EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

INCENTIVOS EN MERCADOS DE ASIGNACIÓN BILATERAL CON COMITÉS DE VOTACIÓN

ANDERE REYES JORGE LUIS

PROMOCIÓN 2003 - 2005

ASESOR: DR. DAVID RENÉ MICHEL CANTALA

OCTUBRE 2008

AGRADECIMIENTOS

Los estudios de Maestría y la realización de la tesis correspondiente son procesos que involucran a más de una persona. En primer lugar, agradezco a mi familia por su aliento y por tolerar mi ausencia física.

La planta docente del Centro de Estudios Económicos de El Colegio de México me proporcionó las herramientas necesarias para profundizar en el conocimiento de la disciplina económica. De mis compañeros de la Generación 2003-2005 de la Maestría en Economía siempre conservaré los momentos inolvidables de estudio y amistad.

Colegas y amigos tuvieron paciencia para escuchar los planteamientos de esta investigación y, en algunos casos, me animaron a proseguirla en los momentos más complicados. Finalmente, tengo una deuda invaluable con el Dr. David Cantala, asesor de esta tesis.

RESUMEN

En este trabajo se analiza un mercado de asignación bilateral uno a uno con un comité de votación, conformado por un conjunto de empresas que deciden cuáles agentes son aceptables para participar en el mecanismo de asignación. El principal resultado de la investigación es que en este tipo de mercados no existe un mecanismo estable que haga que una estrategia dominante para todos los agentes sea declarar las preferencias verdaderas. También se revisaron las opciones estratégicas que afrontan los agentes, hallándose que los incentivos para ampliar o limitar el número de participantes y para conformar o no coaliciones dependen de la función del comité de votación.

Palabras clave: Mercado de asignación bilateral; Comité de votación; Manipulación de preferencias.

CONTENIDO

Introducción

La literatura de los mercados de asignación bilateral estudia las asignaciones estables entre agentes pertenecientes a grupos distintos. Su análisis desde una perspectiva de teoría de juegos cooperativos inició con el artículo “College admission and the stability of marriage” de Gale y Shapley (1962). En dicho trabajo, los autores propusieron dos modelos: en el primero, hombres y mujeres debían emparejarse con integrantes del otro grupo (modelo de matrimonio) y, en el segundo, era permitido que las universidades aceptaran a más de un estudiante (modelo de admisión universitaria).

En este trabajo se analizan variantes del modelo de matrimonio consistentes en que previo a que se lleve a cabo la asignación, opera un comité de votación que decide cuáles agentes son aceptables para participar en el mercado de asignación.

La operación del servicio social de las universidades públicas mexicanas guarda similitud con el problema analizado. El servicio social universitario es un programa de carácter obligatorio inspirado en un principio de retribución a la sociedad (Mungaray *et al.*, 2007) por el cual estudiantes o pasantes, como trámite para obtener el título profesional, deben participar en un conjunto de actividades formativas y de aplicación de conocimientos (Universidad Autónoma de Baja California [UABC, 2003]; Universidad Autónoma de Yucatán [UADY, 1992]). Estas actividades están contenidas en proyectos que son ofertados por las mismas universidades o por entidades de los sectores público, privado y social. En algunos casos, los proyectos presentados por dependencias de las mismas universidades (escuelas, facultades, centros de investigación, etcétera) son denominados como “proyectos internos”, mientras que los presentados por dependencias ajenas a las universidades (oficinas gubernamentales, organizaciones de la sociedad civil, etcétera) son conocidos como “proyectos externos” (UADY, 1992).

Antes de que se lleve a cabo la asignación final de estudiantes a proyectos, se establece un comité que analiza y dictamina como aceptables o inaceptables los proyectos de servicio social propuestos para ser ofrecidos a los estudiantes. Los integrantes del comité pueden ser académicos y funcionarios de la universidad y toman acuerdos por mayoría de votos (UABC, 2003).

A grandes rasgos, el mecanismo de asignación consiste en que, en primer lugar, los estudiantes participantes seleccionan el proyecto de su predilección basándose en un listado publicado por la universidad y, posteriormente, los responsables de los proyectos reciben las solicitudes y seleccionan a los estudiantes de acuerdo a sus características y al cupo disponible. Así, uno o más estudiantes son asignados a un proyecto de servicio social. En caso de que un estudiante no haya sido admitido o no existiera cupo para él, deberá elegir otro proyecto (UADY, 2005).

Se ha señalado que los programas de servicio social universitario han carecido de transparencia en la asignación de estudiantes y becas, así como de no contar con esquemas efectivos que supervisen que las actividades especificadas en los proyectos sean realizadas de acuerdo con las reglas establecidas (Mungaray *et al.*, 2007).

En este trabajo se supone que los integrantes del comité de votación tienen incentivos a comportarse estratégicamente para lograr la aprobación de determinados proyectos, puesto que al estar involucrados directa o indirectamente en uno o más proyectos pueden obtener beneficios por su aprobación. Por ejemplo, un votante está involucrado con un proyecto cuando está adscrito a la instancia que lo presenta.

El modelo desarrollado en este trabajo tiene algunas diferencias con el caso del servicio social universitario. Primero, aunque en el ejemplo real existen tanto proyectos internos como externos, siendo los primeros los que tendrían una ventaja dentro del comité de votación por medio de representante con derecho a voto, en este trabajo se asume que todos los proyectos tienen representantes que participan en el comité de votación. Segundo, puesto que las conclusiones no cambian y hace más sencilla la exposición, se asumirá que cada proyecto únicamente puede reclutar a un estudiante, a diferencia del caso real en el que se permite que cada proyecto contrate a más de uno.

El objetivo de este trabajo es conocer las opciones estratégicas que tendrían los representantes de los proyectos (en adelante, proyectos) para decidir cuáles agentes pueden participar en el mercado, dependiendo si deben elegir a otros proyectos, estudiantes o ambos. En primer lugar, se demuestra que al agregarse un comité de votación previo a realizar las asignaciones entre estudiantes y proyectos, no existe un mecanismo estable que lleve a que todos los agentes declaren sus preferencias verdaderas. Aunado a lo anterior, se encuentra que la elección de las estrategias a efectuar depende de si se vota por la inclusión de proyectos y/o estudiantes. Además, si se votan proyectos, esta elección también está determinada por el conocimiento o percepción que éstos tienen de su aceptación por parte del comité de votación. Si un proyecto espera ser admitido, tendría incentivos para restringir el número de competidores en el mercado de asignación truncando o eliminando de su perfil de preferencias a otros proyectos que considere aceptables. Si por el contrario, cree que será votado como inaceptable por sus pares, tendría incentivos para formar una coalición de proyectos inaceptables con la finalidad de influir en el resultado mediante una estrategia en la que incluya en su perfil de preferencias a cada uno de los integrantes de la coalición a cambio de que el resto haga lo mismo. Cuando se votan a estudiantes, los proyectos ampliarían sus perfiles de estudiantes aceptables para que, en última instancia, todos los estudiantes sean declarados aceptables por el comité.

Para facilitar la comparación con la literatura existente, los proyectos y los estudiantes son representados por empresas y trabajadores, respectivamente.

La estructura del documento es la siguiente. En el primer capítulo se hace un repaso del modelo de asignación uno a uno, describiendo el mercado y presentando los principales resultados de estabilidad y de comportamiento estratégico. En el segundo capítulo se analiza ampliamente un mercado de asignación uno a uno con un comité de votación que elige empresas, examinando las posibilidades de manipular un mecanismo que produce asignaciones estables y los efectos que estos comportamientos estratégicos tienen en el bienestar de los agentes. Finalmente, en el tercer capítulo se discuten brevemente variantes en las que el comité de votación elige trabajadores aceptables o empresas y trabajadores aceptables, así como los resultados principales de la investigación a manera de conclusiones.

Con la intención de hacer la exposición más sencilla, todas las demostraciones que no son resultado directo de esta investigación son presentadas en un apéndice.

1. Modelo uno a uno: existencia, estabilidad y no manipulabilidad

1.1 Mercado

Existen dos conjuntos finitos y disjuntos de empresas y trabajadores, $F = \{f_1, ..., f_{|F|}\}$ y $W = \{w_1, ..., w_{|W|}\}$, respectivamente. Una empresa $f \in F$ tiene una lista ordenada de preferencias $\succ_f$ sobre el conjunto $W \cup \{\emptyset\}$ y un trabajador $w \in W$ tiene un ordenamiento de preferencias $\succ_w$ sobre el conjunto $F \cup \{\emptyset\}$, donde los conjuntos vacíos indican que está permitido que empresas y trabajadores se queden sin pareja en caso de que sean rechazados por todas sus opciones aceptables. El perfil de preferencias estrictas, completas y transitivas está representado por $\succ = \{\succ_{f_1}, \ldots, \succ_{f_{|F|}}, \succ_{w_1}, \ldots, \succ_{w_{|W|}}\}$. El orden débil asociado a $\succ$ es denotado por $\geq$. El mercado de asignación se simboliza por la tripleta $(F, W, \succ)$ y una asignación (o emparejamiento) es una función uno a uno $\mu : F \cup W \to F \cup W$ que cumple las siguientes características:

1. Si $\mu(f) \neq f$ entonces $\mu(f) \in W$;
2. Si $\mu(w) \neq w$ entonces $\mu(w) \in F$; y
3. Es de orden dos (i.e., $\mu^2(x) = x$), lo que significa que si la empresa f es emparejado con w, entonces w es emparejado con f.

La pareja de x se representa por $\mu(x)$. Nótese que las preferencias de un agente sobre sus parejas en dos asignaciones diferentes determinan sus preferencias sobre estas asignaciones: f prefiere a μ sobre μ' si y solo si prefiere a $\mu(f)$ sobre $\mu'(f)$.

1.2 Estabilidad

Una empresa f (un trabajador *w*) bloquea una asignación μ si prefiere mantenerse sola (solo) a emparejarse con w (*f*). Una asignación μ es individualmente racional si no está bloqueada por ningún agente. Por su parte, un par (f, w) bloquea una asignación μ si $w \succ_f \mu(f)$ y $f \succ_w \mu(w)$, de tal manera que una asignación μ es estable si es individualmente racional y no tiene uno o más pares bloqueadores. El primer resultado relevante es que siempre existe al menos una asignación estable.

Proposición 1.1 (Gale y Shapley, 1962). Una asignación estable existe para cada mercado de asignación uno a uno.

Para la demostración de la Proposición 1.1 es necesario emplear el algoritmo de Gale-Shapley (1962) o de aceptación diferida (AD), que consiste en una sucesión de t pasos y asignaciones provisionales, en donde agentes de un lado del mercado hacen ofertas de manera decreciente con base en su lista de preferencias, mientras que los integrantes del otro lado del mercado rechazan o aceptan las propuestas que reciben. El algoritmo de AD funciona de la siguiente manera:

Paso 1. Cada empresa le hace una propuesta a su trabajador favorito, es decir, a aquél que ocupa el primer lugar en su lista de trabajadores aceptables. Por su parte, cada trabajador acepta la propuesta de la empresa que es su favorita y rechaza las que reciba de empresas inaceptables.
Paso t. Si una empresa no tiene pareja en el paso *t*, ésta le hace una oferta al trabajador que es su favorito entre aquéllos a los que nunca les ha hecho una oferta anteriormente, y los trabajadores aceptan la oferta preferida si es mejor que su asignación tentativa (en caso de que sea una empresa, dejaría a esta empresa en la nueva asignación tentativa). Una empresa que ha sido sucesivamente rechazada o abandonada por todos sus trabajadores aceptables ya no efectuará más propuestas y quedará sin pareja.
Final. El algoritmo se detiene cuando todas las empresas están emparejadas o hicieron ofertas a todos sus trabajadores aceptables. Entonces, la asignación tentativa se vuelve el resultado del algoritmo. Los trabajadores que no recibieron propuesta de alguna empresa aceptable se quedarán sin empleo.

Este resultado se obtiene para cualquier mercado de asignación bilateral uno a uno, independientemente del tipo de preferencias (estrictas o no)[1] de los agentes.

1.3 Estructura del conjunto de asignaciones estables

Para un mercado de asignación uno a uno $(F,W,\succ)$, una asignación estable μ es *F*-óptima si cada empresa está por lo menos igual de bien que en cualquier otra asignación estable. De manera similar, una asignación estable ν es *W*-óptima si cada trabajador está por lo menos igual de bien que en cualquier otra

1 Cuando las preferencias no son estrictas para todos los agentes, es posible obtener los mismos resultados que en el caso de preferencias estrictas a través de una "regla de desempate" arbitraria entre dos opciones o parejas potenciales indiferentes.

asignación estable. Estas definiciones permiten enunciar el segundo resultado relevante obtenido por Gale y Shapley (1962), que indica que siempre existen asignaciones estables *W*- y *F*-óptimas.

Proposición 1.2 (Gale y Shapley, 1962). Cuando todas las empresas y trabajadores tienen preferencias estrictas, siempre existe una asignación estable *F*-óptima y una asignación estable *W*-óptima. Aún más, la asignación estable μ_F producida por el algoritmo de AD con las empresas proponiendo es la asignación estable *F*-óptima. La asignación estable *W*-óptima es la asignación μ_W producida por dicho algoritmo cuando los trabajadores proponen.

