

Una estimación de la brecha del Producto Interno
Bruto mediante onduletas (*wavelets*) como
alternativa para el análisis del Ciclo Económico.

Julio César Cervantes Parra
Asesorado por
Eneas Caldiño García.

Tesis
para obtener el grado de
Maestro en Economía

El Colegio de México.
Centro de Estudios Económicos

6 de enero de 2007

*Con cariño para mis padres
y hermanos:
Luz y Francisco,
Luz, Gamaliel y Francisco.*

*Con profundo agradecimiento al profesor
Eneas Caldiño
por la paciente lectura de este trabajo.*

*A todos los profesores y compañeros de la
promoción 2002-04, especialmente a
Mariel y Medardo.*

*In Memoriam
Humberto Cabrera López (†).*

Resumen

En este trabajo se utiliza el análisis en onduletas como herramienta metodológica alterna para el estudio del ciclo económico. Así mismo, se incluye una comparación con el filtro Hodrick-Prescott que es el instrumento más utilizado en este tipo de estudio. Además, se propone al uso de la transformada en *wavelets* como vía para la estimación de la brecha del producto (que es, por definición, el componente cíclico de la señal en cuestión). Una vez establecidos los conceptos y métodos necesarios sobre la teoría de onduletas para el ejercicio empírico, se procede a su aplicación con la series históricas del México, Estados Unidos y el Reino Unido. En el análisis comparativo se obtuvo que la series filtradas por medio de onduletas son muy similares a las de H-P, sin embargo, el primer método enriquece el análisis por las características propias de la transformada en *wavelets*, ya que permite un examen de la varianza a través de las diferentes escalas (ciclos de cierta longitud) de manera que se desagregan los movimientos cíclicos con mayor influencia en la serie, de acuerdo a su duración. Finalmente se estudian las características de las series filtradas con medidas estadísticas simples (media y desviación estándar).

Índice general

Introducción	2
1. Herramientas Metodológicas	4
1.1. La Transformada de Onduletas	4
1.1.1. ¿Que es una onduleta?	4
1.1.2. La Transformada Continua: CWT	6
1.1.3. La Transformada Discreta: DWT	11
1.2. El filtro Hodrick-Prescott	20
2. Datos	25
3. Análisis Comparativo	
Filtro H-P vs. Onduletas	29
4. El Ciclo Económico y la Brecha del Producto	36
4.1. Introducción	36
4.2. La evidencia empírica acerca de las características históricas del ciclo económico	40
4.2.1. El ciclo económico en México	44
4.3. Metodología	47
4.4. Fluctuaciones en el Producto Interno Bruto	50
4.5. Estimación de la Brecha del Producto	64
4.6. Fluctuaciones en los Componentes del PIB	67
4.7. Fluctuaciones en los Precios y los Agregados Monetarios	68
4.8. Fluctuaciones en el Desempleo	72
Conclusiones	77
Bibliografía	79

Introducción

Uno de los aspectos que suscita mayor interés en las ciencias económicas es el análisis de las fluctuaciones observables en las variables agregadas, por ejemplo el Producto Interno Bruto, los precios o los agregados monetarios, quienes presentan constantes movimientos de ascenso y descenso que, a pesar de su carácter fundamentalmente aleatorio, son objeto de análisis que buscan algún tipo de regularidad tanto en la periodicidad y dirección de dichos desplazamientos, así como las relaciones entre las distintas variables; y en efecto dichos estudios han mostrado o por los menos sugerido, la existencia de una serie de hechos estilizados que desde un enfoque meramente empírico, han construido cierto consenso en torno a la existencia de un “ciclo económico”, constituido por las fluctuaciones mas o menos coordinadas de algunos indicadores.

Inserto en este marco, este trabajo tendrá como objetivo fundamental revisar algunas de las características del ciclo económico, teniendo como herramienta fundamental para el análisis a la transformada en onduletas, a través de la cual se obtendrán tanto los distintos componentes cíclicos como la tendencia de la serie. Dicho instrumento se usa como alternativa a los filtros que habitualmente se utilizan en esta corriente de la literatura como el Hodrick Prescott, el cual sirve como punto de referencia en este trabajo.

