EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

DESIGUALDAD DE OPORTUNIDADES Y EDUCACIÓN: UN ENFOQUE DE MECANISMOS

JUAN ALEJANDRO FLORES PÉREZ

PROMOCIÓN 2018-2020

ASESOR:

DR. DAVID CÁNTALA

JUNIO 2020

A Laura y Juan José por siempre el mejor apoyo;
a Mariana, por recordame que la felicidad se encuentra en las pequeñas cosas;
a Felix, que desde el cielo siempre me ha dado la mejor guía;
a Alejandra, por la motivación y el amor en todo momento;
a mis amigos por siempre manterme de pie.

Agradecimientos

Quiero agradecer a:

Al Dr. Cantala por su guía, su critica y su apoyo durante la elaboración de esta tesis.

A mis padres y hermana, por soportar la lejanía de su hijo y hermano, por siempre mostrar una sonrisa a pesar de las adversidades. Por siempre creer en mi y apoyar mis proyectos e ideas, por ser mi mayor ejemplo de trabajo y superación. Por ser siempre mi hogar. Espero siempre estén orgullosos de mi, asi como yo estoy orgulloso de ser su hijo y hermano.

A mis abuelos. Especialmente a mi abuela Angelina, por ser la primera en hablarme de economía y enseñarme la importancia de la movilidad social; y a mi abuelo Felix, espero que estés donde estés, siempre tengas esa sonrisa y ese buen humor que te caracterizo, a pesar de que ya no estas, toda mi vida va dedicada a ti.

A Alejandra Llanos, por siempre tener una sonrisa a pesar de las dificultades, por sus cuestionamientos que siempre me impulsaron a mejorar. Por cada café, cada risa, cada abrazo que me daba fuerza para continuar. Gracias por todas esas veces que tuviste que escucharme hablar del COLMEX, por soportar mis frustraciones y mi estrés. Gracias por estar siempre.

A mis compañeros y amigos, Quique y Memo, por ser siempre mi equipo de estudio, por cada noche de desvelo, por cada comida, por motivarme con el ejemplo a nunca darme por vencido. Nunca podre dejar de agradecer que sin ustedes, esto no sería posible. Un placer ser su compañero y amigo.

Al Colegio de México y cada uno de sus docentes, trabajadores administrativos y de limpieza, por darme la oportunidad de seguir preparándome. De enseñarme a construir argumentos, por ayudarme a encontrar mi vocación y lo que me apasiona. Especialmente gracias por brindar educación de la mas alta calidad y ayudar a sus alumnos a alcanzar sus sueños.

Resumen

El tema de la desigualdad ha sido un tema tratado ampliamente por diferentes autores y con diferentes perspectivas. Abordamos el tema de la desigualdad desde una perspectiva puramente económica. Intentamos responder la pregunta ¿Qué tanto impacta la desigualdad económica en la educación y que mecanismo matiza mejor estas desigualdades? Para responder esta pregunta seguimos el modelo realizado por Fernández y Galí (1999), donde asumen una economía en la cual los individuos difieren en términos de dotaciones iniciales, habilidad y riqueza inicial, y donde estas dotaciones son información privada. La asignación a las escuelas esta determinada por dos mecanismos: mercado y torneos. En el primero, los agentes son asignados a una escuela según sus dotaciones iniciales, es decir, el que tiene mayor dotación inicial es asignado a una escuela de mayor calidad. En el segundo, las personas toman una decisión simultánea sobre la inversión para generar una señal más alta en el torneo. La aportación de nuestro modelo a la literatura es agregar la variable de riqueza en el proceso de asignación con la finalidad de medir la importancia de este factor en el momento de la asignación de los agentes a las escuelas. El modelo muestra que, sin igualdad de oportunidades, los torneos son mas eficientes y que los mercados matizan mejor estas desigualdades, lo que implica que en realidad, la aleatoriedad en las dotaciones iniciales juega un papel fundamental en el éxito de los individuos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Quizás no haya otro debate económico más antiguo que el de la desigualdad. Si bien la mayoría de la gente está de acuerdo en que es deseable una reducción de la desigualdad, hay una discusión muy amplia sobre sobre lo que se entiende por igualdad, cómo medirla y qué se debe igualar (ver Sen (1980), Dworkin (1981b), Roemer (1996)). Esto implica que, la desigualdad tradicionalmente ha sido tratada como una cuestión moral, concentrándose en la equidad de los métodos y los resultados de las distribuciones de recursos.

Aquí, abordamos el tema de la desigualdad desde una perspectiva puramente económica. Intentamos responder la pregunta ¿Qué tanto impacta la desigualdad económica en la educación y que mecanismo matiza mejor estas desigualdades? Para responder esta pregunta es importante considerar que este tipo de desigualdad afecta los resultados económicos tanto a nivel macro como a nivel micro. Un claro ejemplo de estos efectos negativos es que disminuye oportunidades de movilidad social intergeneracional y esto a su vez reduce el potencial de crecimiento económico. Sin igualdad de oportunidades, estamos reduciendo el nivel de competencia económica e innovación científica, tecnológica y artística y perjudicando a todos los agentes que no son capaces de desarrollar sus habilidades por completo.

El paradigma meritocrático se basa en la creencia de que el éxito se debe principalmente, si no exclusivamente, a cualidades personales como el talento, la inteligencia, las habilidades, el esfuerzo, el trabajo duro o la toma de riesgos. A veces, estamos dispuestos a admitir que un cierto grado de suerte también podría desempeñar un papel en el logro de un éxito material significativo. Pero, de hecho, es bastante común subestimar la importancia de las fuerzas externas en las historias exitosas individuales.

Esta tesis tiene por objetivo demostrar la importancia que tiene la desigualdad de oportunidades, específicamente la desigualdad de oportunidades iniciales o desigualdad en dotaciones iniciales, en el momento en el que los agentes toman la decisión de asistir a la universidad. Seguimos el modelo realizado por Fernández y Gali (1999), donde asumen una economía en la cual los individuos difieren en términos de dotaciones iniciales, habilidad y riqueza inicial, y donde estas dotaciones son información privada. Además, las recompensas que las personas reciben como resultado de sus logros son asignadas por dos mecanismos: mercado y torneos. En el primero, los agentes son asignados a una escuela según sus dotaciones iniciales, es decir, el que tiene mayor dotación inicial es asignado a una escuela de mayor calidad. En el segundo, las personas toman una decisión simultánea sobre la inversión para generar una señal más alta en el torneo. Luego, cada agente es asignado a una escuela de acuerdo con su rango en la distribución del desempeño: el agente con mejor desempeño es asignado a la escuela de mayor calidad y así sucesivamente. Fernández y Galí (1999) no toman en cuenta la importancia que tiene la dotación inicial de riqueza en las asignaciones por lo que su énfasis no es la desigualdad, sino una comparación de diferentes instituciones para asignar recompensas.

La aportación de nuestro modelo a la literatura es agregar la variable de riqueza en el proceso de asignación con la finalidad de medir la importancia de este factor en el momento de la asignación de los agentes a las escuelas. El modelo muestra que, en realidad, la aleatoriedad en las dotaciones iniciales juega un papel fundamental en el éxito de los individuos. Es cierto que, como era de esperar, las personas talentosas tienen más probabilidades de ser más exitosas o importantes durante su vida con respecto a las personas con menor habilidad. Pero, y esta es una razón menos intuitiva, los agentes comunes con un nivel promedio de habilidad tienen mayor probabilidad de ser mucho más exitosos que los de mayor habilidad, siempre que sean beneficiados con alta riqueza inicial.

Este trabajo de tesis tiene la siguiente estructura. En el capitulo 2 mostramos discusión existente tanto en la literatura teórica como empírica sobre la importancia de la desigualdad de oportunidades y sus efectos económicos, así como dar un panorama de los trabajos empíricos realizados a nivel internacional y nacional. En el capitulo 3, desarrollamos formalmente el modelo y describimos el problema de matching y mostramos nuestro criterio de eficiencia. En el capitulo 4 analizamos la asignación de equilibrio con mercados y torneos cuando existen mercados de capitales perfectos (no existe desigualdad de oportunidades). Capitulo 5 analizamos los efectos sobre esos equilibrios cuando no hay mercados de capitales perfectos (existe desigualdad de oportunidades). El capitulo 7 están las comparaciones de eficiencia de las asignaciones. Y finalizamos con el capitulo 8 donde damos las conclusiones.

Capítulo 2

Revisión de literatura

El presente capítulo tiene por objetivo mostrar la discusión existente tanto en la literatura teórica como empírica sobre la importancia de la movilidad educacional y los efectos que tiene en la movilidad social y en la desigualdad, así como dar un panorama de los trabajos empíricos realizados a nivel internacional y nacional.

2.1. Literatura empírica

La movilidad social es que es un fenómeno económico que se ha observado a lo largo del tiempo y que ha sido de gran interés en los últimos años. Uno de los trabajos que mayor discusión ha causado es el de Piketty (2014), en el cual argumenta que la falta de movilidad social es una característica estructural del sistema económico actual que inhibe la cohesión y estabilidad social. El autor se concentra en analiza rentas y distribución de riqueza. Argumenta que la concentración de riqueza se acomoda cada vez más en las clases más altas de la sociedad y esto provoca que la riqueza heredada crezca a una mayor velocidad que la producción y los ingresos provocando que la desigualdad crezca entre generaciones y la movilidad social se estanque.

La literatura económica identifica múltiples determinantes de la transmisión intergeneracional de componentes que promueven la movilidad social, como la educación y el ingreso. La primera de dichas literaturas estudia los mecanismos de transmisión de las características de origen (Blanden et al. (2007); Heckman et al. (2006); Mason (2007)). Esta literatura identifica tres elementos clave para la transmisión intergeneracional: 1) provisión de conexiones sociales para acceder a la educación y a empleos, 2) inversión en la primer infancia y 3) transmisión genética de habilidades. Apoyando a esta literatura Ichino y Winter-Ebmer (1999) encuentran que los hijos de padres más educados suelen tener más educación

En lo que respecta a la literatura enfocada a la transmisión intergeneracional, Hertz et. al. (2007) muestran evidencia a nivel internacional indica que persistencia intergeneracional educativa es mayor en países con altos retornos a la educación y menor en países con un mayor gasto público en educación. Más recientemente Heckman y Mosso (2014) resaltan la importancia de intervenciones en edades tempranas y resaltan nuevamente el papel de las restricciones de acceso al crédito en la formación futura de habilidades. De esta revisión literaria se desprende que variables como al ingreso familiar, la preferencia paternal, los retornos monetarios a la educación tienen un papel determinante en la transmisión intergeneracional de la educación.

Para México, que es considerado un país de baja movilidad social, Serrano y Torche (2010) y Campos et al. (2015) encuentran que la persistencia de la pobreza y la desigualdad económica se ha acompañado de un grado de movilidad social intergeneracional significativamente bajo en los extremos de la distribución socioeconómica.

Gran parte de la literatura se centra en la identificación de los patrones de movilidad social en términos de ingreso y educación. Ejemplos de esta literatura son Dahan y Gaviria (2001), que analizan la correlación que existe en los resultados educativos entre hermanos para una muestra de 16 países latinoamericanos. Sus resultados colocan a México como el segundo país de menor movilidad. Cuesta et al. (2011) estiman la transferencia intergeneracional de características de origen entre cohortes de edad, a través de pseudo paneles para 14 países de América Latina para el periodo de 1992 a 2003. Sus resultados muestran un nivel alto de inmovilidad a nivel regional, y encuentran que México tiene un coeficiente de transmisión de 0.43 y la persistencia resulta menor que para otros países de America Latina.

En el caso de la movilidad intergeneracional en términos educativos, ésta se ha incrementado con el paso del tiempo. Aunque para áreas urbanas se identifica que la tendencia decreciente de la persistencia intergeneracional del logro educativo se habría revertido, los estudios con cobertura nacional muestran que esto no ocurrió de forma generalizada. Uno de los factores que explican la mayor movilidad educativa es la expansión de la cobertura en los niveles básicos. La literatura también indica que las condiciones socioeconómicas del hogar son el otro factor que explica la baja movilidad en logro educativo. En consecuencia, los estudios comparativos entre países colocan a México como un país de baja movilidad en términos educativos, e incluso, como uno de los de menor movilidad en la región de América Latina.

Ejemplos de trabajos que ayudan a entender la movilidad intergeneracional educacional son Lima et al. (2015) estima la movilidad intergeneracional en educación en México, con un énfasis en la diferencia de movilidad observada entre padre-hijo y madre-hija, así como la variación de dicha diferencia entre cohorte. Muestra que, al tiempo que las generaciones más jóvenes experimentaron un incremento en movilidad educacional, las diferencias en la movilidad entre hombres y mujeres se redujo. Literatura mas reciente, enfocada en analizar las percepciones de las preferencias de los agentes, como el trabajo realizado por Székely (2015), donde analizó si las expectativas de los padres respecto al nivel educativo que sus hijos pueden alcanzar, influyen sobre el logro educativo de estos. Sus resultados muestran que las expectativas de los padres sobre el logro escolar de sus hijos tienen una relación positiva con el grado alcanzado por estos, una vez que se controla por género, edad del hijo y por nivel de ingresos en el hogar. Otro trabajo con el mismo enfoque, es el realizado por Durán y Soloaga (2015), en el cual analizan la relación entre la percepción de los hogares sobre su situación socioeconómica, las expectativas de los padres sobre el logro de sus hijos y la inversión de recursos que realiza el hogar en la educación. Tiene dos conclusiones: la primera es que la percepción de movilidad social es relevante en la construcción de expectativas sobre el logro educativo de los hijos, es decir, si perciben que pueden alcanzar un mayor logro educativo, esperan que efectivamente lo alcancen. La segunda es que encuentran errores en la percepción de los padres sobre su situación socioeconómica respecto a la media nacional está equivocada, es decir, que consideran que se encuentran en una posición más alta de lo que realmente están, no existe un efecto negativo sobre el logro escolar de los hijos.

La revisión de literatura sobre México nos indica que altos niveles de desigualdad se transmite entre generaciones. Además, es importe analizar que la persistencia se da tanto en términos de desigualdad de dotaciones iniciales, como la riqueza del hogar de origen y nivel de educación de los padres, como en las preferencias y percepciones que tienen las personas sobre el alcance que tendrán sus los logros educativos en futuras generaciones. Esto implica que estudiar los mecanismos por los cuales se logra movilidad educacional, movilidad de ingresos y como consecuencia movilidad social de carácter intergeneracional, y como promover redistribuciones que rompan dichas inercias es crucial. Los trabajos analizados hasta aquí nos indica que hay algo que no están funcionando y refuerzan la idea de que México es un país donde la desigualdad de oportunidades es un tema de vigente.