El resultado anterior indica que cuando las preferencias son estrictas, las empresas tienen un interés en común: están de acuerdo sobre la mejor asignación estable. Por el otro lado, este interés se contrapone al de los trabajadores debido a que la asignación estable óptima para las empresas es al mismo tiempo el peor emparejamiento estable para los trabajadores. En otras palabras, cualquier asignación estable que es la mejor para todas las empresas es el peor resultado para todos los trabajadores, y viceversa. La siguiente proposición formaliza esta idea.

Proposición 1.3 (Knuth; citado por Roth y Sotomayor, 1990). Cuando todos los agentes tienen preferencias estrictas, las preferencias comunes de los dos lados del mercado se oponen en el conjunto de resultados estables: si μ y μ' son asignaciones estables, todos las empresas considerarán a μ por lo menos igual de buena que μ' si y solo si todas los trabajadores consideran a μ' por lo menos igual de buena que μ.

Una consecuencia de la Proposición 1.2 es que no existen dos empresas que "señalen" (indiquen o apunten) al mismo trabajador, por tanto existe una asignación en la que cada empresa es emparejada con el trabajador que "señaló". Además, esta asignación es estable. La Proposición 1.3 establece que es posible obtener la asignación estable *W*-óptima, por ejemplo, pidiéndole a las empresas que "señalen" a su trabajador menos preferido.[2]

Este mismo fenómeno de "señalización" ocurre para elecciones más restrictivas. Por ejemplo, dadas dos asignaciones μ y μ', se le pide a cada empresa que señale a su pareja favorita entre ambas asignaciones. Formalmente, cuando las preferencias son estrictas se puede definir, para dos asignaciones μ y

2 Los resultados de las proposiciones 1.2 y 1.3 no necesariamente se cumplen cuando algunos agentes son indiferentes entre algunas de sus posibles parejas.

μ', una función característica sobre el conjunto $F \cup W$. Sea $\lambda = \mu \vee_F \mu'$ una función característica definida por:

1. $\lambda(f) = \mu(f)$ si $\mu(f) \succ_f \mu'(f)$ y $\lambda(f) = \mu'(f)$ de otra manera, $\forall f \in F$.
2. $\lambda(w) = \mu(w)$ si $\mu(w) \prec_w \mu'(w)$ y $\lambda(w) = \mu'(w)$ de otra manera, $\forall w \in W$.

De igual forma, se puede definir una función característica $\tau = \mu \wedge_F \mu'$ que proporciona a cada empresa su pareja menos preferida y a cada trabajador su pareja preferida. El siguiente resultado se conoce como el Teorema de la Retícula.

Proposición 1.4: Teorema de la Retícula (Conway; citado por Roth y Sotomayor, 1990). Cuando todas las preferencias son estrictas, si μ y μ' son asignaciones estables, entonces las funciones $\lambda = \mu \vee_F \mu'$ y $\tau = \mu \wedge_F \mu'$ también son asignaciones estables.

1.4 Juego de reporte de las preferencias

1.4.1 Juego de reporte

Una vez que se conocen los tipos de asignaciones que se esperan obtener, el siguiente paso es establecer el comportamiento esperado por parte de los agentes, es decir, identificar los incentivos que tienen los agentes para reportar o no sus preferencias verdaderas.

Sea el mercado de matrimonio $(F, W, \succ)$ cuyo resultado es determinado por un planificador[3] que aplica el algoritmo de AD con base en los perfiles de preferencias reportados por los agentes. Esto implica que cada empresa f con preferencias $\succ_f$ enfrenta el problema de decidir el ordenamiento de preferencias $\tilde{\succ}_f$ que le conviene reportar al planificador, mientras que cada trabajador w tiene el mismo problema con los ordenamientos $\succ_w$ y $\tilde{\succ}_w$.

Una estrategia $\tilde{\succ}_w$ para un trabajador w es una ordenación de $F \cup \{\emptyset\}$, mientras que el espacio estratégico D_w es el conjunto de todas las posibles ordenaciones de $F \cup \{\emptyset\}$. Simétricamente, una

3 En una asignación centralizada se envía una lista de preferencias a un planificador. Por su parte, en una asignación descentralizada se hacen ofertas a la contraparte en lugar de enviar una lista de preferencias.

estrategia $\tilde{\succ}_f$ para una empresa *f* es una ordenación de $W \cup \{\emptyset\}$ y el espacio estratégico D_f es el conjunto de todas las posibles ordenaciones de $W \cup \{\emptyset\}$.

El algoritmo de AD empleado por el planificador generará una asignación que es una función de la preferencias que se declaran, es decir, el planificador produce una asignación $\mu = AD(\tilde{\succ})$, donde $AD(\cdot)$ es la función que describe el resultado del algoritmo de AD para cualquier conjunto de estrategias reportadas $\tilde{\succ}$. Así, el juego estratégico se representa como $(F \cup W, \succ, \{D_i\}, AD(\cdot))$, para cada $i \in F \cup W$.

Para el agente i, $\succ_i$ es una estrategia dominante o débilmente dominante si es la mejor respuesta a cualquiera de los perfiles estratégicos de los demás agentes. Formalmente, se dice que $\succ_i$ es una estrategia dominante si $AD(\succ_i, \tilde{\succ}_{-i}) \succ_i AD(\tilde{\succ}_i, \tilde{\succ}_{-i})$ para toda estrategia alternativa $\tilde{\succ}_i$ y para cualquier perfil de estrategia $\tilde{\succ}_{-i}$ reportada por los demás agentes, mientras que se dice que $\succ_i$ es débilmente dominante si $AD(\succ_i, \tilde{\succ}_{-i}) \geq_i AD(\tilde{\succ}_i, \tilde{\succ}_{-i})$. Por el contrario, $\succ_i$ es una estrategia dominada y débilmente dominada si $AD(\succ_i, \tilde{\succ}_{-i}) \prec_i AD(\tilde{\succ}_i, \tilde{\succ}_{-i})$ y $AD(\succ_i, \tilde{\succ}_{-i}) \leq_i AD(\tilde{\succ}_i, \tilde{\succ}_{-i})$, respectivamente.

Un mecanismo de asignación es a prueba de estrategias si una estrategia dominante para cada agente es declarar sus preferencias verdaderas. Así, se dice que el algoritmo de AD es a prueba de estrategias si $AD(\succ_i, \succ_{-i}) \succ_i AD(\succ'_i, \succ_{-i})$, para todos los perfiles $\succ_i$ y $\succ'_i$ y cualquier perfil $\succ_{-i}$ reportado por el resto de agentes, donde $\succ_i$ es la verdadera ordenación de preferencias de i y $\succ'_i$ es uno falso. Un mecanismo es a prueba de estrategias por grupo si una estrategia dominante para cualquier subconjunto de jugadores es declarar sus preferencias verdaderas. Es decir, sea $C \subset (F \cup W)$ con más de un elemento, el algoritmo de AD es un mecanismo a prueba de estrategia por grupo si $AD(\succ_C, \succ_{-C}) \succ_C AD(\succ'_C, \succ_{-C})$, donde $\succ_C$ es el verdadero perfil de preferencias de C y $\succ'_C$ es uno falso.

Un perfil de estrategias forma un equilibrio de Nash si ningún jugador puede alcanzar un pago más alto cambiando de estrategia, dado que los demás no cambian las suyas. Formalmente, $\tilde{\succ} = \{\tilde{\succ}_{f_1}, \ldots, \tilde{\succ}_{f_m}, \tilde{\succ}_{w_1}, \ldots, \tilde{\succ}_{w_n}\}$ es un equilibrio de Nash si $AD(\tilde{\succ}) \succ_f AD(\succ'_f, \tilde{\succ}_{-f})$ para toda $f \in (F \cup W)$ y para todo $\succ'_f \in D_f$. Un equilibrio de Nash fuerte ocurre cuando no existe un subconjunto de jugadores que pueda alcanzar un pago mejor para todos sus miembros cambiando sus estrategias. Es decir, $\succsim = \{\succsim_C, \succsim_{-C}\}$ es un equilibrio de Nash fuerte si $AD(\succsim) \succ_C AD(\succ'_C, \succsim_{-C})$ para todo $C \in (F \cup W)$ y para todo $\succ'_C \in D_C$.

1.4.2 Información completa

El siguiente resultado, conocido como el Teorema de Imposibilidad de Roth, establece que es imposible diseñar un mecanismo que genere asignaciones estables (en términos de las preferencias reportadas) y que al mismo tiempo permita que una estrategia dominante para cada agente sea declarar sus preferencias verdaderas.

Proposición 1.5: Teorema de Imposibilidad de Roth (Roth, 1982). No existe un mecanismo de asignación estable para el cual declarar preferencias honestamente sea una estrategia dominante para cada agente.

Alcalde y Barberà (1994) proporcionan una versión más general del Teorema de Imposibilidad de Roth. Estos autores descubrieron que, aún relajando los requerimientos de estabilidad de una asignación μ a que únicamente sea individualmente racional, no existe un mecanismo de asignación estable que sea a prueba de estrategias. Es decir, la existencia de un par bloqueador (f, w) tal que $w \succ_f \mu(f)$ y $f \succ_w \mu(w)$ no es una condición necesaria para que una mecanismo estable sea manipulado en busca de un mejor resultado por parte de los agentes (por ejemplo, únicamente se requeriría que $w \succ_f \mu(f)$).

En cuanto a los incentivos individuales que tienen las empresas para reportar deshonestamente sus preferencias cuando se emplea un mecanismo que lleva a una asignación estable *F*-óptima, Dubis y Freedman (1981) y Roth (1982) descubrieron que el problema de reporte es limitado, puesto que una empresa no tiene incentivos para mentir bajo un mecanismo con estas características (e independientemente de las preferencias).

Proposición 1.6 (Dubis y Freedman, 1981; Roth, 1982). El mecanismo que lleva a la asignación estable *F*-óptima (en términos de las preferencias reportadas) hace que una estrategia dominante para cada empresa f sea indicar sus preferencias verdaderas.

Ampliando el análisis al tema de la manipulación por grupo, Dubis y Freedman (1981) también encontraron que dicho mecanismo es a prueba de estrategias por grupo para el lado del mercado que propone primero.

Proposición 1.7 (Dubis y Freedman, 1981). Dado que $\succ$ son las preferencias verdaderas de los agentes y que $\overline{\succ}$ difiere de $\succ$ en que una coalición de empresas $\overline{F} \subset F$ no declara sus verdaderas preferencias, no existe una asignación estable μ para $\overline{\succ}$ que sea preferida a μ_F para todos los miembros de $\overline{F}$.

Para ambos resultados, Dubis y Freedman (1981) emplean una manipulación consistente en una ordenación falsa de preferencias en la que se agregan otras opciones y/o cambian el orden de las opciones relevantes.[4] En las estrategias que cambian el orden de las preferencias, $\succ_w^{f \leftrightarrow f'}$ es la ordenación en la que w intercambia los lugares de f y f' en su lista de preferencias. Formalmente, cada empresa f con preferencias verdaderas $\succ_f$ se enfrenta al problema de decidir la ordenación de preferencias $\tilde{\succ}_f$ que debe reportar.

Si la honestidad es la mejor respuesta para las empresas cuando se emplea un mecanismo *F*-óptimo, las cosas podrían ser diferentes para un trabajador o coalición de trabajadores. En la Proposición 1.8, Gale y Sotomayor (1985b) encuentran que un trabajador puede alcanzar una asignación *W*-óptima mediante estrategias de equilibrio de Nash, falsificando apropiadamente sus preferencias.

Proposición 1.8 (Gale y Sotomayor, 1985b). Cuando las preferencias son estrictas, se emplea un mecanismo estable *F*-óptimo y existe más de una asignación estable, no existe un equilibrio de Nash en el cual reportar sus verdaderas preferencias sea una estrategia dominante para un trabajador, asumiendo que el resto dice la verdad.

4 Es muy amplia la lista de trabajos en los que se han estudiado los efectos de utilizar ambos tipos de estrategias. Gale y Sotomayor (1985a), extendiendo el análisis a un modelo muchos a uno, analizan el efecto que sobre las asignaciones estables tiene la ampliación de la lista de agentes aceptables por parte de una empresa (con una o más vacantes) o un trabajador. Por su parte, Roth y Rothblum (1999) y Ehlers (2004) han estudiado ejemplos en que se manipulan las preferencias cambiando el orden de las preferencias, en un ambiente con poca información.

Al igual que en el caso para un trabajador, la Proposición 1.9 muestra que una coalición de trabajadores puede alcanzar una asignación *W*-óptima falsificando apropiadamente sus preferencias.

Proposición 1.9 (Gale y Sotomayor, 1985b). Sea $\succ'$ un conjunto de preferencias tal que cada empresa declara sus verdaderas preferencias y cada trabajador declara una lista de preferencias en la que clasifica a las empresas en el mismo orden que sus preferencias verdaderas, pero coloca como inaceptables a todos las empresas que están por debajo de $\mu_W(w)$. Estas preferencias son un equilibrio de Nash fuerte para los trabajadores en el juego inducido por un mecanismo de asignación estable *M*-óptimo (y μ_W es la asignación que resulta).

