

EL COLEGIO DE MEXICO.

CENTRO DE ESTUDIOS DEMOGRAFICOS

Y DE DESARROLLO URBANO.

LA FUNCION GOMPERTZ-MAKEHAM EN LA DESCRIPCION

Y PROYECCION DE FENOMENOS DEMOGRAFICOS.

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN DEMOGRAFIA.

PRESENTA: HECTOR OGAZ PIERCE.

SEPTIEMBRE DE 1991.

## INDICE

I. - INTRODUCCION

II. - METODOLOGIA

A) FUNCIONES DE SOBREVIVENCIA

B) FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

C) ESTIMACION DE PARAMETROS

D) METODO ITERATIVO

III. - APLICACIONES Y RESULTADOS

A) DESCRIPCION DEL CRECIMIENTO DE LA POBLACION EN MEXICO

B) DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDADES

C) DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD DE LA PEA OCUPADA

IV. - CONCLUSIONES

ANEXOS

BIBLIOGRAFIA

## I.- INTRODUCCION

En la investigación demográfica, es necesario poder describir los fenómenos demográficos mediante la formulación de métodos y modelos matemáticos, para captar su patrón de comportamiento y así revelar sus tendencias en su dinámica evolutiva, a fin de estar en posibilidad de predecir lo que se esperaría en el futuro de continuar con las condiciones que dan lugar a la ocurrencia del suceso demográfico en estudio.

Correspondió a Gompertz y Makeham, uno de los principales esfuerzos por desarrollar alguna función matemática que describiera en primera instancia el fenómeno de la sobrevivencia. La función ideada por Gompertz y desarrollada por Makeham ha mostrado en la práctica ser de gran utilidad en el estudio de la mortalidad.

Actualmente han demostrado algunos investigadores como el profesor Albino Bocaz, que entre otras aplicaciones la función de Gompertz-Makeham describe apropiadamente las tasas de fecundidad acumuladas por edad y que a su vez dicha función resume proyecciones de población por grupos de edad en relación a diversas hipótesis hechas acerca de la evolución en el tiempo de la mortalidad y la fecundidad.

A su vez García y Mina comprueban que la función de Gompertz-Makeham describe adecuadamente las estructuras acumuladas por edad y sexo de la población económicamente activa (PEA) y que también permite desagregar de grupos quinquenales de edad a edades individuales una vez efectuado el ajuste descriptivo.

Asímismo el profr. A. Mina ha comprobado que la ley de Makeham describe adecuadamente el comportamiento del fenómeno de la nupcialidad, específicamente el riesgo de casarse.

Sin embargo, a pesar del interés mostrado por varios investigadores en este tipo de funciones, en México hasta la fecha poco se ha trabajado con la función de Gompertz-Makeham, soslayando su riqueza para describir un fenómeno demográfico. Por ello en este trabajo y procurando no caer en la aplicación mecánica del modelo empleado, se pretende profundizar en el análisis de la aplicación de dicha función matemática enfatizando lo relevante que resultan los elementos y supuestos demográficos implicados. De tal forma que la interpretación de lo obtenido permite una idea próxima a los alcances y limitaciones de la función de Gompertz-Makeham.

Y si bien no se presenta en la tesis un aporte al aspecto teórico del desarrollo del modelo, al realizar la aplicación de los ajustes descriptivos se utilizó por primera vez en este tipo de estudios un método iterativo que permite en algunos casos y situaciones, lograr una función óptima, que mejor registra el comportamiento de una población ante los fenómenos demográficos y por tanto posibilita proyectar su tendencia con menor sesgo.

Entonces la finalidad del presente trabajo se centra en el análisis de la función de Gompertz-Makeham para la descripción, proyección y simulación de fenómenos demográficos. Por ello el estudio de la función de Gompertz-Makeham se efectuó pensando en diferentes situaciones, que implican las siguientes aplicaciones:

a) Para describir la dinámica del crecimiento de la población en México en el periodo 1920 a 1990 y efectuar la proyección de la misma para los años 2000 y 2010, comparando lo obtenido con lo esperado en proyecciones oficiales, dado los cambios significativos ocurridos por la baja en la fecundidad.

b) Para describir las estructuras por edad de la fecundidad en México para el periodo de 1952 a 1988 y proyectarlas efectuando simulaciones de acuerdo a las tendencias prevaecientes de dicho componente demográfico.

c) Para describir la estructura por edad de la FEA ocupada en México en el año de 1976 y con ello simular matemáticamente con varios valores los parámetros de la función de Gompertz-Makeham y así generar diversos escenarios para la población económicamente activa.

Cabe mencionar que un aspecto esencial a considerar en la descripción de un fenómeno demográfico, es disponer de información confiable, lo cual requiere evaluar y en su caso ajustar y corregir los datos con los cuales se vaya a trabajar; sin embargo para el trabajo que nos ocupa no se realizó tarea alguna al respecto, dado que el objeto de estudio se ubicó en el análisis de la función de Gompertz-Makeham y por tanto la información con que se contó, es aquella publicada oficialmente, independientemente de si fue evaluada y corregida.

Por otra parte el trabajo consta, además de esta parte introductoria, de un capítulo donde se presenta la metodología matemática empleada, desde la concepción de la función misma, pasando por su desarrollo matemático, presentación del método de estimación de los parámetros (grupos no superpuestos), hasta el desarrollo del método iterativo usado para optimizar la función de Gompertz-Makeham.

El siguiente capítulo trata de la presentación de las aplicaciones y del análisis de los resultados obtenidos. Asimismo aquí se enfatiza los aspectos demográficos inmersos en los fenómenos estudiados.

En el último capítulo se exponen las conclusiones sobre el análisis de las bondades y deficiencias de la función de Gompertz-Makeham. Por último en el trabajo se presenta en los anexos los cuadros correspondientes a todas las estimaciones realizadas y desde luego la bibliografía empleada.

## 11.- METODOLOGIA

El objetivo del capítulo es presentar, a través del enfoque de funciones de sobrevivencia, el instrumental utilizado en este trabajo. Primero se desarrolla la función correspondiente a Gompertz-Makeham, enseguida el método para el cálculo de los parámetros de dicha función y al final el algoritmo de optimización de los tales parámetros.

### A) FUNCIONES DE SOBREVIVENCIA.

El fenómeno de la sobrevivencia en lo específico para los seres humanos se caracteriza porque sus eventos se refieren al hecho de que un individuo cualquiera alcance y supere una edad concreta.

El sobrevivir depende principalmente de aspectos biológicos y por tanto el elemento importante para su medición es la edad. Es decir los procesos biológicos del individuo se realizan en el tiempo físico o absoluto, pero se manifiestan con referencia a la edad, como medida del tiempo interno del individuo.

Lo importante del tiempo es la percepción que se tiene de las cosas a través de su duración propia. Duración que se forma mediante el surgimiento de un momento de tiempo a otro, merced a la finitud de la velocidad de cambio de cualquier proceso.

La medida del fenómeno de la sobrevivencia va ligada a la idea del tiempo con un amplio significado matemático, donde las principales relaciones matemáticas se expresan a través de dos variables aleatorias, que representan los hechos de sobrevivir a una edad determinada o de no superarla.

De tal forma que la probabilidad de no sobrevivir a la edad  $x$  vendrá dada por la función de distribución acumulativa

$$F(x) = P(\delta \leq x) \dots (1)$$

mientras que la probabilidad de superar dicha edad por ser el suceso contrario es

$$S(x) = P(\delta > x) = 1 - F(x) \dots (2)$$

donde  $\delta$  se define como la edad a la muerte.

Y es, gracias a la investigación y estudio de tal función de distribución  $S(x)$  conocida como función de sobrevivencia, que ha sido posible describir ampliamente el comportamiento de las poblaciones ante la mortalidad.

Si se conoce la función de distribución acumulativa  $F(x)$  o la complementaria  $S(x)$ , puede determinarse una función de mortalidad  $f(x)$ , al derivar  $F(x)$  ó  $S(x)$ , sólo que en el último caso con signo cambiado, como se observa:

$$f(x) = \frac{d F(x)}{dx} = - \frac{d S(x)}{dx} \dots (3)$$

En Demografía la llamada fuerza de mortalidad o tasa instantánea de mortalidad  $\mu_{xc}$  es evidentemente la densidad de la distribución condicionada al suceso de haber superado la edad  $x$ .

$$\mu_{xc} = \frac{f(x)}{S(x)} = - \frac{dS(x)}{S(x)dx} = - \frac{d \ln S(x)}{dx} \dots (4)$$

La expresión (4) resulta interesante, por que mide la fuerza de la mortalidad opuesta una fuerza de vitalidad, como equilibrio vital relativo a una edad. Por ello la modelización de funciones de sobrevivencia se hace fundamentalmente sobre  $\mu_x$ .

## B) FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

### 1) Gompertz

Correspondió a Gompertz uno de los principales esfuerzos por desarrollar modelos matemáticos que describieran el fenómeno de la sobrevivencia.

Después de observar que conforme pasa el tiempo la resistencia del hombre a la muerte decrece proporcionalmente a la misma, Gompertz se planteó como objetivo ver como se extinguía una población.

Entonces él definió la resistencia del hombre a la muerte como el recíproco de la tasa instantánea de mortalidad ( $1/\mu_x$ ); por lo que su hipótesis se plantea como:

$$\frac{d (1/\mu_x)}{d x} = - h \frac{1}{\mu_x} \quad \dots (5)$$

donde  $h$  es la tasa a la cual decrece la resistencia del hombre a la muerte.

A fin de obtener una función de sobrevivencia, se procede al desarrollo matemático a partir de la hipótesis planteada por Gompertz en (5). A continuación se presentan los pasos seguidos para ello.

a) se procede a integrar la ecuación (5):

$$\int \frac{d(1/\mu_{sc})}{d_{sc}} \cdot d_{sc} = -h \int \frac{1}{\mu_{sc}} \cdot d_{sc} \dots (6)$$

si se considera constante la relación  $1/\mu_{sc}$  en (6), se tiene

$$\int \frac{d(1/\mu_{sc})}{d_{sc}} \cdot d_{sc} = -h \int \frac{1}{\mu_{sc}} \cdot d_{sc} \dots (7)$$

y obtenida la integración

$$\ln \frac{1}{\mu_{sc}} + C_1 = -hx + C_2 \dots (8)$$

se manipula algebraicamente las constantes de integración, con  $B = e^{(C_1 - C_2)}$  y la ecuación (8) queda

$$\ln \frac{1}{\mu_{sc}} + \ln B = -hx \dots (9)$$

y al sumar logaritmos

$$\ln \frac{B}{\mu_{sc}} = -hx \dots (10)$$

b) a continuación se aplica la función exponencial a ambos lados

$$e^{-hx} = \frac{B}{\mu_{sc}} \dots (11)$$

y se despeja  $\mu_{x:}$  de (11). El resultado que obtuvo Gompertz por primera vez describía la fuerza de mortalidad como una función exponencial:

$$\mu_{x:} = BC^{Cx} \quad \dots (12)$$

donde  $C = e^h$

La relación (12) es una expresión notable porque exclusivamente considera las causas de muerte dependientes de la edad.

Ahora bien como ya es sabido la tasa instantánea de mortalidad  $\mu_{x:}$  mide el cambio relativo en ese fenómeno y por tanto se expresa por

$$\mu_{x:} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{l(x+\Delta) - l(x)}{\Delta l(x)} = - \frac{dl(x)}{l(x)dx} \quad \dots (13)$$

donde  $l(x)$  es una función continua de sobrevivencia relativa a una tabla de mortalidad y se refiere a los sobrevivientes de un conjunto inicial de recién nacidos. La expresión (13) es la derivada del logaritmo de una función, es decir

$$\mu_{x:} = - \frac{d}{dx} \ln l(x) \quad \dots (14)$$

c) al combinar las expresiones (12) y (14), se tiene

$$- \frac{d}{dx} \ln l(x) = BC^{Cx} \quad \dots (15)$$

ecuación diferencial que relaciona la función de sobrevivencia  $l(x)$  y los parámetros hallados por Gompertz para definir la fuerza de la mortalidad.

d) nuevamente se procede a integrar

$$\int \frac{d}{dx} \ln l(x) dx = - \int BC^{cx} dx \dots (16)$$

obtenida la integración

$$\ln l(x) + C_1 = - \frac{BC^{cx}}{\ln C} + C_2 \dots (17)$$

se manipulan algebraicamente las constantes de integración, con  $k = e^{(C_1 - C_2)}$  y  $\ln g = -B / \ln C$  y la ecuación (17) queda

$$\ln l(x) = C^{cx} \ln g + \ln k \dots (18)$$

luego se aplica algebra de logaritmos

$$\ln l(x) = \ln g^{C^{cx}} + \ln k \dots (19)$$

e) y finalmente se eliminan los logaritmos de (19) para llegar a la expresión conocida como la Ley de Gompertz :

$$l(x) = Kg^{C^{cx}} \dots (20)$$

con  $l(x)$  como la Función de Sobrevivencia.

2) Makeham

A su vez, Makeham retoma lo desarrollado por Gompertz e incorpora a su Función de Supervivencia, las causas de muerte independientes de la edad. Por lo que de (12), Makeham obtiene la expresión :

$$\mu_{x:\infty} = A + BC^x \dots (21)$$

donde A se asocia al efecto de las causas de muerte fortuitas.

Para obtener la función de supervivencia de Gompertz-makeham se procede similarmente al desarrollo matemático llevado a efecto para la función de Gompertz.

a) al combinar las expresiones (14) y (21), se tiene

$$-\frac{d}{dx} \ln l(x) = A + BC^x \dots (22)$$

nuevamente se tiene una ecuación diferencial que relaciona la función de supervivencia  $l(x)$  y los parámetros propuestos por Makeham para definir la fuerza de la mortalidad.

b) a continuación procede la integración de (22)

$$\int -\frac{d}{dx} \ln l(x) dx = - \int (A + BC^x) dx \dots (23)$$

obtenida la integración

$$\ln l(x) + C_1 = -Ax - \frac{BC^x}{\ln C} + C_2 \dots (24)$$

se manipulan las constantes de integración, con  $k = e^{(C_1 - C_2)}$ ,  $\ln g = -B / \ln C$  y  $\ln s = -A$ , y la ecuación (24) queda

$$\ln l(x) = x \ln s + C^x \ln g + \ln k \dots (25)$$

para luego aplicar algebra de logaritmos

$$\ln l(x) = \ln s^x + \ln g^{C^x} + \ln k \dots (26)$$

c) y finalmente se eliminan los logaritmos de (26) para llegar a la expresión conocida como la **Ley de Gompertz-Makeham**

$$l(x) = K s^x g^{C^x} \dots (27)$$

con  $l(x)$  como la función de sobrevivencia.

Con lo cual las dos Funciones de Sobrevivencia, para el caso general son :

$$\text{Gompertz : } Y(x) = K b^{C^x} \dots (28)$$

$$\text{Gompertz-Makeham: } Y(x) = K a^{C^x} b^{C^x} \dots (29)$$

De (28) y (29) resulta obvio que la función de Gompertz es un caso particular de la función Gompertz-Makeham cuando  $a=1$ .

Una vez presentada la función Gompertz-Makeham, el siguiente paso es el cálculo de los parámetros  $(K, a, b, d)$  de la función, lo cual se presenta el siguiente apartado.

C) METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS.

Dados  $n$  valores observados, cada uno de ellos dependientes de la variable  $x$  relativa a la edad:

$$\{Y^{\circ}(i)\}_{i=0,1,2,\dots,n}$$

se tiene el supuesto fundamental:

$$Y^{\circ}_i = K a^i b^{d^i} \dots \quad (30)$$

$$\text{se sigue que } \ln Y^{\circ}_i = \ln k + i \ln a + d^i \ln b \dots \quad (31)$$

entonces el algoritmo es el siguiente:

i) Se dividen los datos observados en 4 grupos de igual tamaño ( $m$ ), cuidando que los grupos no sean superpuestos, es decir que la separación en observaciones sucesivas no se traslape. Por tanto:

$$\text{Primer grupo: } \{Y^{\circ}(i)\}_{i=0,1,2,\dots,(m-1)}$$

$$\text{Segundo grupo: } \{Y^{\circ}(i)\}_{i=m,m+1,m+2,\dots,(2m-1)}$$

$$\text{Tercer grupo: } \{Y^{\circ}(i)\}_{i=2m,2m+1,2m+2,\dots,(3m-1)}$$

$$\text{Cuarto grupo: } \{Y^{\circ}(i)\}_{i=3m,3m+1,3m+2,\dots,(4m-1)}$$

ii) Se obtienen los logaritmos de  $\{Y^{\circ}(i)\}$  y las 4 sumas correspondientes a cada grupo de sus  $\ln \{Y^{\circ}(i)\}$  ;

$$S_{\circ} = \sum_{i=0}^{m-1} \ln Y^{\circ}(i) = m \ln K + \ln a \sum_{i=0}^{m-1} i + \ln b \sum_{i=0}^{m-1} d^i \dots \quad (32)$$

$$S_1 = \sum_{i=0}^{2m-1} \ln Y^{\circ}(i) = m \ln K + \ln a \sum_{i=0}^{2m-1} i + \ln b \sum_{i=0}^{2m-1} d^i \dots (33)$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{3m-1} \ln Y^{\circ}(i) = m \ln K + \ln a \sum_{i=0}^{3m-1} i + \ln b \sum_{i=0}^{3m-1} d^i \dots (34)$$

$$S_3 = \sum_{i=0}^{4m-1} \ln Y^{\circ}(i) = m \ln K + \ln a \sum_{i=0}^{4m-1} i + \ln b \sum_{i=0}^{4m-1} d^i \dots (35)$$

iii) de las relaciones anteriores se observa que la  $\sum i$  corresponde a una serie aritmética, en consecuencia

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \dots (37)$$

mientras que la  $\sum d^i$  corresponde a una serie geométrica, por lo que se tiene

$$\sum_{i=0}^n d^i = \frac{1 - d^{n+1}}{1 - d} \dots (38)$$

iii) Sustituyendo (37) y (38) en las relaciones (32), (33), (34) y (35), éstas quedan

$$S_3 = m \ln K + \frac{m(m-1)}{2} \ln a + \frac{1 - d^m}{1 - d} \ln b \dots (39)$$

$$S_1 = m \ln K + \left[ m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \ln a + d^m \left( \frac{1-d^m}{1-d} \right) \ln b \dots (40)$$

$$S_2 = m \ln K + \left[ 2m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \ln a + d^{2m} \left( \frac{1-d^m}{1-d} \right) \ln b \dots (41)$$

$$S_3 = m \ln K + \left[ 3m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \ln a + d^{3m} \left( \frac{1-d^m}{1-d} \right) \ln b \dots (42)$$

iv) Se obtienen las primeras y segundas diferencias en base las cuatro últimas relaciones:

diferencias

		primeras	segundas
		▲ S <sub>1</sub>	▲ <sup>2</sup> S <sub>1</sub>
i	S <sub>1</sub>		
0	S <sub>0</sub>		
		$m^2 \ln a + \frac{(d^m-1)^2}{d-1} \ln b$	
1	S <sub>1</sub>		$\frac{(d^m-1)^3}{d-1} \ln b$
		$m^2 \ln a + d^m \frac{(d^m-1)^2}{d-1} \ln b$	
2	S <sub>2</sub>		$d^m \frac{(d^m-1)^3}{d-1} \ln b$
		$m^2 \ln a + d^{2m} \frac{(d^m-1)^2}{d-1} \ln b$	
3	S <sub>3</sub>		

v) ya que se conoce  $\Delta S_0$ ,  $\Delta S_1$ , y  $\Delta S_2$  y  $\Delta^2 S_0$  y  $\Delta^2 S^1$  por un lado y se conoce también  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ , se calculan los parámetros de la siguiente forma:

$$d^m = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \dots (43)$$

por lo que despejando d se tiene

$$d = \left( \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \right)^{1/m} \dots (44)$$

luego de

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \ln b \dots (45)$$

se calcula b así

$$b = \exp \left( \frac{\Delta^2 S_0 (d - 1)}{(d^m - 1)^2} \right) \dots (46)$$

ahora de

$$\Delta S_0 = m^2 \ln a + \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \ln b \dots (47)$$

se estima a

$$a = \exp \left( \frac{1}{m^2} \left[ \Delta S_0 - \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \ln b \right] \right) \dots (48)$$

para determinar K se impone la condición de mínimos cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los teóricos

$$\langle D \rangle^2 = \sum_{i=0}^n (Y_{c_{1i}} - K V_{c_{1i}})^2 \dots (49)$$

donde  $V_{c_{1i}} = a^i b^{-i}$  y D representa las diferencias.

para obtener un mínimo se deriva con respecto a K y se iguala a 0

$$\frac{d \langle D \rangle^2}{d K} = 2 \sum_{i=0}^n (Y_{c_{1i}} - K V_{c_{1i}}) (-V_{c_{1i}}) = 0 \dots (50)$$

y se despeja K

$$K = \frac{\sum_{i=0}^n Y_{c_{1i}} V_{c_{1i}}}{\sum_{i=0}^n V_{c_{1i}}^2} \dots (51)$$

#### D) METODO ITERATIVO PARA OPTIMIZAR EL AJUSTE DE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM.

Dada la función

$$Y_{c_{1i}} = K a^i b^{-i}$$

✓ conocidos los parámetros K, a, b, d

se busca obtener una nueva función de Gompertz-Makeham, con los nuevos parámetros

$$Y^{(n)}_{(1)} = K^n a^{n-1} b^{n-1} d^{n-1}$$

1) se parte de la relación (31), para producir pequeños cambios en los valores de los parámetros y así generar una pequeña variación  $dy$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dK}{K} + i \frac{da}{a} + d^i \frac{db}{b} + id^i \ln b \frac{dd}{d} \dots (54)$$

si se define por un lado

$$C_2 = \frac{dK}{K} \quad ; \quad C_4 = \frac{db}{b}$$

$$C_3 = \frac{da}{a} \quad ; \quad C_5 = \frac{dd}{d} \ln b$$

y por otro

$$x_1 = dy \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = i (x_2)$$

$$x_4 = x_2 d^i \quad ; \quad x_5 = x_3 d^i$$

una vez introducidos los cambios, la relación (54) adquiere la forma linealizada

$$x_1 = C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4 + C_5 x_5 \dots (55)$$

es decir la diferencia entre valores observados y los teóricos se refleja en dy, por o que pueden determinarse  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$  como coeficientes de regresión lineal. utilizando para ello, el método de mínimos cuadrados.

ii) se plantean las ecuaciones normales

$$\sum x_1 x_2 = C_2 \sum x_2 x_2 + C_3 \sum x_2 x_3 + C_4 \sum x_2 x_4 + C_5 \sum x_2 x_5$$

$$\sum x_1 x_3 = C_2 \sum x_2 x_3 + C_3 \sum x_3 x_3 + C_4 \sum x_3 x_4 + C_5 \sum x_3 x_5$$

$$\sum x_1 x_4 = C_2 \sum x_2 x_4 + C_3 \sum x_3 x_4 + C_4 \sum x_4 x_4 + C_5 \sum x_4 x_5$$

$$\sum x_1 x_5 = C_2 \sum x_2 x_5 + C_3 \sum x_3 x_5 + C_4 \sum x_4 x_5 + C_5 \sum x_5 x_5$$

que en forma de matrices queda

$$\begin{bmatrix} \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_3 \\ \sum x_1 x_4 \\ \sum x_1 x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_2 x_2 + \sum x_2 x_3 + \sum x_2 x_4 + \sum x_2 x_5 \\ \sum x_2 x_3 + \sum x_3 x_3 + \sum x_3 x_4 + \sum x_3 x_5 \\ \sum x_2 x_4 + \sum x_3 x_4 + \sum x_4 x_4 + \sum x_4 x_5 \\ \sum x_2 x_5 + \sum x_3 x_5 + \sum x_4 x_5 + \sum x_5 x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix}$$

y en forma matricial condensada

$$b = A c$$

donde b es un vector columna de 4 x 1, con los productos de  $x_1$  con  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  y  $x_5$

A es una matriz de 4 x 4 con los pares de productos de las variables  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  y  $x_5$

c es un vector columna de 4 x 1, con los valores de  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$

iii) al emplear algebra matricial se obtienen los valores del vector  $c$

$$c = A^{-1} b \dots (55)$$

donde  $A^{-1}$  es la matriz inversa de  $A$ , siempre que exista.

iv) enseguida se calculan los nuevos valores de los parámetros

$$K^m = K ( 1 + C_2 ) \dots (56)$$

$$a^m = a ( 1 + C_3 ) \dots (57)$$

$$b^m = b ( 1 + C_4 ) \dots (58)$$

$$d^m = d ( 1 + (C_5 / \ln b) ) \dots (59)$$

v) esto permite calcular nuevos valores teóricos y nuevas diferencias entre éstos y los valores observados que se asimilan a  $dy$ . Con esto se vuelve a calcular nuevas correcciones a  $K$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$  y continua el proceso iterativo hasta lograr una determinada convergencia en dichos valores.