2.2. Modelos teóricos

La mayor parte de la literatura que estudia los efectos de la desigualdad de oportunidades en el crecimiento económico a través de sus efectos en la acumulación de capital humano se ha centrado en el papel de las restricciones crediticias. Tan importante como saber y poder analizar las consecuencias de la desigualdad de oportunidades, es conocer el mecanismo que las produce y si es posible corregirlo. A pesar del hecho de que a veces es difícil separar exactamente qué factores no pueden atribuirse a las diferencias de ingresos o riqueza como el color de piel, la composición del hogar (ausencia de madre o padre en el hogar), el grupo étnico y la educación de los padres afectan significativamente las diferentes medidas de logro educativo (incluso después de que uno controla los ingresos o la riqueza de la familia). Estos factores no adquiribles que complementan el tiempo y el esfuerzo en la formación de capital humano pueden considerarse como el conjunto de çircunstancias predeterminadas"de John Roemer o aspectos de un individuo que están fuera de su control una vez que llega el momento de tomar una decisión de inversión en capital humano. y por el cual la sociedad no debe responsabilizar al individuo (Roemer, 2000, 2006).

Dentro de la literatura hay dos principales mecanismos de asignación de recompensas[1] a agentes según sus dotaciones o su esfuerzo. El primero es de mercados, que es el que asigna mediante una función de precios y el segundo el de torneos, que consiste en que los agentes generan una señal y según la señal se le asigna una recompensa.

La literatura sobre torneos es extensa. Cole et al. ((1995), (1998)) fueron pioneros en el uso de modelos de torneo de orden de rango para estudiar la asignación de recursos fuera del mercado, seguido de Zenginobuz (1996) y Fernández y Galí (1999). Moldovanu y Sela (2006) propone una forma de diseño óptimo del torneo desde la perspectiva del diseñador del torneo que tiene como objetivo maximizar el esfuerzo total esperado o el esfuerzo esperado de los concursantes. Hopkins y Kornienko ((2004), (2009)) exploraron la desigualdad de las dotaciones en los modelos de juegos de estatus. Existen ventajas al utilizar mecanismos de torneos, la primera es que son útiles en para determinar los ingresos a escuelas (universidades), obtener empleo, el pago dentro de las empresas, entre otros. Segundo, podemos hacer comparaciones de bienestar o eficiencia para analizar las preferencias de los agentes, es decir, si un individuo altamente calificado en un país pobre puede tener mayor salud y felicidad que un individuo de bajo rango en un país más rico, aunque este último tenga una mayor prosperidad material. Esto sugiere que las personas tienen una preocupación intrínseca por la posición o el estado relativo. Hay trabajos que sugieren indicadores de bienestar como la satisfacción laboral (Brown et al., (2008)), salud (Marmot et al. (1991)) y felicidad general (Easterlin (1974)) y que están fuertemente determinado por la posición relativa.

Un supuesto importante de nuestro modelo es que hay una distribución fija de recompensas indivisibles. La justificación para esto es que en realidad hay muchas cosas deseables, trabajos, lugares en la universidad, que difieren en calidad y que no son divisibles. Bajo este supuesto, hay trabajos que hacen la comparación sobre cuál

[1] Las recompensas pueden ser desde entrar a una universidad, conseguir un empleo (Hopkins, 2012), conseguir pareja (Becker y Tomes, 1976), entre otros)

mecanismo asigna de manera mas eficiente los recursos entre los agentes. Trabajos como los realizados por Costrell y Loury (2004) y Suen (2007) argumentan que con recompensas son indivisibles, es posible que las asignaciones por precios en lugar de desempeño pueden mejorar la eficiencia. Esta posibilidad se analiza considerado cambios en la distribución de la capacidad de los trabajadores y en la calidad de los trabajos. No hay ningún efecto incentivador ya que no hay elección de esfuerzo por parte de los trabajadores y todos los resultados son eficientes de Pareto. No obstante, la forma de las distribuciones de capacidad y de empleos afecta la distribución de los salarios. Es decir, los cambios en el nivel de desigualdad pueden tener un efecto material en los resultados, incluso si hay un mecanismo de precios.

Encontramos relación de nuestro análisis con las teorías de justicia existentes basadas en el mérito o el esfuerzo suponen que quienes trabajan más o tienen mayor mérito, debería tener mayores recompensas como lo expresa Konow (2003). Sin embargo, parece haber poca discusión sobre el hecho de que el acceso a fuentes de financiamiento podría provocar igualdad de oportunidades. El talento puede variar ampliamente, pero los más talentosos pueden recibir una recompensa monetaria solo un poco mayor que los menos talentosos. Alternativamente, pequeñas diferencias en el talento podrían conducir a grandes diferencias en los resultados. Existe también literatura de justicia distributiva (ver Rawls (2017), Dworkin (1981a)), a menudo se encuentra la cuestión de la igualdad de recursos"(riqueza, pero también posiblemente educación o talento). Sin embargo, estos trabajos no hacen distinción sobre el tiempo o la causalidad, en el sentido de que no hay distinción entre lo que uno tiene inicialmente (dotación) y lo que uno puede obtener (recompensa).

Nuestro análisis también está relacionado con la literatura sobre el papel de las restricciones de endeudamiento para evitar que las personas adquieran educación cuando hay un costo indivisible asociado con la escolarización. Como señalaron Galor y Zeira (1993), el acceso a la educación de las personas más pobres depende de si pueden pedir prestado o no. Cuando existen imperfecciones en el mercado de capitales que resultan en restricciones de endeudamiento, aquellas personas con un nivel de riqueza que se encuentra por debajo de un valor umbral no pueden pagar el costo de la educación. Una de las discusiones más recientes es la relacionada con la movilidad social, específicamente, como la herencias pueden influir en la dinámica de las generaciones futuras. Las transferencias intergeneracionales de padres a hijos podrían ayudar a mejorar los efectos negativos de las restricciones de endeudamiento en la acumulación. del capital humano. Sin embargo, en un entorno con imperfecciones en el mercado crediticio, solo aquellos individuos que reciben una herencia suficientemente grande pueden invertir en capital humano (ver Becker y Tomes (1973), Eckstein y Zilcha (1994), o Behrman et al. (1995)). Con respecto a la dinámica de la distribución de la riqueza, Galor y Zeira (1993) muestran que, si se suponen imperfecciones del mercado crediticio y un costo de educación indivisible, la distribución de la riqueza heredada determina por completo la acumulación de capital humano y la dinámica de la distribución posterior de riqueza. Tenga en cuenta que en nuestro modelo cada individuo decidirá cuánto invertir en su propio capital humano. Los modelos de Doepke y Zilibotti (2008) y Gradstein (Gradstein, 2008) suponen, en cambio, que los padres moldean las preferencias de sus hijos para generar oscilaciones de riqueza. Doepke y Zilibotti (2008) suponen que los miembros de familias de clase media y pobres desarrollan paciencia y una ética de trabajo, que son las actitudes que mejor se ajustan a la inclinación del perfil de ingresos que enfrentan en sus ocupaciones, mientras que los miembros de familias de clase alta que dependen de una considerable renta de capital invierte en la apreciación del ocio. Gradstein (2008) propone un mecanismo complementario de transmisión intergeneracional de preferencias donde los padres tienen incentivos para proporcionar a sus hijos hábitos de trabajo para minimizar la dependencia de los niños de las transferencias de los padres.

Capítulo 3

Modelo

Esta sección describe el problema de matching de agentes con diferentes dotaciones iniciales de habilidad y riqueza con escuelas que difieren en calidad. Nos basamos en el modelo propuesto por Fernandes & Galí (1999). El modelo original, plantea el problema de matching pero supone que la dotación inicial de riqueza de los individuos no es importante en la asignación de los agentes a las escuelas, lo cual puede ser considerado como algo que describe de manera parcial la realidad.

Aquí, como en Fernandes & Galí (1999), tenemos dos escenarios y dos mecanismos en cada uno de ellos. El primer escenario es cuando el mercado de capitales es perfecto, lo que implica que existe el acceso a un mercado externo de prestamos sin riesgos (tasa de interés igual a cero). El segundo escenario es cuando existe un fallo de mercado, en este caso es que el mercado de capitales no es perfecto, la tasa de interés no es igual a cero y los agentes con riqueza inicial baja difícilmente podrán acceder a un crédito.

Usamos dos mecanismos, el mecanismo de mercado que asigna una escuela a un agente dado su dotación inicial de habilidad y riqueza, y el mecanismo de torneos, que asigna asigna a cada agente a una escuela mediante una señal, es decir, resultado de un examen. Los agentes invierten parte de su dotación inicial de riqueza para poder generar una señal mas alta y ser ubicados en escuelas de mayor calidad. Nuestra explicación de la relación entre capital humano y desigualdad dependerá de la existencia de imperfecciones en el mercado crediticio para financiar inversiones educativas como en Galor y Zeira (1993).

Resumiendo, el objetivo de modelar este problema como un problema de matching es hacer énfasis en la importancia de la distribución de las dotaciones iniciales y nos referiremos al grado de desigualdad en esta distribución como el grado de "desigualdad de oportunidades". La desigualdad de oportunidades no solo se refiere a la desigualdad de ingresos o de riqueza, también se refiere a la atención pre y post-natal, nivel de educación de los padres, antecedentes familiares, raza, genes, cultura, a que los agentes tengan la oportunidad de desarrollar sus habilidades, tengan acceso a buena alimentación, entre otros.

3.1. Descripción de la economía

La economía la describimos como en Fernandez & Galí (1999) y consiste en un continuo de agentes caracterizados por una dotación inicial de "habilidad" y una riqueza inicial, (a, w).[1] Para simplificar la explicación, asumimos que los agentes se distribuyen de acuerdo a una distribución uniforme en la unidad al cuadrado:

$$I^2 \equiv [0,1] \times [0,1]$$

por lo tanto, los atributos no están correlacionados entre los agentes.

Existe una dotación inicial exógena de inversión de oportunidades que varían en "calidad", reflejada en la producción que generan cuando se combina con una habilidad dada. En este trabajo vamos a enfocarnos en la calidad de las escuelas.
La calidad de las escuelas esta dada por índice $s \in [0,1] \equiv I$. De nuevo, por simplicidad, asumimos que de distribuyen de manera uniforme.

Un agente con habilidad **a** y riqueza **w** que es asignado a una escuela con calidad **s** genera un nivel de producción (ingreso) $X(a,s,w)$, donde $X : I^3 \rightarrow \Re_+$, que puede ser pensada como una función de producción. La principal diferencia de este trabajo con Fernandez & Galí (1999) es que en este trabajo le damos importancia a la dotación inicial de riqueza, **w**, en la función de producción. Este supuesto extra, nos ayuda a modelar la importancia de la desigualdad de oportunidades pues lo que producimos esta directamente relacionado con nuestra dotación de riqueza, de manera que mientras mayor riqueza inicial, los agentes pueden desarrollar mas y mejor sus habilidades y generar mayor producción.
Asumimos que $X(a,s,w) \in C^2$, i.e., es dos veces diferenciable, y las derivadas parciales son continuas y es acotada, con:

I. $X_i(a,s,w) > 0$ con $i = a, s, w$

II. $X_{ss}(a,s,w) < 0$

III. $X_{as}(a,s,w) = X_{sa}(a,s,w) > 0$

IV. $X(0,s,0) = 0$

[1] Por habilidad nos referimos a la eficiencia/productividad con la cual un agente puede usar un recurso de cierta calidad

v. $X(0,s,1) \geq 0$

vi. $X(a,s,w)$ es una función cuasiconcava

(i) significa que la producción es creciente en la calidad de la escuela, habilidad, riqueza inicial. (ii) nos dice que existen retornos decrecientes en los retornos de la calidad de la escuela. (iii) indica que la habilidad del agente y la calidad de la escuela son complementarios en producción. (iv) agentes con habilidad y riqueza inicial mas baja obtienen un pago igual a cero, independientemente de la calidad de la escuela.[2] (v) agentes con habilidad baja pero riqueza inicial muy alta, obtienen un pago que no necesariamente es cero, independientemente de la calidad de la escuela. (vi) condición para evitar soluciones de esquina.

Entonces, las acciones de los agentes, dado un mecanismo de asignación y la presencia (o ausencia) de desigualdad de oportunidades, son tomadas dentro de la siguiente estructura de dos periodos:

1. En el primer periodo, agentes incurren en el nivel de gasto deseado (posiblemente piden prestado o prestan si los mercados de capitales están operativos) y son asignados a una escuela.

2. Generan producción, pagan deuda y consumen.

Agentes son maximizadores de utilidad:

$$U(a,s,w) = X(a,s,w) + w - v \tag{3.1}$$

donde:

- X(a,s,w) función de producción
- w riqueza inicial
- v costo de educación

Normalizamos el pago de no asistir a la escuela igual a cero.

Nuestro problema de asignación es asignar cada agente con una escuela de acuerdo a sus dotaciones iniciales de habilidad y riqueza. A continuación damos la definición formal de asignación, es decir las condiciones para que se logre un "matching" entre un agente y una escuela.

[2]Como se verá más adelante, este supuesto, aunque no es esencial, nos permite deshacernos de los equilibrios de precios en mercados de capitales perfectos que difieren entre sí únicamente por una constante. El supuesto que es cierto para todo s asegura que, independientemente del mecanismo usado, individuos con habilidad cero no estaría dispuesto a hacer gastos estrictamente positivos

Definición 1 (Asignación)**.** *Una asignación es definida por una función* $S : I^2 \to I$ *que asigna una escuela de calidad* $S(a,w)$ *a un agente* $(a,w) \in I^2$*. Dado* $\Phi(a,s) \equiv \int_0^a \int_0^1 \boldsymbol{1}\left[s - S(z,w)\partial w \partial z\right]$ *denota la distribución conjunta para un agente* (a,w) *inducido por una asignación* S*, donde* $\boldsymbol{1}$ *es una función indicadora:*

$$\boldsymbol{1}[z] = \begin{cases} 1 & si \quad z \geq 0 \\ 0 & si \quad z < 0 \end{cases}$$

Definición 2 (Asignación factible)**.** *Una asignación es factible si* $\Phi(1,s) = s$*, para todo* $s \in I$*, es decir, la cantidad de agentes que son asignados a las escuelas no es mayor a* s *y coincide exactamente con la medida de las escuelas de ese rango de calidad*

3.1.1. Asignación de eficiencia en el sentido de Pareto

Antes de caracterizar los equilibrios es importante describir la asignación eficiente en el sentido de pareto. En particular la asifnación eficiente en el sentido de pareto esta dada por un mapeo monotónicamente creciente de las cualidades escolares de la habilidad del agente, es decir, "positively assortative matching". Esto significa, que la asignación eficiente en el sentido de pareto es independiente de la distribución de la riqueza, porque se asume que todos los agentes tienen la mismas oportunidades, es decir, no hay desigualdad de oportunidades.