Las estrategias empleadas por Gale y Sotomayor (1985b) se conocen como estrategias truncadas.[5] Consisten en que un agente elimina de su lista de preferencias a un subconjunto de elementos que son preferidos a la alternativa de no quedar emparejados. Formalmente, un truncamiento de $\succ$ con *k* elementos aceptables es una lista $\succ'$ con $k' \leq k$ agentes aceptables tales que los *k'* elementos de $\succ'$ son los primeros *k'* elementos de $\succ$, manteniendo el mismo orden.

Demange, Gale y Sotomayor (1987) se preguntan hasta que punto un mecanismo de asignación estable puede ser manipulado. Para responder lo anterior, consideran una coalición integrada por empresas y trabajadores.

Proposición 1.10: Teorema de No Manipulación (Demange, Gale y Sotomayor, 1987). Para todos los integrantes de una coalición de empresas y trabajadores $C \subset (F \cup W)$, declarar las preferencias verdaderas es un equilibrio de Nash fuerte.

Este resultado también se denomina Teorema de los Límites de la Manipulación Exitosa y es una generalización de la Proposición 1.2. De la Proposición 1.10 se desprende que siempre existirá un integrante de la coalición que reportando deshonestamente $\overline{\succ}$ en lugar de $\succ$ no estará mejor que en un resultado estable (y óptimo) obtenido a través del reporte de $\succ$, sin importar cual asignación estable producto de declarar $\overline{\succ}$ es elegida. Por ejemplo, si la coalición esta integrada únicamente por empresas, por lo menos una de éstas no podrá estar peor en la asignación *F*-óptima producto de declarar las preferencias verdaderas que como se encontraría en una asignación estable resultado de reportar las preferencias falsas.

5 Las estrategias truncadas han sido estudiadas ampliamente en la literatura. Roth y Rothblum (1999) y Ehlers (2004) analizan su utilización en ambientes con poca información sobre las preferencias de otros agentes.

1.4.3 Información incompleta

Hasta ahora se han discutido las principales consecuencias del problema de asignación cuando los agentes poseen información perfecta sobre las preferencias de los demás participantes. Roth y Rothblum (1999) y Ehlers (2004) obtienen resultados que brindan asesoría sobre cómo deben comportarse los participantes en mercados de asignación cuando tienen información limitada sobre los demás. Como indican los resultados previamente presentados, en mercados con asignaciones estables -excepto cuando sólo hay una asignación estable- los participantes pueden mejorar si no revelan sus verdaderas preferencias. Aún más, en equilibrio, cuando los agentes mienten, el algoritmo de AD continúa produciendo asignaciones estables con respecto a las verdaderas preferencias. Sin embargo, dichas estrategias de equilibrio requieren que los agentes posean información perfecta sobre las preferencias en ambos lados del mercado, que es más información de la que tienen en la práctica.

En el modelo de Roth y Rothblum (1999) los trabajadores no pueden distinguir entre las preferencias de dos empresas, es decir, no tienen información suficiente para identificar plenamente los incentivos de los demás agentes. Establecen la existencia de una asignación aleatoria $\tilde{\rho}$ cuyo rango es el conjunto de todas las asignaciones posibles. Dadas las asignaciones aleatorias $\tilde{\rho}$ y $\tilde{\rho}'$, un trabajador $w \in W$ y un perfil de preferencias $\succ_w$ sobre $F \cup \{w\}$, se dice que $\tilde{\rho}'$ $\succ_w$-domina estocásticamente a $\tilde{\rho}$ si $\Pr\{\rho'(w) \geq_{\succ_w} \mu\}$ es mayor o igual a $\Pr\{\rho(w) \geq_{\succ_w} \mu\}$.[6]

La estructura de información puede tener diferentes grados de detalle, que permite establecer que tan diferenciada esta la información de los trabajadores. Se entiende por diferenciada la capacidad o recursos con los que cuenta un trabajador para distinguir entre las diferentes empresas:

1. Sea $\tilde{\succ}_{-w}$ un perfil de preferencias aleatorias que representa las creencias de w sobre las preferencias declaradas de los demás. Para distintas empresas f y f', se dice que la variable

6 Puesto que los agentes evaluan los riesgos de los diferentes resultados más que determinar con certeza la utilidad esperada de cada uno de ellos, las comparaciones son efectuadas en téminos de dominancia estocástica de segundo grado.

aleatoria es $\{f, f'\}$ *-simétrica* si las distribuciones de $\succsim_{-w}$ y $(\succsim_{-w})^{f \leftrightarrow f'}$ coinciden. Por ejemplo, las creencias de w son $\{f, f'\}$ *-simétricas* si sabe que f y f' prefieren a w' y w'', pero no conoce otra diferencia entre las preferencias de f y f' acerca de los demás trabajadores. Además, w conoce $\succ_w$.

2. Referente a información más compleja, sea $\{F_1, \ldots, F_p\}$ una partición de F. Se dice que las creencias $\succsim_{-w}$ de w sobre las preferencias de los demás son F_k *-simétricas* (para cada $k = 1, \ldots, p$) si w tiene suficiente información para diferenciar empresas en diferentes conjuntos, pero insuficiente información para distinguir entre las preferencias a ser esperadas por y sobre empresas dentro del mismo conjunto.

Si la información está particionada en grupos de una sola empresa, el trabajador será capaz de reconocer a cada empresa f.[7] Pero a medida que una partición de F tiene más elementos, un trabajador no puede distinguir entre las empresas pertenecientes a un mismo conjunto, es decir, su información es menos diferenciada. Cuando un trabajador no puede apreciar diferencias entre todas las empresas existentes, se dice que sus creencias son F-simétricas.

Los dos tipos de estrategias que puede instrumentar un trabajador w son las de cambio de orden de las preferencias y las de truncamiento, comentadas en la sección anterior.

Un trabajador w que desee eliminar el riesgo de quedarse sin pareja detectará una oportunidad de reportar incorrectamente su lista de preferencias cuando posea información detallada tanto de las preferencias de las empresas como del resto de los trabajadores. Aunque este resultado parece sugerir que para que w pueda obtener beneficios mediante la manipulación de preferencias es necesario que conozca perfectamente las preferencias del resto de los agentes, en realidad indica que en

7 El caso de un agente que es capaz de reconocer las preferencias del resto de empresas y trabajadores es el mismo que el problema de información completa analizado previamente.

ambientes con menos información la manipulación de preferencias continuará siendo provechosa, aunque será necesario aplicar una estrategia diferente a la de cambio de orden de sus preferencias verdaderas.

Roth y Rothblum (1999) demuestran que una manipulación con estrategias truncadas podría llevar a los agentes a obtener beneficios aún cuando disponen con poca información sobre las preferencias del resto de los participantes en el mercado. Los resultados indican que un trabajador con creencias $\{f, f'\}$ *-simétricas* -es decir, cuya información sobre dos firmas es simétrica-, nunca podrá mejorar su situación simplemente cambiando el orden de f y f' en su perfil de preferencias e independientemente de su actitud hacia el riesgo.[8] En otras palabras, el resultado (aleatorio) de dicha estrategia es estocásticamente dominada por la revelación honesta de sus preferencias. Cuando la información de w es $\{F\}$ *-simétrica* tampoco será una estrategia dominante para w manipular intercambiando el orden de sus preferencias. Dada esta información, si w no trunca sus preferencias, lo mejor que puede hacer es reportar sus preferencias verdaderas. Dicho de otra manera, los resultados no permiten afirmar que una estrategia estocásticamente dominante para w es decir la verdad, sino que cuando la información es muy limitada sobre las diferencias de las preferencias de los otros agentes, w no puede hacer mejor que revelar un truncamiento de sus preferencias verdaderas. Sin embargo, si el mercado sigue un mecanismo F estable, la única estrategia estocásticamente dominante para trabajadores con información $\{F\}$ *-simétrica* es revelar sus preferencias verdaderas.

Roth y Rothblum (1999) proporcionan consejos sobre la lista que un trabajador w debe reportar, dada la incertidumbre que tiene sobre las preferencias reportadas por los otros agentes. Demuestran que con poca información[9] el trabajador w algunas veces identificará una mejor estrategia que indicar sus preferencias verdaderas. Específicamente, muestran que lo mejor que w puede hacer es emplear una estrategia truncada. Su análisis termina cuando un trabajador es capaz de distinguir entre las preferencias de las empresas.

Ehlers (2004) extiende el análisis impidiéndole a un trabajador distinguir entre las opciones estratégicas de dos empresas. Principia con que cada trabajador tiene un

---

8 Un agente debe hacer un balance de su postura ante el riesgo, puesto que reportar una lista de preferencias más corta incrementa el riesgo de no ser emparejado, mientras que una lista más larga disminuye la probabilidad de ser emparejado con su resultado favorito.

9 Es decir, únicamente consultando su propia función de utilidad.

conjunto de opciones estratégicas s *-opción* en cualquier paso s del algoritmo de AD. Sea $\Theta\,(s)$ el conjunto de todas las s *-opciones,* donde un elemento $O \in \Theta$ es una opción estratégica para el trabajador *w* y el conjunto Θ resume las opciones estratégicas posibles que *w* enfrenta en cada posible ejecución del algoritmo de AD. Dadas dos empresas f y f', la información de un trabajador es $\{f, f'\}$ *-opción-simétrica* si la probabilidad que enfrenta la s *-opción O* en el paso s es la misma que la probabilidad que enfrenta la s *-opción* cuando los papeles de f y f' son intercambiados en *O*, $O^{f \leftrightarrow f'} \in \Theta$. La $\{f, f'\}$ *-opción-simetría* es más débil que $\{f, f'\}$ *-simétrica*, es decir, si la información de un trabajador es $\{f, f'\}$ *-simétrica*, entonces su información es $\{f, f'\}$ *-opción-simétrica*.[10] Ehlers (2004) encuentra que para un trabajador con información $\{f, f'\}$ *-opción-simétrica* cualquier estrategia que intercambia a f y f' es estocásticamente dominada por una estrategia que preserva el verdadero orden de f y f'.

Si las creencias de un trabajador son F *-simétricas*, entonces son F *-opción-simétricas*. En este caso, w únicamente podría estar mejor truncando sus verdaderas preferencias. Si un trabajador está completamente informado, entonces cualquier estrategia no truncada es dominada por un truncamiento de las preferencias verdaderas, en el que se revela el orden verdadero de las empresas aceptables y en el que ninguna empresa inaceptable es reportada como aceptable.

Dado que el perfil aleatorio de preferencias $\succsim_{-w}$ representa las creencias o información que w tiene de las preferencias declaradas por los otros agentes, un trabajador puede dividir a las empresas en tres conjuntos: 1) uno conformado por aquéllas que cree que no recibirá una propuesta, 2) otro por aquéllas que sabe con certeza que recibirá una oferta y 3) otro por aquéllas que cree que recibirá una oferta; que se representan como $\widetilde{F}^1$, $\widetilde{F}^3$ y $\widetilde{F}^2 \equiv F \setminus (\widetilde{F}^1 \cup \widetilde{F}^3)$, respectivamente. El propósito del trabajo de Ehlers (2004) es aconsejar a los trabajadores que poseen estas estructuras de información. Formalmente, $\succsim_{-w}$ se llama $\left\{\widetilde{F}^1, \widetilde{F}^2, \widetilde{F}^3\right\}$ *-opción-simétrica* si para toda $t \in \{1,2,3\}$ y toda $f, f' \in \widetilde{F}^t$, $\succsim_{-w}$ es {*f, f'*}*-opción-simétrico*, de tal manera que la

10 Si la información de un trabajador es *{f, f'}*-simétrica, entonces él creerá que surgen con la misma probabilidad tanto cada cadena de rechazos y aceptaciones, como la cadena simétrica donde los roles de *f* y *f'* son intercambiados. Sin embargo, un trabajador *no está interesado* en la secuencia exacta de propuestas y rechazos de los otros trabajadores y empresas, sino únicamente está interesado en los conjuntos de empresas que podría elegir en cada paso.

incertidumbre de un trabajador no expresa diferencias entre empresas que pertenecen a la misma categoría. Se demuestra que un trabajador con información $\{\widetilde{F}^1, \widetilde{F}^2, \widetilde{F}^3\}$-*opción-simétrica* no puede beneficiarse invirtiendo el ordenamiento verdadero de empresas que pertenecen a la misma partición.

1.5 Conclusiones

Los mercados analizados previamente están organizados de tal forma que siempre existe un resultado estable, como lo demostraron Gale y Shaple (1962) en la Proposición 1.1. Otros descubrimientos teóricos muestran que, excepto cuando sólo hay un resultado estable, siempre existen agentes que están mejor manipulando sus preferencias que reportándolas honestamente, mientras que el mecanismo continúa proporcionando asignaciones estables (Dubis y Freedman, 1981; Roth, 1982; Gale y Sotomayor, 1985b). Un hecho interesante es que una manipulación exitosa puede tomar más de una forma: cambiando el orden de las opciones aceptables (Dubis y Freedman, 1981) o truncando el perfil de preferencias (Gale y Sotomayor, 1985b). Estos resultados podrían estar restringidos a la conformación de coaliciones (Demange, Gale y Sotomayor, 1985), pero no necesariamente a la estructura de la información disponible (Roth y Rothblum, 1999; Ehlers, 2004).