El análisis en onduletas permitirá vislumbrar las regularidades existentes en las series de PIB (y sus componentes), los precios, los agregados monetarios y el empleo, de México, Estados Unidos y el Reino Unido (la serie de México en este trabajo es de fundamental importancia pues no existe ningún otro estudio con esta metodología que la haya considerado) y esto será posible pues mediante las onduletas se separará el componente tendencial de la serie, los componentes “periódicos” de la misma (de acuerdo a la base elegida) y aquello que puede considerarse “ruido”; también se echa mano de la habilidad de la transformada en onduletas para separar la varianza total de la serie en varianzas restringidas a los distintos horizontes temporales conocidos como escalas, lo que constituye un análisis de varianza dado por

la escala. En síntesis la metodología es relativamente sencilla pues una vez que se han obtenido los coeficientes de onduletas se construyen los componentes cíclicos para las diferentes escalas y la tendencia de la serie, que son equivalentes a las series filtradas mediante otras técnicas. Luego, teniendo claro cual es la porción de información que sintetiza cada componente (ya sea cíclico o de tendencia) se procede directamente a su interpretación auxiliados por medidas estadísticas convencionales como la desviación estándar, la media y el análisis de varianza antes mencionado.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera, primero se establecen los conceptos sobre la teoría de *wavelets* necesarios para comprender el ejercicio empírico, así mismo se hace una descripción del filtro Hodrick Prescott, que permita posteriormente hacer comparación de conceptos entre ambos filtros; enseguida se incluye un capítulo donde se presentan los datos a considerar en el estudio. El tercer capítulo contiene una comparación entre las series filtradas mediante ambos métodos (Onduletas y Hodrick Prescott), esta comparación se hace esencialmente a través de los coeficientes de correlación entre las dos versiones filtradas de una misma serie. También en este capítulo se explican algunas razones por las que el filtro de onduletas puede fungir como alternativa a otras técnicas y por que estas pueden ser más apropiadas para tratar series no estacionarias (como es el caso de la mayoría de las series económicas). Luego, en el cuarto capítulo se hace una exploración de las características del ciclo económico mediante las series filtradas por onduletas, buscando corroborar algunas de las regularidades o hechos estilizados, que sobre las fluctuaciones han hallado diversos autores. En la introducción de dicho capítulo se establecerá el marco teórico existente entorno al ciclo económico, es decir, los aspectos históricos y los trabajos que lo han estudiado y dan lugar a las regularidades o hechos estilizados, que sobre las fluctuaciones han hallado diversos autores. A continuación se describe a detalle la metodología a seguir y en la siguiente sección se presentan los resultados del ejercicio empírico. Finalmente se presentan las conclusiones y la bibliografía empleada.

Capítulo 1

Herramientas Metodológicas

1.1. La Transformada de Onduletas

1.1.1. ¿Que es una onduleta?

Como su nombre lo sugiere una onduleta es una “onda pequeña”, es decir una función que crece y decae en un periodo de tiempo limitado, (una noción contrastante a esta es la de “onda grande”, por ejemplo la función *seno* quien se mantiene oscilando sobre todo el eje real). Estos dos conceptos, pueden formularse más formalmente de la siguiente manera; consideremos $\psi(\cdot)$ una función real, entonces esta es “candidata” para ser onduleta si cumple que:

- La integral de $\psi(\cdot)$ es cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du = 0 \quad (1.1)$$

- El cuadrado de $\psi(\cdot)$ integra uno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(u) du = 1 \quad (1.2)$$

La primera condición es requerida para garantizar un comportamiento ondulatorio de la función (i.e. las desviaciones de la función sobre cero son compensadas por desviaciones bajo de cero), mientras que la segunda asegura que la función es “esencialmente” distinta de cero solo dentro de un intervalo acotado (condición que, por ejemplo, la función seno no cumple),

es decir para cualquier ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$ existe un intervalo $[-T, T]$ de longitud finita tal que

$$\int_{-T}^T \psi^2(u) du < 1 - \epsilon.$$

Sin embargo estas dos condiciones no son suficientes para construir onduletas que tengan propiedades deseables para el análisis de series de tiempo, como la detección de picos y singularidades. Por tanto se añade una más llamada *condición de admisibilidad*; entonces se dice que una onduleta es admisible si su transformada de Fourier:

$$\Psi(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) e^{-i2\pi fu} du,$$

es tal que

$$\mathbf{C}_\psi \equiv \int_0^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{f} df \quad \text{satisface que} \quad 0 < \mathbf{C}_\psi < \infty. \quad (1.3)$$

esta condición de aspecto más bien técnico es de suma importancia pues permite que la transformación que se obtenga de cada función sea única.