La eficiencia del positively assortative matching es demostrando que para cualquier otra asignación en el que algunos agentes de habilidad a hacen match con escuelas de calidad $s \neq a$ cambiar la asignación de agentes no coincidentes para que cada nivel de habilidad a coincida con la calidad de la escuela $s = a$ conduce a un aumento de la producción.

Para la demostración Consideremos dos funciones de distribucion continua acumulativas, $\mathcal{F}(x_1, x_2)$ y $\mathcal{F}^*(x_1, x_2)$. Dadas f y f^* que son las funciones de densidad asociadas, con rango definido en $[0, b_i]$, para $i = 1, 2$. Tenemos que $U(x_1, x_2)$ es una función continua con $U_{12} \geq 0$. Ademas, dado que las distribuciones marginales de ambas funciones son iguales con:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_1) &= \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} f(t, x_2) \partial x_2 \partial t \\ \mathcal{F}_2(x_2) &= \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} f(t, x_1) \partial x_1 \partial t \end{aligned}$$

Ahora estamos listos para demostrar que la asignación eficiente en el sentido de pareto en nuestro modelo asigna a todos los agentes con capacidad a a la escuela $s = a$. Dada la función de distribución continua acumulativa, $\Phi^*(a,s)$, generada por la asignación eficiente $S^*(a,w) = a$, $\forall (a,w) \in I^2$. Claramente $\Phi^*(a,s) = \text{mín}[a,s]$. Dada la función de distribución continua acumulativa, $\Phi(a,s)$, generada por una asignación eficiente alternativa S. Estamos interesados en evaluar

$$\Delta Y = \int_0^1 \int_0^1 X(a,s)[\partial\Phi^*(a,s) - \partial\Phi(a,s)]\partial a \partial s$$

es decir, la diferencia de la producción agregada entre la asignación S^* y la asignación alternativa S (donde $\Phi^*(a,s) \neq \Phi(a,s)$)

Teorema 1.

$$\Delta Y = \int_0^1 \int_0^1 X(a,s)[\partial\Phi^*(a,s) - \partial\Phi(a,s)]\partial a \partial s > 0$$

Demostración: ver apéndice

el teorema 1 indica que la asignación eficiente en el sentido de pareto siempre nos dará un nivel de producción mayor que cualquier otra asignación alternativa

Capítulo 4

Economía con mercado de capitales perfectos

En esta sección asumimos que existe acceso a un mercado externo de prestamos (sin riesgos).[1] Sin perdida de generalidad, asumimos que la tasa de interés en los prestamos es igual a cero ($r = 0$). Los agentes pueden pedir prestamos libremente en el primer periodo libremente y pagarlos en el segundo periodo. Esto podría verse como la existencia de igualdad de oportunidades, pues cualquier agente puede, con la adquisición de un crédito, desarrollar mejor sus habilidades y por lo tanto ser asignado a una escuela de mayor calidad.

4.1. Mecanismo de mercados

Cuando usamos al mercado como mecanismo de asignación, agentes se enfrentan con un vector de precios único, P, que asignan un precio a cada tipo de escuela.

Definición 3 (Equilibrio con mercado de precios)**.** *Un equilibrio con mercado de precios esta dado por una función de precios* $P : I \to \Re$ *(mapea cada escuela con calidad "s" en un precio* $P(s)$ *), y una asignación factible* S *tal que,* $\forall s \in I$ *y* $\forall (a, w) \in I^2$*, tenemos:*

(m1) $X\left(a, S\left(a, w\right), w\right) - P\left(S\left(a, w\right)\right) \geq X\left(a, s, w\right) - P\left(s\right)$

(m2) $X\left(a, S(a, w), w\right) - P\left(S\left(a, w\right)\right) \geq 0$

La primer condición, $(m1)$, indica que, dado P, ningún individuo prefiere alguna otra escuela a la que fue asignado. La segunda condición es una restricción de participación que

[1] Asumimos que el mercado de prestamos es externo y sin riesgos para no endogeneizar la tasa de interés en esta sección del modelo, mas adelante, se tomara como variable endógena

requiere un pago neto no negativo de la asignación de la escuela de equilibrio (ya que, por supuesto, un individuo siempre puede elegir no asistir a ninguna escuela y, por lo tanto, obtener un pago cero). Finalmente, el requisito de que S sea factible es equivalente en nuestro caso a la condición de vaciado de mercado.

Los supuestos hechos sobre X implican que el precio de equilibrio P debe ser creciente,[2] continuas, acotadas en su dominio. [3]
En consecuencia, tomando precios como dados, un agente con habilidad **a** y riqueza **w** elige **s** mazimizando $X(a,s,w)-P(s)$ y obtiene la siguiente condición de primer y segundo orden:

$$X_s(a,S(a,w),w) - P'(S(a,w)) \quad = \quad 0 \tag{4.1}$$

$$X_{ss}(a,S(a,w),w) - P'(S(a,w)) \quad < \quad 0 \tag{4.2}$$

para todo $(a,w) \in I^2$. De los supuestos que ya mencionamos antes, ($X_s > 0$), y por (4.1), podemos decir que $P_s > 0$, i. e., el precio de las escuelas es estrictamente creciente en su calidad. Luego, usando el teorema de la función implícita podemos mostrar que:

$$S(a,w) = S(a,w') \equiv \mathbf{S}(a) \qquad \forall (a,w),(a,w') \in I^2 \tag{4.3}$$

La ecuación (4.3) nos dice que agentes con la misma habilidad escogen una escuela con la misma calidad sin considerar su riqueza inicial. [4] Ahora, para obtener la asignación de equilibrio de los individuos diferenciamos la ecuación (4.1) con respecto a "a":

$$\frac{\partial \mathbf{S}(a)}{\partial a} = \frac{X_{as}}{P''(\mathbf{S}(a)) - X_{ss}} \tag{4.4}$$

Donde:

- $X_{as} = \frac{\partial X(a,\mathbf{S}(a),w)}{\partial a \partial s}$
- $X_{ss} = \frac{\partial X(a,\mathbf{S}(a),w)}{\partial s \partial s}$

Proposición 1. *Dada la ecuación diferencial* (4.4) *combinada con la condición de vaciado de mercado y la monotonicidad estricta de* ***S****, implican que la regla de asignación es:*

$$\boldsymbol{S}(a) = a \qquad \forall a \in I \tag{4.5}$$

es decir, ***positively assortative matching*** *en el equilibrio.*

[2] En otras palabras, las escuelas dominadas en costo y calidad deberían estar desatendidas

[3] Dado que X es acotada y la restricción de participación

[4] Esto es consecuencia de la existencia de mercados perfectos de capital

Finalmente, sustituimos (4.5) en (4.1) y obtenemos:

$$P(s) = \int_0^s X_s(z,z)\partial z \tag{4.6}$$

Con mercado de capitales perfectos y bajo mecanismo de mercados, el producto agregado es:

$$Y^m = \int_0^1 X(a,a)\partial a \tag{4.7}$$

y el consumo agregado es:

$$C^m = \int_0^1 w\partial w + \int_0^1 X(a,a)\partial a = \frac{1}{2} + \int_0^1 X(a,a)\partial a \tag{4.8}$$

Como podemos ver en la ecuación (4.5), la asignación con la ausencia de fallos de mercados y con mecanismo de mercados, es eficiente

4.2. Mecanismo de torneos

Las personas toman una decisión simultánea sobre cómo dividir sus dotaciones entre el rendimiento en el torneo y el consumo privado o de ocio. Luego, cada individuo recibe una recompensa de acuerdo con su rango en la distribución del desempeño: asigna a cada agente a la escuela cuyo rango de calidad sea igual al rango de su desempeño en el torneo. A diferencia de Fernández & Galí (1999), introducimos la variable riqueza inicial a la tecnología de señalización y a la función de costo asociada. Esto nos permite modelar la importancia de las desigualdades iniciales de los agentes, pues agentes con dotaciones iniciales de riqueza mas grandes, pueden invertir mas en generar una señal alta. También, una señal mas alta tiene mayor costo, por eso nuestra función de gasto asociado **e**, esta en función de la riqueza. De ahora en adelante, nos referiremos a este desempeño como una señal. La puntuación que alcanza un agente, depende de su habilidad y de la cantidad de recursos que decidan invertir en prepararse para el torneo o para generar una señal. Asumimos que los recursos que utilizan los agentes para producir dicha señal, son no productivos y por lo tanto no contribuyen a su producción y reducen el consumo agregado.

La tecnología de señalización es representada por una función $V : I \times \Re_+ \to \Re$ con $V(a, e, w)$ midiendo la señal o puntaje generada por un agente con habilidad **a** y riqueza **w** que gasta recursos **e**. Normalmente será útil trabajar con la función de costo asociada $e(a, v, w)$, definida implicitamente por:

$$V(a, e(a, v, w), w) = v, \qquad \forall (a, w) \in I^2, \quad \forall v \in \Re \tag{4.9}$$

Hacemos los siguientes supuestos sobre V:

I) $V \in C^2$ (dos veces diferenciable y continua)

II) $V_i \geq 0$, $i = a, e, w$

III) V_e esta acotada por arriba en el interior de I^2

IV) $V(a, 0, 0) = 0$[5]

V) $V_{ae} = V_{ea} < 0$

Ahora, definimos la función $\mathcal{F} : \Re_+ \to [0, 1]$ que representa la distribución acumulativa de las señal generadas en la economía:

$$\mathcal{F}(v) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}\left[v - V\left(a, \mathbb{E}\left(a, w\right), w\right)\right] \partial w \partial a, \quad \forall v \in \Re_+ \tag{4.10}$$

[5]Este supuesto garantiza que los agentes con riqueza cero se asignen a la escuela de menor calidad, simplificando la derivación de la asignación de equilibrio bajo restricciones de crédito.

donde $\mathbb{E}(a,w)$ es el gasto esperado realizado por el agente (a,w) para mejorar la señal. Para que la función de distribución acumulativa de las señales constituya un equilibrio en mercados de capital perfectos, la elección del gasto de cada agente y la asignación escolar consecuente deben maximizar la utilidad dada $\mathcal{F}$

Definición 4 (Equilibrio con torneos y mercados de capitales perfectos). *Un equilibrio con torneos y mercados de capitales perfectos esta dado por una asignación factible S, una regla de gastos $\mathbb{E}$ y una función de distribución de las señales $\mathcal{F}$, $\forall(a,w) \in I^2$, $\forall s \in I$, $\forall v \in \Re$:*

$(t1)$ $S(a,w) = \mathcal{F}\left(V\left(a, \mathbb{E}\left(a,w\right), w\right)\right)$

$(t2)$ $X(a, S(a,w), w) - \mathbb{E}(a,w) \geq X(a,s,w) - e(\mathcal{F}^{-1}(s), a, w)$

$(t3)$ $\mathbb{E}(a,w) = e(\mathcal{F}^{-1}(s), a, w)$

$(t4)$ $\mathcal{F}(v) = \int_0^1 \int_0^1 \boldsymbol{1}\left[v - V\left(a, \mathbb{E}\left(a,w\right), w\right)\right] \partial w \partial a$

$(t5)$ $X(a, S(a,w), w) - \mathbb{E}(a,w) \geq 0$

Condición $(t1)$ es la regla de asignación; i.e., un agente se asigna a una escuela cuyo rango en la distribución de calidad es igual a su rango en la distribución de señalización. Condición $(t2)$ asegura que, dada $\mathcal{F}$, el gasto de un agente maximiza su utilidad. $(t3)$ muestra el gasto requerido por cada agente para lograr su señal de equilibrio. Condición $(t4)$ asegura que la distribución de la señal que cada agente toma como dada al resolver su problema de optimización es, de hecho, la distribución observada en equilibrio. Por último, condición $(t5)$ es la restricción de participación.

Nuestros supuestos sobre X y V garantizan que la función que mapea la calidad de la escuela en las señales de equilibrio asociadas (i.e. $\mathbb{F}^{-1}$) es estrictamente creciente (ya que de lo contrario las escuelas dominan en calidad pero con una señal asociada más alta sería desatendida) y continua en calidad escolar. Sigue la continuidad ya que, de lo contrario, los agentes que generan una señal mayor que el valor inferior en el punto de discontinuidad estarían mejor reduciendo sus gastos en una cantidad discreta y asistiendo a una escuela de calidad marginalmente inferior. Las propiedades mencionadas anteriormente implican que la función de distribución acumulativas de las señales $\mathcal{F}$ también es estrictamente creciente y continua y (casí en todas partes) diferenciable.

Al escoger s que maximiza el pago de asistir a la escuela, $X(a,s,w) - e\left(\mathcal{F}^{-1}, a\right)$, obtenemos las condiciones de primer y segundo orden:

$$X_s\left(a, S\left(a,w\right), w\right) \quad = \quad e_v\left(\mathcal{F}^{-1}\left(S(a,w)\right), a, w\right) \mathcal{F}^{-1\prime}\left(S(a,w)\right) \tag{4.11}$$

$$X_{ss} \quad - \quad e_{vv}\left(\mathcal{F}^{-1\prime}\right)^2 - e_v\left(\mathcal{F}^{-1}\right)'' < 0 \tag{4.12}$$

Ahora, de la ecuación (4.11) podemos obtener el equilibrio. De la misma manera que en el equilibrio de mercado, usando el teorema de la función implícita, obtenemos:

$$S(a,w) = S(a,w') \equiv \mathbf{S}(a) \qquad \forall (a,w),(a,w') \in I^2 \tag{4.13}$$

Además, tenemos:

$$\mathbb{E}(a,w) = e\left(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{S}(a)),a,w\right) \equiv \mathbf{e}(a) \qquad \forall (a,w) \in I^2 \tag{4.14}$$

Entonces, como en el equilibrio con el mecanismo de mercado, con mercados de capitales perfectos aseguramos que con el mecanismo de torneos la distribución de riqueza inicial de los agentes no tiene impacto en la asignación de equilibrio resultante.