Roth y Rothblum (1999) y Ehlers (2004) exploran el problema de estructuras de información limitada sobre las preferencias del resto de los participantes. En esta vertiente de la literatura se encuentra que, a pesar de contar con poca información sobre las estrategias u opciones estratégicas de los demás agentes, es posible implementar manipulaciones exitosas. Una diferencia con los descubrimientos precedentes es que las manipulaciones factibles son más restringidas, confinándose exclusivamente a estrategias truncadas.

En el problema de Roth y Rothblum (1999), la intuición de preferir una estrategia truncada a una de cambio en el ordenamiento de preferencias radica en que la decisión de w de cambiar el orden de preferencias implica la elección de rechazar a una de dos empresas, f o f', teniendo ofertas de ambas. La empresa rechazada puede dar inicio a una cadena de rechazos adicionales, la cual puede conducir a nuevas ofertas para w. Así, para elegir a quién debe rechazar, w debe conocer ambas cadenas de rechazos. Si no conoce la secuencia, entonces lo adecuado sería no rechazar a la empresa favorita y rechazar a la menos favorita. El truncamiento es diferente puesto que si w toma una oferta de f en lugar de rechazarla, no generará una cadena de rechazos adicionales. Por lo tanto, truncar o no es una elección entre aceptar o rechazar una oferta, mientras que cambiar el orden de las preferencias es elegir cual de las dos ofertas rechazar.

En el modelo de Ehlers (2004), cualquier estrategia truncada acotada que no es un truncamiento de la relación de preferencias verdaderas ordena como la última empresa aceptable a la firma preferida en $\widetilde{F}^3$ y elimina a algunas empresas que pertenecen tanto a $\widetilde{F}^1 \cup \widetilde{F}^2$ como a la lista verdadera de aceptables. En el algoritmo de AD dicha estrategia incrementa la probabilidad de w de ser emparejado a su empresa favorita, debido a que se eliminarían a algunas empresas de la lista verdadera de aceptables. Al mismo tiempo, w sacrifica la opción de ser emparejado a una empresa de las cuales está seguro que recibirá una oferta, por lo que podría terminar sin pareja.

2. Empresas votan a empresas aceptables

2.1 Modelo

La diferencia del modelo que se analiza en este capítulo con respecto al problema del matrimonio que se revisó anteriormente es que previo a que se lleve a cabo el emparejamiento opera un comité de votación integrado por empresas que deciden cuáles de ellas mismas son aceptables para participar en el mercado de asignación.

Existen dos conjuntos finitos y disjuntos de empresas y de trabajadores, $F = \{f_1, ..., f_{|F|}\}$ y $W = \{w_1, ..., w_{|W|}\}$, respectivamente. El trabajador w tiene una lista de preferencias $\succ_w$ estrictas, completas y transitivas sobre el conjunto $F \cup \{\emptyset\}$. Por su parte, las empresas tienen ordenamientos de preferencias sobre $(F \times \{0,1\}) \times (W \cup \{\emptyset\})$. La primera parte del conjunto anterior significa que en el comité de votación las empresas hacen una elección binaria sobre otras empresas donde 0 es "inaceptable" y 1 es "aceptable", representándose las preferencias de una empresa f por $\succ_f^F$. La segunda parte muestra que la empresa f tiene una lista de preferencias $\succ_f^W$ sobre los trabajadores y puede quedarse con su vacante sin ocupar. Las preferencias sobre las dos partes del conjunto anterior son independientes, de tal forma que las empresas pueden dividir sus preferencias dependiendo si están votando en el comité o reportando sus preferencias en el mercado de asignación. Sea $\succ_f^F \times \succ_f^W \equiv \succ_f$, las preferencias están representadas por $\succ = \{\succ_{f_i}, \ldots, \succ_{f_{|F|}}, \succ_{w_1}, \ldots, \succ_{w_{|W|}}\}$ y $\geq$ es el orden débil asociado.

Todas las empresas tienen derecho a voto en el comité, pero no tienen poder de veto. La regla de votación para designar a las empresas aceptables φ es de mayoría simple, lo que significa que si la mayoría de las empresas votantes declaran como aceptable a una empresa determinada, entonces ésta participará en el mercado de asignación. El resultado de la regla votación φ es un mercado de asignación (tripleta) $(F^\varphi, W, \succ^\varphi)$, que significa que se obtiene $F^\varphi \subseteq F$ para toda $f \in F^\varphi$, permanece el mismo conjunto de trabajadores W y las preferencias $\succ^\varphi$ cumplen con:

1. Para todo $w \in W$ y para $f, f' \in F^\varphi$, $f \succ_w^\varphi f' \Leftrightarrow f \succ_w f'$.
2. Para todo $f \in F$ y para $w, w' \in W$, $w \succ_f^\varphi w' \Leftrightarrow w \succ_f w'$.

2.2 Juego estratégico

Cada empresa f con preferencias $\succ_f^F$ sobre otras empresas elige las preferencias binarias $\tilde{\succeq}_f^F$ que debe declarar en el comité de votación, por lo que el resultado de la votación determina $F^\varphi \subseteq F$ plazas disponibles para los trabajadores. Una vez en el mercado de asignación, $f \in F^\varphi$ debe decidir entre declarar $\tilde{\succeq}_f^W$ o $\succ_f^W$, que son, respectivamente, las preferencias $\succ_f^\varphi$ y $\succeq_f^\varphi$ definidas anteriormente. Por su parte, cada trabajador w tiene el mismo problema con los ordenamientos $\succ_w$ y $\tilde{\succ}_w$, equivalentes a $\succ_w^\varphi$ y $\succeq_w^\varphi$. Tomando en cuenta al conjunto de jugadores $F \cup W$ y que $\succ_f^F \times \succ_f^W \equiv \succ_f$ y $\succeq_f^F \times \succeq_f^W \equiv \succeq_f$, para cada empresa $f \in F$ el espacio estratégico es $D_f = 2^{|F|} \times 2^{W \cup \{\emptyset\}}$, mientras que el espacio estratégico para cada trabajador $w \in W$ es $D_w = 2^{F \cup \{\emptyset\}}$. El algoritmo de AD empleado por el planificador genera una asignación $\mu = AD(\succeq)$ como función de las preferencias que se declaran, la cual es estable si no es bloqueada por un agente o par de agentes. El juego estratégico se representa por $(F \cup W, \succ, \{D_i\}, \varphi, AD(\cdot))$, donde $i \in F \cup W$.

Un mecanismo de asignación con comité de votación que elige empresas aceptables es un procedimiento $\bar{\Gamma}_f(F, W, \succ) \equiv \bar{\Gamma}_f(\succ)$. Se dice que $\bar{\Gamma}_f(\succ)$ es manipulable si para un perfil de preferencias hay uno o más votantes que pueden mejorar su resultado reportando incorrectamente sus preferencias. Así, $\bar{\Gamma}_f(\succ)$ es manipulable individualmente si para un votante i existe un par de preferencias $\succ$ y $\succ'$ tal que $\bar{\Gamma}(\succ_i, \succ_{-i}) \leq_i \bar{\Gamma}(\succ'_i, \succ_{-i})$, mientras que $\bar{\Gamma}_f(\succ)$ es manipulable por grupo si existe $S \subseteq F$ tal que $\bar{\Gamma}(\succ_S, \succ_{-S}) \leq_i \bar{\Gamma}(\succ'_S, \succ_{-S})$, para toda $i \in S$. En el Ejemplo 2.1 se muestran los resultados estables que se pueden obtener cuando el comité de votación excluye del mercado de asignación a un subconjunto de empresas.

Ejemplo 2.1: Mercado de asignación con comité de votación. Sean los conjuntos $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, con preferencias:

$\succ_{w_1} = f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ $\qquad$ $\succ_{f_1}^W = w_2, w_3, w_1, w_4, w_5$

$\succ_{w_2} = f_4, f_2, f_5, f_3, f_1$ $\qquad$ $\succ_{f_2}^W = w_3, w_1, w_2, w_4, w_5$

$\succ_{w_3} = f_4, f_3, f_1, f_2, f_5$ $\qquad$ $\succ_{f_3}^{W} = w_5, w_4, w_1, w_2, w_3$

$\succ_{w_4} = f_1, f_4, f_5, f_3, f_2$ $\qquad$ $\succ_{f_4}^{W} = w_1, w_4, w_5, w_2, w_3$

$\succ_{w_5} = f_5, f_1, f_2, f_4$ $\qquad$ $\succ_{f_5}^{W} = w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$

Además, las empresas tienen preferencias no ordenadas sobre las otras empresas:

$$\succ_{f_i}^{F} = \{(f_1,1),(f_2,1),(f_3,0),(f_4,0),(f_5,1)\}$$

$$\succ_{f_2}^{F} = \{(f_1,1),(f_2,1),(f_3,0),(f_4,1),(f_5,0)\}$$

$$\succ_{f_3}^{F} = \{(f_1,1),(f_2,0),(f_3,1),(f_4,0),(f_5,1)\}$$

$$\succ_{f_4}^{F} = \{(f_1,1),(f_2,0),(f_3,0),(f_4,1),(f_5,0)\}$$

$$\succ_{f_5}^{F} = \{(f_1,0),(f_2,0),(f_3,1),(f_4,1),(f_5,1)\}$$

Puesto que únicamente tienen dos votos a favor como aceptables y tres en contra, quedan fuera del mercado las empresas f_2 y f_3. Las asignaciones estables *F*- y *W*-óptimas son:

$$\mu_F^1 = \mu_W^1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_4 & f_5 & (w_4) & (w_5) \\ w_3 & w_1 & w_2 & w_4 & w_5 \end{pmatrix}.$$

La existencia del comité de votación hace necesario determinar la forma cómo cambia el bienestar de los agentes involucrados (empresas aprobadas y no aprobadas, y trabajadores), así como los incentivos que surgen. De manera preliminar, la consecuencia obvia del procedimiento de votación es que las empresas aprobadas ven incrementadas sus posibilidades de emparejarse con una opción mejor, mientras que los trabajadores enfrentan una disminución de su conjunto de parejas probables, al pasar de F a F^{φ}. En términos del bienestar, todos los trabajadores empeoran ya sea que previamente estuvieran emparejados o no, mientras que las empresas f_1, f_4 y f_5 mejoraron estrictamente. Por supuesto, las empresas excluidas ven empeorada su situación, de ahí que f_2 y f_3 tengan incentivos a manipular la votación. Pero éstas no son las únicas empresas que quieren engañar: las que lograron entrar al mercado podrían manipular la votación para mejorar su bienestar.

2.3 Imposibilidad

A continuación se exploran las posibilidades estratégicas de los agentes. La intuición sugiere que si no existe un mecanismo que simultáneamente genere asignaciones estables (con respeto a las preferencias reportadas) y que no sea una estrategia dominante para cada agente declarar sus preferencias verdaderas en el modelo en el que no hay un comité de votación, tampoco debe existirlo cuando dicho comité esta operando. Lo anterior se basa en que, una vez que se hace la votación en el comité de votación y suponiendo que éste no es manipulable, se continuará estando en un mercado de asignación que responde a los incentivos de las proposiciones 1.5 (Teorema de Imposibilidad de Roth)[11] y 1.6.

En este sentido, la Proposición 2.1 indica que dicha intuición es verdadera y establece un resultado general acerca del funcionamiento de $\overline{\Gamma}_f(\succ)$ como un mecanismo estable cuando un lado del mercado propone primero y, al mismo tiempo, un subconjunto de sus miembros vota primero.

Proposición 2.1. En un mercado de asignación con un comité de votación que elige empresas aceptables, no existe un mecanismo estable *F*-óptimo $\overline{\Gamma}_f(\succ)$ (en términos de las preferencias reportadas) tal que para cada empresa declarar sus verdaderas preferencias en el comité de votación sea una estrategia dominante. Por el contrario, reportar las preferencias verdaderas sobre trabajadores en el mercado de asignación es una estrategia dominante.

Prueba: Debido a que el mecanismo de asignación $\overline{\Gamma}_f(\succ)$ es una función que produce un emparejamiento para cada mercado, probar la proposición sólo requiere demostrar que para un mercado de asignación particular decir la verdad no es una estrategia dominante para todos los agentes. Suponiendo que en el comité de votación la empresa f_1 engaña reportando $\succ_{f_i}^{F'} = \{(f_1,1),(f_2,1),(f_3,0),(f_4,0),(f_5,0)\}$,[12] únicamente f_1 y f_4 participan en el mercado de asignación. La asignación estable para f_1 obtenida a través de $\overline{\Gamma}_f(\succ^{\varphi})$ es $\mu_F^{1'}(f_1) = w_2$, tal que $\mu_F^{1'}(f_1) \succ_{f_1} \mu_f^1(f_1)$. En cuanto a los trabajadores, la Proposición 1.8 indica que no existe un equilibrio de Nash en el cual reportar sus verdaderas preferencias sea una estrategia dominante para un trabajador. Por tanto, declarar las preferencias verdaderas no es una estrategia dominante para todos los agentes debido a que f_1 mejora reportando preferencias falsas, así como cualquier trabajador. Así,

11 Estos resultados también se extienden a la versión más laxa de estabilidad de Alcalde y Barberà (1994).

12 Más adelante se definirán con detalle ésta y otras manipulaciones que pueden ser aplicadas en este mercado.

dado un mecanismo estable *F*-óptimo, la empresa f_1 mintió y mejoró. De la prueba de la Proposición 1.6 se sabe que las empresas declaran honestamente sus preferencias sobre trabajadores en el mercado se asignación. □

Es importante notar que en el caso del mercado de asignación con este comité de votación, las decisiones estratégicas de las empresas no únicamente son tomadas en el mercado de asignación propiamente dicho. Previamente, en el comité de votación, las empresas enfrentan incentivos que las llevan a tratar de influir en el resultado de la votación. Estrategias orientadas en este sentido constituyen el objeto de estudio de la siguiente sección.