En general si  $K_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  y  $d_i$  son valores de la iteración  $i$ , los valores de esos parámetros a la iteración  $i+1$  serán

$$K_{i+1} = ( 1 + C_{2i} ) K_i \dots (60)$$

$$a_{i+1} = ( 1 + C_{3i} ) a_i \dots (61)$$

$$b_{i+1} = ( 1 + C_{4i} ) b_i \dots (62)$$

$$d_{i+1} = ( 1 + (C_{5i} / \ln b_i) ) d_i \dots (63)$$

### III.- APLICACIONES Y RESULTADOS

Una vez que se ha presentado en el capítulo anterior los aspectos teóricos concernientes a la función matemática de Gompertz-Makeham, en el presente, los aplicamos para la descripción y proyección de fenómenos demográficos, como son: el crecimiento de la población y las estructuras por edad de la fecundidad y de la población económicamente activa ocupada.

A tal fin, se procedió a presentar en cada aplicación, una breve exposición de los aspectos demográficos implicados, para así disponer de elementos que justifiquen la necesidad de efectuar la descripción y proyección del fenómeno demográfico en estudio.

Enseguida se procedió para cada caso al cálculo de la función de Gompert-Makeham, a través de la estimación de sus parámetros; luego la búsqueda de una función óptima, la desagregación de la función acumulada y la proyección ya fuera directamente con la función determinada o bien mediante la simulación de algunas alternativas variando los parámetros de la función de Gompertz-Makeham.

De tal forma que sin perder de vista los mencionados aspectos de la dinámica demográfica, se llevó al cabo el análisis de los resultados obtenidos, para intentar dar fundamento al planteamiento de que la función de Gompertz-Makeham puede describir el comportamiento de diversas poblaciones ante diferentes fenómenos demográficos y por tanto, asimismo ser útil para proyectar tal dinámica demográfica.

## A) DESCRIPCION DEL CRECIMIENTO DE LA POBLACION EN MEXICO.

La evolución demográfica seguida por la población mexicana en cuanto su volumen durante el presente siglo, refleja un proceso de intenso crecimiento, puesto que, de acuerdo a las cifras censales, el país ha pasado de 14.3 millones en 1921 y 19.6 millones en 1940 a 66.8 millones en 1980 y en 1990 81.1 millones de habitantes.

El crecimiento se ha debido a una fuerte disminución en la mortalidad<sup>1</sup> y a la permanencia de una alta fecundidad. Sin embargo, la velocidad de dicho crecimiento se ha visto disminuida a partir de los años setenta debido a la declinación que se ha dado en la fecundidad.

Para tener una idea del ritmo de crecimiento se presenta el cuadro 3.1.1 donde se presentan las tasas de crecimiento intercensal de la población (sin corregir los datos obtenidos de los Censos), como cifras que representan un promedio de lo ocurrido en el decenio y por tanto se refieren aproximadamente a la mitad del período. Para la estimación de las tasas se consideró la ley exponencial simple, caso particular de la ley de Gompertz-Makeham cuando el parámetro  $b$  se iguala a la unidad.

<sup>1</sup> El cambio en la mortalidad, es el resultado de las campañas emprendidas, principalmente a partir de los cuarenta, para combatir las enfermedades y epidemias que diezaban nuestra población, llevadas al cabo con los grandes adelantos logrados por la Medicina y la Sanidad pública; y todo reforzado por un mejoramiento gradual de los aspectos social y cultural de la población.

De tasas de crecimiento anual de alrededor de 1.7 % anual en los años treinta y cuarenta se pasó rápidamente a tasas superiores al 3 % a partir de los cincuenta, aunque ya para la década de los setenta, comenzó a disminuir ese ritmo para arribar en los ochenta a una baja notoria, que incluso llega por abajo del 2% de crecimiento para la década.

CUADRO 3.1.1

Año Censal	Población	Tasa de crecimiento (%) (promedio de la década)
1921	14334780	
		1.60
1930	16552722	
		1.72
1940	19653552	
		2.72
1950	25791017	
		3.03
1960	34923129	
		3.23
1970	48225238	
		3.27
1980	66846833	
		1.94
1990	81140922	

Fuente: Censos Generales de Población y Vivienda. 1921-1990.

Cuando México crecía por arriba del 3 % (décadas del 50 y 60), su población se duplicaba en aproximadamente 22 años; mientras que ahora creciendo ligeramente abajo del 2 %, el proceso de duplicación se realizara más allá de los 35 años.

No obstante ser un cambio excepcional en la dinámica del crecimiento de la población, el incremento en números absolutos es significativo, al grado que representa un enorme desafío con un gran número de problemas, en espera de respuestas y soluciones acerca del desarrollo social, económico, cultural y político del país.

Por ende, la importancia de describir adecuadamente el crecimiento de la población, radica en disponer de una base para proyectar tendencias y situaciones futuras; lo que implica sopesar las consecuencias de las decisiones presentes, que enfrenten el proceso de desenvolvimiento demográfico.

Teniendo en mente lo anterior, la aplicación de la función de Gompertz-Makeham para describir el crecimiento poblacional acumulado tomó como referencia los montos totales de población arrojados por los Censos Generales de Población y Vivienda de 1921 a 1990 (este último sólo cifras preliminares).

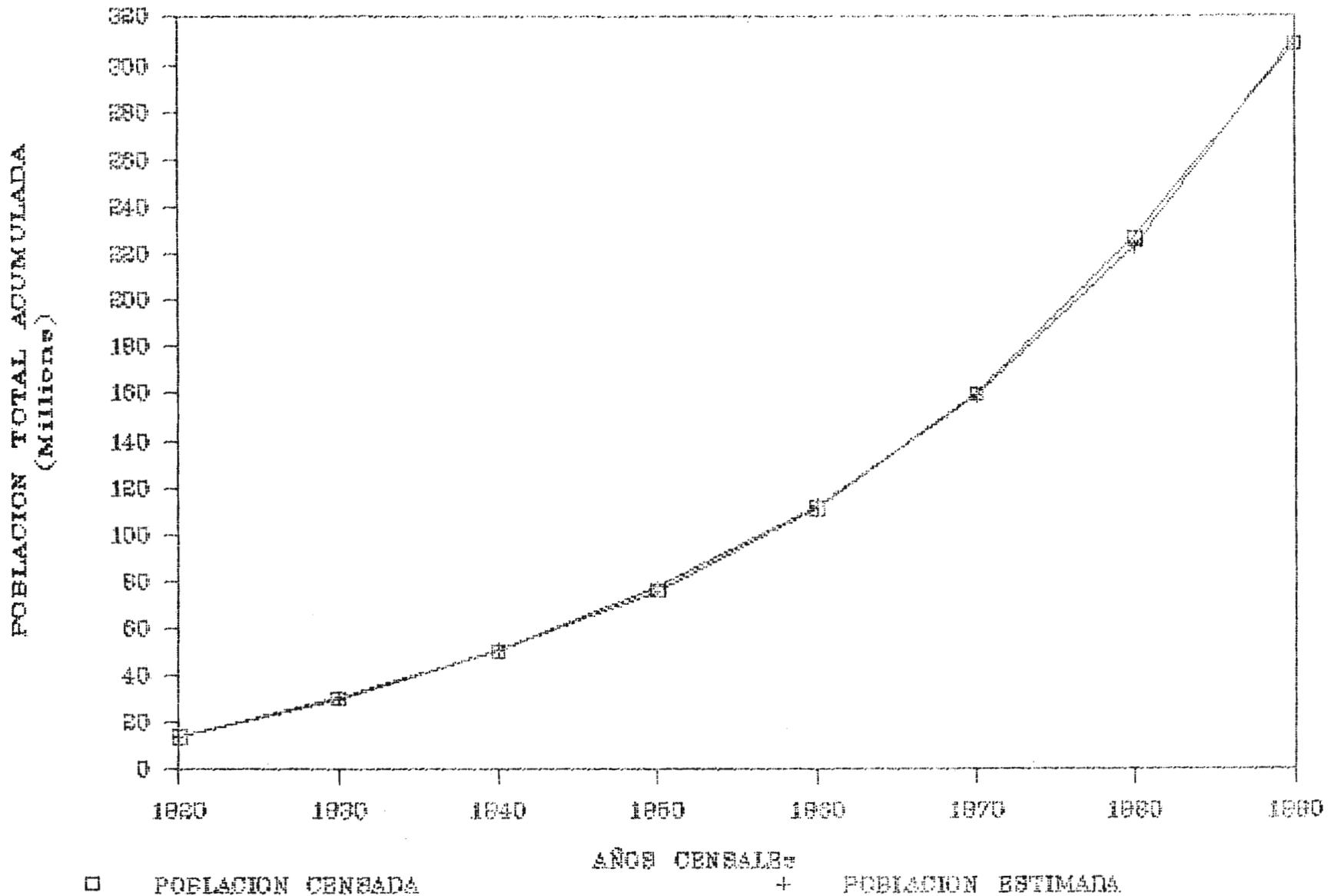
Mediante la ley de crecimiento exponencial simple, se procedió a "recorrer" al 30 de junio de cada año censal las cifras emitidas por los Censos. Así mismo como los años de levantamiento censal, coinciden con el inicio de década, excepto para 1921, se procedió para ese año llevarlo al 30 de junio de 1920 y de esa forma los intervalos entre los datos se homogeneizaron a 10 años en todos los casos.

A continuación se estimó la función de Gompertz-Makeham, calculando sus parámetros con el método de los grupos no superpuestos. Para de ahí efectuar el ajuste descriptivo a los datos del crecimiento acumulado de población, el cual resultó magnífico, puesto que arrojó un coeficiente de determinación de 0.9996317 y una variación máxima al ajustar los valores estimados respecto a los valores observados de -3.39 % para 1930. (ver cuadro 3.1.2)

A su vez la gráfica 3.1.1 muestra como la función de Gompertz-Makeham describe adecuadamente el crecimiento de la población mexicana en el período de 1920 a 1990, de tal forma que su comportamiento parece netamente exponencial.

gráfica 3.1.1

# MEXICO 1920-1990: CRECIMIENTO POBLACION



CUADRO 3.1.2

México 1920-1990: Descripción del Crecimiento Poblacional acumulado mediante la función de Gompertz-Makeham

Año	Población acumulada		Variación %
	observada	estimada	
1920	13993424	14382928	2.71
1930	30583502	29579302	-3.39
1940	50404767	49952792	-0.90
1950	76249358	76484263	0.31
1960	111246230	111536360	0.26
1970	160117797	158756859	-0.86
1980	227062782	223260566	-1.70
1990	308694622	312095173	1.09

Coeficiente de determinación : 0.9996317

Para captar la evolución del crecimiento poblacional, con la función de Gompertz-Makeham se procedió a desagregar y obtener un estimado de los valores de población total para cada uno de los años censales. (ver cuadro 3.1.3 y gráfica 3.1.2)

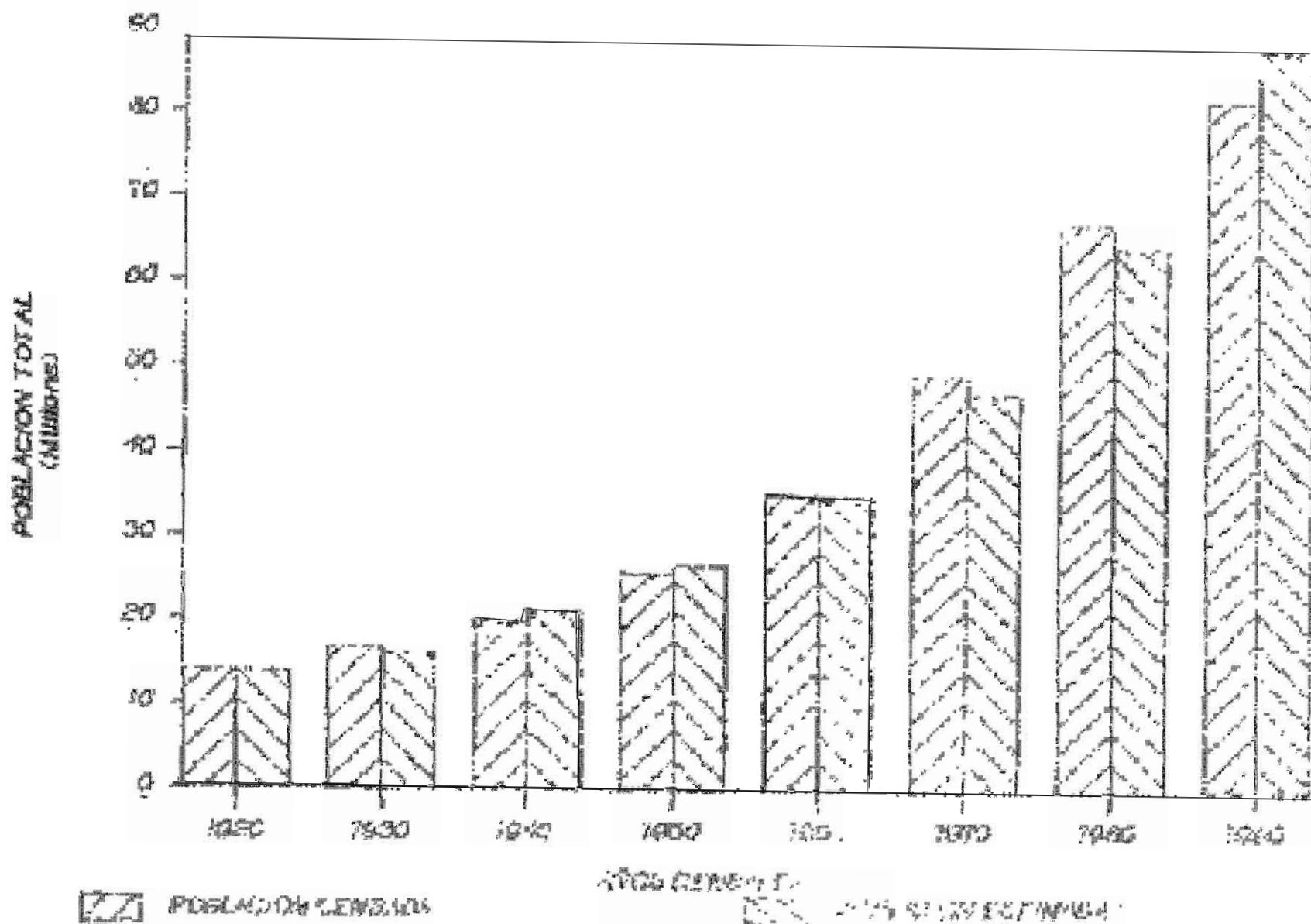
CUADRO 3.1.3

México 1920-1990: Desagregación del Crecimiento Poblacional acumulado mediante la función de Gompertz-Makeham

Año	Población al 30 de junio		Variación %
	observada	estimada	
1920	13993424	14382928	2.71
1930	16590078	15196374	-9.17
1940	19821266	20373490	2.71
1950	25844590	26531471	2.59
1960	34996872	35052097	0.16
1970	48871567	47220500	-3.50
1980	66944985	64503707	-3.78
1990	81631840	88834606	8.11

gráfica 3.1.2

# MEXICO 1920-1990: CRECIMIENTO POBLACION



De donde se observa que salvo las estimaciones de 1930 y 1990<sup>2</sup>, el ajuste para este caso resultó excelente, porque las variaciones en las estimaciones son mínimas. No obstante, buscando precisar aún más la descripción del fenómeno, a través del método iterativo descrito en el capítulo de Metodología se generó una función de Gompertz-Makeham que resultara óptima<sup>3</sup> en su aplicación.

En el cuadro 3.1.4 y gráfica 3.1.3 se presentan los resultados alcanzados con la función de Gompertz-Makeham óptima. Ahí se aprecia que los valores estimados en la cuarta iteración mejoran la descripción inicial de los montos de crecimiento poblacional, dado que el coeficiente de determinación es ligeramente más alto, que el anotado en el cuadro 3.1.2.

CUADRO 3.1.4

México 1920-1990: Descripción del Crecimiento Poblacional acumulado mediante la función de Gompertz-Makeham óptima			
Año	Población acumulada		Variación
	observada	estimada	%
1920	13993424	13913661	-0.57
1930	30583502	29885750	-2.34
1940	50404767	50796920	0.77
1950	76249358	77466185	1.57
1960	111246230	112344590	0.98
1970	160117797	159173765	-0.59
1980	227062782	223100105	-1.78
1990	308694622	311138470	0.79
Coeficiente de determinación : 0.9996538			

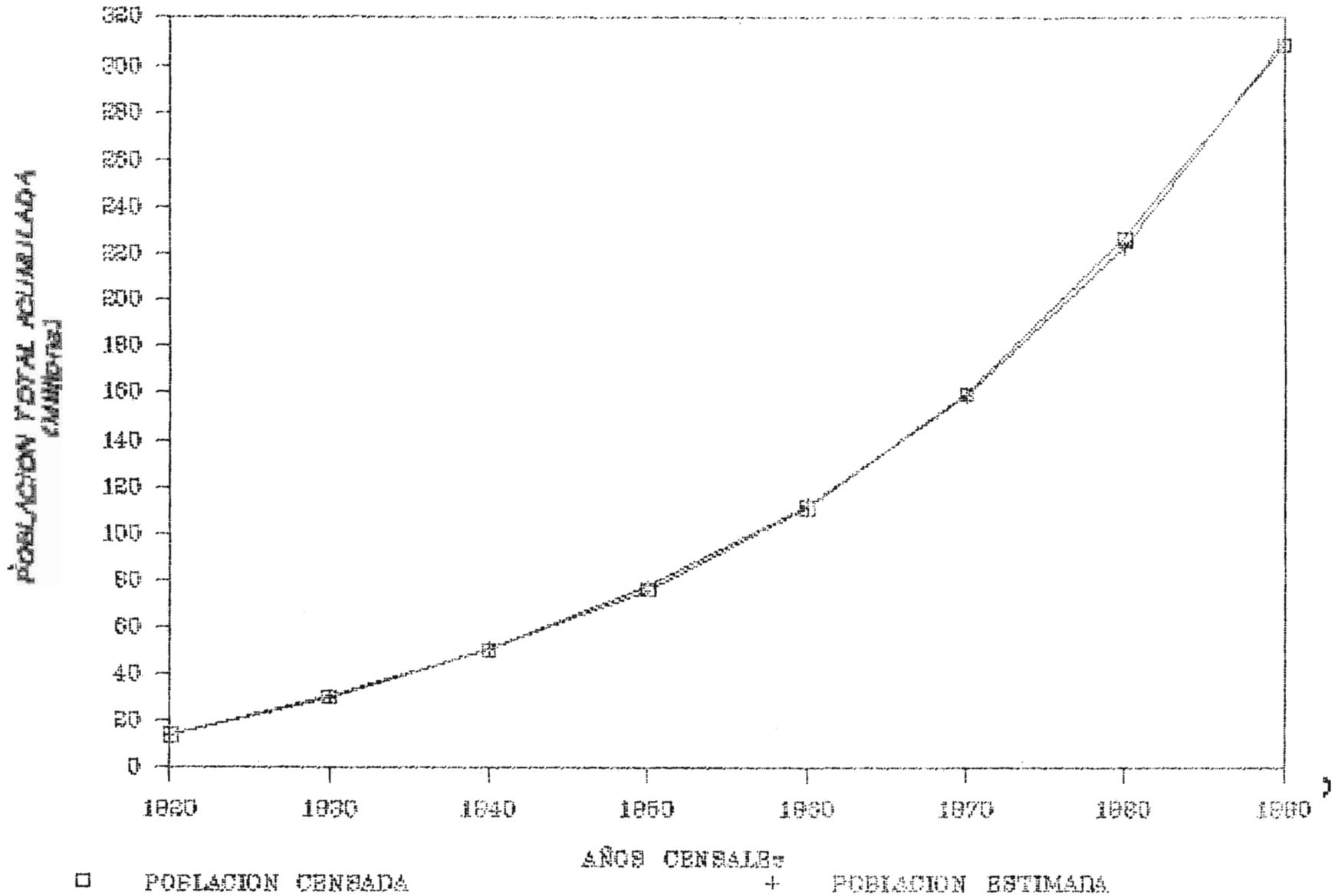
<sup>2</sup>Las cifras del Censo de 1990 sólo son preliminares y por tanto constituyen una aproximación a la evolución seguida.