Para derivar la asignación de equilibrio de los individuos, tenga en cuenta que la diferenciación de (4.11) con respecto a "a" es:

$$\frac{\partial \mathbf{S}(a)}{\partial a} = -\frac{X_{as} - e_{as}\cdot \mathcal{F}^{-1\prime}(\mathbf{S}(a))}{X_{ss} - e_{vv}\cdot\left(\mathcal{F}^{-1\prime}(\mathbf{S}(a))\right)^2 - e_v\cdot\left(\mathcal{F}^{-1\prime\prime}(\mathbf{S}(a))\right)} > 0 \tag{4.15}$$

Donde:

- $X_{ss} = \frac{\partial X(a,\mathbf{S}(a),w)}{\partial s \partial s}$
- $X_{as} = \frac{\partial X(a,\mathbf{S}(a),w)}{\partial a \partial s}$
- $e_v = \frac{\partial e\left(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{S}(a)),a,w\right)}{\partial v}$
- $e_{vv} = \frac{\partial e\left(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{S}(a)),a,w\right)}{\partial v \partial v}$

Proposición 2. *Dada la ecuación diferencial* (4.15)*, la estricta monotonicidad de* $\boldsymbol{S}$ *y la condición de factibilidad implican que:*

$$\boldsymbol{S}(a) = a \qquad \forall a \in I \tag{4.16}$$

es decir, la regla de asignación en el mecanismo de torneos es idéntica a la regla de asignación en el mecanismo de mercado y, por lo tanto, corresponde a la asignación eficiente

Finalmente, sustituimos (4.16) en (t1) y obtenemos:

$$a = F(V(a,\mathbf{e}(a))) \tag{4.17}$$

diferenciamos con respecto a a:

$$1 = (V_a + V_e\mathbf{e}')F' \tag{4.18}$$

Evaluando la ecuación (4.18) en (t1), tenemos:

$$\mathbf{e}' = X_s(a,a) - \frac{V_a(a,\mathbf{e}(a))}{V_e(a,\mathbf{e}(a))} \quad \forall a \in I \tag{4.19}$$

$$P(s) = \int_0^s \left[X_s(z,z) - \frac{V_a(z,\mathbf{e}(a))}{V_e(,\mathbf{e}(a))} \right] \partial z \tag{4.20}$$

Con mercado de capitales perfectos y bajo mecanismo de torneos, el producto agregado es:

$$Y^t = \int_0^1 X(a,a)\partial a \tag{4.21}$$

y el consumo agregado es:

$$C^t = \int_0^1 w\partial w + \int_0^1 \left[X(a,a) - \mathbf{e}(a)\right] \partial a = \frac{1}{2} + \int_0^1 \left[X(a,a) - \mathbf{e}(a)\right] \partial a \tag{4.22}$$

Como podemos ver en la ecuación (4.16), la asignación con la ausencia de fallos de mercados y con mecanismo de torneos, es eficiente

Capítulo 5

Economía con restricciones al crédito

En esta sección asumimos que no existen mercados de capitales perfectos que permiten la financiación de gastos más allá de la riqueza de un agente, ya sea directamente en la escuela, como es el caso bajo el precio de mercado, o en la generación de señales, como es el caso de los torneos. Aquí se puede pensar que la existencia de fallos de mercado (restricciones al crédito) causan desigualdad de oportunidades, pues no todos los agentes tendrán acceso a las mejores escuelas dado su nivel de riqueza inicial y que esto puede ser un obstaculo para el desarrollo eficiente de sus habilidades. Es importante aclarar que si no se puede observar la producción, X ahora se interpreta como el valor esperado de la producción, entonces los problemas habituales de riesgo moral pueden impedir que el mercado de capitales funcione.

5.1. Mecanismo de mercados

Al igual que el mecanismo de mercados con mercados perfectos o igualdad de oportunidades, aquí agregamos la variable de riqueza inicial en la función de producción. Esto hace la diferencia entre nuestro modelo y el de Fernandez & Gali (1999); ya que, ellos no le dan importancia a las condiciones iniciales, lo que implica que la dotación de riqueza inicial en su modelo, no es importante. Esto trae un cambio significativo entre un modelo y otro, pues por un lado, el modelo de Fernandez & Gali (1999) se enfoca en la comparación en la asignación de recompensas y no en la importancia que tienen esas desigualdades iniciales.

Definición 5 (Equilibrio con mecanismo de mercado y restricciones al crédito)**.** *Un equilibrio de mercado con restricciones al crédito esta dado por una función $P : I \to \Re_+$ que mapea las calidades de las escuelas en precios, y una asignación factible S, que satisface:*

(mc1) $X(a, S(a,w), w) - P(S(a,w)) \geq X(a,s) - P(s) \quad \forall s$

(mc2) $X\left(a, S(a,w), w\right) - P\left(S\left(a,w\right)\right) \geq 0$

(mc3) $P(s) \leq w$

(mc4) $P(S(a,w)) \leq w$

Como en el caso de mercados de capitales perfectos, la función de precios, $P(s)$, debe ser creciente, continua, acotada y diferenciable. Esto nos lleva a la siguiente condición de maximización de utilidad;

$$X_s(a, S(a,w)) - P'(S(a,w)) > 0 \quad \forall (a,w) \in I^2 \tag{5.1}$$

la condición (mc4) es la restricción para pedir prestamos.

Antes de caracterizar el equilibrio, describiremos como son asignados los agentes a las escuelas, para lo cual, describiremos la asignación de manera intuitiva.
La caracterización de las asignaciones de equilibrio procede mostrando que asociado con cada s habrá un nivel de habilidad bajo, $\underline{a}(s)$. Para cualquier nivel dado de s y el nivel de habilidad asociado $\underline{a}(s)$, mostraremos que para niveles de riqueza mayor que el precio de entrar a esa escuela, agentes con ese nivel de habilidad no tendrán restricciones y optimizara en el precio exacto de la escuela, es decir,

$$X_s(\underline{a}(s), s, w) = P'(s) \tag{5.2}$$

Por lo tanto, todos los agentes del mismo nivel de habilidad que pueden permitirse asistir a 's' también lo harán. ¿Quién mas asistirá a la escuela nivel s? Los agentes restantes que asisten a "s" tendrán una mayor capacidad y estarán exactamente restringidos, es decir, su gasto será exactamente igual a su riqueza. Entonces, mostraremos que para cada nivel de habilidad hay una "s" óptima a la que todos los agentes (de ese nivel de habilidad) pueden permitírselo asistir, y todos los agentes restringidos asisten a la escuela de más alta calidad que puedan permitirse, es decir,

$$S(\underline{a}(s), w) = \begin{cases} s & \forall w \in [P(s), 1] \\ P^{-1}(w) & \forall w \in [0, P(s)] \end{cases} \tag{5.3}$$

Además, probamos que $\underline{a}(s)$ es creciente en s. Por lo tanto, la asignación de agentes a escuelas s' y s'' con $s' > s''$. En la figura 5.1, se proporciona una forma útil de representar el equilibrio en presencia de restricciones crediticias. En el eje de las abscisas medimos s y $\underline{a}(s)$. En el eje de las ordenadas representamos w y $P(s)$. Dadas las restricciones crediticias, debemos tener $P(s) \leq 1$ y por lo tanto esta figura tiene que estar restringida en la unidad al cuadrado. La función de precios $P(s)$ representa el precio de equilibrio. Notemos que $\underline{a}(s)$ se encuentra a la izquierda de s de lo contrario, para cualquier $P(s) > 0$, el conjunto de agentes con $a \geq \underline{a}(s)$ y $w \geq P(s)$ sería mas pequeño que $1 - s$ el cual es la medida de capacidad de las escuelas de calidad mayor que s. El conjunto de agentes que asisten a la escuela s'' son aquellos en que están área sombreada azul en la figura 5.1, los agentes dentro de esa área son los que asisten a la escuela al menos tan altamente calificados como s. Del mismo modo (para el cuadrado sombreado verde) para s'.

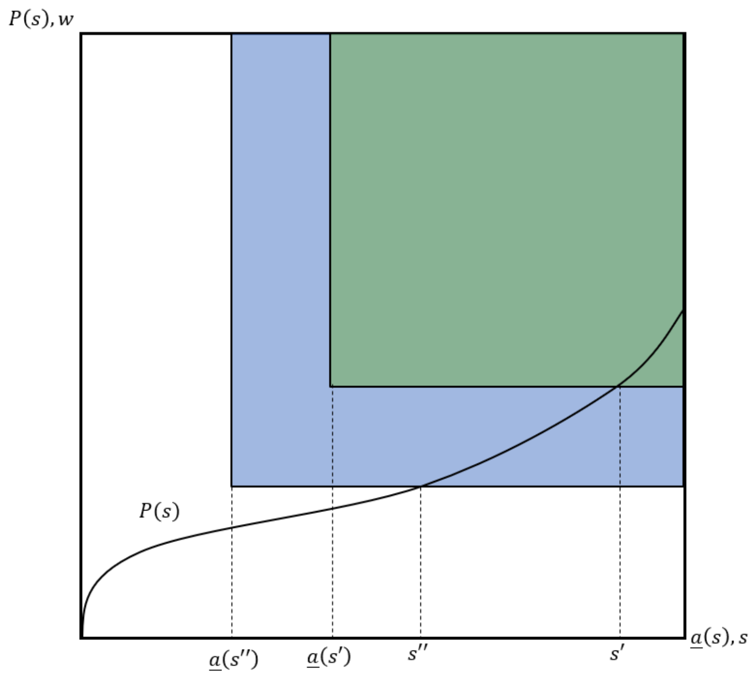

Figura 5.1

Pasamos ahora a la derivación formal de estos resultados. Los primeros dos lemas establecen que el precio de las escuelas de menor calidad son igual a cero mientras que el precio de las escuelas de mayor calidad son estrictamente menor a 1. Esto asegura que, para cada nivel de habilidad, algunos agentes nunca tienen restricciones

Lema 1.

$$P(0) = 0$$

Demostración: ver apéndice

Lema 2.

$$P(s) < 1, \qquad \forall s \in [0, 1]$$

Demostración: ver apéndice

Ahora, vamos a definir Q como el conjunto de todos los agentes cuya riqueza no es menor que $P(1)$. i.e. $Q \equiv \{(a, w) : w \geq P(1)\}$. Notemos que, dados los lemas previos este conjunto tiene medida positiva.[1] El siguiente lema muestra que los agentes que no tienen restricciones (es decir, los agentes que están en Q) son perfectamente ordenados por nivel de habilidad en escuelas, con personas con mayor capacidad asignadas a escuelas de mayor calidad.

Lema 3. I) *para todo* $(a, w), (a', w') \in Q$, *si* $a > a'$, *entonces* $S(a, w) > S(a', w')$

II) $S(a, w'') = S(a, w)$ *para todo* $(a, w) \in Q$ *tal que* $w'' > P(S(a, w)$
Demostración: ver apéndice

La intuición detrás de este lema tiene la lógica de la condición de *cruce único* obedecida por las curvas de indiferencia y es que si un agente (a', w) prefiere s' a s'', tal que $s' > s''$, entonces, esto se cumple con todos los agentes cumplen con $a > a'$. Sin embargo, a diferencia de los entornos de mercados perfectos, esto ya no implica una clasificación perfecta ya que no todos los niveles de riqueza de una habilidad dada pueden permitirse el precio asociado. Por la condición de *cruce único*, de nuevo, a medida que procedemos a escuelas de mayor calidad y, en consecuencia, a precios más altos, las personas que estén más dispuestas a pagar el mayor precio serán aquellas con mayor habilidad.

La discusión anterior nos permite definir la función $\mathbf{S} : I \to I$ como $\mathbf{S}(a) \equiv S(a, w), \quad \forall (a, w) \in Q$. Notemos que cualquier agente con $w \geq P(s)$ será capaz de pagar la escuela que el quiera pues no tiene restricciones. Entonces, esos agentes escogerán la misma escuela, $\mathbf{S}$(a). Por lo tanto $\mathbf{S}(a)$ representa la calidad de la escuela a la que asisten todos los agentes con habilidad a quienes efectivamente no tienen restricciones. Estas condiciones son mas explicitas en el siguiente lema:

Lema 4. (I) $\boldsymbol{S}$ *es estrictamente creciente*

(II) $\boldsymbol{S}(0) = 0$

(III) $\boldsymbol{S}(1) = 1$

(IV) $\boldsymbol{S}$ *es continua*

(V) $\boldsymbol{S}$ *es (aproximadamente) diferenciable*
Demostración: ver apéndice

---

[1]Cumple con la definición de medida (positiva) aditiva:

1. $\mu() = 0$
2. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Ahora definimos $\underline{a} : I \to I$ es la inversa de la función $\mathbf{S}$. Por construcción $\underline{a}(s)$ representa la habilidad de los agentes que no tienen restricción y asisten a la escuela s (quienes, a su vez, son los agentes de menor capacidad que asisten a esa escuela). Las propiedades de la función $\underline{a}$ surgen directamente de la función $\mathbf{S}$

Corolario 1. *(I) $\underline{a}$ es estrictamente creciente*

(II) $\underline{a}(0) = 0$

(III) $\underline{a}(1) = 1$

(IV) $\underline{a}$ es continua

(V) $\underline{a}$ es (aproximadamente) diferenciable

Demostración: ver apéndice

Ahora, obtenemos la diferencial de primer orden de $X_s(\underline{a}(s), s, w) = P'(s)$, obtenemos:

$$\underline{a}'(s) = -\frac{X_{ss} - P''}{X_{as}} \tag{5.4}$$

donde el numerador es la condición de segundo orden del problema de maximización del agente y es estrictamente negativo garantizada por el corolario anterior

Corolario 2. *$P'(s)$ es continua y (aproximadamente) diferenciable.*

Demostración: ver apéndice

Lo siguiente a realizar, es mostrar que la restricción de participación se mantiene con desigualdad estricta para todos los agentes (pero para un subconjunto con media cero asisten a la escuela $s = 0$). Formalmente, $\forall (a, w) \in I^2$ tal que $S(a, w) > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} X(a, S(a, w), w) &= X(a, 0) + \int_0^{S(a,w)} X_s(a, z)\partial z \\ &> \int_0^{S(a,w)} X_s(\underline{a}(z), z)\partial z \\ &= \int_0^{S(a,w)} P'(z)\partial z \\ &= P(S(a, w), w) \end{aligned}$$

Ahora, definiremos los conjuntos $R(s) = \{(a, w) : a = \underline{a}(s), w \geq P(s)\}$ y $T(s) = \{(a, w) : w = P(s), a > \underline{a}(s)\}$. La siguiente proposición sirve para caracterizar los conjutos de agentes asignados a cualquier escuela s dada en el equilibrio como la unión de los conjuntos $R(s)$ y $T(s)$.