2.4 Comparación de estrategias

En los siguientes dos apartados se reportan los beneficios que los diferentes tipos de estrategias proporcionan a las empresas, tomando como base que podrían manipular sus estrategias individualmente o en grupo. Es importante notar que los beneficios obtenidos por las empresas están estrechamente relacionados con su aprobación por parte del comité de votación, en caso de que el resto de ellas declararan honestamente sus preferencias.

2.4.1 Manipulación individual

Una estrategia de sustitución en el comité de votación $\succ_f^{f' \leftrightarrow f''}$ es aquélla en la que la empresa f sustituye a una empresa aceptable f' por otra inaceptable f''. En una estrategia de truncamiento en el comité de votación $\succ_f^{f'}$ la empresa f decide votar como inaceptable a la empresa aceptable f', es decir, f omite de su perfil de empresas aceptables a f'. El primer resultado original de este trabajo indica que, para el caso de empresas votantes que son aceptables para el comité, lo mejor que pueden hacer es instrumentar estrategias que trunque sus preferencias sobre otras empresas.

Proposición 2.2. Para una empresa $f \in F^{\varphi}$, en un mecanismo *F*-óptimo, una estrategia que sustituye a una empresa aceptable por una inaceptable en un comité de votación que elige empresas aceptables es débilmente dominada por una estrategia que trunca a dicha empresa aceptable de su perfil de preferencias verdaderas.

Prueba: Para comparar los resultados que una empresa $f \in F^{\varphi}$ puede obtener al escoger una de las dos estrategias analizadas, se observará si dichas manipulaciones alcanzaron el éxito esperado con el apoyo de los resultados de estática comparativa de Crawford (1991).[13]

Proposición 2.2 bis (Crawford, 1991). Suponiendo que F esta contenido en F', μ_F y μ'_F son las asignaciones *F*-óptimas para los mercados $(F, W, \succ)$ y $(F', W, \succ')$, respectivamente; donde $\succ$ y $\succ'$ muestran las mismas preferencias sobre F y W. Entonces, $\mu'_F \geq_W \mu_F$ bajo $\succ'$ y $\mu_F \geq_F \mu'_F$ bajo $\succ$.

Una estrategia de sustitución $\succ_f^{f' \leftrightarrow f''}$ se considera exitosa si f logra sacar del mercado de asignación a f' y meter a f'', mientras que una estrategia de truncamiento $\succ_f^{f'}$ tiene éxito si f' es expulsada del mercado de asignación.

Es importante señalar que la manipulación $\succ_f^{f' \leftrightarrow f''}$ no garantiza un resultado, puesto que puede fracasar de tres maneras: 1) hacer entrar a f'' pero no logra sacar a f', 2) sacar a f' pero sin lograr la entrada de f'', y 3) no conseguir que f'' entre ni que f' salga. La estrategia de truncamiento fracasa si la empresa f no logra sacar a f'. De todas las combinaciones posibles de éxitos y fracasos en ambas manipulaciones, existen cuatro casos comparables en un mecanismo *F*-óptimo.

Caso 1: Ambas estrategias son exitosas. Supóngase que $\mu_F(f)$ es la asignación estable *F*-óptima del mercado $(F^{\varphi}, W, \succ^{\varphi})$ que $f \in F^{\varphi}$ obtiene después de reportar honestamente sus preferencias sobre otras empresas al comité de votación. Si la empresa f reporta $\succ_f^{f' \leftrightarrow f''}$ tal que f' sale del mercado de asignación a favor de f'', queda $(F^S, W, \succ^{\varphi})$, donde $\left|F^{\varphi}\right| = \left|F^S\right|$, $f' \notin F^S$, $f'' \in F^{\varphi}$ y la asignación estable *F*-óptima es $\mu_F^S(f)$. Alternativamente, f puede realizar un truncamiento exitoso en el que saca del mercado a f' reportando $\succ_f^{f'}$, quedando el mercado $(F^T, W, \succ^{\varphi})$, donde $F^T = F^S / f''$, $f' \notin (F^S, F^T)$ y la asignación estable *F*-óptima es $\mu_F^S(f)$. De acuerdo con la Proposición 2.2 bis, el efecto de añadir una empresa adicional al mercado de asignación no debe

13 Los resultados de Crawford (1991) son una simplificación del trabajo previo de Kelso y Crawford (1982). El Ejemplo 2.18 de Roth y Sotomayor (1990) es muy ilustrativo de los efectos en el mercado de matrimonio de modificar la "extensión" de las preferencias de los agentes.

mejorar la situación de ninguna empresa, por lo que debe ser cierto que $\mu_F^T(f) \geq_f \mu_F^S(f)$. La demostración se efectúa analizando cada una de las asignaciones estables anteriores en los mercados $(F^S, W, \succ^\varphi)$ y $(F^T, W, \succ^\varphi)$. En cuanto a (F^S, W, P), partiendo de la hipótesis de que $\mu_F^T(f) \geq_f \mu_F^S(f)$, la asignación estable $\mu_F^T(f)$ no fue elegida porque no era alcanzable. La demostración para $(F^T, W, \succ^\varphi)$ es por contradicción. Si $\mu_F^S(f) \succ_f \mu_F^T(f)$, entonces no puede ser que f rechazó a $\mu_F^S(f)$ para emparejarse con $\mu_F^T(f)$ bajo un mecanismo estable *F*-óptimo en $(F^T, W, \succ^\varphi)$. Sin embargo, esto contradice que en $(F^S, W, \succ^\varphi)$ -con la presencia de f'' -, la empresa f se emparejó con $\mu_F^S(f)$; mientras que cuando no estuvo f'' -lo que reduce la oportunidades de que $\mu_F^S(f)$ reciba mejores propuestas- el emparejamiento de f fue con $\mu_F^T(f)$.

Caso 2: En la estrategia de sustitución f'' entra y f' no sale, mientras que en el truncamiento f' no sale. En la fallida estrategia de sustitución, el mercado resultante es $(F^{S'}, W, \succ^\varphi)$ y la asignación estable *F*-óptima es $\mu_F^{S'}(f)$. El truncamiento fracasado implica que el mercado no cambia con respecto al reporte honesto de las preferencias de f, por lo que se tienen $(F^\varphi, W, \succ^\varphi)$ y $\mu_F(f)$. Puesto que $F^\varphi \subset F^{S'}$, la demostración de que $\mu_F(f) \succ_f \mu_F^{S'}(f)$ se sigue del caso anterior.

Caso 3: En la estrategia de sustitución f'' no entra y f' sale, mientras que el truncamiento de f' es exitoso. Una estrategia de sustitución que fracasa de esta forma es equivalente al truncamiento exitoso, es decir, en ambos caso se obtienen $(F^T, W, \succ^\varphi)$, $\mu_F^T(f)$ y el bienestar de la empresa f es el mismo.

Caso 4. En la estrategia de sustitución f'' no entra y f' no sale, mientras que en el truncamiento f' no sale. El resultado de ambos procedimientos fallidos es que el mercado no cambia con respecto al que se obtuvo cuando f reportó honestamente sus preferencias al comité de votación. Por tanto, el bienestar de f es el mismo.

Los resultados son simétricos cuando se aplica un mecanismo *W*-óptimo. □

Roth y Rothblum (1999) y Ehlers (2004) muestran que estrategias que truncan el perfil de preferencias verdaderas pueden dominar a estrategias que reportan sus preferencias verdaderas o intercambian a una opción aceptable por una inaceptable. En este sentido, el resultado anterior no es nuevo, ya que se ha encontrado en otros ambientes informativos. La novedad consiste en demostrar que lo anterior también es cierto cuando un agente debe reportar preferencias sobre integrantes de su mismo lado del mercado y en un diseño en el que existen dos mecanismos de mercado vinculados (es decir, un comité de votación y un mercado de asignación).

Un límite a la ventaja de truncar sobre sustituir es que puede no mantenerse el resultado si se expulsan empresas diferentes en cada estrategia. También, es importante notar que el hecho de que nunca exista una empresa $f \in F^{\varphi}$ que este peor siguiendo una estrategia truncada que empleando una estrategia de sustitución se debe a que el conjunto de empresas que resulta de aplicar la estrategia truncada siempre es el mismo conjunto o, bien, es un subconjunto del que se obtiene al instrumentar la estrategia de sustitución. Lo anterior se ilustra en los ejemplos 2.2 y 2.3.

Ejemplo 2.2: Aunque es aceptable para el comité, una empresa trata de mejorar su bienestar con estrategias de sustitución. La empresa f_5 manipula la votación del Ejemplo 2.1 mediante una sustitución de f_4 por f_2, es decir, declara como aceptable a f_2 en detrimento de f_4. Permanecen f_1, f_2 y f_5, siendo las asignaciones estables *F*- y *W*-óptimas:

$$\mu_F^2 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_5 & (w_4) & (w_5) \\ w_2 & w_3 & w_1 & w_4 & w_5 \end{pmatrix} \text{ y } \mu_W^2 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_5 & (w_4) & (w_5) \\ w_3 & w_1 & w_2 & w_4 & w_5 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.3: Aunque es aceptable para el comité, una empresa trata de mejorar su bienestar con estrategias truncadas. La empresa f_5 trunca su conjunto de empresas aceptables, declarando a f_4 como inaceptable.[14] Únicamente f_1 y f_5 pueden participar en el mercado. Los resultados estables son:

$$\mu_F^3 = \mu_W^3 = \begin{pmatrix} f_1 & f_5 & (w_3) & (w_4) & (w_5) \\ w_2 & w_1 & w_3 & w_4 & w_5 \end{pmatrix}.$$

Los resultados para f_5 cambian de acuerdo al mecanismo estable empleado. Siguiendo el mecanismo *F*-óptimo, f_5 mantiene el mismo bienestar, mientras que mejora estrictamente si se usa el mecanismo *W*-óptimo. Así, para una empresa votante $f \in F^{\varphi}$, emplear una estrategia de sustitución es débilmente dominada por una estrategia truncada.

14 Puesto que las preferencias no son ordenadas, es irrelevante indicar que el orden de las demás opciones permanece inalterado o que una determinada opción se mantuvo en la cima de la clasificación.

Con respecto al Ejemplo 2.1, en las asignaciones estables del Ejemplo 2.2 se observa que el número de empresas que pueden ser emparejadas no varía, pero con f_2 como una opción en lugar de f_4 (lo que muestra que la cardinalidad no importa). Además del obvio mejor resultado para f_2, únicamente f_1 mejora estrictamente siguiendo el mecanismo *F*-óptimo. En cuanto a los trabajadores, ninguno mejoró.[15]

Comparando las asignaciones estables obtenidas en los ejemplos 2.1 y 2.3, gracias a su manipulación exitosa f_5 mejora estrictamente en la asignación *W*-óptima. Como una extensión de la Proposición 2.2, la situación de f_1 muestra que ninguna empresa aceptada empeora cuando un votante manipula la elección excluyendo a una empresa adicional. Una vez más, no existen trabajadores que mejoren estrictamente.

En cuanto al bienestar de los trabajadores en los ejemplos 2.2 y 2.3, están mejor si las empresas utilizan estrategias de sustitución en lugar de un truncamiento. Nótese que están imposibilitados para influir en el resultado de la votación.

2.4.2 Manipulación por grupo

A continuación se estudian las opciones estratégicas de las empresas que, a pesar de ser votantes, fueron excluidas del mercado. Puesto que ningún votante perdedor es capaz de lograr ser admitido en el mercado por sí sólo, se analizan casos de manipulación por grupo.

La manipulación por grupo puede ocurrir siguiendo dos estrategias. En una estrategia de sustitución por coalición en el comité de votación $\succ_E^{E\leftrightarrow D}$, una coalición de empresas $E \notin F^{\varphi}$ manipula su perfil de preferencias declarándose como aceptables mutuamente, en detrimento de un subconjunto de empresas D, tal que $D \in F^{\varphi}$ y $|D|$ es mayor o igual a 1. Una estrategia de ampliación (por parte de una coalición en el comité de votación) $\succ_E^{\to E}$ consiste en que todos los integrantes de la coalición de empresas $E \notin F^{\varphi}$ se declaran como aceptables recíprocamente, lo que constituye una extensión de sus perfiles de preferencias verdaderas.

Proposición 2.3. Para una coalición de empresas votantes $E \notin F^{\varphi}$, cualquier estrategia de ampliación por coalición en el comité de votación es débilmente dominada por una estrategia de sustitución por coalición en el comité de votación.