<sup>3</sup>En el sentido de captar de la mejor manera posible el comportamiento del fenómeno en estudio.

# gráfica 3.1.3

## MEXICO 1920-1990: CRECIMIENTO POBLACIONAL

ADICION GONZALEZ-VAZQUEZ ET AL.



Mientras que en el cuadro 3.1.5 se observa que los parámetros "a" y "k" de la función de Gompertz-makeham óptima (cuarta iteración en este caso) prácticamente son iguales, mientras que los correspondientes a "d" y "b" difieren ligeramente con los obtenidos inicialmente.

CUADRO 3.1.5

México 1920-1990: Estimación de parámetros de la función de Gompertz-Makeham		
	Valores iniciales	Cuarta iteración
K	31372780	31372506
a	1.38963	1.38859
b	0.45845	0.44350
d	0.49737	0.46351

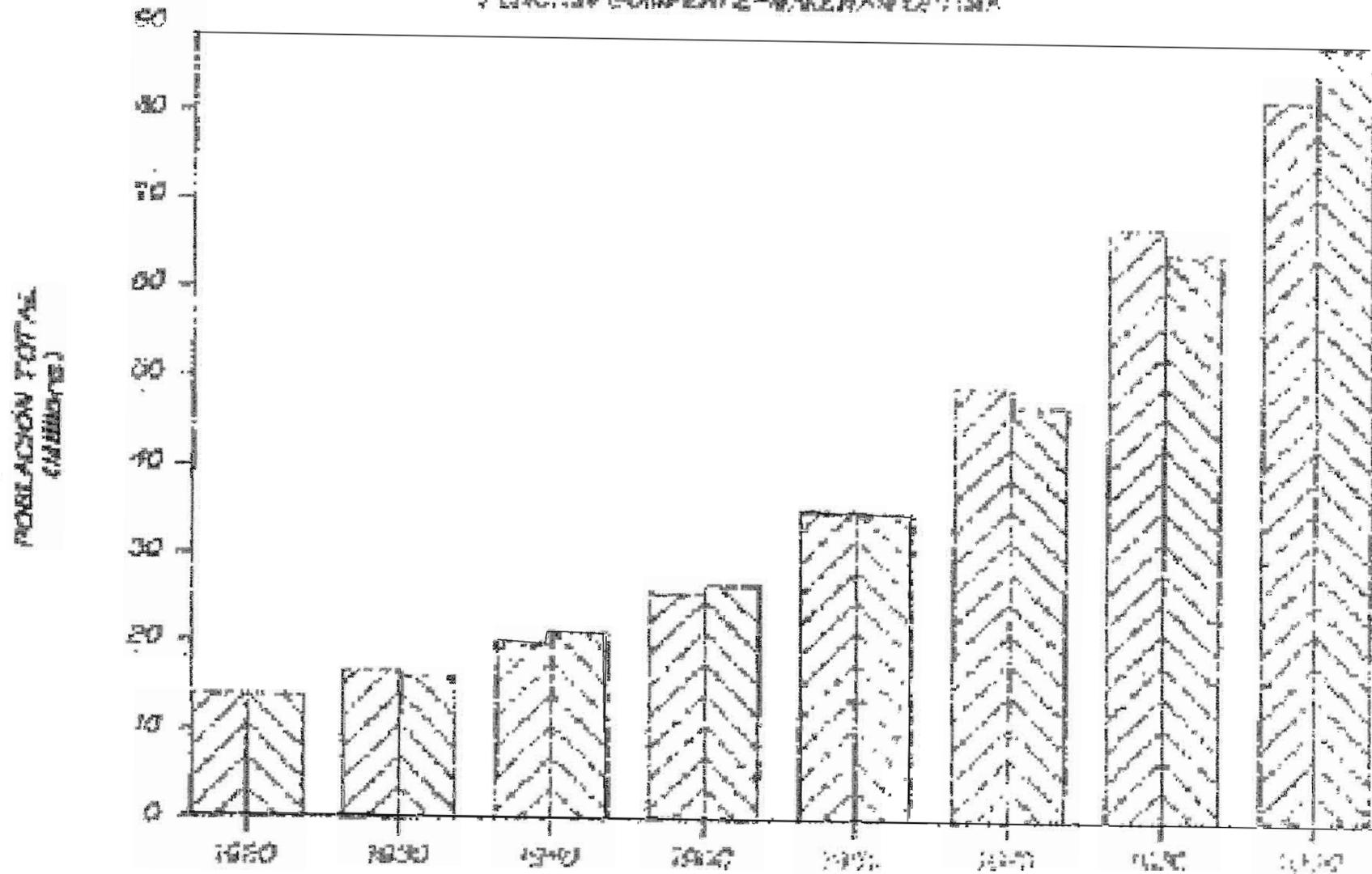
Ahora al desagregar nuevamente con los parámetros de la función óptima (cuarta iteración), nos da como resultado los valores indicados en el cuadro 3.1.6 y gráfica 3.1.4. Cifras que comparadas con los del cuadro 3.1.3, suavizan ligeramente los valores estimados, sobre todo el del dato correspondiente a 1930, distribuyendo la variación en la estimación a lo largo de la curva.

Con los datos del cuadro 3.1.6, se proyectó al año 2000 y 2010, por un lado los valores observados suponiendo crecimiento exponencial a una tasa de crecimiento de la población de 1.5 % en ésta y la siguiente década y por otro los valores estimados suponiendo la ley de Gompertz-Makeham (ver cuadro 3.1.7).

gráfica 3.1.4.

# MEXICO 1920-1990: CRECIMIENTO DE POBLACION

FUENTE: CONAFRUTZ-NADEHAN 1975



El crecimiento de la población en México durante este período se debe principalmente a la alta tasa de natalidad y a la disminución de la mortalidad infantil.

CUADRO 3.1.6

México 1920-1990: Desagregación del Crecimiento Poblacional acumulado mediante la función de Gompertz-Makeham óptima			
Año	Población al 30 de junio		Variación %
	observada	estimada	
1920	13993424	13913661	-0.57
1930	16590078	15971474	-3.87
1940	19821266	20911786	5.21
1950	25844590	26669265	3.09
1960	34996872	34878405	-0.34
1970	48871567	46829175	-4.36
1980	66944985	63926340	-4.72
1990	81631840	88038365	7.28

En la gráfica 3.1.5 se observa la representación de las curvas correspondientes a las proyecciones, una con la función de Gompertz-Makeham y la otra con la tendencia de crecimiento exponencial

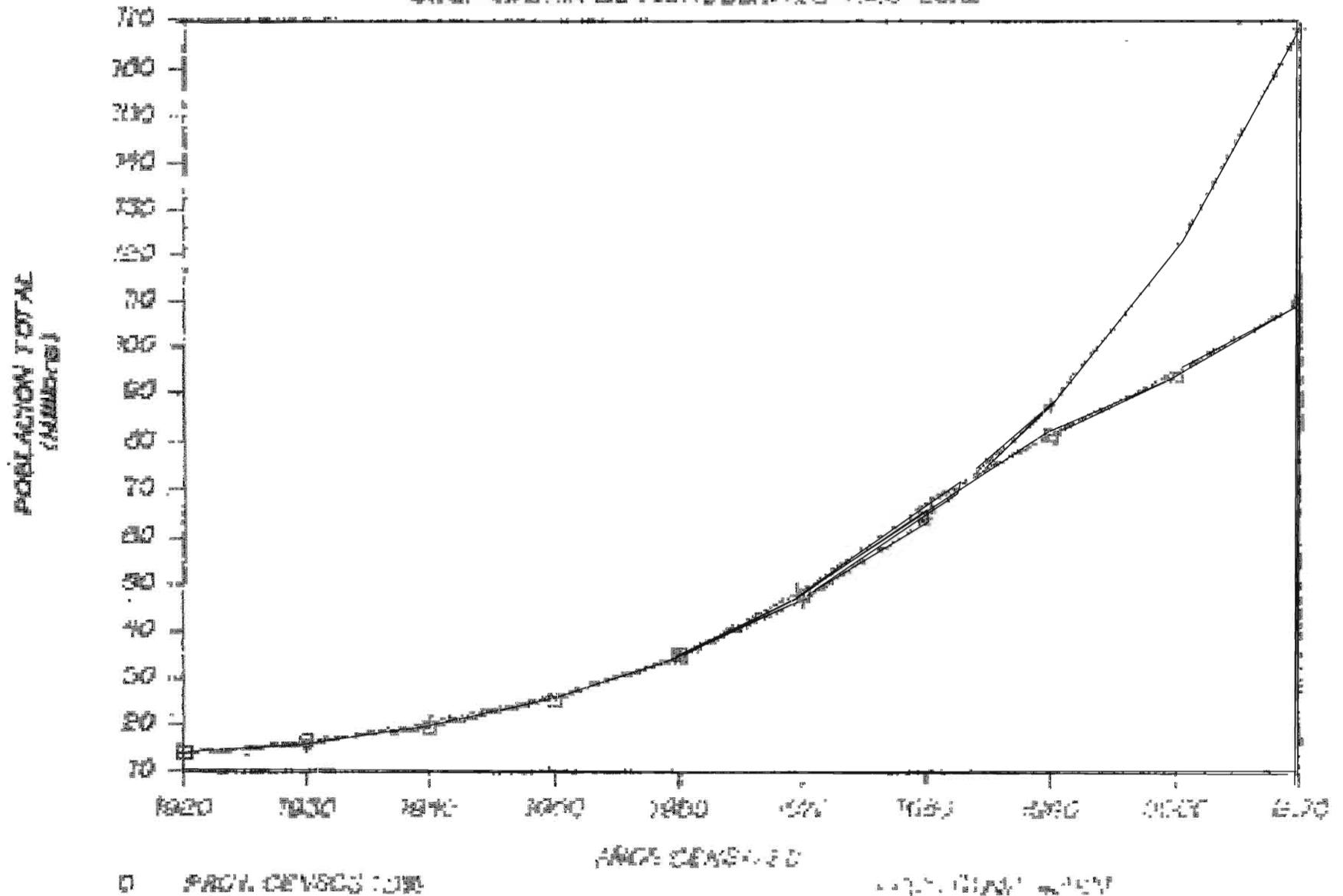
CUADRO 3.1.7

México 2000-2010: Proyección del Crecimiento Poblacional Exponencial vs. Gompertz-Makeham		
Año	Población proyectada	
	Exponencial	Gompertz-Makeham
2000	94842667	121773718
2010	110191458	168786094

# gráfica 3.1.5

## MEXICO 1920-2010: CRECIMIENTO POBLACION

COMPARACION DE ESTADISTICAS 1920-2010



La discrepancia en los valores proyectados en las dos curvas parece a primera vista como una contradicción. Ya que si la función de Gompertz-Makeham, como ya hemos visto, describe adecuadamente el fenómeno en estudio, es porque ha logrado asimilar su patrón de comportamiento y por tanto debiera poder predecir lo que sucederá en el futuro. Sin embargo tal predicción sería válida siempre y cuando las condiciones no cambiaran.

Anteriormente se señaló que la fecundidad -actualmente componente fundamental en el crecimiento de la población en México- ha estado declinando marcadamente a partir de los setentas y es por eso que el comportamiento registrado en la gráfica 3.5 para el crecimiento de la población muestra un punto de inflexión, alrededor los años ochenta; es decir hay un cambio en la concavidad de la curva, de tal forma que los puntos proyectados por la función de Gompertz-Makeham se "disparan".

Tal disminución en el comportamiento registrado en la Fecundidad ha sido tan radical, que en unos cuantos años, se ha pasado de acuerdo a las estimaciones del Consejo Nacional de Población (CONAPO), de una tasa global de fecundidad (IGF) de casi 6.5 hijos por mujer en 1970 una de sólo 3.16 en 1988.

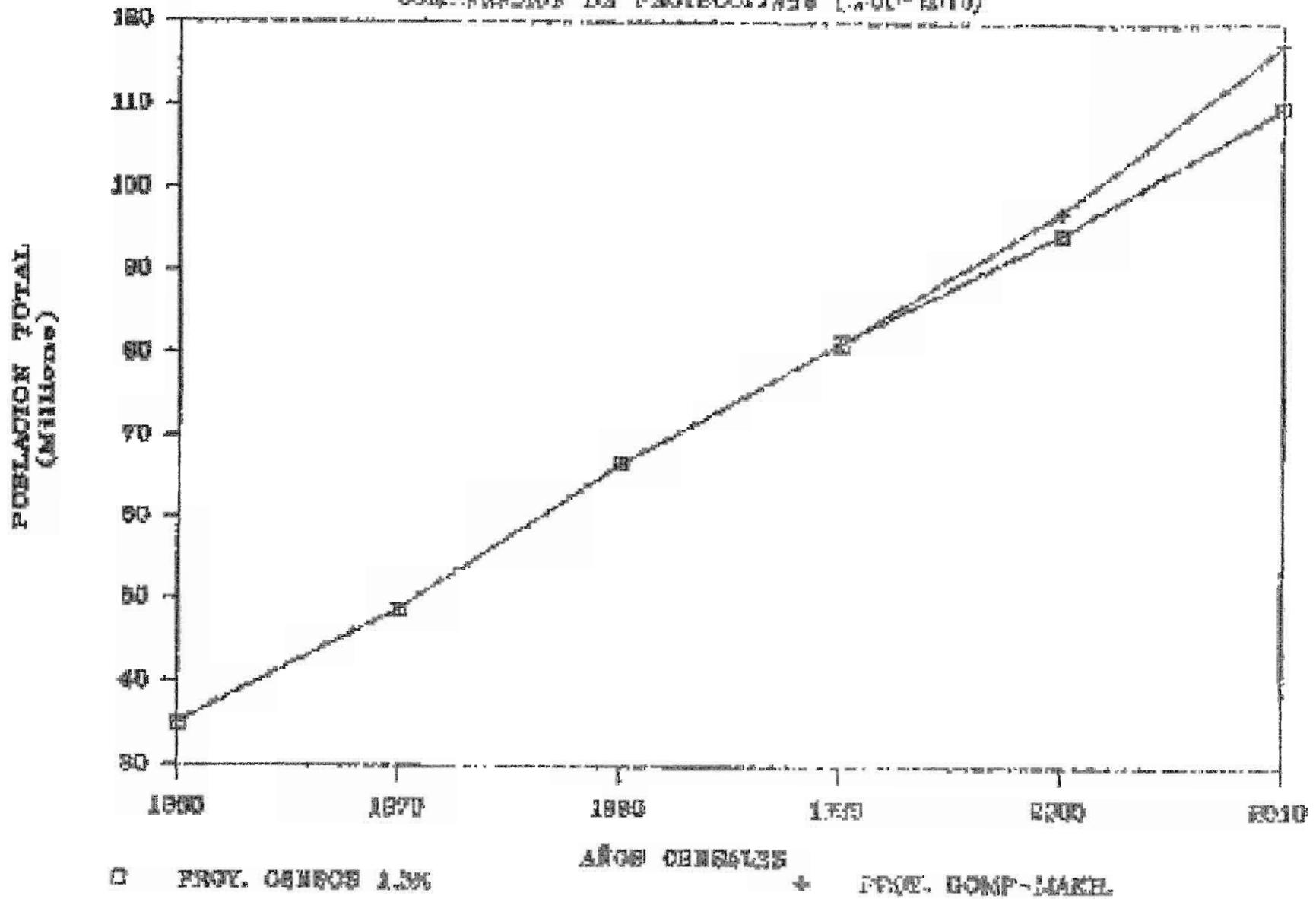
Aunque no es objeto de estudio de este trabajo, precisar el momento de cambio en la curva para el crecimiento poblacional, es importante señalar que ello marcaría la pauta seguida por la inercia del proceso descendente de la fecundidad.

Para mejorar la proyección, estimando una nueva función de Gompertz-Makeham, se procedió a describir el crecimiento de la población en el período 1960 a 1990, de tal manera que pudiera captarse el momento de cambio en el ritmo de crecimiento, y luego con tal función proyectar al año 2000 y 2010, como se muestra en el cuadro 3.1.8.

gráfica 3.5

# MEXICO 1950-2010: CRECIMIENTO POBLACION

COMPARACION DE PROYECCIONES (2000-2010)



CUADRO 3.1.8

México 1960-2010: Proyección del Crecimiento Poblacional mediante una nueva función de Gompertz-Makeham 1960-1990

Año	Población proyectada	Parámetros de Gompertz-Makeham
1960	34996872	
1970	48871567	K = 133506131
1980	66944985	a = 1.28903
1990	81631840	b = 0.26214
2000	97356692	d = 0.53685
2010	117794675	

Ahora el resultado es bastante congruente al menos para el año 2000, con lo que se espera a fin de siglo, con base a los resultados preliminares arrojados por el Censo de 1990.

## B) DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDADES.

El estado actual de la población en México está determinado por una revolución demográfica: al tipo tradicional de reproducción, caracterizado por altos índices de fecundidad y mortalidad, le sucede el tipo moderno, con tasas más bajas de fecundidad y mortalidad.

Este hecho explica, como se señaló en el apartado anterior, el interés por los procesos y los pronósticos demográficos, así como el deseo de prever las consecuencias ecológicas, económicas y sociales del crecimiento de la población.

El crecimiento de la población es la forma en que se manifiesta su reproducción, es decir el relevo generacional. Por ejemplo si durante un largo período de tiempo, a la generación de los padres le sucede una generación filial del mismo valor numérico, la población deja de crecer; y si además se mantiene invariable la esperanza de vida al nacimiento, también será permanente la estructura por edades<sup>1</sup>.

Cuando la generación de los hijos es mayor que la de los padres, la población crece; si es menor, al paso del tiempo la población comenzará a decrecer inevitablemente.

Si es grande la proporción de mujeres jóvenes y relativamente baja la de ancianos (como es el caso de México), la población puede seguir creciendo, incluso considerablemente, aún en los casos que la fecundidad baje bastante y la reproducción no alcance a cubrir a la generación de los padres.

---

<sup>1</sup> A una población de este tipo se le llama estacionaria.

Sin embargo como pasa en nuestro país, a una abundante generación de mujeres que están hoy en edad procreativa, a través del tiempo le sucederá otra menos numerosa, por lo que la población envejecerá a un ritmo que se irá acelerando, a la par de un aumento en la tasa general de mortalidad.

En otras palabras, lo que aquí se intenta señalar es que para caracterizar las actuales tendencias demográficas en nuestro país -puesto que el índice de la mortalidad es bajo- es preciso prestar atención a la estructura de la fecundidad por edades<sup>2</sup>, porque el crecimiento de la población depende principalmente de ello.

La fecundidad como componente demográfico se manifiesta esencialmente a través de la estructura por edad, es decir por las tasas específicas de fecundidad por edades y desde luego por su nivel medido por la suma de tales tasas conocida como la tasa global de fecundidad (TGF).

Por tanto, describir la estructura de la fecundidad por edades resulta importante para la formulación de políticas de población y en particular de los programas de planificación familiar. Ya que lo que cuenta para la reproducción y la exposición al riesgo de concebir depende de la proporción de mujeres en edad reproductiva.

Así mismo como dicha descripción sirve marco de referencia para el análisis de la práctica anticonceptiva, puede determinarse de los diferentes grupos de edad, cuales han sido los principales contribuyentes de los cambios ocurridos en la fecundidad.

---

<sup>2</sup> La estructura de la Fecundidad por edad se refiere a la distribución relativa de como las mujeres tienen a sus hijos.

En la aplicación de la función de Gompertz-Makeham para describir la estructura de la fecundidad por edad se consideró las estimaciones de las tasas específicas de la fecundidad para los años de 1952, 1970 y 1988 que aparecen en el México Demográfico -Breviario de 1988- publicado por CONAPO.