Proposición 3. *$S(a,w) = s$ si y solo si $(a,w) \in R(s) \cup T(s)$*

Demostración: ver apéndice

Una aplicación de los lemas anteriores es que podemos expresar la condición de vaciado de mercado como:

$$\begin{aligned} (1-s) &= (1-\underline{a}(s))\dot{(}1-P(s)) \\ &\text{ó} \\ \underline{a}(s) &= \frac{s-P(s)}{1-P(s)} \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

De la restricción anterior podemos concluir que:

$$\underline{a}(s) < s \quad \forall s \in (0,1) \tag{5.5}$$

De la ecuación (5.5) podemos notar una implicación directa es que, en presencia de restricciones crediticias, la asignación de equilibrio del mercado es ineficiente: **como se mostró anteriormente, la asignación eficiente requiere que solo aquellos individuos con $a = s$ asistan a la escuela s, independientemente de su dotación de riqueza. Bajo restricciones de crédito y mecanismo de mercados, la persona con menor capacidad que asiste a s tiene una capacidad estrictamente inferior a s y la persona con mayor capacidad en s tiene $a = 1$.**

Estamos preparados para derivar gastos de equilibrio para agentes sin restricciones. Combinamos la ecuación (5.1) y la condición de vaciado de mercado, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$P'(s) = X_s\left(\frac{s-P(s)}{1-P(s)}, s\right), \quad \forall s \in I \tag{5.6}$$

y, usando la condición de primer orden y $P(0) = 0$, podemos derivar la siguiente expresión para el equilibrio de mercado:

$$P(s) = \int_0^s X_s(\underline{a}(z), z)\partial z \tag{5.7}$$

Usamos P^* y P_0 para referirnos al precio de equilibrio con mercados perfectos de capital y bajo mercados con restricciones de crédito, respectivamente, siguiendo que $\underline{a}(s) < s$ y $X_{as} > 0$, tenemos:

$$P_0(s) < P^*(s) \quad s \in (0,1] \tag{5.8}$$

es decir, la presencia de restricciones al crédito reduce el precio de asistir a la escuela para todas las calidades (con la excepción de $s = 0$). La intuición para este resultado es que en equilibrio, el beneficio marginal de un aumento en s para un agente sin restricciones con capacidad $\underline{a}$ es $X_s(\underline{a}(s), s, w)$. Este debe ser igual al costo marginal de incrementar s, es decir, $P'(s)$. Lo mismo es, por supuesto, cierto en los mercados de capitales perfectos, excepto que en con restricciones al crédito $a = s > \underline{a}(s), \quad \forall s \in (0, 1]$, y dado que $X_{as} > 0$, resulta que

$$P_0'(s) < P^{*'}(s) \tag{5.9}$$

que, cuando combinamos la ecuación (5.9) y el lema (1) (en ambos contextos), se mantiene que

$$P_0(s) < P^*(s) \quad s \in (0, 1]$$

esto significa que en presencia de restricciones al crédito baja los precios dado que el agente marginal en cada escuela es de menor habilidad que sin restricciones al crédito.

Dado el resultado expresado en (5.8) y junto con la ecuación (5.3), nos permite caracterizar algunas implicaciones de las restricciones de crédito en las asignaciones de equilibrio y el bienestar de los agentes cuando los precios de mercado se utilizan como mecanismo de asignación.

Consideremos el conjunto de agentes con habilidad a. Bajo mercados de capitales perfectos cada agente en ese conjunto se asigna a una escuela de calidad a, independientemente de su riqueza inicial. Bajo mercados con restricciones al crédito, como vimos, las asignaciones no son independientes de la riqueza inicial. En este caso podemos dividir el conjunto de agentes de habilidad "a" en tres categorías.

Para agentes con nivel de riqueza en el intervalo $[P_0(\mathbf{S}(a, w)), 1]$ la restricción de crédito no es vinculante, y todos están asignados a la misma escuela $\mathbf{S}(a) > a$ en el equilibrio. Dado que $P_0 < P_0(\mathbf{S}(a))$ ellos pueden permitirse el lujo de asistir a la escuela a, pero ellos eligen no hacerlo. Por lo tanto, tenemos

$$X(a, \mathbf{S}(a), w) - P_0(\mathbf{S}(a)) \geq X(a, a) - P_0(a) > X(a, a) - P^*(a) \tag{5.10}$$

donde la ultima desigualdad la obtenemos de (5.10). Para De esto podemos concluir que los agentes de habilidad a y $w \in [P_0(\mathbf{S}(a, w)), 1]$ deben estar estrictamente mejor con mercados con restricciones de crédito que con mercados de capital perfectos.

Consideremos ahora el subconjunto de agentes con habilidad a para quienes las restricciones de endeudamiento son vinculantes, es decir, aquellos con riqueza en el intervalo $[0, P_0(\mathbf{S}(a, w))]$. Para agentes en este subconjunto, la función de pagos son:

$$X(a, P_0^{-1}(w) - w, w) \tag{5.11}$$

la cual es estrictamente creciente y continua en w^2. Dado (5.10), debe existir un nivel de riqueza $\mathbf{w}(a) \in [0, P_0^{-1}(\mathbf{S}(a)))$, tal que un agente con $(a, \mathbf{w}(a))$ es indiferente entre los dos sistemas de asignación, es decir, el pago bajo mercados capitales perfectos y el pago bajo mercados con restricciones de capital son los mismos. Finalmente, los agentes con habilidad a y $w > \mathbf{w}(a)$ están estrictamente mejor en los mercados con restricciones de crédito, mientras que los agentes con $w < \mathbf{w}(a)$ están mejor en los mercados con mercados de capital perfecto. Además, dado que el agente con la habilidad a y $w = P_0(a)$ está estrictamente mejor, se deduce que $\mathbf{w}(a) \in [0, P_0(\mathbf{S}(a)))$.

Proposición 4. *Sean $\{(a, w) \in I^2 : w > \boldsymbol{w}(a)\}$ los agentes con habilidad a y con riqueza en el intervalo $(\boldsymbol{w}(a), P_0(\boldsymbol{S}(a)))$ que se benefician de la existencia de restricciones de crédito.*

Los agentes a los que nos referimos en la proposición 4 son ilustrados en la figura 5.2. [3] Por lo tanto, las políticas que tienden a eliminar la restricción de endeudamiento también se opondrían a algunos agentes que aparentemente están sufriendo el impacto de tales restricciones

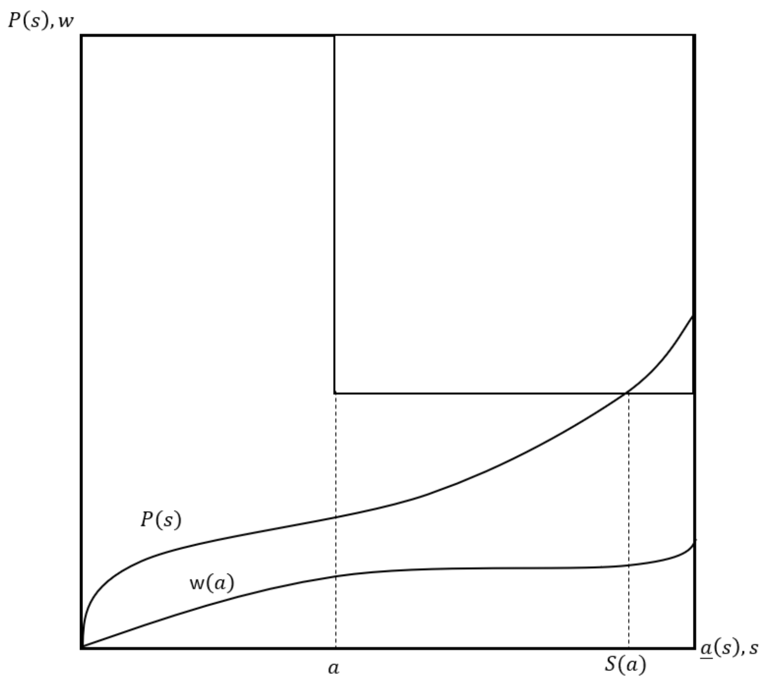

Figura 5.2

[2]Dado que en equilibrio la condición de primer orden se mantiene con desigualdad para esos agentes, es decir, $X_s(a, P^{-1}(w)) > P'(P^{-1}(w))$

[3]De hecho, un subconjunto entre estos últimos, aquellos agentes con $(\mathbf{w}(a), P_0(\mathbf{S}(a)))$, mejoran con la introducción de restricciones de endeudamiento a pesar de que los obliga a asistir a una escuela de menor calidad. Esto es consecuencia de la reducción de precios inducida por la restricción de crédito.

5.2. Mecanismo de torneos

Ahora, a diferencia de Fernandez & Galí (1999) introducimos la variable riqueza inicial a la tecnología de señalización y a la función de costo asociada. Introducir esta variable tiene la misma logica utilizada en la sección 4.2

Definición 6. *Un equilibrio con torneos y restricciones de crédito esta dado por una asignación factible S. una función de gastos $\mathbb{E}$ y una función de distribución de la señal $\mathcal{F}$, que satisface las siguientes condiciones:*

$(tc1)$ $S(a,w) = \mathcal{F}\left(V\left(a, \mathbb{E}\left(a,w\right), w\right)\right)$

$(tc2)$ $X(a, S(a,w), w) - \mathbb{E}(a,w) \geq X(a,s,w) - e(\mathcal{F}^{-1}(s), a, w)$

$(tc3)$ $\mathcal{F}(v) = \int_0^1 \int_0^1 \boldsymbol{1}\left[v - V\left(a, \mathbb{E}\left(a,w\right), w\right)\right] \partial w \partial a$

$(tc4)$ $X(a, S(a,w), w) - \mathbb{E}(a,w) \geq 0$

$(tc5)$ $e(\mathcal{F}^{-1}(s), a) \leq w$

$(tc6)$ $\mathbb{E}(a,w) \leq w$

Como podemos observar, se cumplen casi las mismas condiciones que en el equilibrio bajo mercados con capitales perfectos. Hay tres cambios, quitamos la condición $(t3)$ y agregamos las condiciones $(tc5)$ y $(tc6)$. Quitamos la condición $(t3)$ porque, el agregar restricciones al crédito implica que el agente no podrá dar una señal mayor a la que su riqueza le permita, por esto mismo, agregamos las restricciones $(tc5)$ y $(tc6)$, ya que su regla de gasto y su señal debe ser menor a su nivel de riqueza inicial.

Como en el caso de mercado de capitales perfecto, y por la mismas razones, la función de distribución de las señales de los agentes, $\mathcal{F}$, debe ser estrictamente creciente en el equilibrio (ya que ningún agente estaría dispuesto a emitir una señal más alta de lo necesario para asistir a una escuela determinada), continua y diferenciable. Una condición necesaria para la maximización de utilidad esta dada por:

$$X_s(a, S(a,w), w) - e_v(\mathcal{F}^{-1}(S(a,w)))\mathcal{F}^{-1'}(S(a,w)) \geq 0 \tag{5.12}$$

con la restricción de endeudamiento que requiere $\mathbb{E}(a,w) \leq w, \quad \forall (a,w) \in I^2$, y donde (5.12) se mantiene con igualdad si $\mathbb{E}(a,w) \leq w$, es decir, si el agente (a,w) no tiene restricciones.

Como en el mecanismo de mercado, la caracterización de las asignaciones de equilibrio procede mostrando que asociado con s de cada escuela hay un nivel más bajo de habilidad, $\underline{a}(s)$. Agentes con habilidad $\underline{a}(s)$ asisten a la escuela s si ellos pueden pagarlo, es decir, siempre y cuando su riqueza sea suficiente para cubrir el costo de generar la señal necesaria para asistir a la escuela s. Agentes con el mismo nivel de habilidad pero con riqueza por debajo del umbral necesario para pagar la escuela s, asiste a la escuela de más alta calidad que pueden pagar. Así mostraremos que:

$$S(\underline{a}(s), w) = \begin{cases} s & \forall w \in [e(\mathcal{F}^{-1}(s), \underline{a}(s)), 1] \\ \mathcal{F}(V(\underline{a}(s), w)) & \forall w \in [0, e(\mathcal{F}^{-1}(s), \underline{a}(s))] \end{cases} \tag{5.13}$$

Análogo a la Figura 5.2 en la sección anterior, podemos representar el equilibrio con torneos y restricciones al crédito como se muestra en la Figura 5.3. Como antes, el eje de las abscisas representa a la habilidad a y la calidad de las escuelas s, y el eje ordenadas representa el nivel de riqueza y gastos. La función $e(a)$ representa el gasto de equilibrio de los agentes que no tienen restricción con cierto nivel de habilidad. El conjunto de agentes que asisten a la escuela s esta representado en el área que esta a la derecha de la curva azul, con agentes dentro de esa área que asisten a una escuela al menos tan altamente calificada como s. Notemos que, a diferencia del caso de mecanismo de mercados, agentes con habilidad mayor a $\underline{a}(s)$ no tienen el mismo gasto que este último. En cambio, el área sombreada está inclinada hacia abajo, lo que indica que a medida que a aumenta, el nivel de gastos que necesita un agente para generar la señal asociada con la escuela s disminuye. Pasamos a la derivación formal de estas señales.

Los siguientes dos lemas nos ayudan a caracterizar algunas propiedades de la función de gastos en equilibrio:

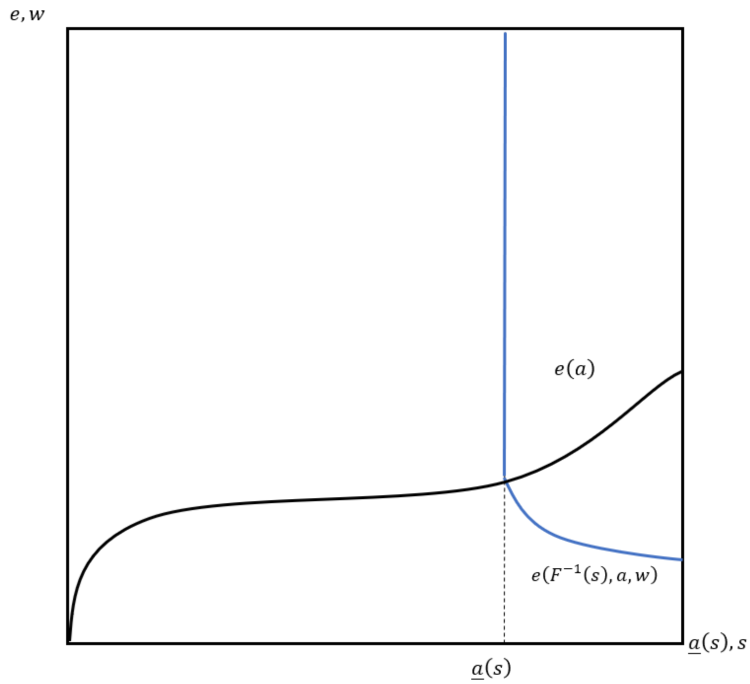

Figura 5.3

Lema 5.

$$e(\mathcal{F}^{-1}(0), a, w) = 0, \quad \forall (a, w) \in I^2$$

Demostración: ver apéndice

Lema 6.

$$e(\mathcal{F}^{-1}(S(a, w)), a, w) < 1, \quad \forall s \in [0, 1]$$

Demostración: ver apéndice

El lema 5 establece que los agentes que asisten a la escuela con calidad $s = 0$ no tienen ningún gasto (y generan una señal de cero dados nuestros supuestos de V), mientras el lema 6 garantiza que en el equilibrio, ningún agente gasta el total de su dotación de riqueza para general la señal. Si a estos lemas agregamos que la condición (5.12) se mantendrá con desigualdad para algunos agentes, un resultado que usaremos después.