15 Tomando como base el bienestar de las empresas, estos resultados no necesariamente indican que una empresa aceptable para el comité empeore, debido a que en el intercambio podría sobrevivir una empresa que antes no lo hizo y que sería preferida por un trabajador determinado. Así, podría suceder que un trabajador o conjunto de trabajadores mejoren.

Prueba: Como en la demostración anterior, se analizan casos comparables de acuerdo a su éxito o fracaso. Para una coalición $E \notin F^{\varphi}$, una estrategia de sustitución por parte de una coalición en el comité de votación $\succ_E^{E \leftrightarrow D}$ será exitosa si logra que todos sus integrantes sean admitidos en el mercado de asignación, será parcialmente exitosa si sólo un subconjunto es aceptado y fracasará si ninguno es admitido. Lo mismo aplica cuando $E \notin F^{\varphi}$ instrumenta una estrategia de ampliación por coalición en el comité de votación $\succ_E^{\to E}$. Se analiza el mecanismo *F*-óptimo.

Caso 1: Ambas estrategias son exitosas. Si la estrategia de ampliación empleada es exitosa, se alcanza un mercado de asignación $(F^A, W, \succ^{\varphi})$, donde claramente $F^{\varphi} \subset F^A$ y la asignación estable *F*-óptima para la coalición $E \notin F^{\varphi}$ es $\mu_F^A(E)$. Un punto importante de la estrategia de sustitución es que su objetivo no consiste simplemente en conseguir que los miembros de $E \notin F^{\varphi}$ entren al mercado, sino en lograr excluir a un subconjunto $D \in F^{\varphi}$ de empresas. Si no se lograr sacar del mercado a ningún integrante de $D \in F^{\varphi}$, la asignación estable *F*-óptimo será $\mu_F^A(E)$, por lo que la coalición tendrá el mismo bienestar. En caso de ocurrir lo primero, el conjunto F^S de empresas que quedan en el mercado es menor a F^A, siendo $(F^S, W, \succ^{\varphi})$ el mercado y $\mu_F^S(E)$ la asignación estable *F*-óptima para la coalición $E \notin F^{\varphi}$. Puesto que $F^S \subset F^A$, el resultado de la Proposición 3.3 bis de Crawford (1991) aplica.

Caso 2. Ambas estrategias son parcialmente exitosas. Supóngase que para las dos estrategias $E' \subset E$ logra ser admitido en el mercado. La estrategia de ampliación lleva al mercado $(F^{A'}, W, \succ^{\varphi})$ y a la asignación estable *F*-óptima $\mu_F^{A'}(E')$ para $E' \subset E$. Si por la aplicación de la estrategia de sustitución no se excluyó a ninguna empresa que no pertenezca a la coalición, se obtiene la misma asignación estable que en el caso de la estrategia de ampliación, por lo que no hay cambios en el bienestar de $E' \subset E$. En caso de que se haya logrado excluir, sin pérdida de generalidad, a $D \in F^{\varphi}$, entonces el mercado es $(F^{S'}, W, \succ^{\varphi})$ y la asignación estable de interés es $\mu_F^{S'}(E')$. Puesto que $F^{S'} \subset F^{A'}$, debe ser cierto que $\mu_F^{S'}(f) \succ_f \mu_F^{A'}(f)$ para alguna $f \in E$.

Caso 3: Ambas estrategias fracasan. En ambos casos ningún integrante de $E \notin F^{\varphi}$ entra en el mercado de asignación.

Los resultados son simétricos cuando se aplica un mecanismo *W*-óptimo. □

Como ocurre en la Proposición 2.2, el conjunto de empresas admitidas al aplicar ambas estrategias siempre es el mismo, lo cual permite comparar resultados. Además, no existe una razón para pensar que una empresa tratará de excluir a diferentes empresas al aplicar cada una de las estrategias, en especial cuando se está en un ambiente con información completa sobre las preferencias del resto de agentes y en el que se conoce *a priori* los resultados de las estrategias implementadas.

Una coalición de empresas siempre tiene incentivos a influir en el mercado a fin de competir con la menor cantidad de rivales. Los ejemplos 2.4 y 2.5 permiten corroborar la demostración de la Proposición 2.3.

Ejemplo 2.4: Una coalición de empresas trata de evitar ser excluida empleando estrategias de ampliación. Las empresas f_2 y f_3 expanden su conjunto de empresas aceptables incluyéndose recíprocamente:

$$\succ'^{F}_{f_2} = \{(f_1,1),(f_2,1),(f_3,1),(f_4,1),(f_5,0)\}$$
$$\succ'^{F}_{f_3} = \{(f_1,1),(f_2,1),(f_3,1),(f_4,0),(f_5,1)\}$$

Estas empresas son admitidas en el mercado de asignación y se obtienen los resultados estables:

$$\mu_F^4 = \mu_W^4 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.5: Una coalición de empresas trata de evitar ser excluida empleando estrategias de sustitución. La empresa f_2 declara a f_3 como aceptable en detrimento de f_4, mientras que f_3 hace lo propio en perjuicio de f_5:

$$\succ''^{F}_{f_2} = \{(f_1,1),(f_2,1),(f_3,1),(f_4,0),(f_5,0)\}$$
$$\succ''^{F}_{f_3} = \{(f_1,1),(f_2,1),(f_3,1),(f_4,0),(f_5,0)\}$$

Gracias a esta manipulación f_1, f_2 y f_3 logran participar en el mercado. Las asignaciones estables son:

$$\mu_F^5 = \mu_W^5 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & (w_1) & (w_5) \\ w_2 & w_3 & w_4 & w_1 & w_5 \end{pmatrix}.$$

Comparando las asignaciones estables anteriores con $\mu_F^4 = \mu_W^4$, es claro que una estrategia de sustitución es mejor que una ampliada desde la perspectiva de los agentes que la efectúan. Es decir, si se puede sustituir se debe evita expandir.

Comparando los resultados estables obtenidos por aplicar una estrategia de ampliación con los obtenidos en la votación no manipulada ($\mu_F^1 = \mu_W^1$), es claro que f_2 y f_3 mejoran por el simple hecho de ser admitidas. Por supuesto, puesto que la estrategia implica que el número de empresas con posibilidades de ser emparejadas se incrementa, ninguna de las empresas restantes puede mejorar estrictamente. Los trabajadores se benefician de este tipo de manipulación debido a que se expande su conjunto de parejas probables. En cuanto a las estrategias de sustitución, las asignaciones estables obtenidas en el Ejemplo 2.5 también son mejores para f_1, f_2 y f_3 que los resultados sin manipulación $\mu_F^1 = \mu_W^1$.

Relativo al bienestar de los trabajadores en los ejemplos 2.4 y 2.5, existe un subconjunto de trabajadores que no empeora ante la utilización de una de las dos estrategias por parte de la coalición de empresas, cuando la alternativa es que sus integrantes se comporten honestamente. De ambas estrategias, la mejor para los trabajadores es la estrategia de ampliación.

Algo que se desprende de estos resultados es que una vez que logran un acuerdo para garantizar su admisión al mercado, los integrantes de la coalición $E \notin F^{\varphi}$ tienen incentivos para reportar la menor cantidad de empresas como inaceptables, puesto que esto incrementa la probabilidad de obtener un conjunto F^{φ} con menos elementos. Sin embargo, lo anterior tiene que ser balanceado con los posibles beneficios de coordinarse para reportar simultáneamente a una misma empresa como inaceptable.

2.5 Comentarios adicionales

Hasta ahora se ha supuesto que las vacantes o el cupo de las empresas en el mercado de asignación es determinado endógenamente. Sin embargo, el establecimiento exógeno de cupos máximos $\bar{r}$ o mínimos $\underline{r}$ de empresas que pueden acceder al mercado tiene efecto sobre el bienestar de empresas y trabajadores. Por un lado, un cupo mínimo $\underline{r}$, que implica que se permite un nivel máximo de desempleo, asegurará un bienestar mínimo para los trabajadores. Por el otro lado, un cupo máximo $\bar{r}$, que significa aceptar un cierto nivel de desempleo, favorecerá a las empresas que sean admitidas en el mercado.

En cuanto a las consecuencias de modificar dichos cupos, incrementos en $\bar{r}$ y $\underline{r}$ implican un menor desempleo, lo que no empeora el bienestar de ningún trabajador y hace que las empresas que fueron aceptadas anteriormente no mejoren, aunque más empresas podrán contratar trabajadores. Disminuciones $\bar{r}$ y $\underline{r}$ aumentarían el desempleo, de tal forma que no mejorará el bienestar de lo trabajadores, aunque algunas empresas anteriormente aceptadas no podrá contratar trabajadores.

Que el cupo sea un máximo o un mínimo provoca que las empresas enfrenten diferentes incentivos, dependiendo de la relación que guarde el cupo con el resultado que se obtendría en caso de que no hubiera uno. Si $\left|F^{\varphi}\right| = \underline{r}$, las empresas que saben que quedarían fuera del mercado tendrán incentivos a formar coaliciones para reportarse como aceptables mutuamente; si $\left|F^{\varphi}\right| > \underline{r}$, habría menos desempleo que el estipulado y se generarían incentivos para formar coaliciones de empresas que trunquen sus perfiles de preferencias; y si $\left|F^{\varphi}\right| < \underline{r}$, las empresas excluidas tendrían condiciones propicias para instrumentar exitosamente estrategias de ampliación. Si $\left|F^{\varphi}\right| = \bar{r}$, se formarán coaliciones de empresas aceptadas para truncar preferencias; si $\left|F^{\varphi}\right| > \bar{r}$, habrá incentivos para truncar el perfil de preferencias de las empresas en el comité de votación para disminuir $\left|F^{\varphi}\right|$; y si $\left|F^{\varphi}\right| < \bar{r}$, una coalición de no entrantes se concentrará en efectuar estrategias de sustitución.

Para finalizar, como lo indican los resultados presentados en este capítulo, la existencia de un comité de empresas que votan sobre ellas mismas resulta en más desempleo, lo cual ocasiona que un subconjunto de empresas y trabajadores obtengan un menor bienestar, a cambio de que otro subconjunto de empresas mejore su situación. La presencia de un comité de estas características se justificaría en mercados con demasiadas empresas y con costos de transacción muy altos para los trabajadores que deseen conocer las características de todas las vacantes. Por ejemplo, desde el punto de vista social, podría ser más eficiente contar con un mecanismo que filtre a las mejores empresas, de tal forma que los trabajadores incurran en un menor costo para conocer sus opciones y, potencialmente, pueden mejorar su bienestar. Otra justificación se refiere a limitar o evitar el acceso de ciertas empresas que no cumplan con requisitos mínimos de calidad o pertinencia del puesto que ofrecen. En el caso del servicio social universitario, la existencia de un comité de votación tiene el objetivo de asegurar que los proyectos ofrecidos a los estudiantes cumplan con características que les permitan cumplir con el principio de retribución a la sociedad (Mungaray *et al.*, 2007).

3. Extensiones y conclusiones

En el modelo desarrollado en el capítulo anterior las empresas conforman un comité de votación por el cual eligen a empresas aceptables, es decir, a integrantes de su mismo lado del mercado. Con la finalidad de obtener conclusiones más generales, en este capítulo se discuten dos variantes principales: a) cuando el comité de votación (conformado por empresas) elige a trabajadores aceptables y b) cuando el comité de votación vota a empresas y trabajadores aceptables. Se demuestra que los resultados de ambas variantes guardan simetría con los resultados del modelo presentado con amplitud en el capítulo anterior. También, se discuten brevemente otras extensiones de interés y se presentan las conclusiones generales de la investigación.

3.1 Empresas votan a trabajadores aceptables

Previo al mercado de asignación opera un comité conformado por empresas que eligen con base en una regla de mayoría simple a trabajadores aceptables. Así, el mercado de asignación con un comité de votación que elige a los trabajadores aceptables es una tripleta $(F, W^{\psi}, \succ^{\psi})$, donde un trabajador $w \in W$ tiene preferencias sobre el conjunto $F \cup \{\emptyset\}$ y una empresa $f \in F$ tiene preferencias sobre el conjunto $(W \times \{0,1\}) \times (W^{\psi} \cup \{\emptyset\})$.

El Corolario 3.1 es consecuencia directa (y simétrica) de la Proposición 2.1, que indica que en un mercado de asignación con un comité de votación en el que empresas eligen a empresas no existe un mecanismo de asignación con comité de votación sobre trabajadores aceptables $\overline{\Gamma}_w(\succ)$ estable (en términos de las preferencias estables) tal que para cada empresa declarar sus preferencias verdaderas sea una estrategia dominante.[16]

Corolario 3.1. En un mercado de asignación con un comité de votación que elige trabajadores aceptables, no existe un mecanismo de asignación $\overline{\Gamma}_w(\succ)$ (en términos de las preferencias reportadas) tal que para cada empresa declarar sus preferencias verdaderas en el comité de votación sea una estrategia dominante. Una vez en el mercado de asignación, reportar las preferencias verdaderas sobre trabajadores es una estrategia dominante.