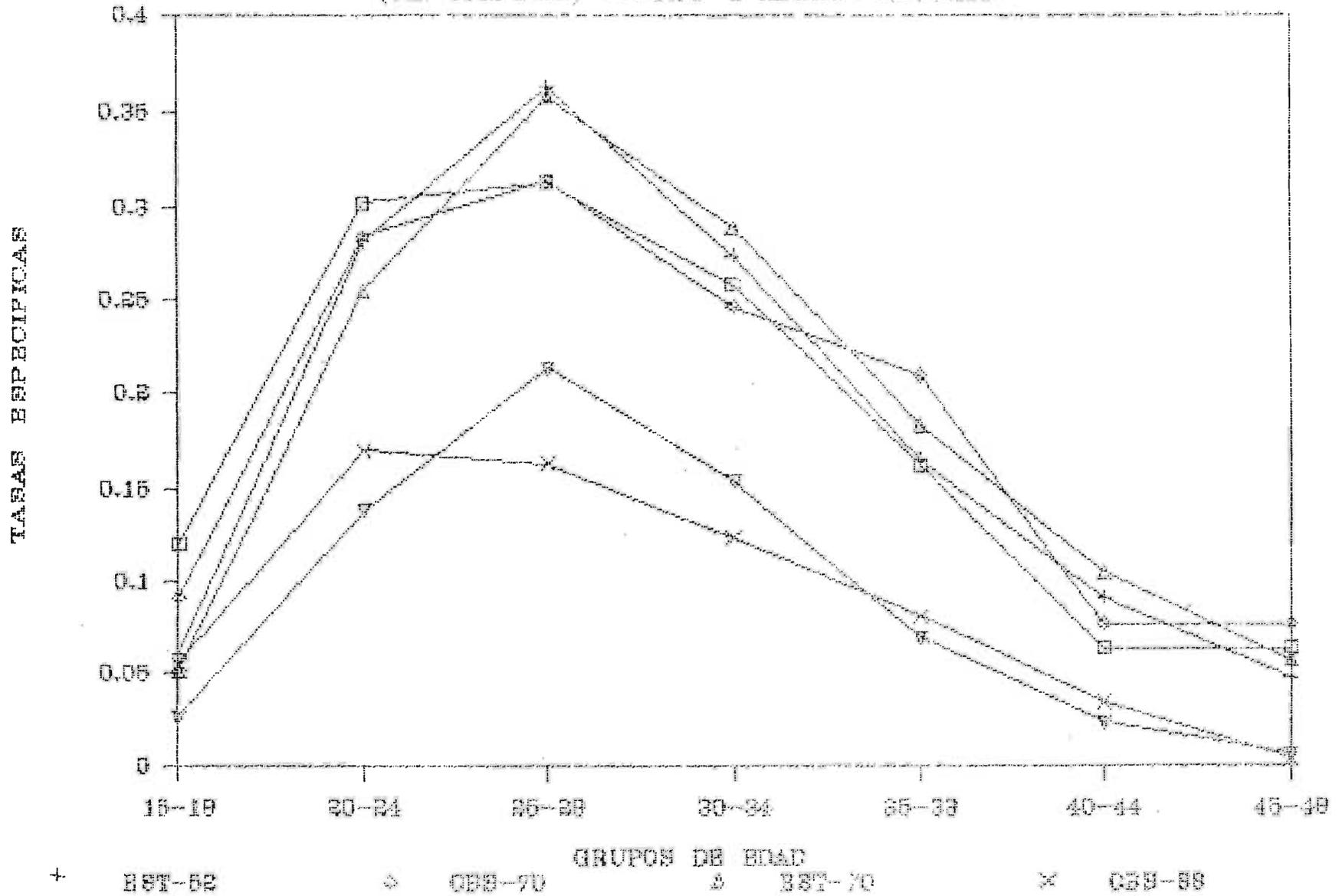
En un primer momento la descripción efectuada con la función de Gompertz-Makeham parecía no muy apropiada (ver cuadro 3.2.1 y gráfica 3.2.1), porque con el ajuste se modificó la composición relativa de la estructura por edad: es decir la aportación del grupo 20-24 disminuyó, mientras que la del grupo 25-29 aumentó; situación que no resulta muy aceptable para 1988, porque a una fecundidad a la baja, pasando la transición debiera corresponderle una cúspide temprana.

Cuadro 3.2.1

México: Descripción de la estructura de la Fecundidad por edad						
Tasas específicas						
Grupos edad	1952		1970		1988	
	observada	estimada	observada	estimada	observada	estimada
15-19	0.1200	0.0611	0.0913	0.0510	0.0553	0.0262
20-24	0.3020	0.2815	0.2839	0.2551	0.1698	0.1384
25-29	0.3135	0.3626	0.3140	0.3579	0.1632	0.2182
30-34	0.2586	0.2739	0.2470	0.2890	0.1235	0.1539
35-39	0.1625	0.1654	0.2097	0.1836	0.0814	0.0696
40-44	0.0637	0.0910	0.0767	0.1050	0.0345	0.0236
45-49	0.0637	0.0481	0.0767	0.0574	0.0043	0.0067
TGF	6.4	6.4	6.5	6.5	3.2	3.2
Coef. de Determ.:	0.9267		0.9178		0.8673	
Edad media a la Fecundidad en años						
	1952		1970		1988	
	observada	estimada	observada	estimada	observada	estimada
	29.40	30.10	30.34	30.75	28.50	29.08

# MEXICO: ESTRUCTURA DE FECUNDIDAD X EDAD

(SEN COMBUIR) FUNCION GOMPERTZ-MAKEHAM



□ OBS-52

+

EST-52

○

OBS-70

△

EST-70

×

OBS-88

Por ello se procedió a efectuar un ajuste correctivo de la estructura por edad mediante el método biológico, supuesta una distribución de Gompertz (caso particular de una Gompertz-Makeham) para la función de descendencias parciales relativas, es decir que la proporción de la fecundidad global experimentada por una población hasta la edad  $x$ , sigue una distribución Gompertz<sup>3</sup>.

Al aplicar el método biológico, cambia la forma de la estructura por edad de cúspide tardía a temprana, para los años de 1952 y 1970, debido principalmente al patrón estándar utilizado para el ajuste, el cual tiende a imponer su perfil. Sin embargo el interés en este paso era sólo disponer de una estructura corregida, que al aplicarle nuevamente la función de Gompertz-Makeham para su descripción, no sesgara la estimación del aporte a la fecundidad hecha por los grupos de 20-24 y 25-29 años de edad, de la manera como había sucedido inicialmente. (ver cuadro 3.2.2 y gráfica 3.2.2)

Cuadro 3.2.2

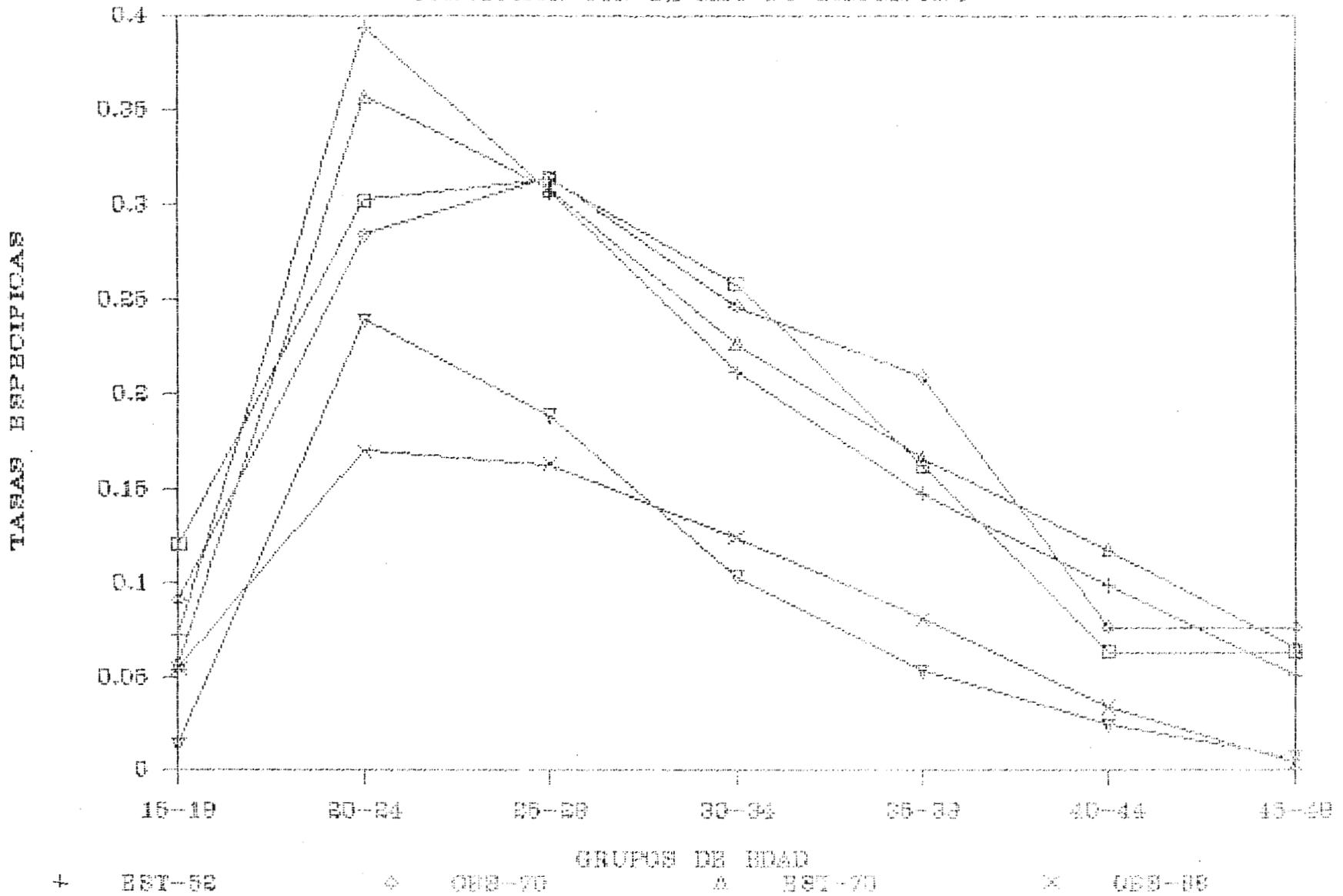
México: Ajuste de la estructura por edad de la Fecundidad por el método biológico						
Tasas específicas						
Grupos edad	1952		1970		1988	
	observada	ajustada	observada	ajustada	observada	ajustada
15-19	0.1200	0.0728	0.0913	0.0574	0.0553	0.0145
20-24	0.3020	0.3943	0.2839	0.3572	0.1698	0.2393
25-29	0.3135	0.3066	0.3140	0.3078	0.1632	0.1888
30-34	0.2586	0.2120	0.2470	0.2269	0.1235	0.1029
35-39	0.1625	0.1477	0.2097	0.1664	0.0814	0.0538
40-44	0.0637	0.0987	0.0767	0.1171	0.0345	0.0252
45-49	0.0637	0.0519	0.0767	0.0664	0.0043	0.0074
TGF	6.4	6.4	6.5	6.5	3.2	3.2

<sup>3</sup>Para ver los detalles del método biológico se remite al Manual X de la ONU, "Técnicas Indirectas de Estimación Demográfica"

gráfica 3.2.2

MEXICO: ESTRUCTURA DE FECUNDIDAD X EDAD

CORRECCION CON EL METODO BIOLOGICO



Una vez corregida la estructura por edad, se le aplicó la función de Gompertz-Makeham y los valores estimados reprodujeron aceptablemente para 1988, la estructura por edad observada con un correlación mucho más alta que la mostrada en el cuadro 3.2.1. Mientras que la descripción de los años de 1952 y 1970, arrojó para la estructura por edad una cúspide temprana y un coeficiente de determinación ligeramente menor que en la primera aplicación de la función Gompertz-Makeham y ello por las características del patrón estándar utilizado en el método biológico. (ver cuadro 3.2.3 y gráfica 3.2.3)

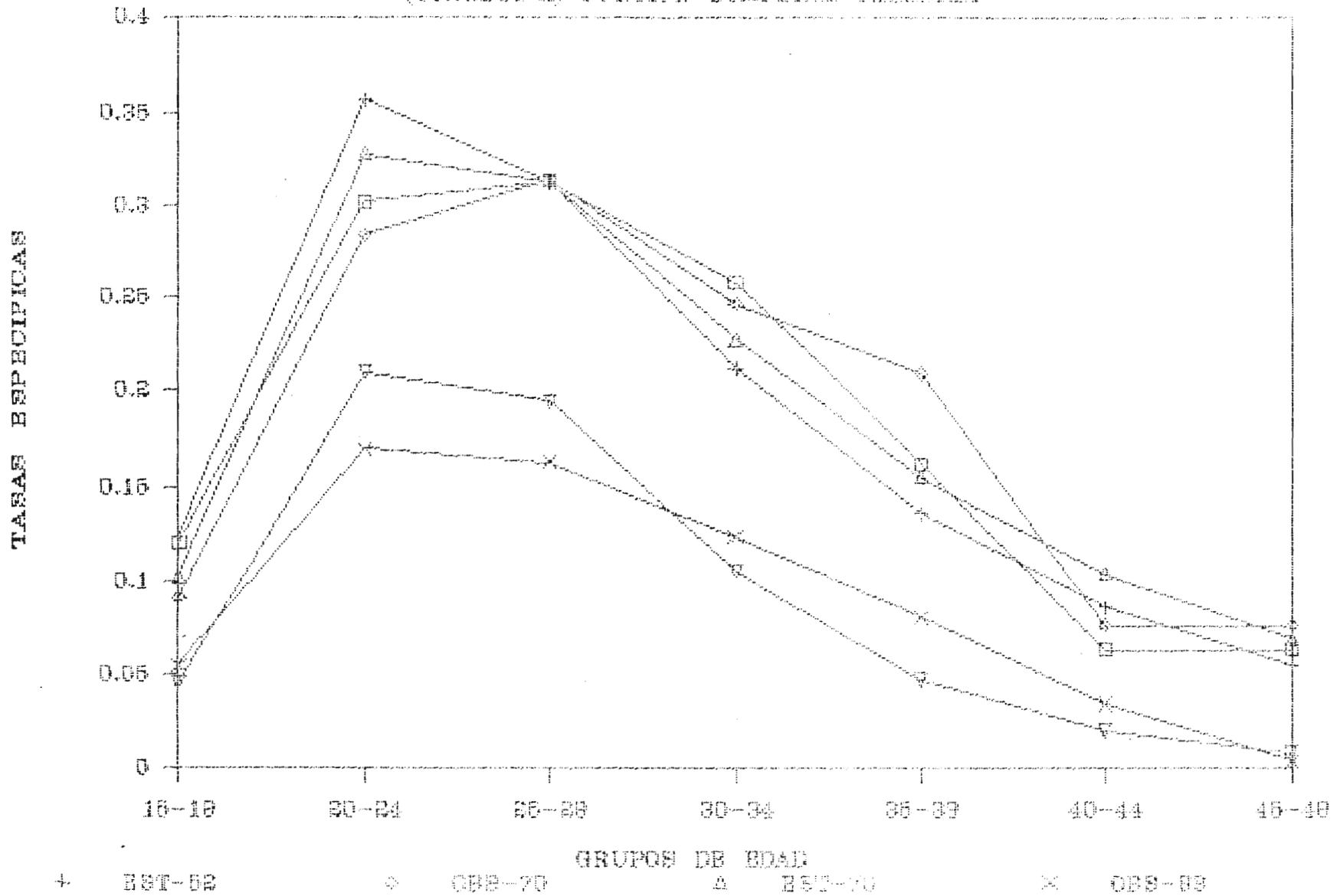
Cuadro 3.2.3

México: Descripción de la estructura corregida por edad de la Fecundidad						
Tasas específicas						
Grupos edad	1952		1970		1988	
	observada	estimada	observada	estimada	observada	estimada
15-19	0.1200	0.1236	0.0913	0.1020	0.0553	0.0456
20-24	0.3020	0.3573	0.2839	0.3276	0.1698	0.2099
25-29	0.3135	0.3131	0.3140	0.3135	0.1632	0.1951
30-34	0.2586	0.2124	0.2470	0.2275	0.1235	0.1056
35-39	0.1625	0.1364	0.2097	0.1550	0.0814	0.0476
40-44	0.0637	0.0865	0.0767	0.1041	0.0345	0.0201
45-49	0.0637	0.0548	0.0767	0.0697	0.0043	0.0084
TGF	6.4	6.4	6.5	6.5	3.2	3.2
Coef. de Determ.:	0.9190		0.9071		0.9283	
Edad media a la Fecundidad en años						
	1952		1970		1988	
	observada	estimada	observada	estimada	observada	estimada
	29.40	28.90	30.34	29.80	28.50	27.45

gráfica 3.2.3

MEXICO: ESTRUCTURA DE FECUNDIDAD X EDAD

(CORREGIDA) FUNCION GOMPERTZ-MARKHAM



Para elegir lo que podría ser las mejores descripciones<sup>4</sup>, se tomó como referencia, por un lado el nivel de correlación alcanzado, medido por el coeficiente de determinación y por otra parte el aspecto demográfico relativo a la forma que guarda la estructura por edad de acuerdo a las condiciones de la fecundidad en el momento de estudio. Es decir mientras menor sea el nivel de la fecundidad, la estructura se caracteriza por un peso mayor de la misma, a edades más jóvenes e implica por tanto una disminución en la edad media de la ocurrencia del fenómeno.

Por tanto se decidió que para 1952 y 1970 el primer ajuste descriptivo (cuadro 3.2.1) era el más adecuado, por sus coeficientes de determinación superiores al otro ajuste y porque reproduce mejor la forma de la estructura (cúspide tardía para períodos de fecundidad alta). A su vez para 1988 el segundo ajuste descriptivo (corregida la estructura), era el más adecuado, por su coeficiente de determinación mayor que el otro ajuste y por dar la conformación apropiada (cúspide temprana a fecundidad baja) con una edad media a la fecundidad a la baja.

Con fines de proyección de la estructura por edad de la fecundidad, generalmente se proyecta la tasa global de fecundidad por un lado y la estructura en porciento de las tasas específicas por otro, contando a su vez con alguna hipótesis futura del nivel y alguna distribución meta para los períodos de proyección.

En esta ocasión se procedió a observar la tendencia seguida por los parámetros de la función de Gompertz-Makeham para los tres años en estudio (ver cuadro 3.2.4).

---

<sup>4</sup>También aquí se buscó una función de Gompertz-Makeham óptima a través del método iterativo; sin embargo para los tres años considerados no se alcanzó convergencia en los valores de los parámetros al paso de las iteraciones.

Cuadro 3.2.4

México: Descripción de la estructura de la Fecundidad por edad				
Parámetros de la función Gompertz-Makeham estimados con el método de los grupos no superpuestos				
Parámetros	1952	1970	1988	
	-----	-----	-----	
K =	4.946926	4.920333	4.445418	
a =	0.513957	0.527822	0.410384	
b =	0.000123	0.000106	0.000020	
d =	0.419032	0.434887	0.338064	

Al aumento en los niveles de fecundidad expresados en la tasa global de 1952 a 1970, los parámetros "a", y "d" estuvieron al alza, mientras que "b" y "K" fueron a la baja. En cambio a la disminución en la fecundidad en el período de 1970 a 1988, la relación muestra un camino descendente en todo momento para todos los parámetros.

En base a dichas tendencias y contando en especial con la baja en la fecundidad, se procedió a simular lo que podría ser en el futuro próximo las estructuras por edad de la fecundidad. Para ello se sometió a prueba diversas variaciones en los valores de los parámetros de la función de Gompertz-Makeham, buscando fueran congruentes con la tendencia manifestada. (ver cuadro 3.2.5)

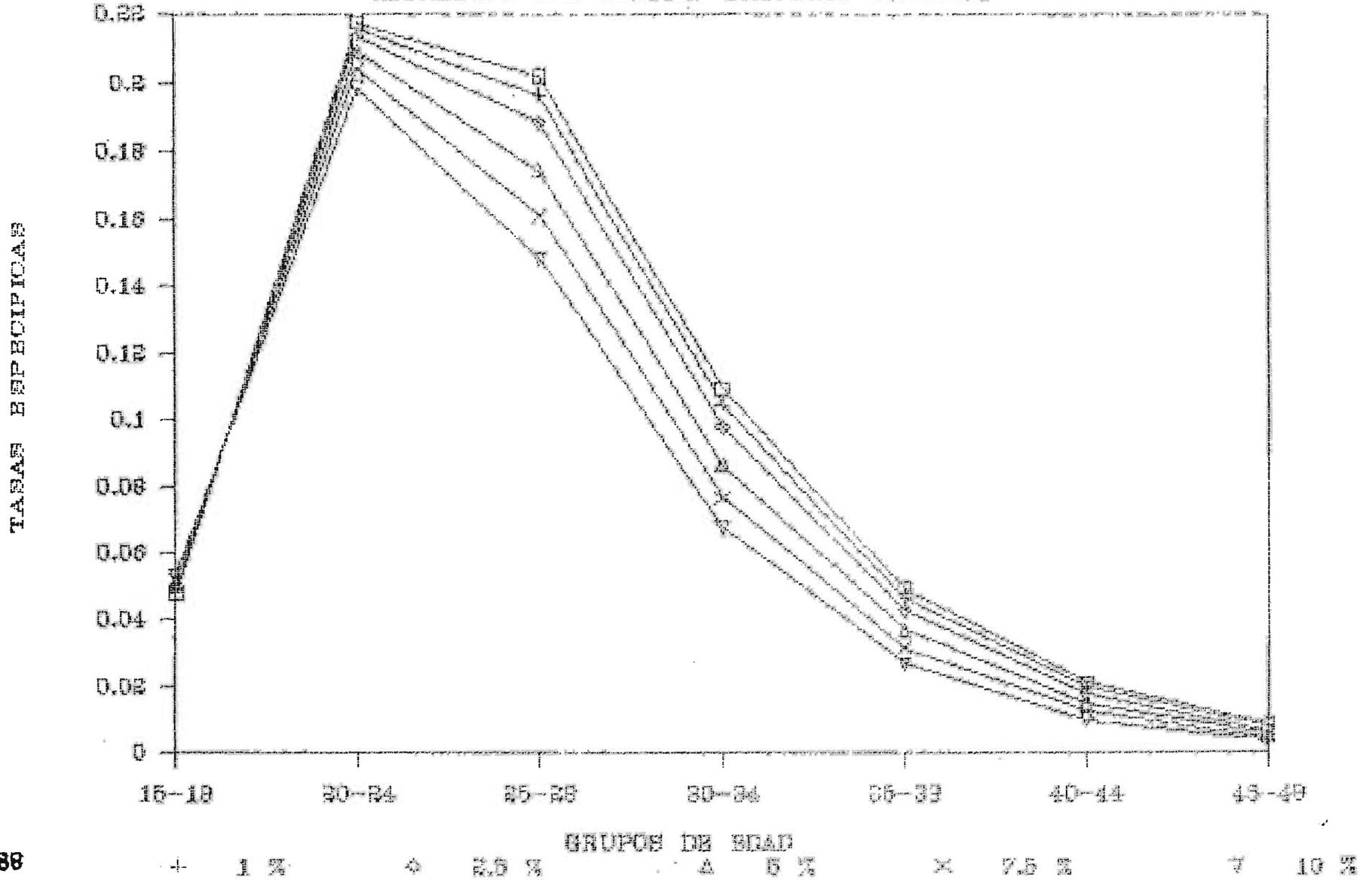
Cuadro 3.2.5

México: Descripción de la estructura de la Fecundidad por edad Tasas específicas						
Grupos edad	1988	Disminución en parámetros de la función G-M				
		10 %	7.5 %	5 %	2.5 %	1 %
15-19	0.0472	0.0534	0.0519	0.0504	0.0488	0.0479
20-24	0.2177	0.1987	0.2044	0.2094	0.2139	0.2163
25-29	0.2024	0.1482	0.1612	0.1746	0.1884	0.1967
30-34	0.1095	0.0678	0.0769	0.0869	0.0978	0.1047
35-39	0.0493	0.0267	0.0314	0.0367	0.0426	0.0466
40-44	0.0209	0.0101	0.0122	0.0147	0.0175	0.0195
45-49	0.0087	0.0037	0.0047	0.0058	0.0071	0.0080
TGF	3.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.2
México: Distribución porcentual de la estructura por edad de la fecundidad						
Grupos edad	1988	Disminución en parámetros de la función G-M				
		10 %	7.5 %	5 %	2.5 %	1 %
15-19	7.21	10.50	9.56	8.70	7.92	7.48
20-24	33.20	39.07	37.66	36.21	34.72	33.31
25-29	30.86	29.14	29.71	30.19	30.58	30.76
30-34	16.70	13.33	14.18	15.03	15.87	16.37
35-39	7.52	5.25	5.78	6.34	6.92	7.28
40-44	3.19	1.98	2.24	2.53	2.85	3.05
45-49	1.32	0.74	0.86	1.00	1.15	1.25
Grupos edad	1988	Disminución en parámetros de la función G-M				
		10 %	7.5 %	5 %	2.5 %	1 %
15-34	87.97	92.03	91.12	90.13	89.09	88.42
35-49	12.03	7.97	8.88	9.87	10.91	11.58

De las alternativas resultantes de la simulación efectuada al variar los parámetros de la función de Gompertz-Makeham (cuadro 3.2.5), bien se puede considerar la correspondiente a la que disminuye en un 7.5 % el valor de los parámetros, como la posible estructura de la fecundidad por edad para el año 2000, siempre y cuando se fije como meta a alcanzar una tasa global de fecundidad de 2.7 hijos por mujer.