El siguiente lema establece que el **positively assortative matching** es alcanzado entre el conjunto de agentes que puedes asistir a cualquier escuela en el equilibrio. Alguna notación adicional es necesaria en este punto. Dado b_s esta definido implícitamente por $e(\mathcal{F}^{-1}, b_s) = 1$. Sea $a_s = \text{máx}[0, b_s]$, donde a_s representa la capacidad más baja que puede permitirse asistir a la escuela s. También definimos $Q(s)$ que representa el conjunto de agentes quienes pueden permitirse generar la señal $\mathcal{F}^{-1}(s)$ necesaria para asistir a la escuela s, es decir, $Q(s) = \{(a, w) \in I^2, a \geq a_s, w \geq e(\mathcal{F}^{-1}(s), a)\}$

Lema 7. *Para todo* $(a, w), (a', w') \in Q(1)$*:*

(I) si $a > a'$*, entonces* $S(a, w) > S(a', w')$

(II) si $a = a'$*, entonces* $S(a, w) = S(a', w')$

Demostración: ver apéndice

Consideremos el siguiente agente $(a, w) = (a_1, 1)$, que es el agente con la menor habilidad quien puede asistir a la escuela $s = 1$, es decir, a la escuela de mayor calidad (y por lo tanto a cualquier escuela). Dado el lema 5 y el lema 6, este agente esta gastando menos que el total de su dotación inicial de riqueza, por lo que asiste a alguna escuela $s_1 = S(a_1, 1) < 1$. Podemos asociar a esta escuela un conjunto $Q(s_1)$ el cual, de acuerdo con la definición anterior, es el conjunto de agentes que pueden asistir a la escuela s_1. Notemos que, si se cumple la propiedad *single-crossing*, todos los agentes $(a, 1)$ en $Q(s_1$ efectivamente no tienen restricciones. Es decir, aunque algunos miembros de $Q(s_1)$ que tienen $a < a_1$ no pueden pagar para asistir a alguna escuela $s \in (s_1,]$, esto es consecuencia de que $(a_1, 1)$ es un agente sin restricciones aún eligió asistir a la escuela s_1, que ningún otro agente con una capacidad inferior a a_1 elegiría una escuela de calidad superior a s_1, incluso si ella pudiera pagarla. Del mismo modo, podemos definir a_{s_1} (el agente de menor capacidad que puede permitirse asistir a s_1) por $e(\mathcal{F}^{-1}(s_1), a_{s_1})$, así como $s_2 = (a_{s_1}, 1)$ (la escuela a la que asistió ese agente) y el conjunto asociado $Q(s_2)$ (es decir, el conjunto de agentes que pueden pagar s_2). Usando la misma lógica de antes, sabemos que todos los agentes $(a, 1) \in Q(s_2)$ son efectivamente sin restricciones. Así, por iteración podemos definir una secuencia de conjuntos:

$$Q(1)Q(s_1), \ldots, Q(s_j), \ldots, \tag{5.14}$$

tal que cualquier agente $(a, 1) \in Q(s_j)$ no tiene restricciones para todo j. Este proceso iterativo, ilustrado en la Figura 5.4, converge a alguna escuela s_k (y a un conjunto asociado $Q(s_k)$) tal que $S(0, 1) = s_k$. [4]

[4] La afirmación de que la secuencia no puede, por implicación, converger a alguna $a_{s'} > 0$ viene de el hecho de que esto implicaría que $\lim\limits_{s \to s'} \frac{\partial a_s}{\partial s} = 0$. Pero, a_s, esta definida implícitamente por $e(\mathcal{F}^{-1}(s), a_s, w) = 1$, obteniendo $\lim\limits_{s \to s'} \frac{\partial a_s}{\partial s} = \frac{X_s(a_{s'}, s', w)}{e_a(\mathcal{F}^{-1}(s'), a_{s'}, w)} > 0, \quad \forall a \in (0, 1]$

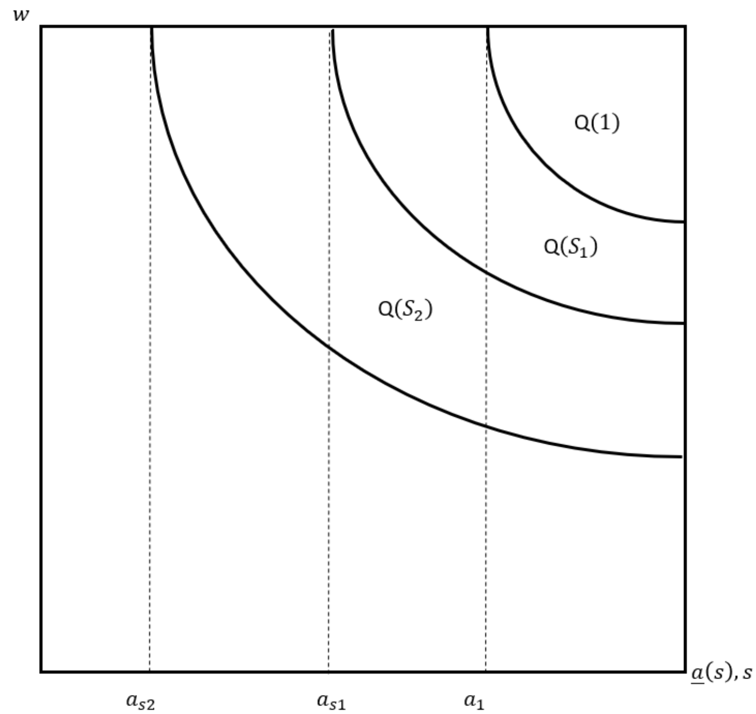

Figura 5.4

Por lo tanto, de esto podemos concluir que todos los agentes $(a, 1)$, para todo $a \in I$, no tienen restricciones y la siguiente relación es observada:

$$X_s(a, S(a, 1)) = e_v(\mathcal{F}^{-1}(S(a, 1), a, 1)\mathcal{F}^{-1'}(S(a, 1)), \quad \forall a \in [0, 1]. \tag{5.15}$$

La discusión anterior nos permite definir una función $\mathbf{S} : I \to I$ como $\mathbf{S}(a) \equiv S(a, 1), \quad \forall a \in [0, 1]$. Es importante recalcar que cualquier agente (a, w) con $w \geq e(\mathcal{F}[-1(\mathbf{S}(a)), a)$ sera capaz de pagar la escuela escogida por el agente con la misma habilidad y mayor riqueza (y quien, como ya mostramos, no tiene restricción). Por lo tanto, el primero tampoco tendra restricciones y elegirá $\mathbf{S}(a)$ tambien. Esto significa que $\mathbf{S}(a)$ representa la calidad de la escuela escogida por todos los agentes con habilidad a quienes no tienen restricción. Enunciamos las propiedades con el siguiente lema:

Lema 8. *(I) $\boldsymbol{S}$ es estrictamente creciente*

(II) $\boldsymbol{S}(0) = 0$

(III) $\boldsymbol{S}(1) = 1$

(IV) $\boldsymbol{S}$ es continua

(V) $\boldsymbol{S}$ es (aproximadamente) diferenciable

Demostración: ver apéndice

Dado que $a : I \to I$ es la inversa de la función $\mathbf{S}$. Así, $\underline{a}(s)$ representa la habilidad de agentes que no tienen restricciones que asisten a la escuela s (quienes son, a su vez, los agentes con menor capacidad que asisten a esa escuela, ya que cualquier agente con capacidad $a' < a$ preferirá una escuela de menor calidad, independientemente de su riqueza). Las propiedades de $\underline{a}(s)$, estan representadas en el siguiente corolario que es consecuencia del lema 8.

Corolario 3. *(i) $\underline{a}$ es estrictamente creciente*

(ii) $\underline{a}(0) = 0$

(iii) $\underline{a}(1) = 1$

(iv) $\underline{a}$ es continua

(v) $\underline{a}$ es (aproximadamente) diferenciable

Demostración: ver apéndice

Ahora obtenemos la condición de primer orden de la ecuación (5.15)

$$\underline{a}'(s) = -\frac{X_{ss} - e_{vv}(\mathcal{F}^{-1'})^2 - e_v(\mathcal{F}^{-1})''}{X_{as} - e_{va}(\mathcal{F}^{-1'})'} > 0 \tag{5.16}$$

donde el numerador es la condición de segundo orden del problema de maximización del agente y esta estrictamente negativo garantizada por el corolario anterior.

Corolario 4. *$e_v(\mathcal{F}^{-1}(S(a,1),a,1)\mathcal{F}^{-1'}(S(a,1))$ es continua y diferenciable.*

Demostración: ver apéndice

Lo siguiente a realizar, es mostrar que la restricción de participación se mantiene con desigualdad estricta para todos los agentes (pero para un subconjunto con media cero asisten a la escuela $s = 0$). Formalmente, $\forall(a,w) \in I^2$ tal que $S(a,w) > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
X(a, S(a,w), w) &= X(a,0) + \int_0^{S(a,w)} X_s(a,z)\partial z \\
&> \int_0^{S(a,w)} X_s(\underline{a}(z),z)\partial z \\
&= \int_0^{S(a,w)} e_v(\mathcal{F}^{-1}(z), \underline{a}(z))\mathcal{F}^{-1'}(z)\partial z \\
&= P(S(a,w),w)
\end{aligned}$$

Ahora, definiremos los conjuntos:

$$\begin{aligned}
R(s) &= \left\{(a,w) : a = \underline{a}(s), w \geq e_v(\mathcal{F}^{-1}(s), \underline{a}(s), w)\mathcal{F}^{-1'}(s)\right\} \\
T(s) &= \left\{(a,w) : w = e_v(\mathcal{F}^{-1}(s), \underline{a}(s), w)\mathcal{F}^{-1'}(s), a > \underline{a}(s)\right\}
\end{aligned}$$

La siguiente proposición sirve para caracterizar los conjutos de agentes asignados a cualquier escuela s dada en el equilibrio como la unión de los conjuntos $R(s)$ y $T(s)$.

Proposición 5. *$S(a, w) = s$ si y solo si $(a, w) \in R(s) \cup T(s)$*

La factibilidad de S (vaciado de mercado) requiere:

$$\underline{a}(s) = s - \int_{\underline{a}(s)}^{1} e(\mathcal{F}^{-1}(s), a, w)\partial a \quad \forall s \in I \tag{5.17}$$

Siguiendo la ecuación (5.17) y las propiedades de $\underline{a}(s)$ derivadas anteriormente, podemos concluir que

$$\underline{a}(s) < s \quad \forall s \in (0, 1) \tag{5.18}$$

Ahora vamos a definir $\mathbf{e}(a) \equiv e(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{S}(a), a, w)$, el nivel de gasto de por agente con habilidad a quienes no tiene restricciones. En consecuencia, $e(\underline{a}(s)) = e(\mathcal{F}^{-1}(s), \underline{a}(s), w)$, dado el nivel de gasto realizado por cada agente en el conjunto $R(s)$ (es decir el agente con menos habilidad que asiste a la escuela s). Es importante notar que $\mathbf{S}(0) = 0$ y nuestros supuestos sobre V implica que $\mathbf{e}(0) = 0$, es decir, agentes con habilidad cero incurre en gastos cero.

La condición de primer orden y la regla de asignación de torneos podemos reescribir, respectivamente, como:

$$X_s(\underline{a}(s), s, w) = e_v(\mathcal{F}^{-1}(s), \underline{a}(s), w)\mathcal{F}^{-1\prime}(s) \tag{5.19}$$

$$s = \mathcal{F}(V(\underline{a}(s), \mathbf{e}(\underline{a}(s)))) \tag{5.20}$$

Diferenciando la ecuación (5.18) y combinándola con la ecuación (5.19), tenemos:

$$\underline{a}'(s) = \frac{1 - X_s(\underline{a}(s), s, w) \int_{\underline{a}}^{1} \frac{e_v(\mathcal{F}^{-1}(S), a, w)}{e_v(\mathcal{F}^{-1}(S), \underline{a}(s), w)} \partial a}{1 - \mathbf{e}(\underline{a}(s))} > 0 \quad \forall s \in I \tag{5.21}$$

donde el signo de la desigualdad se mantiene por nuestro supuesto de $X_s < 1$ y el hecho de que $\int_{\underline{a}(s)}^{1} \frac{e_v(\mathcal{F}^{-1}(S), a, w)}{e_v(\mathcal{F}^{-1}(S), \underline{a}(s), w)} \partial a \leq 1$ (dado que $e_{va} \leq 0$).

Finalmente, diferenciando la ecuación (5.20) obtenemos:

$$1 = \mathcal{F}^{'}(V_a + V_e e')\underline{a}'(s) \tag{5.22}$$

sustituimos (5.21) en (5.22) y despejamos para $\mathbf{e}'(a)$:

$$\mathbf{e}'(a) = \frac{1 - \mathbf{e}(\underline{a}(s))}{\frac{1}{X_s(a, \mathbf{S}(a), w)} - \int_{a}^{1} \frac{e_v(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{S}(a)), z, w)}{e_v(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{S}(a)), a, w)} \partial z} - \frac{V_a(a, \mathbf{e}(a), w)}{V_e(a, \mathbf{e}(a), w)} \tag{5.23}$$

definida para $\forall a \in I$, y con la condición de frontera $\mathbf{e}(0) = 0$

Capítulo 6

Eficiencia de mecanismos

En el capitulo 4 mostramos que, cuando los agentes tienen acceso a los mercados perfectos de capital, es decir, no hay desigualdad de oportunidades, ambos mecanismos alcanzan la misma asignación de eficiencia y por lo tanto el mismo nivel de producción agregada. Sin embargo, el consumo es mayor con el mecanismo de mercado porque en el mecanismo de torneos hay desperdicio de recursos para generar la señal. No es el caso cuando hay restricciones al crédito, es decir, no hay igualdad de oportunidades.