Como ejemplos de estas funciones tenemos en primera instancia, la onduleta de *Haar*, nombrada así en honor a su creador quien la ideó en 1910 y que está definida como:

$$\psi^{(H)}(u) \equiv \begin{cases} -1/\sqrt{2}, & \text{si } -1 < u \leq 0; \\ 1/\sqrt{2}, & \text{si } 0 < u \leq 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Un par de ejemplos más se obtiene a partir de la función de densidad de una variable aleatoria normal (gaussiana) con media cero y varianza σ^2 , cuya gráfica crece hasta alcanzar su punto máximo en cero para luego declinar, motivo por el cual se sugiere a su derivada como punto de partida para contruir onduletas. Estas son resultado de la renormalización de sus dos primeras derivadas. La segunda de ellas es utilizada frecuentemente en algunas aplicaciones y se le conoce como "*Mexican Hat*".¹ En la siguiente figura se muestran las graficas de las onduletas aqui mencionadas.

Existen otras onduletas sumamente importantes en las aplicaciones. En primer lugar mencionaremos a las *doublets*, que fueron el primer tipo de

¹La función de densidad gaussiana está dada por

$$\phi(u) \equiv \frac{e^{-u^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad -\infty < u < \infty.$$

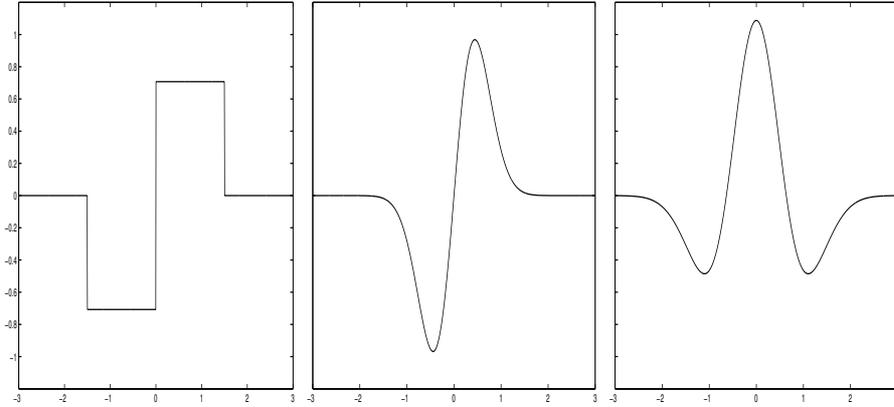


Figura 1.1: De izquierda a derecha: Onduleta de Haar, la primera derivada de la fdp Gaussiana ($\sigma = 0,44311$) y la onduleta Mexican Hat ($\sigma = 0,63628$)

onduletas continuas y ortogonales y cuyo nombre hace honor a una de las pioneras en la investigación en onduletas, Ingrid Daubechies. Las *symmlets* o *least asymmetric wavelets*, son muy similares a las *daublets* sólo que son tan simétricas como es posible y tienen soporte compacto; estas serán la base de la estimación empírica en este trabajo. Finalmente las *coiflets*, nombradas así en honor de Ronald Coifman, tienen además momentos nulos.²

1.1.2. La Transformada Continua: CWT

La transformada en onduletas, como Daubechies (1992) nos explica, es “una herramienta que corta a las funciones o los datos en pedazos con diferentes componentes de frecuencia y entonces estudia cada componente con una resolución apropiada a su escala³”. Esto se consigue expresando a la función como un promedio ponderado de funciones onduletas con soporte en

y las onduletas que se derivan de ella están dadas por las siguientes funciones.

$$\psi^{(fdG)} \equiv \frac{\sqrt{2}ue^{-u^2/2\sigma^2}}{\pi^{1/4}\sigma^{3/2}} ;$$

$$\psi^{(Mh)} \equiv \frac{2\left(1 - \frac{u^2}{\sigma^2}\right)e^{-u^2/2\sigma^2}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma}$$

²No se presentan las formas funcionales de estas onduletas, ya se que obtienen resolviendo numéricamente un conjunto específico de condiciones. Mas detalles en Percival y Walden(2000) pp.105-117 y Vidakovic (1999) pp. 60-80.