# MEXICO: PROYECCION ESTRUCT. FECUNDIDAD

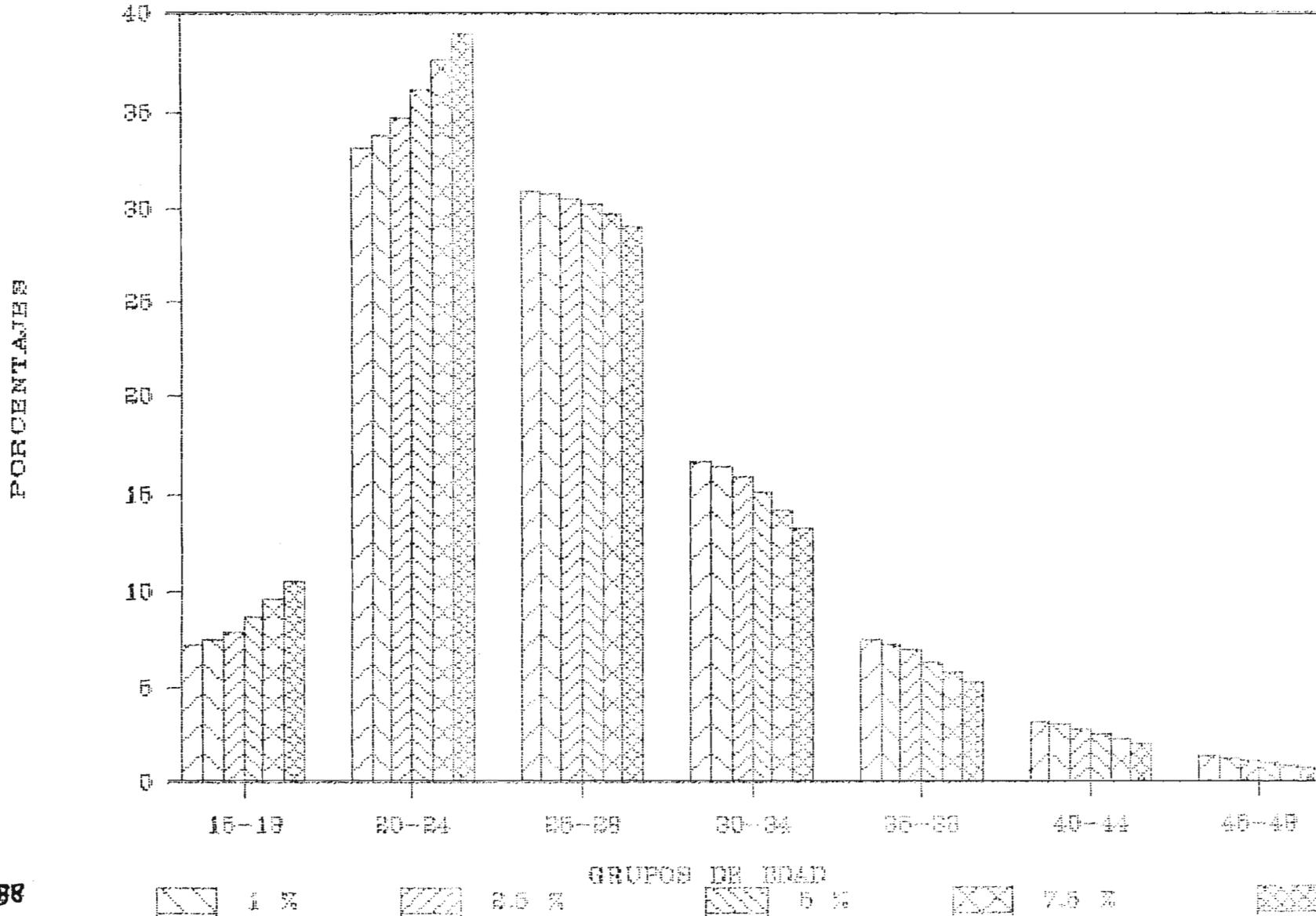
SIMULACION CON FUNCION GOMPERTZ-VAHRENHALL



gráfica 3.2.5

MEXICO: DISTR. % ESTRUCTURAS FECUNDIDAD

SIMULACION CON FUNCION GOMPERTZ-MARKHAM



1988

En cuanto a la distribución porcentual de las estructuras de fecundidad por edad relativas a las alternativas que se muestran en el cuadro 3.2.5, se observa que conforme la fecundidad continúe su descenso se incrementará la participación de las mujeres en la procreación, en los grupos de edad más jóvenes, como son el de 15-19 y 20-24; mientras que disminuirá ligeramente dicha participación en los grupos de edad de 25-29 y 30-34 y un marcado descenso para los grupos de mayor edad (35-49 años de edad).

Cualquiera de las alternativas que se considere, a excepción de las que disminuyen en 1 % y 2.5 % el valor de los parámetros de la función de Gompertz-Makeham, en los grupos de edad de 35 a 49 años, el aporte de estas mujeres a la fecundidad total del país estará por abajo del 10 %.

### C) DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD DE LA PEA OCUPADA

Como se apuntó anteriormente, en México la fecundidad es el aspecto demográfico que mayormente ha influido en el tamaño y la estructura por edad de la población, de ahí lo impresionante que ha sido el crecimiento y rejuvenecimiento de la población.

Dicho proceso puede visualizarse en dos periodos. El primero a partir de los cuarenta hasta principios de los setenta, cuando la fecundidad se mantuvo alta y constante mientras la mortalidad disminuía considerablemente. En el segundo se da de principios de los setenta hasta el momento actual, con un marcado descenso en la fecundidad y el mantenimiento de tasas de mortalidad bajas; lo cual trae como consecuencia una sensible desaceleración en el ritmo de crecimiento de la población, que no obstante continua creciendo por la inercia que guarda la estructura por edad generada en el primer periodo.

La población económicamente activa PEA es la población mayor de 12 años de edad, que año con año se incorpora al mercado de trabajo. En México dada la estructura por edad actual de la población, la PEA aumenta a una tasa por encima de la del crecimiento de la población total. Situación que obliga a la reflexión sobre el incremento fuera de toda proporción de la demanda de puestos de trabajo que en el presente y en los próximos años requerirán sobretodo los jóvenes.

Reflexión que debe considerar por un lado que la oferta de empleos en gran medida tienen que ser urbanos y competitivos y por otro que la creación de empleos modernos conlleva la penosa necesidad de destruir los empleos ineficientes que merman la productividad y la competitividad, pero que tocan las fibras más sensibles del tejido social.

Desde luego cabe esperar que mientras la fecundidad continúe su reducción, se irá manifestando un envejecimiento creciente que afecta a toda la estructura por edad de la población. Sin embargo, mientras ello sucede el ritmo de crecimiento de la PEA seguirá sobrepasando al del crecimiento de la población con el consecuente impacto en la estructura económica y social del país.

De ahí la significativa importancia de lograr una adecuada descripción de la estructura por edad de la PEA, para entender y estar en posibilidad de abordar y dar respuestas que enfrenten la problemática de la creciente demanda de puestos de trabajo.

En una economía como la nuestra, dado el importante número existente de personas activas que participan marginalmente en el mercado de trabajo o simplemente permanecen desocupadas, dificulta la estimación precisa de la población económicamente activa. Por tanto pensando en los fines de este trabajo, para describir la estructura por edad de la PEA, se tomó los datos correspondientes a la PEA ocupada total de México. Datos emitidos por la Encuesta Complementaria a la Encuesta Continua sobre Ocupación, elaborada por la SPP. La información corresponde al período comprendido entre el 11 de octubre de 1976 y el 7 de enero de 1977, es decir los datos se refieren al último trimestre de 1976.

La aplicación de la función de Gompertz-Makeham para describir la estructura por edad de la PEA ocupada, consistió en primer lugar en estimar los parámetros de dicha función matemática con el método de los grupos no superpuestos y en segundo lugar efectuar el ajuste descriptivo.

En el cuadro 3.3.1 y la gráfica 3.3.1 se observa que la descripción mediante la función de Gompertz-Makeham de la estructura por edad de la PEA ocupada acumulada resultó estupenda, con un coeficiente de determinación de 0.9981867 con alguna variación en los primeros grupos de edad, para después empatar prácticamente los valores observados y los estimados.

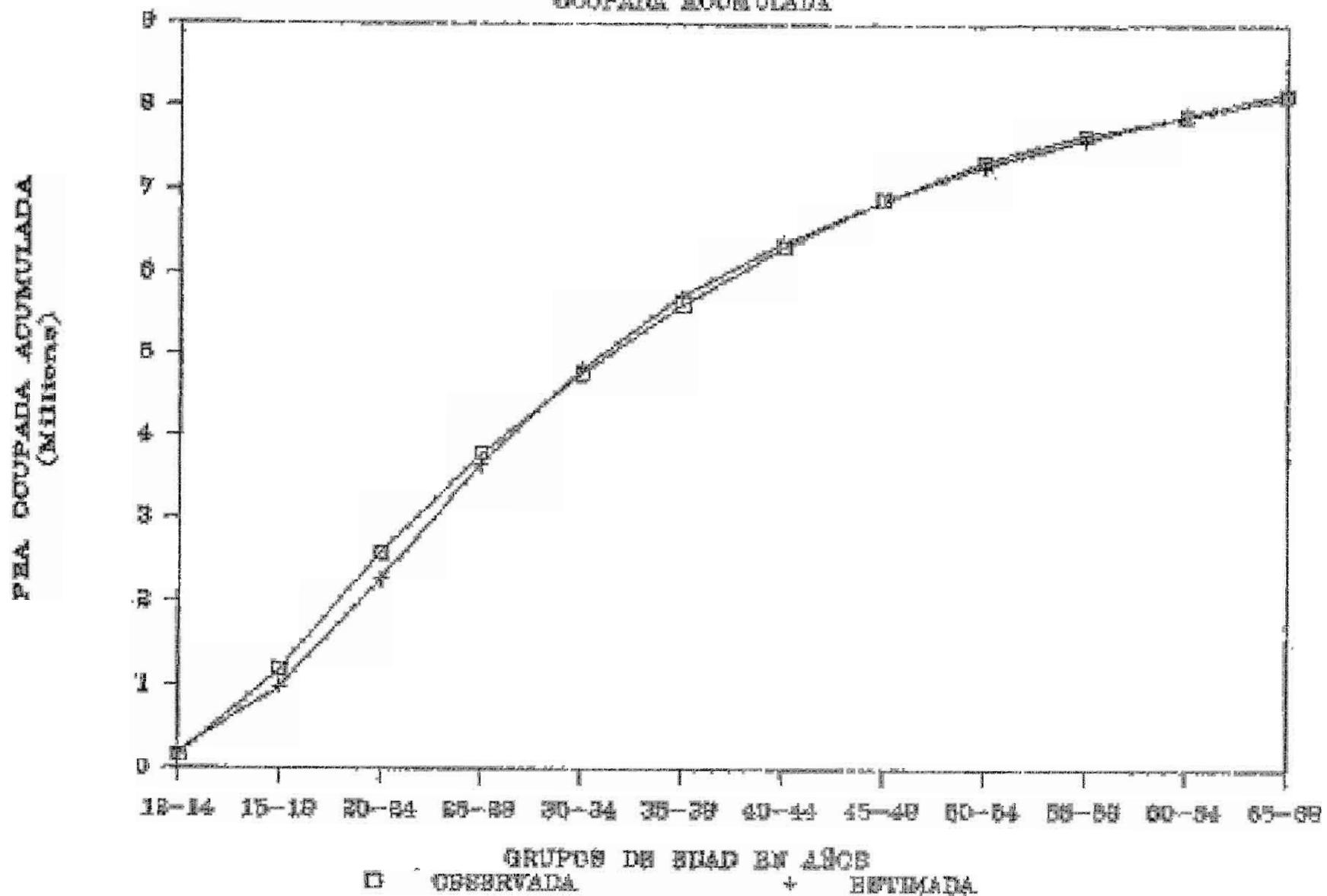
CUADRO 3.3.1

México 1974: Descripción de la estructura por edad de la PEA ocupada acumulada a través de la función de Gompertz-Makeham			
Grupo de edad	PEA ocupada acumulada		Variación %
	observada	estimada	
12-14	168935	232220	37.46
15-19	1193988	995154	-16.65
20-24	2598933	2276538	-12.40
25-29	3787119	3666005	-3.20
30-34	4776131	4851072	1.57
35-39	5634883	5751609	2.07
40-44	6343240	6413081	1.10
45-49	6907131	6909160	0.03
50-54	7358221	7301965	-0.76
55-59	7678485	7634622	-0.57
60-64	7905983	7934634	0.36
65-69	8172117	8218701	0.57
Coeficiente de determinación : 0.9981867			

gráfica 3.3.1

# MEXICO 1976: DESCRIPCION DE LA PEA

DOUPADA ACUMULADA



En el cuadro 3.3.2 y gráfica 3.3.2 se presenta el resultado del ajuste descriptivo expresado en números relativos. Es decir las ojivas acumuladas de los datos observados y los estimados son muy semejantes.

CUADRO 3.3.2

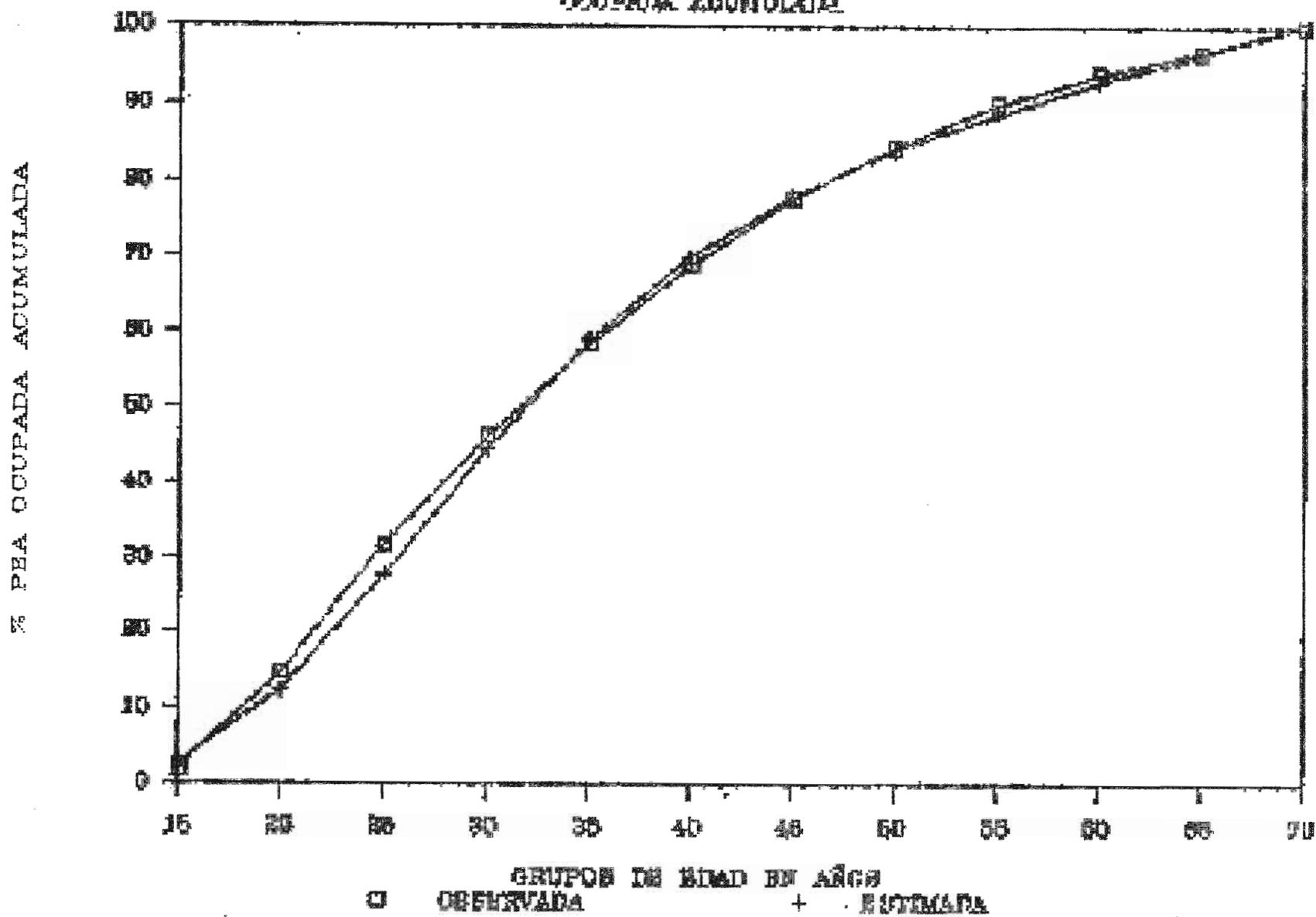
México 1976: Descripción relativa de la estructura x edad de la PEA ocupada acumulada a través de la función de Gompertz-Makeham		
Grupo de edad	PEA ocupada acumulada	
	observada %	estimada %
12-14	2.07	2.83
15-19	14.61	12.11
20-24	31.80	27.70
25-29	46.34	44.61
30-34	58.44	59.02
35-39	68.95	69.98
40-44	77.62	78.03
45-49	84.52	84.07
50-54	90.04	88.85
55-59	93.96	92.89
60-64	96.74	96.54
65-69	100.00	100.00

A su vez para captar el estado que guarda la estructura por edad individual de la PEA ocupada, con la misma función de Gompertz-Makeham se realizó la desagregación de los grupos quinquenales. Situación que se presenta en el cuadro 3.3.3 y gráfica 3.3.3.

gráfica 3.3.2

# MEXICO 1976 DESCRIPCION DE LA PEA

OCUPADA ACUMULADA



CUADRO 3.3.3

México 1976: Desagregación de la PEA ocupada acumulada por edad individual cumplida a través de la función de Gompertz-Makeham

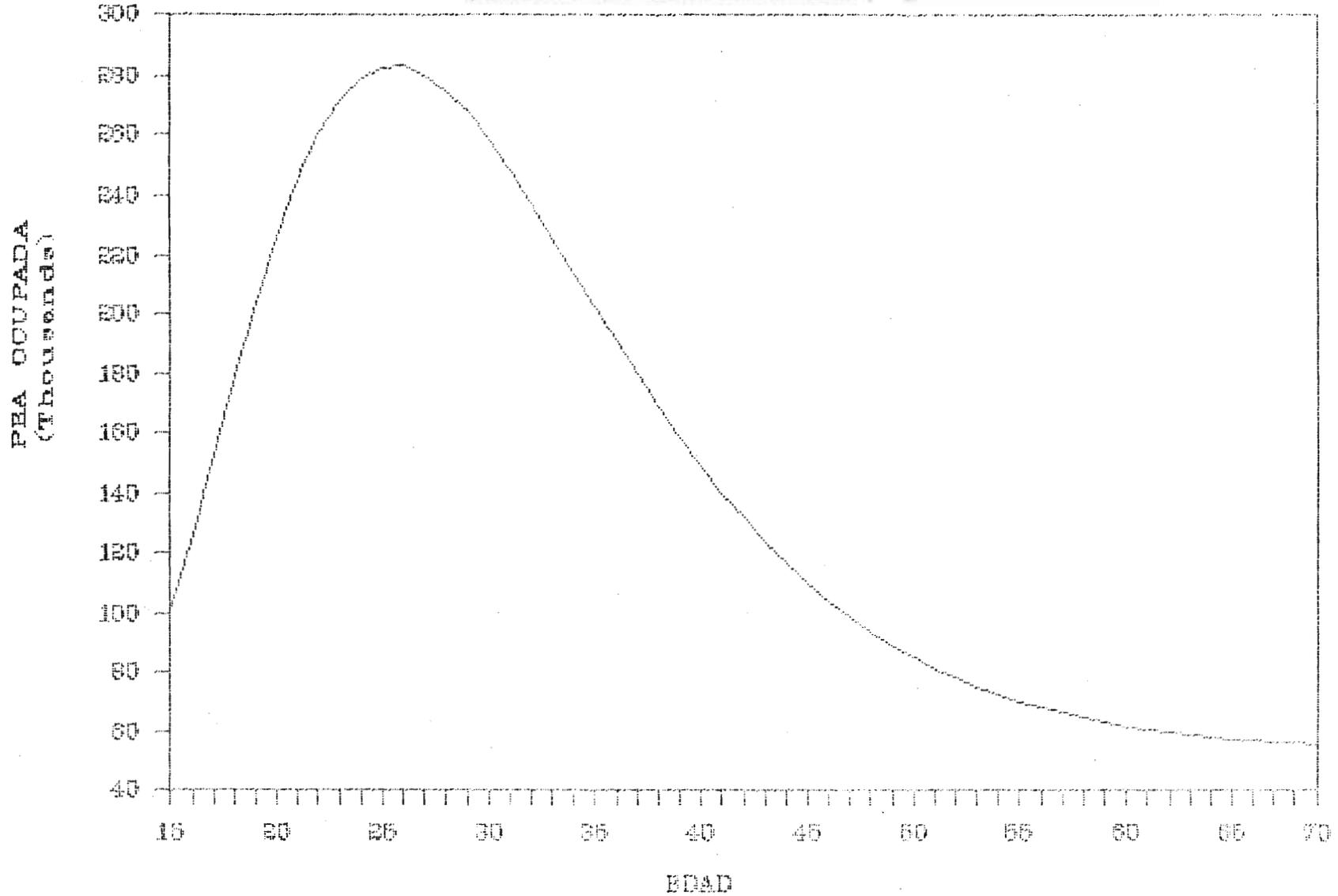
Edad	PEA	Edad	PEA	Edad	PEA
15	100885	34	214178	53	75268
16	126481	35	202417	54	72627
17	152920	36	190860	55	70271
18	179013	37	179655	56	68176
19	203635	38	168908	57	66316
20	225815	39	158697	58	64672
21	244812	40	149072	59	63222
22	260138	41	140060	60	61948
23	271558	42	131674	61	60835
24	279061	43	123910	62	59866
25	282823	44	116755	63	59027
26	283155	45	110189	64	58306
27	280462	46	104186	65	57692
28	275197	47	98715	66	57173
29	267831	48	93745	67	56741
30	258819	49	89244	68	56387
31	248588	50	85177	69	56104
32	237523	51	81513		
33	225959	52	78220		

Es interesante la figura resultante de la gráfica 3.3.3 porque es la típica del comportamiento por edad de la PEA. Es decir la población ocupada tiene una participación máxima en la Economía del país en las edades comprendidas entre los 19 años y los 35 años. Para este año en particular el punto máximo correspondió a la edad de 26 años, promedio representativo de una población joven. A partir de ahí muestra una declinación muy suavizada y en las últimas edades el comportamiento aparece bastante constante.

gráfica 3.3.3.