Antes de formalizar la demostración de cual mecanismo es más eficiente, es importante dar la intuición detrás. Con el mecanismo de mercado, gastos iguales entre agentes generan la misma producción, esto es, los agentes son asignados a los mismos precios escolares no discriminan entre las personas, excepto con respecto a su disposición y capacidad de pago. En un torneo, por otro lado, gastos idénticos de agentes no idénticos no conducen a resultados idénticos. En particular, al gastar la misma cantidad, los agentes de mayor capacidad producen puntuaciones/señales más altas que los individuos de menor capacidad. Esto implica que, ceteris paribus, los individuos con mayor capacidad tienen, efectivamente, " menos restricciones crediticias " que los agentes con menor capacidad.

Formalmente, podemos demostrar que $\underline{a}^m < \underline{a}^t$ es decir, el agente con menor habilidad bajo mecanismo de torneos tiene mayor habilidad que el agente de menor habilidad en el mecanismo de mercados, lo que implica que el mecanismo de torneos tendrá mayor producción que el mecanismo de mercados. De este argumento obtenemos el siguiente lema

Lema 9.

$$\underline{a}^m < \underline{a}^t \quad \forall s \in (0,1) \tag{6.1}$$

Demostración: Ver apéndice

El lema 9 también nos dice que bajo mecanismo de torneos en las mejores escuelas habrá agentes con mayor habilidad sin importar su riqueza, es decir, hay menor desigualdad de oportunidades.

Ahora tenemos que ver las implicaciones del lema anterior en las funciones acumulativas para cualquier $(a, s) \in I$. Por el lema 9 podemos decir que la función acumulativa generada bajo mecanismos de torneos nunca estará por debajo de la función acumulativa generada en torneos, lo que cual es expresado en el siguiente teorema.

Teorema 2.

$$Y^t = \int_0^1 \int_0^1 X(\underline{a}, S^t(\underline{a}, w), w) > \int_0^1 \int_0^1 X(\underline{a}, S^m(\underline{a}, w), w) = Y^m$$

Demostración: ver apéndice

La intuición detrás del teorema dos es que los agentes asignados a las escuelas por el mecanismo de torneos generaran estarán mas cerca de la asignación eficiente en el sentido de pareto y generaran un nivel de producción mayor, lo que nos ayuda a concluir que el equilibrio alcanzado con torneos es mas eficiente en el sentido de pareto que el equilibrio alcanzado con mercados

Tenga en cuenta que este resultado de bienestar se mantiene a pesar de que los agentes obtienen utilidad de su propio desempeño, es decir, no es una señal pura. Otra posibilidad es que como lo dicen Cole et. al. (1992), los beneficiarios son la próxima generación, lo que podría crear una externalidad para las generaciones futuras, pues mayor eficiencia ahora produciría mayor eficiencia en el futuro que llevaría a mayor movilidad social intergeneracional.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de tesis estudiamos una versión del problema de matching, enfocado en la importancia de la desigualdad de oportunidades. Nuestros resultados nos dicen que, con mercados de capitales perfectos, es decir, no hay desigualdad de oportunidades, ambos mecanismos son eficientes y los agentes son asignados a las escuelas sin importar su nivel de riqueza inicial porque agentes con baja dotación inicial pueden pedir prestamos y competir con los agentes que tienen mayor riqueza.

Lo mas interesante de este trabajo de tesis, es cuando introducimos las restricciones al crédito, es decir, hay desigualdad de oportunidades, los agentes ya no pueden pedir prestamos tan fácilmente y esto provoca que las dotaciones iniciales de habilidad y riqueza sean cruciales. Mostramos que en este contexto, el mecanismo de torneos es mas eficiente, aunque no completamente eficiente, que el mecanismo de mercado. Esto sucede porque los agentes con mayor habilidad pero menor riqueza inicial serán asignados a escuelas de menor calidad que a las que deberían ser asignados y esto provocara una reducción en la producción. Con el mecanismo de torneos, estos agentes pueden generar señales que los asigne a una escuela calidad mas parecida a su habilidad y es aquí donde el la dotación de riqueza inicial es crucial, pues para generar esta señal, los agentes deben invertir en preparación para el torneo, lo que provoca que agentes con habilidad muy alta pero riqueza baja sean asignados ineficientemente.

Este trabajo de tesis también tiene muchas limitaciones que al mismo tiempo son oportunidades para futuros trabajos de investigación. Una limitación es que no intentamos encontrar el mecanismo "ideal" de asignación. Esto, da pie a futuras investigaciones sobre el impacto de intervenciones gubernamentales para corregir fallas de mercado (impuestos/subsidios) y ver sus efectos sobre la redistribución de ingresos. Otro enfoque y tal vez el mas interesante, es ver que sucede si estos mecanismos se dan a lo largo de generaciones y como ayudan o perjudican a la movilidad intergeneracional. En pocas palabras, este es un trabajo de tesis que pretende, desde un inicio, crear mas discusión y mostrar la importancia de la riqueza inicial de los agentes.

Apéndice A

Apéndice

Demostración teorema 1. Tenemos:

$$\Delta Y = \int_0^1 \int_0^1 X(a,s)[\partial\Phi^*(a,s) - \partial\Phi(a,s)]\partial a\partial s = \int_0^1 \int_0^1 X_{as}(a,s)[\Phi^*(a,s) - \Phi(a,s)]\partial a\partial s$$

Dado que $X_{as} > 0$, como queremos demostrar que la producción es mayor en S^* que en S, nos basta demostrar que $\Phi^*(a,s) - \Phi(a,s) \geq 0,\ \forall(a,s)$. Pero, $\Phi(a,s) \leq \Phi(1,s) = s$ y $\Phi(a,s) \leq \Phi(a,1) = a$, por lo tanto, $\Phi(a,s) \leq \min[a,s] = \Phi^*(a,s),\ \forall(a,s)$ y dado que $\Phi^*(a,s) \neq \Phi(a,s)$ para algún (a,s), entonces obtenemos estricta desigualdad. □

Demostración lema 1. Suponemos que $P(0) = \epsilon > 0$. Entonces habría un subconjunto de agentes $\{(a,w) \in I^2, 0 \leq w < \epsilon\}$ con una medida positiva ϵ que no podría pagar en ninguna escuela. Esto implica que la medida de los agentes asignados a las escuelas en equilibrio sería estrictamente menor que la medida de la capacidad escolar total, lo cual es inconsistente con el vaciado del mercado □

Demostración lema 2. Por continuidad de P y el vaciado de mercado podemos descartar que $P(s) > 1$. Supongamos que $P(s) = 1$ para algún $s \in [0,1]$. Dado un agente (a,w) tal que $S(a,w) = s$. Usando preferencias reveladas y el hecho de $P(0) = 0$ implica que $X(a,s,w) - 1 \geq X(a,0,w)$. Pero $X(a,s,w) - 1 = X(a,0,w) + \int_0^1 X_s(a,z,w)\partial z - 1 < X(a,0,w) - s \leq X(a,0,w)$ donde la estricta desigualdad viene de que la función $X(a,s,w)$ es cuasilineal. La resultante contradicción implica que $P(s) = 1$ tampoco es posible. □

Demostración lema 3. i) Suponemos que existe algún agente $(a,w),(a',w') \in Q$ con $a > a'$ tal que $s = S(a,w) \leq S(a',w') = s'$. Por preferencias reveladas sabemos que $X(a,s,w) - P(s) \geq X(a,s',w) - P(s')$ y $X(a',s',w) - P(s') \geq X(a',s,w) - P(s)$. Combinando ambas desigualdades, tenemos $X(a',s',w) - X(a',s,w) \geq X(a,s',w) - X(a,s,w)$ lo cual descarta

que $s < s'$ dado que es inconsistente con el supuesto $X_{as} > 0$. ¿Qué pasa si $s = s'$? Por construcción ambos agentes no tienen restricción, entonces sus CPO deben de satisfacerse con s y s', es decir, $X(a, s, w) = P'(s)$ y $X(a, s', w) = P'(s)$. Pero esto implica que $X_s(a, s, w) = X_s(a', s, w)$ y esto pasa si y solo si $a = a'$.
ii) Suponemos primero que $\bar{s} = S(a, w) \neq S(a, w'') = \underline{s}$ para dos agentes $(a, w), (a, w'') \in Q$, y $\bar{s} > \underline{s}$. Además, cualquier (a', w') tal que $w' \in (P(\bar{s}, P(1)))$ y $a' \neq a$ tampoco puede ser alcanzado por algún $s \in (\bar{s}, \underline{s})$, dado que a es indiferente entre $\bar{s}$ y $\underline{s}$, la condición de un solo cruce implica que $a' > a$ estrictamente prefiere $\bar{s}$ sobre $\underline{s}$ para algún $s \in (\bar{s}, \underline{s})$. ¿Quienes asisten a las escuelas en el subconjunto $(\bar{s}, \underline{s})$? El razonamiento anterior y la condición de vaciado de mercado implican que, a parte de los agentes con habilidad a, a estas escuelas asistirán los agentes z con $w \in \left[P(\underline{s}), P(\bar{s})\right]$. Así, la condición de vaciado de mercado requerirá que $\bar{s} - \underline{s} \leq P(\bar{s}) - P(\underline{s}) = X(a, \bar{s}, w) - X(a, \underline{s}, w) < \bar{s} - \underline{s}$ lo que implica una contradicción. Por lo tanto, se cumple que $S(a, w) = S(a, w'')$ para cualesquiera dos agentes $(a, w), (a, w'') \in Q$. El resultado se extiende para cualquier agente (a, w'') con $P(S(a, w)) \leq w'' \leq P(1)$ □

Demostración lema 4. i) Es una consecuencia inmediata de lema 3
ii) $S(0) = 0$ siguiendo la restricción de participación, dado que $P(s) > X(0, s, w) = 0, \ \forall s \in (0, 1]$
iii) consecuencia de la estricta monotonicidad de $\mathbf{S}$ y de la condición de vaciado de mercado.
iv) Suponemos que $\underline{s} = \lim\limits_{z \to a_-} \mathbf{S}(z) < \lim\limits_{z \to a_+} \mathbf{S}(z) = \bar{s}$; monotonicidad de $\mathbf{S}$ implica que ningún agente en el subconjunto Q asistirá a alguna escuela en el intervalo $(\underline{s}, \bar{s})$ y por el lema 4, esto es cierto para cualquier agente con riqueza $w \in [P(\bar{s}), P(1)]$. Vaciado de mercado implica que $\bar{s} - \underline{s} \leq P(\bar{s}) - P(\underline{s})$ y usando el mismo razonamiento que en la demostración del lema 4, encontramos una contradicción. Lo que significa que $\underline{s} = \lim\limits_{z \to a_-} \mathbf{S}(z) = \lim\limits_{z \to a_+} \mathbf{S}(z) = \bar{s}$, y esto implica que $\mathbf{S}$ es continua.
v) Siguiendo i) y le hecho que $\mathbf{S}$ esta acotado en su rango. □

Demostración corolario 2. Siguiendo la continuidad y diferenciabilidad de $\underline{a}(s)$ y por el hecho de que $P'(s) = X_s(\underline{a}(s), s, w)$ se mantiene $\forall (a, w) \in Q$

□

Demostración proposición 3. En la demostración del lema 5 mostramos que todos los agentes $R(s)$ son asignados a las escuelas s. ¿Quien asiste a la escuela s? Notemos que cualquier agente $(a, w) \in Q$ no asiste a s a no ser que $(a, w) \in R(s)$. También, trivialmente, agentes con $w \in [0, P(s))$ están descartados, porque ellos no pueden permitírselo. Ahora consideremos los agentes con $w \in (P(s), P(1))$, y $a > \underline{a}(s)$. Sabemos que

$X_s(\underline{a}(s), s, w) = P'(s)$, entonces para estos agentes se cumple que $X_s(a, s) > P'(s)$. Consecuentemente, ellos van a tener siempre un óptimo al cambiar a una escuela $s' > s$, dado que s' esta lo suficientemente cerca de s, la escuela será accesible y la restricción de participación será satisfecha. Entonces esos agentes no asistirán a la escuela s. Consideremos los siguientes agentes con $w \in (P(s), P(1))$, y $a < \underline{a}(s)$. Estos agentes no podrán asistir a la escuela s porque en su caso $X_(a, s, w) < P'(s)$, implica que estarán mejor en una escuela de una calidad menor, asistirán a una escuela en el intervalo $s' \in [0.s]$. Podemos concluir que $S(a, w) = s$ si y solo si $(a, w) \in R(s) \cup T(s)$

$\square$

Demostración del lema 5. Supongamos que $e(F^{-1}, \hat{a}) = \epsilon > 0$ para algún $\hat{a} \in I$. Entonces habría un subconjunto de agentes $\{(a, w) \in I^2, 0 \leq w < e(F^{-1}, a)\}$ con una medida positiva ϵ que no podría pagar en ninguna escuela. Esto implica que la medida de los agentes asignados a las escuelas en equilibrio sería estrictamente menor que la medida de la capacidad escolar total, lo cual es inconsistente con el vaciado del mercado

$\square$

Demostración lema 6. Suponemos que $e(F^{-1}, a, w) \geq 1$ para algún $s \in [0, 1]$. Tomamos al agente (a, w) tal que $S(a, w) = s$. Preferencias reveladas implican que $X(a, s, w) - e(F^{-1}, a, w) \geq X(a, 0, w)$. Pero $X(a, s, w) - e(F^{-1}, a, w) \geq X(a, 0, w) + \int_0^s X_s(a, z, w) \partial z - e(F^{-1}, a, w) \leq X(a, 0, w) + \int_0^s X_s(a, z, w) \partial z - 1 < X(a, 0, w) - 1 + s \leq X(a, 0, w)$, tenemos una contradicción, pues uno de nuestros supuestos es que $X_s(a, s, w) < 1$ por X cuasilineal. $\square$

Demostración lema 7. i) La demostración es es la misma que lema 4-i), solo es necesario cambiar $P(s)$ por $e(F^{-1}(s), a, w)$

Suponemos que $\bar{s} = S(a, w) > S(a, w') = \underline{s}$ para algún nivel de habilidad a. Entonces, ambos agentes $(a, w), (a, w')$ deben ser indiferentes entre ambas escuelas, y dado que no tienen restricción, la condición de primer orden debe mantenerse en ambos agentes. Notemos que ningún otro agente $(a'', w'') \in Q(1)$, $a \neq a''$, asistirá a cualquier escuela en $s \in [\bar{s}, \underline{s}]$ porque esto va a contradecir i). Además, cualquier $(a'', w'') \in ((e(F^{-1}(\bar{s}), a'', w''), (e(F^{-1}(1), a'', w''))$ $a \neq a''$ tampoco asisten a ninguna escuela en $s \in [\bar{s}, \underline{s}]$ porque como (a, w) es indiferente entre $\bar{s}$ y $\underline{s}$, la condición de cruce único implica que si $a'' > a$, el agente (a'', w'') va a preferir estrictamente $\bar{s}$ y si $a'' < a$ va a preferir estrictamente a $\underline{s}$. Entonces, este razonamiento y la condición de vaciado de mercado implican que a parte de los agentes con habilidad a, esas escuelas estarán ocupadas por un subconjunto de agentes