³La escala es longitud (medida) del intervalo de tiempo sobre el que se concentra el análisis, en este caso es la longitud del soporte de las funciones que caracterizan los

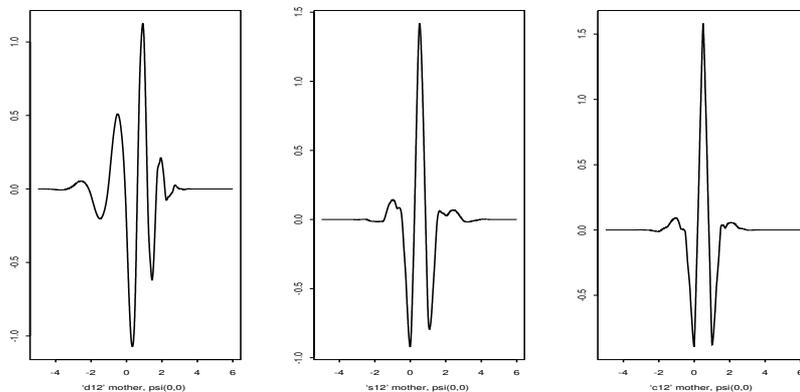


Figura 1.2: De izquierda a derecha: *Daubelets*, *Symmlets* y *Coiflets*

distintos intervalos de tiempo. Dicho de otro modo, a través de un conjunto de onduletas que funge como base la transformada reexpresa la información de la función de manera ordenada de acuerdo a su escala (a la que asocia un intervalo de frecuencias particular).

Ahora para introducir la definición de la transformada en onduletas consideremos $x(\cdot)$ una función con valores reales de una variable independiente t a la que, en adelante, llamaremos el “tiempo”. Nos referiremos a $x(\cdot)$ como la señal, por simple conveniencia. Consideremos la integral

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x(u) du \equiv \alpha(a, b) \quad (1.5)$$

donde asumimos que $a < b$ y que $x(\cdot)$ es tal que la integral anterior está bien definida. En los libros de cálculo, $\alpha(a, b)$ se llama el valor promedio de $x(\cdot)$ sobre el intervalo $[a, b]$. Lo anterior está relacionado con la noción de una media muestral de una conjunto de N observaciones. Para ver esta conexión, supongamos por un momento que $x(\cdot)$ es una función escalonada de la forma:

$$x(t) = x_j \text{ para } a + \frac{j}{N}(b-a) < t \leq a + \frac{j+1}{N}(b-a) \text{ y } j = 0, \dots, N-1$$

De la definición de la integral de Riemann se sigue fácilmente que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x(u) du = \frac{1}{b-a} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \frac{b-a}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j$$

distintos componentes frecuenciales.

En lugar de considerar a $\alpha(a, b)$ como una función de los puntos finales de el intervalo $[a, b]$ sobre el que se realiza la integración, podemos considerarlo simplemente como una función de la longitud del intervalo, i.e. $\lambda \equiv b - a$, y el tiempo (punto) medio del intervalo, i.e. $t = (a + b)/2$. Nos referiremos a λ como la escala asociada con el promedio. Usando λ y t podemos definir

$$A(\lambda, t) \equiv \alpha\left(t - \frac{\lambda}{2}, t + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{\lambda} \int_{t-\frac{\lambda}{2}}^{t+\frac{\lambda}{2}} x(u) du$$

Se llama a $A(\lambda, t)$ el valor promedio de la señal $x(\cdot)$ sobre la escala λ centrada alrededor de t . Ahora definimos el cambio de este promedio como:

$$D(1, t - \frac{1}{2}) \equiv A(1, t) - A(1, t - 1) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} x(u) du - \int_{t-\frac{3}{2}}^{t-\frac{1}{2}} x(u) du$$

o equivalentemente

$$D(1, t) \equiv A(1, t + \frac{1}{2}) - A(1, t - \frac{1}{2}) = \int_t^{t+1} x(u) du - \int_{t-1}^t x(u) du$$