En cuanto a las estrategias posibles para las empresas cuando se votan trabajadores, una empresa podría optar por tres tipos de estrategias en el comité de votación: una estrategia de truncamiento en el comité de votación $\succ_f^{w}$ donde $f \in F$ excluye de su perfil de preferencias a su último trabajador aceptable w

16 La simetría en los resultados significa que como ocurre con la Proposiciones 2.1, la principal diferencia de los resultados de este modelo con los del modelo uno a uno radica en que las empresas tienen la posibilidad de implementar estrategias tanto en el comité de votación como en el mercado de asignación.

manteniendo el orden de preferencias sobre el resto de trabajadores; una estrategia de sustitución en el comité de votación $\succ_f^{w \leftrightarrow w'}$, donde la empresa f manipula su perfil de preferencias reportando como inaceptables a su trabajador menos preferido w en lugar de un trabajador inaceptable w'; y una estrategia de ampliación en el comité de votación $\succ_f^{\to w'}$, donde la empresa f amplía su perfil de preferencias verdaderas reportando al final de su lista de preferencias a un trabajador inaceptable w'.

Respecto a los beneficios que una empresa podría obtener por aplicar las estrategias anteriores, lo primero que hay que tomar en cuenta es que una empresa no puede mejorar por eliminar a un trabajador del mercado de asignación. De lo anterior se desprende que las empresas tienen incentivos para declarar como aceptables a la mayor cantidad de trabajadores. Es más, deberían reportar como aceptables a todos los trabajadores.

Consistente con lo anterior, la estrategia de truncamiento $\succ_f^{w}$, que en caso de ser exitosa reduciría el número de trabajadores aceptados en el mercado de asignación, es débilmente dominada incluso por la estrategia de decir la verdad. Las otras dos estrategias podrían mejorar el bienestar de una $f \in F$, pero tomando en cuenta que una estrategia de sustitución únicamente llevaría a una empresa a obtener una utilidad mayor a la que tendría si fuera honesta cuando dicha estrategia fracasará, de tal suerte que su resultado sería equivalente a aplicar una estrategia de ampliación exitosa.[17]

En resumen, la mejor estrategia es la de ampliación $\succ_f^{\to w'}$, puesto que para una empresa $f \in F$ cualquier estrategia de sustitución en el comité de votación $\succ_f^{w \leftrightarrow w'}$ es débilmente dominada por una estrategia de ampliación en el comité de votación $\succ_f^{\to w'}$.

La existencia de un comité en el que empresas eligen a trabajadores aceptables no tiene sentido si las empresas están exclusivamente preocupadas por asegurar su propio bienestar. Es por eso que éstas tendrían incentivos para garantizar que el resultado de la votación sea que todos los trabajadores sean aceptables para entrar al mercado de asignación. Una probable justificación para la presencia de este tipo de comités sería asegurar un nivel de bienestar para ciertos trabajadores, lo que implica reconocer que es socialmente indeseable que determinados trabajadores se queden desempleados o se contraten con empresas que les proporcionen una utilidad menor a la que obtendrían si no existiera el comité de votación.

3.2 Empresas votan a empresas y a trabajadores

Otra variante consiste en un comité conformado por empresas que votan tanto a otras empresas como a trabajadores aceptables. En este caso, el mercado de asignación con un comité de votación que decide las

17 En cuanto al bienestar de los trabajadores que siempre logran mantenerse en el mercado de asignación, las estrategias de las empresas que tienen más posibilidades de beneficiarlos son las estrategias truncadas.

empresas y trabajadores aceptables es una tripleta $(F^{\varphi}, W^{\psi}, \succ^{\varphi,\psi})$, donde un trabajador $w \in W$ tiene preferencias sobre el conjunto $F^{\varphi} \cup \{\emptyset\}$ y una empresa $f \in F$ tiene preferencias sobre el conjunto $(F \times \{0,1\}) \times (W \times \{0,1\}) \times (W^{\psi} \cup \{\emptyset\})$.

El resultado es que no existe un mecanismo estable F-óptimo $\overline{\Gamma}_{wf}(\succ)$ tal que sea una estrategia dominante para cada empresa declarar sus preferencias verdaderas cuando se está en un mercado de asignación con un comité de votación que elige a empresas y trabajadores aceptables. Al igual que con el Corolario 3.1, el Corolario 3.2 es una consecuencia (simétrica) de la Proposición 2.1.

Corolario 3.2. En un mercado de asignación con un comité de votación que elige empresas y trabajadores aceptables, no existe un mecanismo de asignación $\overline{\Gamma}_{wf}(\succ)$ (en términos de las preferencias reportadas) tal que para cada empresa declarar sus preferencias verdaderas en el comité de votación sea una estrategia dominante. Una vez en el mercado de asignación, reportar las preferencias verdaderas sobre trabajadores es una estrategia dominante.

En cuanto a las estrategias empleadas, habría empresas (aceptables para el comité de votación) que, por un lado, emplearían estrategias truncadas para restringir la entrada de competidores al mercado de asignación y, por el otro, utilizarían estrategias de ampliación para maximizar la cantidad de trabajadores presentes en el mercado.

3.3 Otras extensiones

Un caso que resulta natural discutir consiste en que cada empresa se le permite contratar a uno o más trabajadores, como en el modelo de asignación universitaria. Los resultados previos se mantienen, debido a que existe un mecanismo de asignaciones estables donde ninguna empresa excede su cuota. Si hubiera más vacantes que trabajadores, algunas empresas no completarían sus cuotas. En caso contrario, algunos trabajadores se quedarían desempleados. En el ámbito estratégico, las empresas tendrán incentivos a declarar como inaceptables a aquellas empresas que tengan más vacantes disponibles.

Por otra parte, cuando existe un comité integrado por empresas, pero se aplica un mecanismo *W*-óptimo en el mercado de asignación, lo primero que hay que tomar en cuenta es que los trabajadores están imposibilitados para influir en el resultado de la votación. Si bien extender este análisis es por sí sólo objeto de otra investigación, se pueden establecer conjeturas iniciales con la finalidad de iniciar la discusión sobre este tema.

Considerando el modelo en el que empresas votan a empresas, pero con un mecanismo de asignación *W*-óptimo, la restricción endógena del número de empresas a participar en el mercado de asignación implica una limitación en la opciones que los trabajadores podrían declarar, lo que los motivaría a seguir comportamientos estratégicos. Romero-Medina (1998), en un modelo muchos a uno y donde el número de vacantes es restringido arbitrariamente, encuentra que no se puede garantizar que la asignación obtenida por el algoritmo de AD sea estable.

Si asumimos que las limitaciones arbitrarias y endógenas de opciones para los trabajadores no hacen diferencia, lo anterior confirmaría la existencia de incentivos para que los trabajadores reporten estratégicamente sus preferencias. En cuanto al comportamiento estratégico, Romero-Medina (1998) expone un caso especial de estrategias, denominadas estrategias ordenadas (*non-reverse strategies*), muy relacionas con las estrategias truncadas y en las cuales los agentes declaran únicamente los primeros elementos de su lista de preferencias. Así, la empresa escogida como primera opción es la mejor dentro del perfil verdadero de preferencias del trabajador.[18]

3.4 Comentarios finales

El principal resultado de este trabajo es que en un mercado de asignación bilateral con comité de votación no existe un mecanismo estable F-óptimo que haga que una estrategia dominante para todos los agentes sea declarar las preferencias verdaderas. También, se demostró que lo anterior se presenta para comités que eligen empresas aceptables, trabajadores aceptables o ambos.

Es importante notar que a diferencia de los estudios de estática comparativa de Kelso y Crawford (1982) y Crawford (1991), en los cuales no se establecía una causa por la que el número de participantes en el mercado de asignación pudiera variar, en los modelos analizados en este trabajo se propone una vía por la que esto puede ocurrir. Así, una contribución de este trabajo es que se demuestra que un mecanismo que establezca endógenamente el número de participantes en el mercado de asignación tiene efectos en el bienestar de los agentes de ambos lados del mercado y, por tanto, en su comportamiento estratégico.

Se discutieron las opciones estratégicas que enfrentan las empresas que manipulan la votación para incrementar su utilidad. Se encontró que cuando funciona un comité que elige empresas aceptables, éstas trataran de restringir la competencia disminuyendo el número de otras empresas que participarían en el mercado de asignación. Precisamente, la mejor estrategia que puede emplear una empresa que es aceptable para el comité es reportar un truncamiento de sus preferencias verdaderas. Las que no son aceptables para el comité, puesto que individualmente son incapaces de modificar el resultado de la votación, deben coludirse ampliando sus perfiles de preferencias para declararse recíprocamente como aceptables.

Si el comité elige trabajadores aceptables, las mejores estrategias son las que no reducen el número de trabajadores participantes en el mercado de asignación. Cuando el comité selecciona simultáneamente empresas y trabajadores aceptables, las empresas votantes escogerán una combinación de estrategias que minimice el número de empresas y maximice el número de trabajadores.

18 Expresado de otra forma, una estrategia desordena sus elementos cuando algunas empresas que pueden ser asignadas a un trabajador no están ordenadas como en sus verdaderas preferencias o, incluso, ninguna de las empresas que pudieron ser asignadas aparecen en el perfil de preferencias reportado.

Para finalizar, es importante notar que aunque en este trabajo se analizó el caso de un comité de votación conformado por todas las empresas existentes, muchos resultados se mantienen cuando únicamente un subconjunto de sus miembros puede votar, lo que es más acorde con el mecanismo descrito en UABC (2003) y UADY (1992, 2005).

Bibliografía

Alcalde, J. y S. Barberà (1994), Top dominance and the possibility of strategy-proof stable solutions to matching problems, *Economic Theory*, 4, p. 417-35.

Crawford, V. P. (1991), Comparative statics in matching markets, *Journal of Economic Theory*, 54(2), p. 389-400.

Demange, G. y D. Gale (1985), The strategy structure of two-sided matching markets, *Econometrica*, 55, p. 1057-74.

Demange, G., D. Gale y M. O. A. Sotomayor (1987), A futher note on the stable matching problem, *Discrete Applied Mathematics*, 16, p. 217-22.

Dubins, L. E. y D. A. Freedman (1981), Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm, *American Mathematical Monthly*, 88, p. 485-94.

Ehlers, L. (2004), In search of advice for participants in matching markets which uses the deferred-acceptance algorithm, *Games and Economic Behavior*, 48, p. 249-270.

Gale, D. y L. Shapley (1962), College admission and the stabilty of marriage, *American Mathematical Monthly*, 69, p. 9-15.

Gale, D. y M. O. A. Sotomayor (1985a), Some remarks on the stable matching problem, *Discrete Applied Mathematics*, 11, p. 223-32.

Gale, D. y M. O. A. Sotomayor (1985b), Ms. Machiavelli and the stable matching problem, *American Mathematical Monthly*, 92, p. 261-8.

Kelso, A. y V. P. Crawford (1982), Job matching, coalition formation, and gross substitutes, *Econometrica*, 50, p. 1483-1504.

Mungaray, A., J. M. Ocegueda, D. Ledesma, N. Ramírez, M. Ramírez y C. Alcalá (2007), Formación por medio del servicio. Un modelo de servicio social universitario en apoyo a microempresas marginadas, *El Trimestre Económico*, 296, p. 987-1010.

Peleg, B. (1988), Consistent voting system, *Econometrica*, 46, p. 153-70.

Romero-Medina, A. (1998), Implementation of stable solutions in a restricted matching market, *Review of Economic Design*, 3, p. 137-47.

Roth, A. E. (1982), The economics of matching: stability and incentives, *Mathematics of Operations Research*, 7, p. 617-28.

Roth, A. E. y M. O. A. Sotomayor (1990), *Two-sided matching: a study in game theoretical modeling and analysis*, Econometric Society Monograph Series, vol. 18, Cambridge: Cambridge University Press.

Roth, A. E. y U. Rothblum (1999), Truncation strategies in matching markets: in search of advice for participants, *Econometrica*, 67, p. 21-43.

Universidad Autónoma de Baja California (UABC, 2003), Reglamento de servicio social de la Universidad Autónoma de Baja California, *Gaceta Universitaria*, #110.

Universidad Autónoma de Yucatán (UADY, 1992), *Reglamento del servicio social*, en http://www.uady.mx/sitios/serv_soc/reglamento.htm, consultado el 27 de agosto de 2008.

Universidad Autónoma de Yucatán (UADY, 2005), *Manual de procedimientos del servicio social*, en http://www.uady.mx/sitios/serv_soc/manuald.htm, consultado el 27 de agosto de 2008.

Apéndice: Pruebas de las proposiciones 1.1 a 1.10 y 2.2 bis

Prueba de la Proposición 1.1: Dado que los conjuntos de agentes son finitos y las empresas no hacen dos veces una oferta al mismo trabajador, el algoritmo tiene un número finito de pasos.

La estabilidad de la asignación μ producida por el algoritmo de AD se demuestra suponiendo que $f \in F$ y $w \in W$ no están emparejados entre sí, pero $w \succ_f \mu(f)$. Tiene que ser cierto que w es aceptable para f y que ésta le propuso empleo antes que a $\mu(f)$. Puesto que no están emparejados cuando el algoritmo de AD terminó, f debió ser rechazada a favor de otra empresa. Debido a que $\mu(w)$ es mejor para w que f y que las preferencias son transitivas, f y w no bloquean la asignación μ. La asignación es estable puesto que no está bloqueada ni por un individuo ni por un par. □

Prueba de la Proposición 1.2: La prueba es por inducción. Supóngase que en el paso $t' < t$ ninguna empresa ha sido rechazada todavía por alguno de sus trabajadores alcanzables. En el mismo paso, asúmase que w rechaza a f. Si w rechaza a f porque es inaceptable, entonces w es inalcanzable para f. Si w rechaza a f en favor de f', entonces w prefiere a f' sobre f. Por su parte, f' prefiere a w sobre otros trabajadores, excepto sobre aquéllos que lo han rechazado antes y que, por el supuesto de inducción, se sabe que son inalcanzable para f.

