corto plazo. De la misma forma, se precisó que la volatilidad de la serie, medida a través de la desviación estándar mensual, también es persistente. Un mes tranquilo tiene propensión a ser seguido por otro mes tranquilo y análogamente para los períodos mensuales con turbulencias.

El estadístico BDS, herramienta de avanzada en materia de integrales de correlación, fue empleado para someter a prueba, una vez más, la hipótesis de independencia. Para el período completo, así como para la mayoría de los subperíodos anuales, la prueba rechaza la hipótesis. La conclusión general que se obtiene de esta prueba, así como de las anteriores, es que el movimiento browniano, elemento decisivo de la teoría financiera, no es concordante que lo que ha sucedido en el devenir del IPC.

Finalmente, en el presente estudio fueron usados algunos modelos de la familia de los GARCH, elaboraciones creadas para lidiar con problemas de dependencia de corto plazo en las series financieras. La serie de residuales estandarizados que la aplicación de tales modelos arrojó, mostró resultados confortadores para períodos anuales, en el sentido de que se logró limpiar a las series de los aspectos determinísticos que hacían fallar la independencia. Así mismo, se corroboró que el fracaso de la independencia en el largo plazo bien puede estar nutrido por fracasos en el corto plazo.

A manera de conclusión general, podemos decir que las técnicas supradichas nos han dado la pauta para ser más rigurosos al juzgar y emplear técnicas convencionales lineales, a la hora de pronosticar el comportamiento del IPC de la Bolsa Mexicana de Valores.

## Referencias

Balacco, Hugo y Gustavo Maradona (2000). "Señal de Caos en Series de tiempo financieras. El spectrum de Lyapunov en el análisis de 'sensibilidad a condiciones iniciales'".

Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza-Argentina.

[http://www.aaep.org.ar/espa/anales/pdf\\_00/balacco\\_maradona.pdf](http://www.aaep.org.ar/espa/anales/pdf_00/balacco_maradona.pdf)

Bollerslev, Tim (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Brock, William, Davis Dechert, Jose Sheinkman & Blake LeBaron (1996). "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *Econometric Reviews*, August, 15(3), 197-235.

Engle, Robert F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1008.

Engle, Robert F. and Victor K. Ng (1993). "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility", *Journal of Finance*, 48, 1022-1082.

Feliz, Raúl y David Mayer (1992). "Dinámica No Lineal en la Bolsa de Valores", Documento de Trabajo 3, Economía. CIDE. México.

Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum Press, New York and London.

Galleta, Mauro y Domenico Mignacca (1994). "Is US Real GNP chaotic?", *International Finance*. Clasificación JEL: C22.1

Grabbe, J. Orlin (1995). *Chaos & Fractals in Financial Markets*. Prentice Hall.

Grassberger, Peter e Itamar Procaccia (1983). "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica*, num. 9D, pp.189-208.

- Hsieh, D. (1991). "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets", *Journal of Finance*, 46, 1839-1877.
- Hurst, H.E., Black, R.P. and Simaika, Y.M. (1965). *Long-Term Storage: An Experimental Study*. Constable, London.
- Kenkel, N.C. y D.J. Walter (1996). "Fractals in the Biological Sciences", Quantitative Plant Ecology Lab. Department of Botany, University of Manitoba, Canada.
- Mandelbrot, B.B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco.
- Nelson, Daniel B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 347-370.
- Opong, K., G. Mulholand, A. Fox and K. Farahmand (1999). "The Behaviour of some UK Equity Indices: An Application of Hurst and BDS Tests", *Journal of Empirical Finance*, 6, 267-282.
- Ordóñez, Almudena (sin fecha). "Cálculo de Reservas". Universidad de Oviedo, Escuela de Minas.  
<http://www.etsimo.uniovi.es/usr/almudena/Documentos/CALCULO%20DE%20RESERVAS.pdf>
- Peters, E. (1991). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. Wiley, New York.
- Vanouplines, P. (1996). *Rescaled Range Analysis and the Fractal Dimension of pi*. University Library, Free University. Brussels, Belgium.
- Vessereau, Thierry (2000). "Aspects non Linéaires du Marché des actions Francaises". Cirano Papers. Université de Montréal.
- Willey, T. (1992). "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Stock Indices", *Journal of Economics*, 44, 63-77.
- Zakořian, J. M. (1990). "Threshold Heteroskedastic Models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-944.