La cantidad $|D(1, t)|$ puede interpretarse como el cambio promedio de la señal por unidad de tiempo alrededor de t . En general el cambio promedio en la escala λ se define como:

$$D(\lambda, t) \equiv A(\lambda, t + \frac{\lambda}{2}) - A(\lambda, t - \frac{\lambda}{2}) = \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} x(u) du - \frac{1}{\lambda} \int_{t-\lambda}^t x(u) du \quad (1.6)$$

Debido a que las dos integrales en (1.6) involucran intervalos adyacentes ajenos, es fácil combinarlos en una sola integral sobre todo el eje real para obtener

$$D(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{\lambda, t}(u) x(u) du$$

donde

$$\tilde{\psi}_{\lambda, t}(u) \equiv \begin{cases} -1/\lambda, & \text{si } t - \lambda < u \leq t; \\ 1/\lambda, & \text{si } t < u \leq t + \lambda; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si comparamos lo anterior con la onduleta de Haar $\psi^{(H)}(\cdot)$ de la ecuación (1.4), vemos que $\tilde{\psi}_{1,0}(u) = \sqrt{2}\psi^{(H)}(u)$. Entonces el esquema de mirar a las diferencias de promedios en una escala unitaria en el tiempo $t = 0$ es equivalente (dentro de una proporcionalidad constante) a integrar el producto de la señal $x(\cdot)$ y la onduleta de Haar. En efecto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(H)}(u) x(u) du \equiv W^{(H)}(1, 0),$$

la onduleta de Haar extrae la información acerca de que tan grande es la diferencia entre dos escalas de unidades de $x(\cdot)$ alrededor de $t = 0$.

Es sencillo ajustar la onduleta de Haar para extraer la información acerca de los cambios en escalas unitarias para otros valores de t : simplemente necesitamos cambiar el lugar en que tiene soporte la función $\psi^{(H)}(\cdot)$ ⁴. Definimos

$$\psi_{1,t}^{(H)} \equiv \psi^{(H)}(u-t) \quad \text{tal que} \quad \psi_{1,t}^{(H)}(u) = \begin{cases} -1/\sqrt{2}, & t-1 < u \leq t; \\ 1/\sqrt{2}, & t < u \leq t+1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Debido a que $\psi_{1,t}^{(H)}(\cdot)$ es sólo una versión trasladada de $\psi^{(H)}(\cdot)$ la función $\psi_{1,t}^{(H)}(\cdot)$ satisface las dos propiedades básicas de una onduleta (integra cero y su cuadrado integra la unidad). La integral del producto de $\psi_{1,t}^{(H)}(\cdot)$ con $x(\cdot)$ es:

$$W^{(H)}(1, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1,t}^{(H)}(u)x(u)du = \int_t^{t+1} x(u)du - \int_{t-1}^t x(u)du = D(1, t).$$

Es posible extraer información similar para la señal acerca de otras escalas λ y en cualquier localización del tiempo t considerando⁵:

$$\psi_{\lambda,t}^{(H)}(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi^{(H)}\left(\frac{u-t}{\lambda}\right) = \begin{cases} -1/\sqrt{2\lambda}, & \text{si } t-\lambda < u \leq t; \\ 1/\sqrt{2\lambda}, & \text{si } t < u \leq t+\lambda; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

. Utilizando esta onduleta obtenemos⁶

$$W^{(H)}(\lambda, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda,t}^{(H)}(u)x(u)du \propto D(\lambda, t) \quad (1.7)$$

Variando λ podemos obtener una imagen de como los promedios de $x(\cdot)$ cambian sobre diferentes escalas de un periodo de longitud λ al siguiente alrededor de t . Cuando λ es grande el soporte de la onduleta es más amplio y

⁴A la onduleta básica a partir de la cual se hacen traslaciones y reescalamientos se le conoce comúnmente como onduleta madre.