Supóngase una asignación μ en la que f y w están emparejados. Se sabe que f' prefiere a w sobre $\mu(f')$. Por tanto μ es inestable, puesto que esta bloqueado por f' y w, ya que cada uno se prefiere a sus respectivas parejas en μ. Así, debido a que son inalcanzables recíprocamente, no existe una asignación estable que empareje a f con w. □

Prueba de la Proposición 1.3: Sean dos asignaciones estables, si $\mu \succ_F \mu'$ entonces $\mu \prec_W \mu'$. Por contradicción, supóngase que $\mu \prec_W \mu'$ no es cierto, entonces debe existir una w tal que $\mu \succ_F \mu'$. Puesto que $\mu(w) \succ_f \mu'(w)$ entonces debe ser cierto que $\mu(w) \neq w$. Asumiendo que $\mu(w) = f$. Entonces f y w forman un par bloqueador para la asignación μ'. Esto contradice la hipótesis de que μ' es estable, por tanto $\mu \succ_F \mu'$. □

Prueba de la Proposición 1.4: La prueba se estructura en dos partes: primero, se demuestra que λ es una asignación y, segundo, se comprueba que es una asignación estable. Por simetría, se concluye lo mismo para τ.

Para probar que λ es una asignación se debe demostrar que $\lambda(f) = w$ si y solo si $\lambda(w) = f$. Puesto que μ y μ' son asignaciones estables, si $\lambda(f) = w$ entonces $\lambda(w) = f$, lo que comprueba la dirección "solo si". A continuación se prueba la dirección "si". Existe $F' = \{f \mid \lambda(f) \in W\} = \{f \mid \mu(f) \in W \ o \ \mu'(f) \in W\}$. Por la dirección "solo si", $\lambda(F')$ está contenido en el conjunto $\{w \mid \lambda(w) \in F\} = W' \equiv \{w \mid \mu(w) \in F \ y \ \mu'(w) \in F\}$. La igualdad del primer conjunto con W' es por definición de λ. El conjunto W' tiene el mismo tamaño que $\mu(W')$. Como es verdad que $\lambda(f) = \lambda(f') = w$ sólo si $\lambda(w) = \lambda(w') = f$, entonces $\lambda(F')$ es del mismo tamaño que F' y ambos son al menos tan grandes como $\mu(W')$, entonces $\lambda(F')$ y W' son del mismo tamaño y $\lambda(F') = W'$. Luego, para $w \in W'$ y $\lambda(w) = f$ para alguna $f \in F'$, entonces $\lambda(w) = f$. Si $w \notin W'$, entonces $\lambda(w) = w$. Por lo tanto, $\lambda(w) = f$ implica que $\lambda(f) = w$. Por un argumento simétrico, τ es una asignación.

Para probar que λ es estable, se emplea un argumento por contradicción. Suponiendo que (f, w) bloquea a λ, entonces es verdad que $w \succ_f \lambda(f)$ y por consiguiente $w \succ_f \mu(f)$ y $w \succ_f \mu'(f)$. Por otro lado, $f \succ_w \lambda(w)$ que se obtiene puesto que (f, w) bloquea a μ si $\lambda(w) = \mu(w)$ o a μ' si $\lambda(w) = \mu'(w)$. Debido a que por hipótesis μ y μ' son estables, en ambos casos existe una contradicción. Por simetría, τ es estable. □

Prueba de la Proposición 1.5: Es suficiente mostrar que para un problema de asignación existe un mecanismo de asignación estable tal que decir la verdad no es una estrategia dominante para todos los agentes.

Ejemplo 1.1: Mercado de asignación uno a uno en el que existe un incentivo a manipular. Considérese dos conjuntos de agentes $M = \{f_1, f_2\}$ y $W = \{w_1, w_2\}$. El perfil de preferencias $\succ = (\succ_{f_1}, \succ_{f_2}, \succ_{w_1}, \succ_{w_2})$ es:

$$\succ_{f_1} = w_1, w_2 \qquad\qquad \succ_{w_1} = f_2, f_1$$

$$\succ_{f_2} = w_2, w_1 \qquad\qquad \succ_{w_2} = f_1, f_2$$

Las asignaciones estables *F*- y *W*-óptimas que se obtienen son, respectivamente, $\mu_F(f_i) = w_i$ para $i \in \{1, 2\}$, y $\mu_W(f_i) = w_j$ para $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$. Asumiendo que existe un mecanismo estable que, entre las dos asignaciones anteriores, elige a μ_F cuando las preferencias $\succ$ son reportadas.

Ahora, suponiendo que w_2 cambia su estrategia, declarando las preferencias falsas $\succ'_{w_2} = f_1$ en lugar de $\succ_{w_2}$, la única asignación que se obtiene es μ_W. En consecuencia, declarar las verdaderas preferencias no es una estrategia dominante para todos los agentes, puesto que w_2 mejora con el perfil de preferencias $\succ' = (\succ_{f_1}, \succ_{f_2}, \succ_{w_1}, \succ'_{w_2})$. □

Prueba de la Proposición 1.6: La prueba es por contradicción y se divide en dos partes. Supóngase que f esta mejor en una asignación estable μ bajo $\overline{\succ}$ que bajo $\succ$. Primero, asúmase que μ no es individualmente racional. Entonces $\mu(f)$ no está en la lista verdadera de trabajadores aceptables de f. Por tanto f mintió, lo que es una contradicción.

Segundo, supóngase que μ es individualmente racional. Entonces μ no es estable bajo $\succ$. Sea $\succ'$ un perfil de preferencias tal que un par (f, w) bloquea a μ bajo $\succ'$ solo si (f, w) bloquea a μ bajo $\succ$. Puesto que cada asignación estable bajo $\succ'$ es estable bajo $\succ$, entonces $\mu(f) \succ_f \mu_F(f)$. Por tanto, f bloquea a μ bajo $\succ'$. Pero no puede ser que f mienta, debido a que tendría que estar bloqueando a μ bajo $\overline{\succ}$, lo que contradice que μ es estable bajo $\overline{\succ}$. □

Prueba de la Proposición 1.7: La prueba es similar a la de la proposición anterior, pero en lugar de una sola empresa f que reporta falsamente $\overline{\succ}$ en lugar de $\succ$, existe un subconjunto $\overline{F} \subset F$ que lo hace. La primera parte de la prueba se obtiene inmediatamente.

Para la segunda parte, sea el perfil $\succ'$ tal que cada asignación estable bajo $\succ'$ es estable bajo $\succ$. Es decir, $\mu(f) \succ_f \mu_F(f)$ para todo $f \in \overline{F}$. Para continuar se requiere enunciar el Lema del Bloqueo.

Lema del Bloqueo. Sean μ cualquier asignación individualmente racional con respecto a $\succ$ y F' el conjunto de todos las empresas que prefieren μ a μ_F. Si F' no es vacío, existe un par (f, w) que bloquea a μ tal que $f \in (F - F')$ y $w \in \mu(F')$.

Si $\overline{F}$ es un conjunto no vacío, se enuncia el Lema del Bloqueo puesto que $\overline{F} \in F'$. Entonces existe un par que bloquea a μ bajo $\succ'$. Debido a que m bloquearía a μ bajo $\overline{\succ}$ (contradiciendo que μ es estable bajo $\overline{\succ}$), $f \notin \overline{F}$. □

Prueba de la Proposición 1.8: Sea $\succ'_w$ una estrategia en la que $w \in \mu(F)$ indica como aceptable únicamente a $\mu(w)$. Sea μ la asignación *M*-óptima para $(F, W, \succ')$. Por contradicción se demuestra que $\succ' = \{\succ_{-w}, \succ'_w\}$ es un equilibrio de Nash. Supóngase que w cambia a $\succ'' = \{\succ'_{-w}, \succ''_w\}$ que lleva a una nueva asignación *F*-óptima μ' tal que $m' = \mu'(w)$ y w prefiere a f' sobre $\mu(w)$ bajo $\succ$. Entonces en μ ocurrió que f' fue emparejado a una w' preferida sobre w. Entonces w' se quedo sin emparejar en μ' ya que f' fue el único empresa aceptable en su lista de preferencias. Por tanto, (f', w') bloquea a μ' bajo $\succ''$. □

Prueba de la Proposición 1.9: La prueba es por contradicción. Supóngase que existen dos asignaciones μ_W y μ'. Sea μ_W la única asignación estable para $(F, W, \succ')$ y, por consiguiente, la asignación estable *W*-óptima bajo $\succ'$. Por construcción de $\succ'$, w prefiere a $\mu'(w)$ sobre $\mu_W(w)$. Puesto que μ_W es la asignación estable *W*-óptima, entonces μ' es inestable bajo las preferencias verdaderas y, por tanto, está bloqueado por un par (f, w). Pero por construcción de $\succ'$, (f, w) bloquea a μ' bajo $\succ'$, por lo que μ' no es estable bajo $\succ'$.

Si un subconjunto $\overline{W}$ puede alcanzar mejores pagos declarando preferencias diferentes, entonces puede obtener un pago mejor que el que tendría en la asignación estable *W*-óptimo de $(F, W, \succ')$, pero por la Proposición 1.7 y la simetría entre empresas y trabajadores lo anterior no es posible. □

Prueba de la Proposición 1.10: La prueba es similar a las de las proposiciones 1.6 y 1.7, pero suponiendo que un subconjunto de empresas y trabajadores $C \equiv \overline{F} \cup \overline{W}$ reporta deshonestamente $\overline{\succ}$ en lugar de $\succ$. La primera parte de la prueba se deduce directamente de las pruebas de las proposiciones 1.6 y 1.7.

Para la segunda parte se necesita una ligera variación. Como en las pruebas anteriores, se asume que existe $\succ'$ tal que cada asignación estable bajo $\succ'$ también es estable bajo $\succ$. Puesto que se trata de una coalición $C \equiv \overline{F} \cup \overline{W}$:

1. $\mu(f) \succ_f \mu_F(f)$ para todo $f \in \overline{F}$; y

2. $\mu(w) \succ_w \mu_W(w)$ para toda $w \in \overline{W}$.

Si en la prueba de la Proposición 1.7 se demostró que $f \notin \overline{F}$ cuando $\overline{F}$ no es un conjunto vacío, entonces por simetría $w \notin \overline{W}$. Si $\overline{F}$ es vacío, $\overline{W}$ no es vacío por un argumento simétrico. □

Prueba de la Proposición 2.2 bis: El desarrollo de esta demostración es similar a lo realizado por Crawford (1991), pero considerando que se trata únicamente de un modelo de asignación uno a uno. Para efectuar la prueba se emplea el algoritmo de AD descrito en la sección 1.2 de este trabajo, así como una hipótesis de inducción: si un trabajador $w \in W$ rechaza a una empresa f en el paso t del algoritmo de AD aplicado en el mercado $(F, W, \succ)$, entonces también la rechazará en el paso t en el mercado $(F', W, \succ')$. La empresa f pertenece tanto a F como a F' .

Paso 1. El funcionamiento del algoritmo de AD implica que el trabajador $w \in W$ rechazará a f en el paso 1 en el mercado $(F, W, \succ)$ si recibiera propuestas de una o más empresas preferidas a f . Puesto que $F \subseteq F'$, $w \in W$ debería recibir ofertas de las mismas empresas y, probablemente, otras empresas en el paso 1 del algoritmo de AD aplicado en el mercado $(F', W, \succ')$, con respecto a las que recibió en el paso 1 en el mercado $(F, W, \succ)$. Por tanto, el trabajador $w \in W$ también rechazará la propuesta de la empresa f en el mercado $(F', W, \succ')$.

Paso $t+1$. Aquí, la hipótesis de inducción sostiene que si $w \in W$ rechazará a f en el paso $t+1$ en el mercado $(F, W, \succ)$, entonces también rechazará a f en el paso $t+1$ en el mercado $(F', W, \succ')$. Nótese que el algoritmo de AD implica dos cosas: a) el trabajador $w \in W$ rechaza a f si recibe propuestas de una o más empresas que son preferidas a f , y b) las empresas que realizaron ofertas en el paso $t+1$ en el mercado $(F, W, \succ)$ necesariamente fueron rechazadas en el paso t (es decir, el paso t implica al paso $t+1$). Por la hipótesis de inducción, las empresas rechazadas en el paso t en $(F, W, \succ)$ también serán rechazadas en el paso t en el mercado $(F', W, \succ')$. Puesto que cualquier empresa que hizo una propuesta a $w \in W$ en el paso $t+1$ en el mercado $(F, W, \succ)$, también la debió realizar en el paso $t+1$ en el mercado $(F', W, \succ')$. Se sigue que si esta propuesta fue rechazada en $(F, W, \succ)$, también debió haberlo sido en $(F', W, \succ')$.