# MEXICO 1976: PEA OCUPADA POR EDAD

PUNCIÓN DE GOMPERTZ-MAXSHAM



Se buscó una función de Gompertz-Makeham óptima, pero no se alcanzó convergencia en los valores de los parámetros, debido a que desde la primera aplicación descriptiva la correlación para este caso es sumamente alta.

A fin de tener una idea del comportamiento probable en "diferentes escenarios" de la estructura por edad de la PEA ocupada, se procedió a variar en + y - 10 % el valor de cada uno de los parámetros de la función de Gompertz-Makeham, manteniendo constante el valor de los otros.

Las diferentes opciones de la simulación dieron como resultado lo siguiente:

a) Al variar el parámetro "K", en la gráfica 3.3.4 se observa como se establece una franja de valores más o menos equidistantes, arriba y abajo tanto de los valores, como de los estimados en la descripción inicial con la función de Gompertz-Makeham.

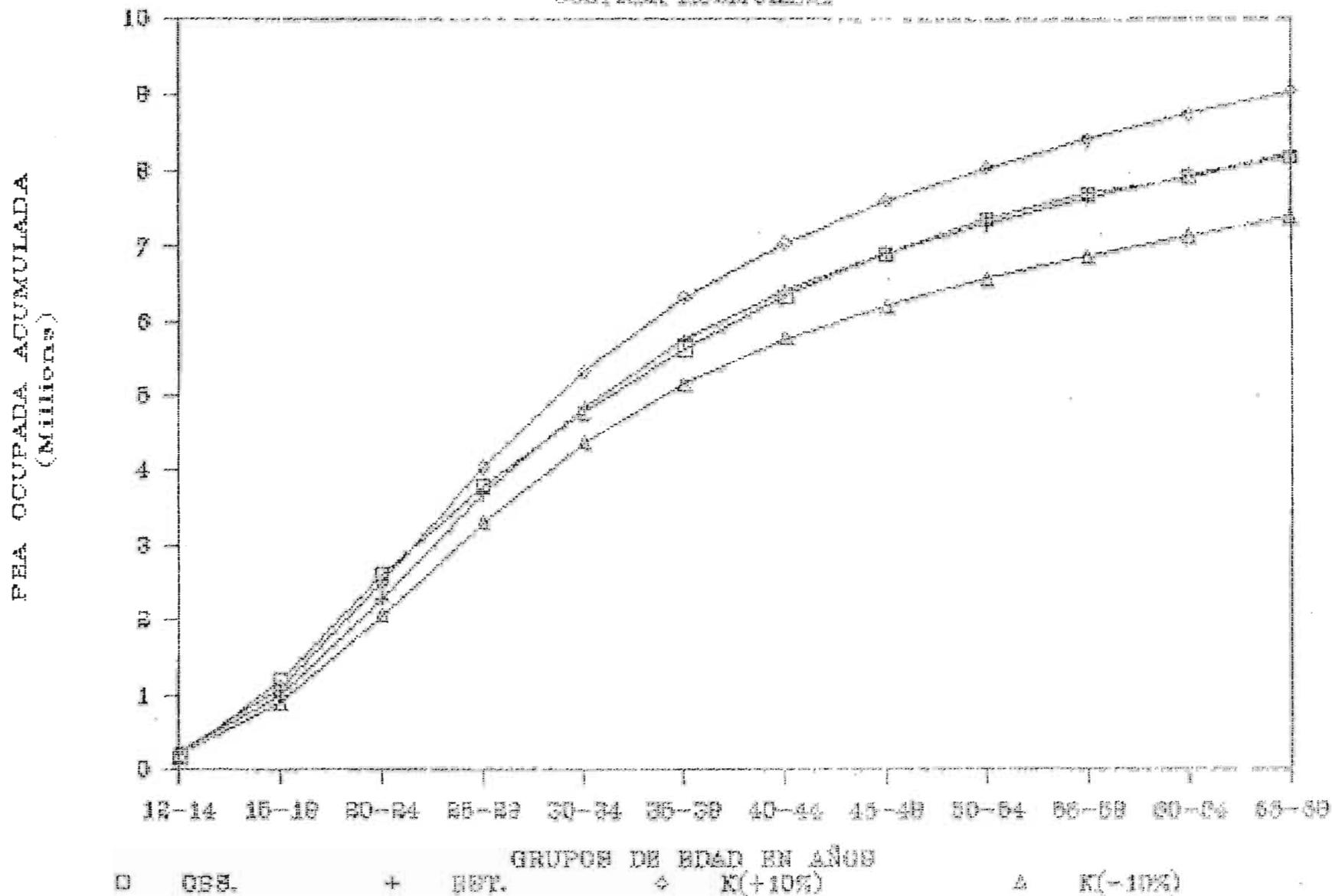
b) Con la variación del parámetro "a" la fluctuación en la estimación es enorme, por lo que en la descripción de la estructura por edad de la PEA ocupada para México en 1976 resultó muy sensible a los cambios de valor del parámetro "a". (ver gráfica 3.3.5)

c) En cuanto al parámetro "b", su disminución o incremento no altera para nada el ajuste descriptivo de la función de Gompertz-Makeham. (ver gráfica 3.3.6)

d) En lo que respecta a los cambios en el parámetro "d" el ajuste descriptivo arrojó poca variación en las primeras y últimas edades, pero mostrando mayor sensibilidad en los grupos de edad intermedios. (ver gráfica 3.3.7)

# MEXICO 1976: DESCRIPCION DE LA PEA

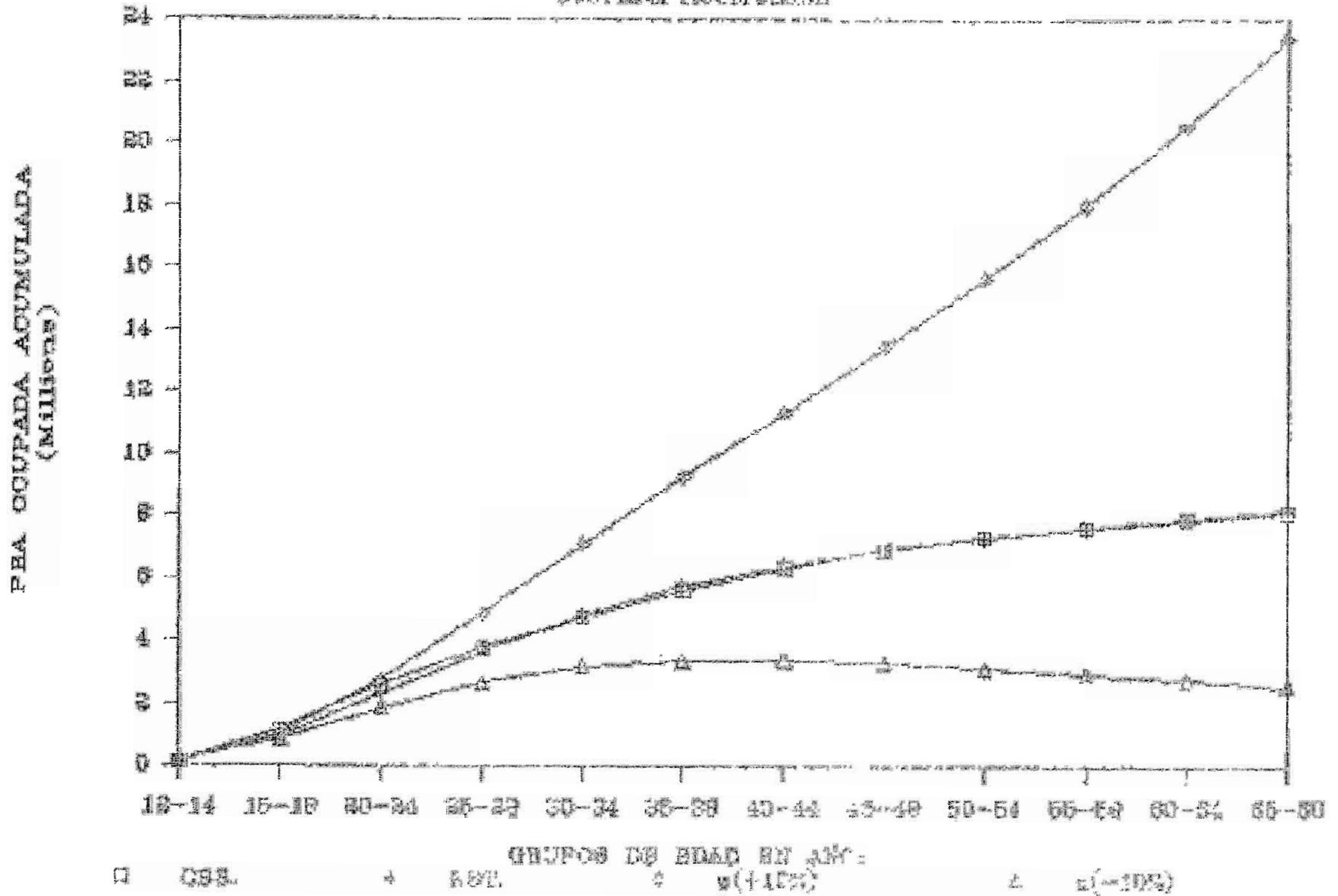
OCUPADA ACUMULADA



gráfica 3.3.5

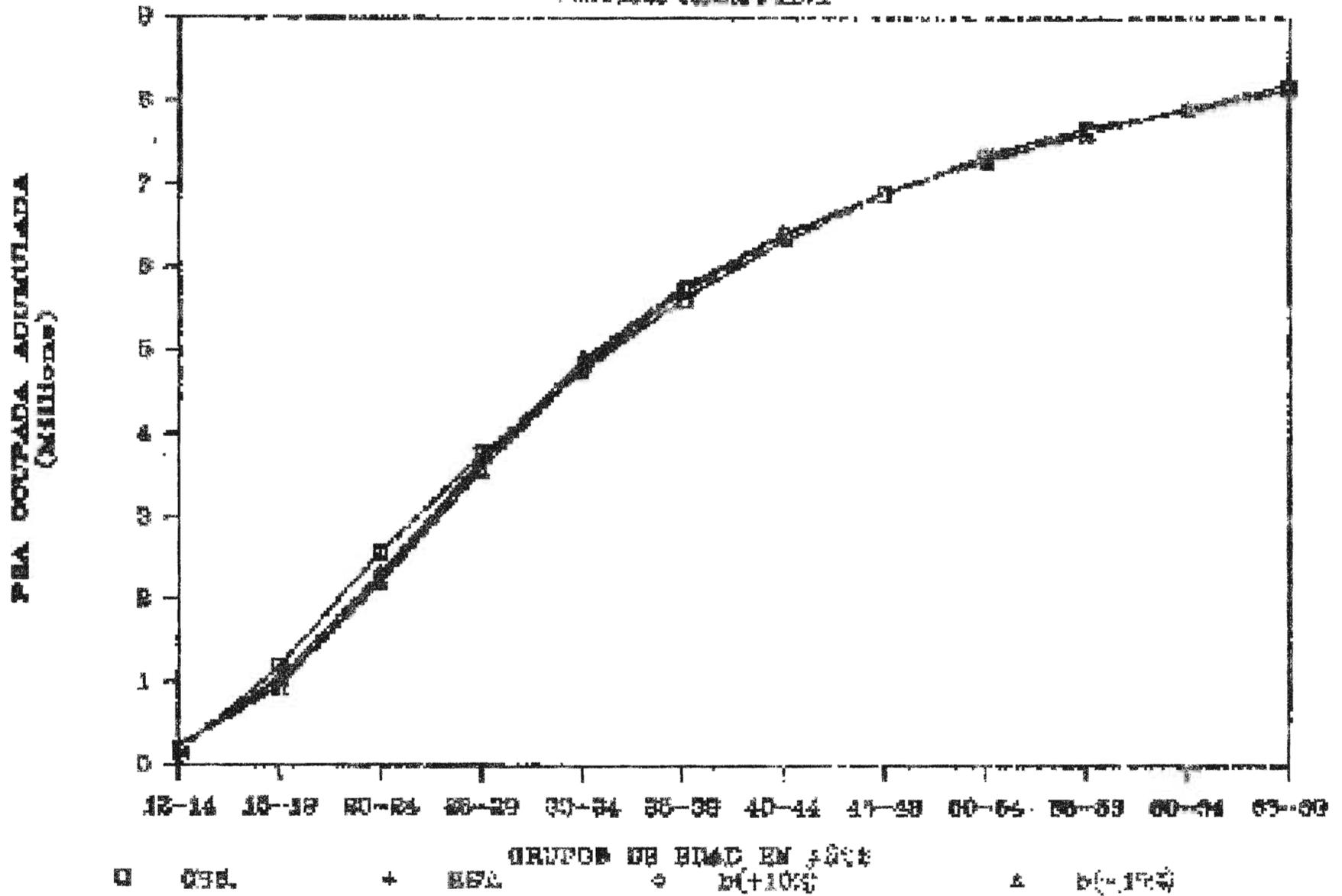
# MEXICO 1976: DESCRIPCION DE LA PEA

OCUPADA ACUMULADA



# MEXICO 1976: DESCRIPCION DE LA PEA

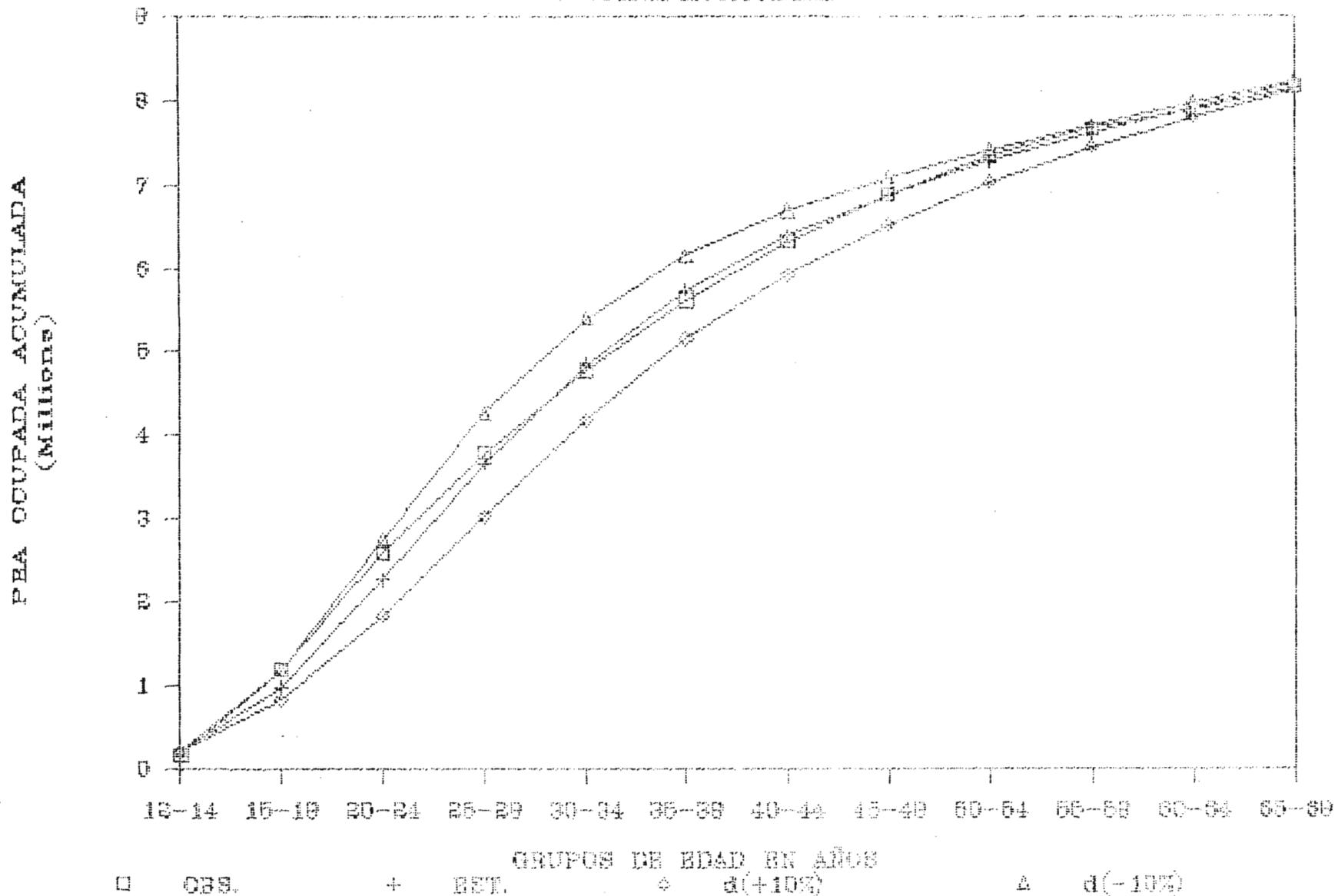
PEA ACUMULADA



gráfica 3.3.7

MEXICO 1976: DESCRIPCION DE LA PEA

OCUPADA ACUMULADA



#### IV. - CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos en el presente trabajo se comprueba que la función de Gompertz-Makeham es un modelo matemático que describe adecuadamente los fenómenos demográficos aquí estudiados.

El cálculo de los parámetros por el método de los grupos no superpuestos viene siendo un procedimiento sencillo de estimación. A su vez el método iterativo empleado para encontrar funciones de Gompertz-Makeham óptimas fue muy útil para la aplicación relativa al crecimiento poblacional, ya que en algunas de las iteraciones se obtuvieron funciones que lograban una mejor descripción del comportamiento de la dinámica seguida por la población.

Sin embargo, también hay que notar que en los otros casos, mediante este método iterativo no se alcanzó convergencia alguna en los parámetros, durante las iteraciones. Ello por un lado, porque desde un principio se tuvo un valor óptimo para la función, en cuanto a la descripción de la estructura por edad de la PEA ocupada y las estructuras de la fecundidad por edad para los años 1952 y 1970; y por otro lado porque al aplicar el ajuste correctivo mediante el método bilogístico en la descripción de la estructura de la fecundidad por edad para 1988, el patrón estándar empleado impone su perfil, de tal suerte que impide alcanzar un óptimo para la función. Aunque cabe señalar que fue sólo a través de probar el método iterativo y estar obteniendo la correlación entre los valores observados con los estimados en cada iteración que se llegó a tales conclusiones.

Otro aspecto es que la función de Gompertz-Makeham permite la desagregación por edades o años individuales partiendo de la correspondiente agrupación quinquenal de edad e intervalos censales de 10 años; es decir su aplicación después del ajuste descriptivo arrojó como resultado los estimados de población por cada año censal en un caso y en otro los componentes poblacionales de la FEA ocupada por edad.

Para la primera situación estudiada, es sorprendente como después de lograr una magnífica descripción del crecimiento de la población en México para el periodo 1920-1990, al proyectar con la misma función de Gompertz-Makeham (óptima además) los valores proyectados para los años 2000 y 2010 se disparan completamente. Sin embargo como ya se señaló, teniendo en mente el criterio demográfico, se aplicó una nueva función de Gompertz-Makeham que describiera tal fenómeno en el periodo 1960-1990, entonces la proyección resultó bastante congruente con las estimaciones esperadas de acuerdo a las nuevas realidades.

Lo importante en este caso es que se comprueba que disponiendo de una función continua, como es la función de Gompertz-Makeham para el periodo señalado (1960-1990), se logra captar el impresionante cambio registrado en los ritmos de crecimiento de la población y permite proyectarlo con una muy aceptable precisión al menos, para el ya cercano año 2000.

Lo cual nos sugiere que una vez que se cuente con las cifras finales del Censo de 1990, convendría efectuar nuevamente el ejercicio para afinar el valor estimado de la proyección.

Con respecto al estudio de las estructuras de la fecundidad por edad, una vez comprobado que la función de Gompertz-Makeham realiza un adecuado ajuste descriptivo, se llega a proyectar aceptablemente dichas estructuras.

Disponiendo de un nivel de fecundidad como meta de acuerdo a los cambios demográficos actuales y después de observar las tendencias seguidas en el comportamiento de los parámetros de la función de Gompertz-Makeham en los años estudiados, se comprueba que al realizar la simulación matemática, variando el valor de dichos parámetros, se obtienen posibles estructuras de la fecundidad por grupo de edad a manera de proyección.

En el caso de la estructura por edad de la PEA ocupada, las diversas alternativas producto de la simulación efectuada con los valores de los parámetros de la función de Gompertz-Makeham comprueban lo útil que resulta tal función matemática para visualizar diferentes escenarios en que podría darse la cambiante estructura por edad de la PEA ocupada.