$\{(a'', w'') \in I^2; e(F^{-1}(\bar{s}), a'', w''), e(F^{-1}(\underline{s}), a'', w'')\}$. Entonces, siguiendo la condición de vaciado de mercado

$$
\begin{aligned}
\bar{s} - \underline{s} \ &\leq \ \int_0^1 \left[e(F^{-1}(\bar{s}), z, w'') - e(F^{-1}(\underline{s}), z, w'')\right] \partial z \\
&= \ \int_0^1 \int_{\underline{s}}^{\bar{s}} e_v(F^{-1}(s, z, w'')F^{-1'}(s)\partial s \partial z \\
&\leq \ \int_{\underline{s}}^{\bar{s}} X_s(1, s, w'') \\
&< \ \bar{s} - \underline{s}
\end{aligned}
$$

Lo que es una contradicción y por lo tanto $\bar{s} = S(a, w) = S(a, w') = \underline{s}$ □

Demostración lema 8. La demostración es equivalente al caso de mercados

□

Demostración corolario 3. La demostración es equivalente al caso de mercados

□

Demostración corolario 4. La demostración es equivalente al caso de mercados

□

Demostración proposición 5. Hemos mostrado que todos los agentes $R(s)$ son asignados a las escuelas s. ¿Quien asiste a la escuela s? Notemos que cualquier agente $(a, w) \in Q(1)$ (y por lo tanto con $w > e(F^{-1}(1), a, w))$ no asiste a s a no ser que $(a, w) \in R(s)$. También, trivialmente, agentes con $w \in [0, e(F^{-1}(1), a, w))$ están descartados, porque ellos no pueden pagar para estar en esa escuela. Ahora consideremos los agentes con $w \in (e(F^{-1}(s), a, w), e(F^{-1}(1), a, w))$, y $a > \underline{a}(s)$. Sabemos que $X_s(\underline{a}(s), s, w) = e(F^{-1}(1), \underline{a}(s), w)F^{-1'}(s)$, entonces para estos agentes se cumple que $X_s(a, s) > e(F^{-1}(1), a, w)F^{-1'}(s)$. Consecuentemente, ellos van a tener siempre un óptimo al cambiar a una escuela $s' > s$, dado que s' esta lo suficientemente cerca de s, la escuela será accesible y la restricción de participación será satisfecha. Entonces esos agentes no asistiran a la escuela s. Consideremos los siguientes agentes con $w \in (e(F^{-1}(s), a, w), e(F^{-1}(1), a, w))$, y $a < \underline{a}(s)$. Estos agentes no podrán asistir a la escuela s porque en su caso $X_(a, s, w) < e(F^{-1}(1), a, w)F^{-1'}(s)$, implica que estaran mejor en una escuela de una calidad menor, asistirán a una escuela en el intervalo $s' \in [0.s]$. Podemos concluir que $S(a, w) = s$ si y solo si $(a, w) \in R(s) \cup T(s)$

□

Demostración lema 9. Supongamos que $\underline{a}^{m'}(s') > \underline{a}^{t'}(s')$ se cumple para algún $s' \in (0,1)$. Dado $\underline{a}^t(0) = \underline{a}^m(0) = 0$ y que $\underline{a}^{t'}(0) > \underline{a}^{m'}(0)$, continuidad implica que existe algún $s^* \in (0, s')$ tal que $\underline{a}^t(s^*) = \underline{a}^m(s^*)$ y que $\underline{a}^{m'}(s^*) > \underline{a}^{t'}(s^*)$. Además, debe ser el caso donde $e(\underline{a}^t(s^*) > P'(s^*)$, ya que de lo contrario, dado $V_a > 0$ la cantidad de agentes en las escuelas s serian mas en torneos que en mercados. Entonces,

$$\begin{aligned}
\underline{a}^{t'}(s^*) &= \frac{1 - X_s\left(\underline{a}^t(s^*), s^*, w\right) \int_{\underline{a}^{t'}(s^*)}^{1} \frac{e_v(F^{-1}(s^*),z,w)}{e_v(F^{-1}(s^*),\underline{a}^t(s^*),w)}}{1 - \mathbf{e}(\underline{a}^t(s^*))} \\
&> \frac{1 - P'(s)\left(1 - \underline{a}^m(s^*)\right)}{1 - P(s^*)} \\
&= \underline{a}^{m'}(s^*)
\end{aligned}$$

lo que implica una contradicción, entonces se cumple que $\underline{a}^m(s) < \underline{a}^t(s)$ □

Demostración teorema 2. Por el teorema 1 sabemos que valores mas altos de X nos dará mayores niveles de producción y por lema 9 sabemos que $\underline{a}^m(s) < \underline{a}^t(s)$ lo que implica que $S^t(\underline{a}, w) > S^m(\underline{a}, w)$. Entonces, como $X(\underline{a}, S^t(\underline{a}, w), w) > X(\underline{a}, S^m(\underline{a}, w), w)$, tenemos:

$$Y^t = \int_0^1 \int_0^1 X(\underline{a}, S^t(\underline{a}, w), w) > \int_0^1 \int_0^1 X(\underline{a}, S^m(\underline{a}, w), w) = Y^m$$

□

Bibliografia

Referencias

Becker, G. S. (1973). A Theory of Marriage: Part I. *Journal of Political Economy*, *81*(4), 813–846. Descargado de `http://www.jstor.org/stable/1831130`

Becker, G. S., y Tomes, N. (1976). Child Endowments and the Quantity and Quality of Children. *Journal of Political Economy*, *84*(4, Part 2), S143–S162. Descargado de `https://www.jstor.org/stable/1831106` doi: 10.1086/260536

Behrman, J. R., Pollak, R. A., y Taubman, P. (1995). The Wealth Model: Efficiency in Education and Di. En *From parent to child: Intrahousehold allocations and intergenerational relations in the us* (pp. 113–138). Department of Economics, Williams College.

Blanden, J., Gregg, P., y Macmillan, L. (2007). Accounting for intergenerational income persistence: Noncognitive skills, ability and education. En *Economic journal* (Vol. 117). doi: 10.1111/j.1468-0297.2007.02034.x

Brown, G. D., Gardner, J., Oswald, A. J., y Qian, J. (2008, jul). Does wage rank affect employees' well-being? *Industrial Relations*, *47*(3), 355–389. doi: 10.1111/j.1468-232X.2008.00525.x

Cole, H. L., Mailath, G. J., y Postlewaite, A. (1995). *Social Norms, Savings Behavior, and Growth* (Vol. 100). The University of Chicago Press. Descargado de `https://www.jstor.org/stable/2138828` doi: 10.2307/2138828

Cole, H. L., Mailath, G. J., y Postlewaite, A. (1998). Class systems and the enforcement of social norms. *Journal of Public Economics*, *70*(1), 5–35. doi: 10.1016/S0047-2727(98)00058-9

Costrell, R. M., y Loury, G. C. (2004, dec). Distribution of ability and earnings in a hierarchical job assignment model. *Journal of Political Economy*, *112*(6), 1322–1363. Descargado de `https://www.jstor.org/stable/10.1086/424741` doi: 10.1086/424741

Cuesta, J., Ñopo, H., y Pizzolitto, G. (2011). Using pseudo-panels to measure income mobility in latin america. *Review of Income and Wealth*, *57*(2), 224–246. doi: 10.1111/j.1475-4991.2011.00444.x

Dahan, M., y Gaviria, A. (2001). Sibling correlations and intergenerational mobility in Latin America. *Economic Development and Cultural Change*, *49*(3), 537–554. doi: 10.1086/452514

Doepke, M., y Zilibotti, F. (2008). Occupational choice and the spirit of capitalism. *Quarterly Journal of Economics*, *123*(2), 747–793. Descargado de `https://www.jstor.org/stable/25098914` doi: 10.1162/qjec.2008.123.2.747

Durán, I. L. (2015). *Centro auspiciado por la Fundación ESRU: Percepciones y movilidad social en México* (Inf. Téc.).

Dworkin, R. (1981a). Philosophy & Public Affairs-What is Equality? *Philosophy & Public Affairs*, *10*, 185–246. Descargado de `https://www.jstor.org/stable/2264894` doi: 10.2307/2264894

Dworkin, R. (1981b). What is Equality?: Part 2: Equality of Resources. *Philosophy & Public Affairs*, *10*, 283–345. Descargado de `https://www.jstor.org/stable/2265047` doi: 10.2307/2265047

Easterlin, R. A. (1974, jan). Does Economic Growth Improve the Human Lot? Some Empirical Evidence. En *Nations and households in economic growth* (pp. 89–125). Elsevier. doi: 10.1016/b978-0-12-205050-3.50008-7

Eckstein, Z., y Zilcha, I. (1994, jul). The effects of compulsory schooling on growth, income distribution and welfare. *Journal of Public Economics*, *54*(3), 339–359. doi: 10.1016/0047-2727(94)90040-X

Fernández, R., y Galí, J. (1999, oct). To each according to . . . ? Markets, tournaments, and the matching problem with borrowing constraints. *Review of Economic Studies*, *66*(4), 799–824. Descargado de `https://academic.oup.com/restud/article-lookup/doi/10.1111/1467-937X.00109` doi: 10.1111/1467-937X.00109

Galor, O., y Zeira, J. (1993, jan). Income Distribution and Macroeconomics. *The Review of Economic Studies*, *60*(1), 35. Descargado de `https://www.jstor.org/stable/2297811` doi: 10.2307/2297811

Gradstein, M. (2008). *Endogenous Reversals of Fortune.* doi: 10.1111/j.0042-7092.2007.00700.x

Heckman, J. J., y Mosso, S. (2014). The Economics of Human Development and Social Mobility. *Annual Review of Economics*, *6*(1), 689–733. doi: 10.1146/annurev-economics-080213-040753

Heckman, J. J., Stixrud, J., y Urzua, S. (2006, feb). The effects of cognitive and noncognitive abilities on labor market outcomes and social behavior. *Journal of Labor Economics*, *24*(3), 411–482. Descargado de http://www.nber.org/papers/w12006.pdf doi: 10.1086/504455

Hertz, T., Selcuk, S., Jayasundera, T., Smiths, N., Piraino, P., y Verashchagina, A. (2007, jan). The inheritance of educational inequality: International comparisons and fifty-year trends. *B.E. Journal of Economic Analysis and Policy*, *7*(2). doi: 10.2202/1935-1682.1775

Hopkins, E. (2012). Job market signaling of relative position, or becker married to spence. *Journal of the European Economic Association*, *10*(2), 290–322. doi: 10.1111/j.1542-4774.2010.01047.x

Hopkins, E., y Kornienko, T. (2004, aug). Running to Keep in the Same Place: Consumer Choice as a Game of Status. *American Economic Review*, *94*(4), 1085–1107. Descargado de http://pubs.aeaweb.org/doi/10.1257/0002828042002705 doi: 10.1257/0002828042002705

Hopkins, E., y Kornienko, T. (2009, nov). Status, affluence, and inequality: Rank-based comparisons in games of status. *Games and Economic Behavior*, *67*(2), 552–568. doi: 10.1016/j.geb.2009.02.004

Ichino, A., y Winter-Ebmer, R. (1999, apr). Lower and upper bounds of returns to schooling: An exercise in IV estimation with different instruments. *European Economic Review*, *43*(4-6), 889–901. doi: 10.1016/S0014-2921(98)00102-0

Konow, J. (2003, dec). Which is the fairest one of all? A positive analysis of justice theories. *Journal of Economic Literature*, *41*(4), 1188–1239. doi: 10.1257/002205103771800013

Lima, Martin; Yalonetzky, G. (2015). Movilidad intergeneracional de la educación y las ocupaciones en Monterrey : un análisis de cohortes filiales y sexo. (15).

Mailath, G. J., Postlewaite, A., y Cole, H. L. (1992, jun). Incorporating Concern for Relative Wealth Into Economic Models. *Quarterly Review*, *19*(3). doi: 10.21034/qr.1932

Marmot, M. G., Stansfeld, S., Patel, C., North, F., Head, J., White, I., ... Smith, G. D. (1991, jun). Health inequalities among British civil servants: the Whitehall II study. *The Lancet*, *337*(8754), 1387–1393. doi: 10.1016/0140-6736(91)93068-K

Mason, M. (2007, jan). Critical thinking and learning. *Educational Philosophy and Theory*, *39*(4), 339–349. Descargado de https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1111/j.1469-5812.2007.00343.x doi: 10.1111/j.1469-5812.2007.00343.x

Piketty, T., y Goldhammer, A. (2014). *Capital in the Twenty-First Century.* Harvard University Press. Descargado de http://www.jstor.org/stable/j.ctt6wpqbc

Rawls, J. (2017). A theory of justice. En *Applied ethics: A multicultural approach: Sixth edition* (pp. 21–29). doi: 10.4324/9781315097176

Roemer, J. E. (1996). Efficient Redistribution. *Politics & Society*, *24*(4), 383–389. Descargado de https://doi.org/10.1177/0032329296024004007 doi: 10.1177/0032329296024004007

Roemer, J. E. (2000). Equality of Opportunity. En *Politics & society.* Harvard University Press. doi: 10.5840/socphiltoday1988130

Roemer, J. E. (2006). *Democracy, Education, and Equality: Graz-Schumpeter Lectures.* Cambridge University Press. doi: 10.1017/CCOL052184665X

Sen, A. (1980). Equality of What? En S. McMurrin (Ed.), *Tanner lectures on human values, volume 1.* Cambridge: Cambridge University Press.

Serrano, J., y Torche, F. c. (2010). *Movilidad social en México: Población, desarrollo y crecimiento* (Vol. 2).

Suen, W. (2007, aug). The comparative statics of differential rents in two-sided matching markets. *Journal of Economic Inequality*, *5*(2), 149–158. doi: 10.1007/s10888-006-9034-8

Székely, M. (2015). Expectativas educativas: una herencia intangible. (05), 20.

Vélez, R., Juan, G., Wong, E. H., y Campos Vázquez, R. M. (2015). *ES MÉXICO, ¿EL MOTOR INMÓVIL?*

Zenginobuz, U. (1996). *Concern for relative position, rank-order contests, and contributions to public goods Concern for Relative Position, Rank-Order Contests, and Contributions to Public Goods ** (Vol. 388; Inf. Téc.). Descargado de http://mpra.ub.uni-muenchen.de/388/

Índice de figuras