Finalmente como reflexión y conclusión final, el trabajo muestra lo versátil, lo flexible y lo útil que resulta trabajar con la función de Gompertz-Makeham, siempre y cuando se trabaje con el conocimiento y empleo de las hipótesis y supuestos demográficos involucrados.

A N E X O S

CRECIMIENTO DE POBLACION

MEXICO 1920-1990 : DESCRIPCION DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

AÑO CENSO I	i	Yo(i)	Yo(i) acumulado	Ln(Yo(i))	V(i)	Yo(i)*V(i)	V(i)^2	ESTIMADO acumulado	VARIACION %
1920	0	13393424	13393424	16.45409	0.458452	6.42E+06	0.210179	14382928	2.71%
1930	1	16590078	30583502	17.23597	0.342833	2.88E+07	0.088935	29579302	-3.33%
1940	2	19821266	50404767	17.73559	1.592234	8.03E+07	2.535208	49952792	-0.90%
1950	3	25844590	76249358	18.14951	2.437919	1.86E+08	5.943444	75484263	3.31%
1960	4	34956872	111246230	18.52725	3.555195	3.96E+08	12.639412	111536360	0.26%
1970	5	48871567	160117797	18.89142	5.050328	8.10E+08	25.507017	158756859	-0.86%
1980	6	66344985	227062782	19.24073	7.115878	1.62E+09	50.642837	223260566	-1.70%
1990	7	81631840	308694622	19.54786	9.947960	3.07E+09	98.961914	312095173	1.03%
TOTALES					5.2E+09	137.42994			

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	xi	Diferencias		Parámetros
		Primeras	Segundas	
0	38.65006			K = 31372780
1	35.88511	2.1950465		a = 1.38963
2	37.41967	-0.661485		b = 0.45845
3	38.78860	1.5336610		d = 2.49737
4		-0.163637		
5		2.3599232		

Regression Output:  
 Constant -698900.5  
 Std Err of Y Est 2148880.0  
 R Squared 0.9986317  
 No. of Observations 8  
 Degrees of Freedom 6

X Coefficient(s) 0.0030562  
 Std Err of Coef. 0.0078622

MEXICO 1920-1990 : DESAGREGACION DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL ACUMULADO  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

AAO		POBLACION AAO GENRAL	POBLACION	AAO	POBLACION AAO GENRAL	POBLACION			
	i	ACUMULADA	ESTIMADA		i	ESTIMADA			
1920	0	14382928	1920	14382928	1960	4	111536360	1960	35052097
1921	0.1	15666394		1961	4.1	119639045			
1922	0.2	17005237		1962	4.2	119866604			
1923	0.3	18396804		1963	4.3	124223553			
1924	0.4	19840913		1964	4.4	128714556			
1925	0.5	21336882		1965	4.5	133344432			
1926	0.6	22884140		1966	4.6	138118157			
1927	0.7	24482245		1967	4.7	143040870			
1928	0.8	26120889		1968	4.8	148117876			
1929	0.9	27829911		1969	4.9	153354654			
1930	1	29579302	1930	15196374	1970	5	158756869	1970	49221500
1931	1.1	31379206		1971	5.1	164320320			
1932	1.2	33229925		1972	5.2	170081095			
1933	1.3	35131913		1973	5.3	176015376			
1934	1.4	37085805		1974	5.4	182139598			
1935	1.5	39092356		1975	5.5	188460395			
1936	1.6	41152500		1976	5.6	194984612			
1937	1.7	43267315		1977	5.7	201719319			
1938	1.8	45438029		1978	5.8	208671816			
1939	1.9	47666016		1979	5.9	215849638			
1940	2	49952752	1940	20373490	1980	6	223250566	1980	54503707
1941	2.1	52300015		1981	6.1	230812635			
1942	2.2	54709477		1982	6.2	238814141			
1943	2.3	57183105		1983	6.3	246973650			
1944	2.4	59722960		1984	6.4	255400011			
1945	2.5	62331231		1985	6.5	264102357			
1946	2.6	65010232		1986	6.6	273090126			
1947	2.7	67762407		1987	6.7	282373062			
1948	2.8	70590323		1988	6.8	291961228			
1949	2.9	73496671		1989	6.9	301865013			
1950	3	76484263	1950	26531471	1990	7	312095173	1990	38834506
1951	3.1	79556037							
1952	3.2	82715054							
1953	3.3	85964495							
1954	3.4	89307669							
1955	3.5	92748010							
1956	3.6	96289076							
1957	3.7	99934558							
1958	3.8	103688274							
1959	3.9	107554179							

1980-1980 : ESTIMACION DE LA FUNCION DE GUMPERTZ-MAKEHAM OPTIMA QUE DESCRIBA EL CRECIMIENTO POBLACIONAL

ITERACIONES

VALORES INICIALES	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	11a	12a	
20	14388520	14822128	14841778	14406571	13919661	13915528	14384524	14816811	14887284	14404902	13918808	13920285	14386802
30	29579802	29818884	29813688	29572023	29886134	29885750	29580098	29818826	29812481	29571275	29885101	29886881	29586888
40	43852792	43148772	43117908	43916588	439796320	50797351	43953510	43162888	43118878	43915861	430794878	43078888	43916881
50	75484281	73471884	73416778	76426777	77456188	77488138	76486285	75474992	75417170	76425181	77486285	77488281	76488288
60	115536360	110622160	110544728	111460748	112944530	112948860	111541417	110621849	110641123	111466241	112944584	112954992	111545448
70	158786388	158198876	158987782	158659084	159173765	159184438	158767169	158186034	158075186	158649686	159177328	159198887	158773778
80	23268486	23271387	233136449	233128568	233106105	233118974	23279218	232260795	233110405	233111290	233108188	233146488	23279744
90	311998178	312848210	312768304	311907929	311198470	311168619	312126588	312982842	312717456	311878582	311165496	311217581	312257788

ESTIMACION DE PARAMETROS DE LA FUNCION GUMPERTZ-MAKEHAM

ITERACIONES

VALORES INICIALES	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	11a	12a
a =	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
b =	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
c =	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
d =	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

ESTIMACION LA VARIACION PORCENTUAL DEL AJUSTE

ITERACIONES

VALORES INICIALES	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	11a	12a	
20	1.63%	5.59%	5.72%	2.87%	-0.57%	-0.56%	2.72%	5.56%	5.68%	2.86%	-0.56%	-0.53%	2.78%
30	-3.89%	-4.32%	-4.80%	-3.42%	-2.34%	-2.38%	-3.89%	-4.31%	-4.34%	-3.42%	-2.34%	-2.38%	-3.89%
40	8.43%	-2.56%	-2.62%	-0.98%	0.77%	0.77%	-0.98%	-2.56%	-2.62%	-0.98%	0.77%	0.77%	-0.98%
50	8.52%	-1.02%	-1.18%	0.23%	1.57%	1.57%	0.23%	-1.02%	-1.18%	0.23%	1.57%	1.57%	0.23%
60	3.10%	-0.56%	-0.62%	0.19%	0.98%	0.98%	0.26%	-0.56%	-0.64%	0.19%	0.98%	0.98%	0.26%
70	-2.74%	-1.22%	-1.28%	-0.92%	-0.59%	-0.59%	-0.92%	-1.22%	-1.28%	-0.92%	-0.59%	-0.59%	-0.92%
80	-1.74%	-1.70%	-1.76%	-1.78%	-1.77%	-1.69%	-1.70%	-1.77%	-1.77%	-1.77%	-1.77%	-1.76%	-1.69%
90	1.88%	1.56%	1.30%	1.03%	0.79%	0.80%	1.10%	1.36%	1.29%	1.02%	0.79%	0.80%	1.10%

ESTIMACION DE DIFERENCIAS AL CUADRADO

ITERACIONES

VALORES INICIALES	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a	11a	12a	
20	1.52E+11	6.87E+11	7.20E+11	1.71E+11	6.86E+09	6.07E+09	1.58E+11	6.78E+11	7.12E+11	1.58E+11	6.87E+09	6.86E+09	1.54E+11
30	1.01E+12	1.60E+12	1.61E+12	1.02E+12	4.88E+11	4.87E+11	1.01E+12	1.60E+12	1.62E+12	1.02E+12	4.88E+11	4.86E+11	1.01E+12
40	2.04E+11	1.68E+12	1.66E+12	2.08E+11	1.54E+11	1.54E+11	2.04E+11	1.67E+12	1.66E+12	2.09E+11	1.52E+11	1.53E+11	2.03E+11
50	5.52E+10	6.86E+11	6.93E+11	3.15E+10	1.48E+12	1.49E+12	5.61E+10	6.08E+11	6.98E+11	3.09E+10	1.48E+12	1.49E+12	5.71E+10
60	8.42E+10	6.88E+11	6.92E+11	4.60E+10	1.21E+12	1.22E+12	8.71E+10	8.90E+11	4.97E+11	4.41E+10	1.21E+12	1.20E+12	8.91E+10
70	1.85E+12	3.71E+12	4.12E+12	2.18E+12	8.54E+11	8.71E+11	1.82E+12	3.74E+12	4.17E+12	2.16E+12	8.84E+11	8.49E+11	1.88E+12
80	1.45E+13	1.44E+13	1.54E+13	1.55E+13	1.57E+13	1.56E+13	1.43E+13	1.45E+13	1.56E+13	1.56E+13	1.56E+13	1.53E+13	1.42E+13
90	1.16E+13	1.61E+13	1.66E+13	1.08E+13	6.97E+12	6.13E+12	1.18E+13	1.80E+13	1.62E+13	1.01E+13	6.96E+12	6.37E+12	1.20E+13
	2.94E+13	4.10E+13	4.18E+13	2.94E+13	2.59E+13	2.59E+13	2.94E+13	4.10E+13	4.11E+13	2.94E+13	2.59E+13	2.59E+13	2.94E+13

coef. R^2 : 0.9995335 0.9995309 0.9996294 0.9996538 0.9996537 0.9996293 0.9995327 0.9995323 0.9996297 0.9996537 0.9996535 0.9996289

MEXICO 1920-1990 : DESAGREGACION DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL ACUMULADO  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKERHAM OPTIMA

AAO		POBLACION	AAO CENSAL	POBLACION	AAO	POBLACION	AAO CENSAL	POBLACION	
	i	ACUMULADA	Kc	ESTIMADA		ACUMULADA	Kc	ESTIMADA	
1920	0	13913661	1920	13913661	1960	4	112344590	1960	34878405
1921	0.1	15269776			1961	4.1	116416881		
1922	0.2	16683599			1962	4.2	120611990		
1923	0.3	18153310			1963	4.3	124934486		
1924	0.4	19677205			1964	4.4	129389084		
1925	0.5	21253736			1965	4.5	133980643		
1926	0.6	22881532			1966	4.6	138714173		
1927	0.7	24559419			1967	4.7	143594849		
1928	0.8	26286437			1968	4.8	148627971		
1929	0.9	28061846			1969	4.9	153819099		
1930	1	29885164	1930	15971474	1970	5	159173765	1970	46829175
1931	1.1	31756016			1971	5.1	164697930		
1932	1.2	33674436			1972	5.2	170397576		
1933	1.3	35640554			1973	5.3	176278914		
1934	1.4	37654759			1974	5.4	182346350		
1935	1.5	39717642			1975	5.5	188612492		
1936	1.6	41830005			1976	5.6	195078157		
1937	1.7	43992840			1977	5.7	201752379		
1938	1.8	46207334			1978	5.8	208642412		
1939	1.9	48474848			1979	5.9	215755745		
1940	2	50796920	1940	20911786	1980	6	223100105	1980	63826340
1941	2.1	53175262			1981	6.1	230683466		
1942	2.2	55611701			1982	6.2	238514057		
1943	2.3	58108280			1983	6.3	246600374		
1944	2.4	60667144			1984	6.4	254951186		
1945	2.5	63290590			1985	6.5	263575544		
1946	2.6	65981049			1986	6.6	272482796		
1947	2.7	68741084			1987	6.7	281682528		
1948	2.8	71573388			1988	6.8	291184884		
1949	2.9	74480775			1989	6.9	300999970		
1950	3	77466185	1950	26669265	1990	7	311138470	1990	88038365
1951	3.1	80532688							
1952	3.2	83688440							
1953	3.3	86921766							
1954	3.4	90251080							
1955	3.5	93674923							
1956	3.6	97196957							
1957	3.7	100820967							
1958	3.8	104550864							
1959	3.9	108390683							

MEXICO 1960-1990 : DESCRIPCION DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKESHAM

AÑO SEXO	i	Yo(i)	Yo(i) acumulado	LnYo(i)	V(i)	Yo(i)*V(i)	V(i)^2	ESTIMADO acumulado
1960	0	34996872	34996872	17.37076	0.262137	9.17E+06	0.068716	34996872
1970	1	48871567	83868440	18.24478	0.628199	5.27E+07	0.394634	83868440
1980	2	66944985	150813425	18.83155	1.129637	1.70E+08	1.276079	150813425
1990	3	81631846	232445268	19.26416	1.741083	4.05E+08	3.031370	232445268
TOTALES						636980946	4.7707992	

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPO DE SUPERVIVIENTES

i	Yi	Diferencias		Parámetros
		Primeras	Segundas	
0	17.370763			K = 133506131
		0.8739906		a = 1.28903
1	18.244753		-0.287196	b = 0.26214
		0.5667540		g = 0.53685
2	18.831554		-0.154182	
		0.4826113		
3	19.264165			

Regression Output:

Constant	0.0000001
Std Err of Y Est	0
R Squares	1
No. of Observations	4
Degrees of Freedom	2
R Coefficients:	1
Std Err of Coef.	0

MEXICO 1960-1990 : DESAGREGACION DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL ACUMULADO  
Y PROYECCION DE POBLACION PARA LOS AÑOS 2000 Y 2010  
MEDIANTE LA FUNCION DE GUMPERTZ-MAKEHAM

AÑO		POBLACION ACUMULADA	AÑO CENSAL X <sub>c</sub>	POBLACION ESTIMADA
1960	0	34996872	1960	34996872
1961	0.1	38915517		
1962	0.2	43062728		
1963	0.3	47434355		
1964	0.4	52025590		
1965	0.5	56831121		
1966	0.6	61845263		
1967	0.7	67062095		
1968	0.8	72475581		
1969	0.9	78079678		
1970	1	83868440	1970	48871567
1971	1.1	89836101		
1972	1.2	95977156		
1973	1.3	102286418		
1974	1.4	108759080		
1975	1.5	115390751		
1976	1.6	122177492		
1977	1.7	129115843		
1978	1.8	136202838		
1979	1.9	143436016		
1980	2	150813425	1980	66944985
1981	2.1	158333625		
1982	2.2	165995680		
1983	2.3	173799154		
1984	2.4	181744095		
1985	2.5	189831029		
1986	2.6	198060940		
1987	2.7	206435256		
1988	2.8	214955837		
1989	2.9	223624951		
1990	3	232445265	1990	81631840
1991	3.1	241419821		
1992	3.2	250552027		
1993	3.3	259845636		
1994	3.4	269304735		
1995	3.5	278933723		
1996	3.6	288737326		
1997	3.7	298720529		
1998	3.8	308888622		
1999	3.9	319247159		
2000	4	329801956	2000	97356692
2001	4.1	340559083		
2002	4.2	351524855		
2003	4.3	362705825		
2004	4.4	374108780		
2005	4.5	385740736		
2006	4.6	397608933		
2007	4.7	409720833		
2008	4.8	422084115		
2009	4.9	434706676		
2010	5	447596631	2010	117794675

**ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD**

MEXICO 1952: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

GRUPO DE EDAD	TASAS FEC. Yo(i)	Ln(Yo(i))	V(i)	Yo(i)+V(i)	V(i) <sup>2</sup>	TASAS ESTIMADAS
12-14	0.0003	-8.11173	1.2E-04	3.7E-08	1.5E-08	0.0003
15-19	0.1200	-2.12026	1.2E-02	1.4E-03	1.4E-04	0.0611
20-24	0.3020	-1.19733	5.4E-02	1.6E-02	3.0E-03	0.2815
25-29	0.3135	-1.15996	7.0E-02	2.2E-02	4.9E-03	0.3626
30-34	0.2586	-1.35247	5.3E-02	1.4E-02	2.3E-03	0.2739
35-39	0.1625	-1.81708	3.2E-02	5.2E-03	1.0E-03	0.1554
40-44	0.0637	-2.75357	1.8E-02	1.1E-03	3.1E-04	0.0910
45-49	0.0637	-2.75357	9.3E-03	5.9E-04	3.6E-05	0.0481
TOTALES	1.2343			6.0E-02	1.2E-02	1.2337

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	Si	Diferencias		PARAMETROS
		Primeras	Segundas	
0	-10.231992			K = 4.946926
		7.874707		a = 0.513957
1	-2.357284		-9.686973	b = 0.000123
		-0.812266		d = 0.419032
2	-3.169550		-1.525325	
		-2.327591		
3	-5.507141			

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 30.10 años

Regression Output:

Constant	-0.019474
Std Err of Y Est	0.036732
R Squared	0.926722
No. of Observations	7
Degrees of Freedom	5

X Coefficient(s)	1.105905
Std Err of Coef.	0.139073

MEXICO 1952: AJUSTE DE LA ESTRUCTURA DE FECUNDIDAD POR EDAD CON EL METODO BILOGISTICO, SUPUESTA UNA DISTRIBUCION GOMPERTZ PARA LA FUNCION DE DESCENDENCIAS PARCIALES RELATIVAS

GRUPOS DE EDAD	TASAS ESP. FECUNDIDAD	DESCENDENCIA PARCIAL	DESC-PARC. RELATIVAS	BILOGITO F*(x)	BILOGITO Fs*(x)	BILOGITO ESTIMADO	DESC-PARC. REL. ESTM.	DESC-PARC. ESTIMADAS	TASAS ESP. FECUNDIDAD AJUSTADAS
(1)	5f(x)	F(x)	F*(x)	Vs(x)	Vs(x)	^V(x)	^F*(x)	^F(x)	(10)
15-19	0.1300	0.6000	0.0935	0.8530	1.7731	1.0542	0.0567	0.3641	0.0728
20-24	0.3020	2.1100	0.3287	0.1048	0.6913	0.0111	0.3638	2.3357	0.3943
25-29	0.3135	2.5775	0.5728	-0.5949	-0.0256	-0.6803	0.6026	2.8688	0.3066
30-34	0.2596	4.9705	0.7742	-1.3530	-0.7000	-1.3306	0.7677	4.9288	0.2120
35-39	0.1685	5.7830	0.9008	-2.2586	-1.4737	-2.0815	0.8327	5.6571	0.1477
40-44	0.0637	6.1015	0.9504	-2.9782	-2.6260	-3.1978	0.9596	6.1505	0.0927
45-49	0.0637	6.4200	1.0000	NA	NA	NA	1.0000	6.4200	0.0519
TOTALES	1.2840								1.2840
b	-0.6556								
a	0.9643								
Y1	0.1283								
Y2	-2.1999								
Y1	0.3129								
Y2	-1.6016								

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 29.33 años

MEXICO 1952: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

GRUPO DE EDAD	TASAS FEC. $Y_0(i)$	$\ln(Y_0(i))$	$V(i)$	$Y_0(i)*V(i)$	$V(i)^2$	TASAS ESTIMADAS
12-14	0.0003	-8.11173	1.2E-04	3.6E-08	1.5E-08	0.0002
15-19	0.0728	-2.61964	9.1E-02	6.7E-03	8.3E-03	0.1236
20-24	0.3943	-0.93063	2.6E-01	1.0E-01	7.0E-02	0.3573
25-29	0.3066	-1.18214	2.3E-01	7.1E-02	5.4E-02	0.2131
30-34	0.2120	-1.55120	1.6E-01	3.3E-02	2.5E-02	0.2124
35-39	0.1477	-1.91284	1.0E-01	1.5E-02	1.0E-02	0.1364
40-44	0.0987	-2.31593	5.4E-02	6.3E-03	4.1E-03	0.0865
45-49	0.0519	-2.95837	4.0E-02	2.1E-03	1.6E-03	0.0548
TOTALES	1.8843			2.4E-01	1.7E-01	1.8841

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	Si	Diferencias		PARAMETROS
		Primeras	Segundas	
0	-10.731364	8.618601		K = 1.883908
1	-2.112762	-1.351283	-9.969884	a = 0.632502
2	-3.464045	-1.810152	-0.458869	b = 0.000121
3	-5.274197			d = 0.214536

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 28.90 años

Regression Output:

Constant	-0.004438
Std Err of Y Est	0.035913
R Squared	0.919026
No. of Observations	7
Degrees of Freedom	5

X Coefficient(s)	1.024301
Std Err of Coef.	0.135973

MEXICO 1970: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

GRUPO DE EDAD	TASAS FEC. $Y_0(i)$	$\ln(Y_0(i))$	$V(i)$	$Y_0(i)*V(i)$	$V(i)^2$	TASAS ESTIMADAS
15-14	0.0003	-8.11173	1.1E-04	3.2E-08	1.1E-08	0.0005
15-19	0.0913	-2.39360	9.9E-03	9.0E-04	9.8E-05	0.0510
20-24	0.2839	-1.25913	4.9E-02	1.4E-02	2.4E-03	0.2551
25-29	0.3140	-1.15836	6.9E-02	2.2E-02	4.8E-03	0.3579
30-34	0.2470	-1.39837	5.6E-02	1.4E-02	3.1E-03	0.2890
35-39	0.2097	-1.56208	3.6E-02	7.5E-03	1.3E-03	0.1836
40-44	0.0767	-2.56785	2.0E-02	1.6E-03	4.1E-04	0.1050
45-49	0.0767	-2.56785	1.1E-02	2.5E-04	1.2E-04	0.0574
TOTALES	1.2996			6.0E-02	1.2E-02	1.2991

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	Si	Diferencias		PARAMETROS
		Primeras	Segundas	
0	-10.505333	8.087837		K = 4.920333
1	-2.417496	-0.542949	-8.630786	a = 0.527822
2	-2.960444	-2.175263	-1.632314	b = 0.000106
3	-5.135707			d = 0.434887

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 30.75 años

Regression Output:

Constant	-0.022332
Std Err of Y Est	0.037673
R Squared	0.917752
No. of Observations	7
Degrees of Freedom	3
X Coefficient(s)	1.120120
Std Err of Coef.	0.149961

MEXICO 1970: AJUSTE DE LA ESTRUCTURA DE FECUNDIDAD POR EDAD CON EL METODO BILOGISTICO, SUPUESTA UNA DISTRIBUCION GOMPERTZ PARA LA FUNCION DE DESCENDENCIAS PARCIALES RELATIVAS

GRUPOS DE EDAD	TASAS ESP. FECUNDIDAD	DESCENDENCIA PARCIAL	DESC-PARC. RELATIVAS	BILOGITO	BILOGITO	BILOGITO	DESC-PARC. REL. ESTM.	DESC-PARC. ESTIMADAS	TASAS ESP. FECUNDIDAD AJUSTADAS
(1)	$Sf_x$ (2)	$F(x)$ (3)	$F^*(x)$ (4)	$F^*(x)$ $V_0(x)$ (5)	$F_s^*(x)$ $V_s(x)$ (6)	ESTIMADO $\hat{V}(x)$ (7)	$\hat{F}^*(x)$ (8)	$\hat{F}(x)$ (9)	(10)
15-19	0.0913	0.4565	0.0703	0.9766	1.7731	1.1376	0.0442	0.2870	0.0574
20-24	0.2839	1.8760	0.2888	0.2168	0.5913	0.1230	0.3191	2.0730	0.3572
25-29	0.3140	3.4460	0.5304	-0.4556	-0.0256	-0.5323	0.5560	3.6122	0.3078
30-34	0.2470	4.6810	0.7205	-1.1155	-0.7000	-1.1591	0.7307	4.7469	0.2269
35-39	0.2087	5.7295	0.8819	-2.0744	-1.4787	-1.8823	0.8588	5.5791	0.1664
40-44	0.0767	5.1120	0.7410	-2.7894	-2.6260	-2.9478	0.9489	5.1645	0.1171
45-49	0.0767	6.4965	1.0000	NA	NA	NA	1.0000	6.4965	0.0664
TOTALES	1.2993								1.2993
b	-0.5090								
a	0.9287								
Y1	0.2459								
Y2	-1.9964								
X1	0.8129								
X2	-1.6016								

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 30.21 años

MEXICO 1970: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

GRUPO DE EDAD	TASAS FED. $Y_0(i)$	$\ln(Y_0(i))$	$V(i)$	$Y_0(i)*V(i)$	$V(i)^2$	TASAS ESTIMADAS
12-14	0.0003	-8.11173	1.4E-04	4.1E-08	1.8E-08	0.0002
15-19	0.0574	-2.85757	9.8E-02	5.0E-03	7.7E-03	0.1020
20-24	0.3572	-1.02946	2.9E-01	1.0E-01	7.9E-02	0.3276
25-29	0.3078	-1.17819	2.7E-01	8.3E-02	7.2E-02	0.3135
30-34	0.2269	-1.48305	2.0E-01	4.4E-02	3.8E-02	0.2275
35-39	0.1664	-1.79317	1.3E-01	2.2E-02	1.8E-02	0.1550
40-44	0.1171	-2.14487	8.9E-02	1.0E-02	8.0E-03	0.1041
45-49	0.0664	-2.71212	6.0E-02	4.0E-03	3.6E-03	0.0697
TOTALES	1.2996			2.7E-01	2.3E-01	1.2994

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	Si	Diferencias		PARAMETROS
		Primeras	Segundas	
0	-10.969294			K = 1.188081
		8.761650		a = 0.668826
1	-2.207644		-9.930231	b = 0.000135
		-1.068581		d = 0.228260
2	-2.276226		-0.512181	
		-1.580762		
3	-4.256988			

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 29.80 años

Regression Output:

Constant	0.004500
Std Err of Y Est	0.035088
R Squared	0.907093
No. of Observations	7
Degrees of Freedom	5
X Coefficient(s)	0.975867
Std Err of Coef.	0.139670

MEXICO 1989: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

GRUPO DE EDAD	TASAS FEC. Y <sub>0</sub> (i)	Ln(Y <sub>0</sub> (i))	V(i)	Y <sub>0</sub> (i)*V(i)	V(i) <sup>2</sup>	TASAS ESTIMADAS
12-14	0.0003	-8.11173	1.3E-06	3.9E-10	1.7E-12	0.0007
15-19	0.0553	-2.89498	5.0E-05	2.8E-06	2.5E-09	0.0262
20-24	0.1698	-1.77313	2.6E-04	4.5E-05	7.0E-08	0.1384
25-29	0.1632	-1.81278	4.1E-04	6.7E-05	1.7E-07	0.2132
30-34	0.1235	-2.09151	2.9E-04	3.6E-05	8.7E-08	0.1539
35-39	0.0814	-2.50838	1.3E-04	1.1E-05	1.8E-08	0.0696
40-44	0.0345	-3.36680	4.5E-05	1.6E-06	2.0E-09	0.0236
45-49	0.0043	-5.44914	1.3E-05	5.5E-08	1.6E-10	0.0067
TOTALES	0.6323			1.6E-04	3.5E-07	0.6316

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	Si	Diferencias		PARAMETROS
		Primeras	Segundas	
0	-11.006710			K = 471.545666
		7.420798		a = 0.213553
1	-3.585913		-8.434779	b = 0.000001
		-1.013981		d = 0.616138
2	-4.599894		-3.202061	
		-4.216042		
3	-8.815936			

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 29.08 años

Regression Output:

Constant	-0.013610
Std Err of Y Est	0.031526
R Squared	0.867290
No. of Observations	7
Degrees of Freedom	5
X Coefficient(s)	1.150157
Std Err of Coef.	0.201206

MEXICO 1989: AJUSTE DE LA ESTRUCTURA DE FECUNDIDAD POR EDAD CON EL METODO BILOGISTICO, SUPUESTA UNA DISTRIBUCION GOMPERTZ PARA LA FUNCION DE DESCENDENCIAS PARCIALES RELATIVAS

GRUPOS DE EDAD	TASAS ESP. FECUNDIDAD	DESCENDENCIA PARCIAL	DESC-PARC. RELATIVAS	BILOGITO F*(x)	BILOGITO Fg*(x)	BILOGITO ESTIMADO	DESC-PARC. REL. ESTM.	DESC-PARC. ESTIMADAS	TASAS ESP. FECUNDIDAD AJUSTADAS
(1)	5fx (2)	F(x) (3)	F*(x) (4)	Vg(x) (5)	Vg(x) (6)	^V(x) (7)	^F*(x) (8)	^F(x) (9)	(10)
15-19	0.0553	0.2765	0.0875	0.8904	1.7731	1.3276	0.0230	0.0727	0.0145
20-24	0.1698	1.1255	0.3562	0.0318	0.6913	-0.0919	0.4016	1.2692	0.2393
25-29	0.1632	1.9415	0.6144	-0.7193	-0.0256	-1.0327	0.7004	2.2134	0.1888
30-34	0.1235	2.5590	0.8098	-1.5561	-0.7000	-1.9176	0.8633	2.7281	0.1029
35-39	0.0814	2.9660	0.9386	-2.7590	-1.4787	-2.9394	0.9485	2.9972	0.0538
40-44	0.0345	3.1395	0.9932	-4.9869	-2.6260	-4.4449	0.9883	3.1231	0.0252
45-49	0.0043	3.1600	1.0000	NA	NA	NA	1.0000	3.1600	0.0074
TOTALES	0.6320								0.6320
b	-0.9990								
a	1.3122								
Y1	0.0677								
Y2	-3.1006								
X1	0.8129								
X2	-1.6016								

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 27.97 años

MEXICO 1988: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

GRUPO DE EDAD	TASAS FEC. Yo(i)	Ln(Yo(i))	V(i)	Yo(i)*V(i)	V(i)^2	TASAS ESTIMADAS
13-14	0.0003	-8.11173	2.0E-05	6.1E-09	4.1E-10	0.0001
15-19	0.0145	-4.23076	1.1E-02	1.5E-04	1.1E-04	0.0456
20-24	0.2393	-1.43004	4.9E-02	1.2E-02	2.4E-03	0.2099
25-29	0.1888	-1.66687	4.6E-02	8.6E-03	2.1E-03	0.1951
30-34	0.1029	-2.27355	2.5E-02	2.5E-03	6.1E-04	0.1056
35-39	0.0538	-2.92219	1.1E-02	6.0E-04	1.2E-04	0.0476
40-44	0.0252	-3.68145	4.7E-03	1.2E-04	2.2E-05	0.0201
45-49	0.0074	-4.90965	1.9E-03	1.4E-05	3.8E-06	0.0084
TOTALES	0.6323			2.4E-02	5.3E-03	0.6322

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	Si	Diferencias		PARAMETROS
		Primeras	Segundas	
0	-12.342484			K = 4.445418
		9.245569		a = 0.410384
1	-3.096915		-11.344398	b = 0.000020
		-2.098829		d = 0.338064
2	-5.195744		-1.296522	
		-3.395351		
3	-8.591095			

ESTIMACION DE LA EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD : 27.45 años

Regression Output:

Constant	-0.022087
Std Err of Y Est	0.024240
R Squared	0.928326
No. of Observations	7
Degrees of Freedom	5
X Coefficient(s)	1.244970
Std Err of Coef.	0.154705

MEXICO: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD (SIN CORREGIR)

MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD

RUFOS DE EDAD	1952		1970		1988	
	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA
15-19	0.1200	0.0611	0.0913	0.0510	0.0553	0.0262
20-24	0.3020	0.2815	0.3839	0.2551	0.1698	0.1384
25-29	0.3135	0.3626	0.3140	0.3579	0.1632	0.2132
30-34	0.2586	0.2739	0.2470	0.2890	0.1235	0.1539
35-39	0.1625	0.1654	0.2097	0.1836	0.0814	0.0696
40-44	0.0637	0.0910	0.0767	0.1050	0.0345	0.0236
45-49	0.0637	0.0481	0.0767	0.0574	0.0043	0.0067
TGF	6.42	6.42	6.50	6.50	3.16	3.16
COEF. DETERMINACION:	0.926722		0.917752		0.867290	

EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD (años)

1952		1970		1988	
OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA
29.40	30.10	30.34	30.75	28.50	29.08

PARAMETROS DE LA FUNCION GOMPERTZ-MAKEHAM  
ESTIMADOS POR EL METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS

	1952	1970	1988
K =	4.946926	4.920333	471.545666
a =	0.513957	0.527822	0.213553
b =	0.000123	0.000106	0.000001
d =	0.419032	0.434887	0.616138

MEXICO: AJUSTE DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD

MEDIANTE EL METODO BILOGISTICO

TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD

---

GRUPOS DE EDAD	1952		1970		1988	
	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA
15-19	0.1200	0.0728	0.0913	0.0574	0.0553	0.0145
20-24	0.3020	0.3943	0.2839	0.3572	0.1698	0.2393
25-29	0.3135	0.3066	0.3140	0.3078	0.1632	0.1888
30-34	0.2586	0.2120	0.2470	0.2269	0.1235	0.1029
35-39	0.1625	0.1477	0.2097	0.1664	0.0814	0.0538
40-44	0.0637	0.0987	0.0767	0.1171	0.0345	0.0252
45-49	0.0637	0.0519	0.0767	0.0664	0.0043	0.0074
TGF	6.42	6.42	6.50	6.50	3.16	3.16

---

EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD (años)

	1952		1970		1988	
	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA
	29.40	29.33	30.34	30.21	28.50	27.87

---

MEXICO: DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA DE LA FECUNDIDAD POR EDAD (CORREGIDA)

MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD

GRUPOS DE EDAD	1952		1970		1988	
	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA
15-19	0.1200	0.1236	0.0913	0.1020	0.0553	0.0456
20-24	0.3020	0.3573	0.2839	0.3276	0.1698	0.2099
25-29	0.3135	0.3131	0.3140	0.3135	0.1632	0.1951
30-34	0.2586	0.2124	0.2470	0.2275	0.1235	0.1056
35-39	0.1625	0.1364	0.2097	0.1550	0.0814	0.0476
40-44	0.0637	0.0865	0.0767	0.1041	0.0345	0.0201
45-49	0.0637	0.0548	0.0767	0.0697	0.0043	0.0084
TGF	6.42	6.42	6.50	6.50	3.16	3.16
COEF. DETERMINACION:		0.919026		0.907093		0.928326

EDAD MEDIA A LA FECUNDIDAD (años)

	1952		1970		1988	
	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA	OBSERVADA	ESTIMADA
	29.40	28.90	30.34	29.80	28.50	27.45

PARAMETROS DE LA FUNCION GOMPERTZ-MAKEHAM  
ESTIMADOS POR EL METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS

	1952	1970	1988
K =	1.383908	1.188081	4.445418
a =	0.632502	0.668829	0.410384
b =	0.000121	0.000135	0.000020
d =	0.214536	0.228260	0.338064



**ESTRUCTURA POR EDAD DE LA PEA OCUPADA**

MEXICO 1976 : DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD DE LA POBLACION OCUPADA TOTAL  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

EDAD	i	Yo(i) acumulado	acumulado %	Ln(Yo(i))	V(i)	Yo(i)*V(i)	V(i)^2	ESTIMADO acumulado	ESTIMADO %	VARIACION %
12-14	0	168935	2.07	12.03726	0.039484	6670	0.001559	232220	2.83	37.45%
15-19	1	1193988	14.61	13.99280	0.169205	202029	0.028630	995154	12.11	-16.65%
20-24	2	2598933	31.80	14.77061	0.387078	1005991	0.149830	2276538	27.70	-12.40%
25-29	3	3787119	46.34	15.14711	0.623329	2360620	0.388539	3666005	44.61	-3.20%
30-34	4	4776131	58.44	15.37914	0.824825	3939472	0.680336	4851072	58.02	1.57%
35-39	5	5634883	68.95	15.54448	0.977943	5510593	0.956372	5751609	69.98	2.07%
40-44	6	6343240	77.62	15.66290	1.090412	6916748	1.189999	6413081	78.03	1.10%
45-49	7	6907131	84.52	15.74806	1.174760	8114224	1.380062	6909160	84.07	0.03%
50-54	8	7358221	90.04	15.81132	1.241549	9135592	1.541444	7301965	88.85	-0.76%
55-59	9	7678485	93.96	15.85393	1.298110	9967522	1.685091	7634622	92.89	-0.57%
60-64	10	7905983	96.74	15.88313	1.349116	10666090	1.820115	7934604	96.54	0.36%
65-69	11	8172117	100.00	15.91623	1.397421	11419888	1.952786	8218701	100.00	0.57%

TOTALES

69245438 11.77376

CALCULO DE PARAMETROS POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS

i	Si	Diferencias		Parámetros	
		Primeras	Segundas		
0	40.80069			K =	5881335
		5.2700540		a =	1.03140
1	46.07074		-4.118504	b =	0.03948
		1.1515494		d =	0.55929
2	47.22229		-0.720541		
		0.4310078			
3	47.65330				

Regression Output:

Constant	-129141.1
Std Err of Y Est	124154.31
R Squared	0.9981867
No. of Observations	12
Degrees of Freedom	10

X Coefficient(s) 1.0193403  
 Std Err of Coef. 0.0137384

MEXICO 1976: DESAGREGACION DE PEA OCUPADA ACUMULADA  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

EDAD		PEA ACUMULADA	EDAD MEDIA $X_m$	PEA DESAGREGADA
15		232220		
16	0.2	333105	15.5	100885
17	0.4	459586	16.5	126481
18	0.6	512506	17.5	152920
19	0.8	781519	18.5	179013
20	1	395154	19.5	203635
21	1.2	1220968	20.5	225815
22	1.4	1465780	21.5	244812
23	1.6	1725918	22.5	260138
24	1.8	1997476	23.5	271558
25	2	2276538	24.5	279061
26	2.2	2559360	25.5	282823
27	2.4	2842515	26.5	283155
28	2.6	3122977	27.5	280462
29	2.8	3398174	28.5	275197
30	3	3666005	29.5	267831
31	3.2	3924824	30.5	258819
32	3.4	4173412	31.5	248688
33	3.6	4410935	32.5	237523
34	3.8	4636893	33.5	225959
35	4	4851072	34.5	214178
36	4.2	5053488	35.5	202417
37	4.4	5244349	36.5	190860
38	4.6	5424003	37.5	179655
39	4.8	5592912	38.5	168908
40	5	5751609	39.5	158697
41	5.2	5900681	40.5	149072
42	5.4	6040742	41.5	140060
43	5.6	6172416	42.5	131674
44	5.8	6296326	43.5	123910
45	6	6413081	44.5	116755
46	6.2	6523270	45.5	110189
47	6.4	6627455	46.5	104186
48	6.6	6726170	47.5	98715
49	6.8	6819916	48.5	93745
50	7	6909163	49.5	89244
51	7.2	6994337	50.5	85177
52	7.4	7075850	51.5	81513
53	7.6	7154071	52.5	78220
54	7.8	7229338	53.5	75268
55	8	7301965	54.5	72627
56	8.2	7372237	55.5	70271
57	8.4	7440412	56.5	68176
58	8.6	7506729	57.5	66316
59	8.8	7571400	58.5	64672
60	9	7634622	59.5	63222
61	9.2	7696571	60.5	61948
62	9.4	7757406	61.5	60835
63	9.6	7817271	62.5	59866
64	9.8	7876298	63.5	59027
65	10	7934604	64.5	58306
66	10.2	7992296	65.5	57692
67	10.4	8049469	66.5	57173
68	10.6	8106210	67.5	56741
69	10.8	8162597	68.5	56387
70	11	8218701	69.5	56104

SIMULACION CON LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM AL VARIAR EL VALOR DE SUS PARAMETROS

Parámetros	VARIACION EN K		VARIACION EN a		VARIACION EN b		VARIACION EN d		
	+10%	-10%	+10%	-10%	+10%	-10%	+10%	-10%	
K =	5881335	6469468	5293201	5881335	5881335	5881335	5881335	5881335	5881335
a =	1.03140	1.03140	1.03140	1.13454	0.92826	1.03140	1.03140	1.03140	1.03140
b =	0.03948	0.03948	0.03948	0.03948	0.03948	0.04343	0.03554	0.03948	0.03948
d =	0.55929	0.55929	0.55929	0.55929	0.55929	0.55929	0.55929	0.61522	0.50336

MEXICO 1976 : DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA POR EDAD DE LA PUBLACION OCUPADA TOTAL  
 MEDIANTE LA FUNCION DE GOMPERTZ-MAKEHAM

EDAD	i	FUNCION ORIGINAL		VARIACION EN K		VARIACION EN a		VARIACION EN b		VARIACION EN d	
		OBSERVADO	ESTIMADO	+10%	-10%	+10%	-10%	+10%	-10%	+10%	-10%
15-14	0	168935	232220	255442	208998	232220	232220	255442	208998	232220	232220
15-19	1	1193988	995154	1094669	895638	1094669	895638	1049641	988206	836594	1192316
20-24	2	2598933	2276538	2504191	2048884	2754611	1843996	2345432	2202731	1841086	2758638
25-29	3	3787119	3666005	4032635	3299404	4879453	2672518	3727647	3599048	3040277	4273065
30-34	4	4776131	4851072	5336179	4365964	7102454	3182788	4896525	4801316	4188885	5408389
35-39	5	5634883	5751609	6326770	5176448	9263024	3396268	5781688	5718541	5162906	6183653
40-44	6	6343240	6413081	7054389	5771773	11361164	3408174	6431817	6392432	5941822	6717327
45-49	7	6907131	6909160	7600076	6218244	13463998	3304630	6920442	6896709	6555859	7111490
50-54	8	7358221	7301965	8032162	6571769	15652411	3143257	7308632	7294603	7048091	7431791
55-59	9	7678485	7634622	8398085	6871160	18002040	2957809	7638520	7630316	7457290	7715992
60-64	10	7905983	7934604	8728065	7141144	20580320	2766625	7936870	7932101	7813140	7984785
65-69	11	8172117	8218701	9040571	7396831	23448914	2579116	8220013	8217251	8136662	8249289

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- BOCAZ A. El uso de la ley de Makeham como función demográfica. Notas de Población. CELADE. año II, vol. 6. 1974
- 2.- DIRECCION GENERAL DE ESTADISTICA. Censos Generales de Población y Vivienda: IV, V, VI, VII, VIII, IX. Dirección General de Estadística. 1921 a 1970
- 3.- CERVERA M. y PARTIDA V. Tablas de Vida Económicamente Activa para la República Mexicana. Centro Nacional de Información y Estadísticas del Trabajo. 1977
- 4.- CHACKIEL J. El modelo de mortalidad de Brass. Separata de Notas de Población. CELADE. No. 25-abril. 1981
- 5.- CHACKIEL J. Estructura de la Fecundidad por edades: Ajuste y proyección mediante la función de Gompertz linealizada. Notas de Población. CELADE. año VII. vol. 20. 1979
- 6.- CONAPO. México Demográfico. Breviario. Consejo Nacional de Población. 1988
- 7.- INEGI. Censos Generales de Población y Vivienda: X y XI. 1980 y 1990 (éste, cifras preliminares). Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática.
- 8.- KEYFITZ NATHAN. Introducción a las Matemáticas de Población. CELADE. 1979
- 9.- JOHNSON R. y JOHNSON N. Survival Models and Data Analysis. John Wiley and sons. 1977
- 10.- LEGUINA JOAQUIN. Fundamentos de Demografía. Siglo XXI. 1973

11.- LOTKA A. Teoría Analítica de las Asociaciones Biológicas. CELADE. 1969

12.- Organización de las Naciones Unidas. Técnicas Indirectas de Estimación Demográfica. Manual X. ONU. 1986

13.- MINA A. y GARCIA E. "La función de Makeham en la descripción de la estructura por edad de la población económicamente activa", Avances de Investigación. El Colegio de México.

14.- MINA A. "La función Gompertz-Makeham en el análisis Actuarial y Demográfico en México", La Actuarial en México. Colegio Nacional de Actuarios.

15.- MOOD ALEXANDER M. Introducción a la Teoría de la Estadística. Edit. Aguilar. 1965

16.- NEWELL C. Methods and Models in Demography. The Guilford Press. 1988

17.- SPP. Encuesta Complementaria a la Encuesta Continua sobre Ocupación, diciembre de 1979. Secretaría de Programación y Presupuesto.