⁵La variable λ modula la longitud del soporte de la onduleta, por ejemplo si el soporte de $\psi_{1,t}(\cdot)$ es $[t-d, t+d]$, entonces el soporte de $\psi_{\lambda,t}(\cdot)$ es $[\lambda(t-d), \lambda(t+d)]$. Para mantener la energía unitaria se añade el término $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Observemos que $\psi_{\lambda,t}^{(H)}(\cdot)$ también satisface las propiedades de onduletas (1.1) y (1.2)

⁶ $a \propto b$ se lee como a es proporcional a b . En particular $W^{(H)}(\lambda, t)$ es proporcional al cambio en el promedio a la escala λ de la señal en t .

por tanto nos ofrece información sobre variaciones de la señal a gran escala, mientras que para λ pequeño el soporte de la onduleta es menos amplio y nos informa sobre variaciones (de los promedios) de la señal en escalas pequeñas. Una manera de visualizar el proceso es en términos de fotografías en las que en las escalas mayores la foto nos da una imagen amplia sin detalles y una foto en las escalas menores completa los detalles (mediante “acercamientos”). De esta manera las señales que oscilen muy rápidamente arrojaran valores mayores de $W^{(H)}(\lambda, t)$ para λ pequeña, mientras que las señales que oscilan más lentamente tendrán mayores valores de $W^{(H)}(\lambda, t)$ para valores grandes de λ .⁷

A la colección de variables $\{W^{(H)}(\lambda, t) : \lambda > 0, -\infty < t < \infty\}$ se le conoce como la transformada continua en onduletas de Haar de $x(\cdot)$. La interpretación de esta transformada es que $W^{(H)}(\lambda, t)$ es proporcional a la diferencia entre dos promedios adyacentes de escala λ , con el primer promedio comenzando en t y el segundo promedio terminando en t . De manera similar podemos tomar cualquier otra onduleta $\psi(\cdot)$ y construir la CWT basada en ella mediante:

$$W(\lambda, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda, t}(u)x(u)du \quad \text{donde} \quad \psi_{t, \lambda}(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right) \quad (1.8)$$

o bien en términos del producto interno $W(\lambda, t) = \langle x, \psi_{t, \lambda} \rangle$; esta igualdad nos permite interpretar a $\{W(\lambda, t) : \lambda > 0, -\infty < t < \infty\}$ como la proyección de la señal $x(\cdot)$ sobre el conjunto de todas las traslaciones y reescalamientos de la onduleta madre: $\{\psi_{\lambda, t} : \lambda > 0, -\infty < t < \infty\}$ ⁸.

Es necesario recalcar que aunque a argumentación utilizada para introducir la definición de la transformada se hizo tomando como punto de partida la onduleta de Haar, las propiedades enunciadas anteriormente son válidas para una amplia gama de onduletas, en particular para las *symmlets* o *least asymmetric wavelets* que se serán las funciones básicas utilizadas en el ejercicio empírico. De manera que en estos casos también es válido interpretar a la transformada en onduletas como una cantidad proporcional a la diferencia entre promedios *ponderados* de valores adyacentes de la señal.

Ahora establecemos un hecho fundamental acerca de la CWT; esto es, que preserva toda la información de $x(\cdot)$. Si $\psi(\cdot)$ satisface la condición de

⁷Para una ilustración empírica de estas afirmaciones remitase a: Bruce y Gao (1996) cap.2 así como Percival y Walden (2000) cap 4.10

⁸Este conjunto haría las veces de una “base” para L^2 . Ogden (1997) muestra que el conjunto ortonormal $\{\psi_{\lambda, t} : \lambda, t \in \mathbb{Z}\}$ es suficiente para aproximar “arbitrariamente bien” cualquier función en L^2 mediante una combinación lineal de elementos en este conjunto.

admisibilidad (1.3) y si la señal es de energía finita,⁹ entonces podemos recuperar a $x(\cdot)$ a partir de su CWT via:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty W(\lambda, t) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{t-u}{\lambda}\right) du \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad (1.9)$$

por lo tanto una función y su CWT son dos representaciones de la misma entidad matemática; más aún:

$$\int_{-\infty}^\infty x^2(t) dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty W^2(\lambda, t) dt \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad (1.10)$$

lo anterior dice que $(W(\lambda, t)/\lambda)^2$ define esencialmente una función de densidad de la energía de la señal, que la descompone a través de las diferentes escalas y tiempos. Esto nos permite apreciar la utilidad fundamental de la CWT, a saber, la capacidad de presentar cierta información acerca de $x(\cdot)$ que no es fácilmente disponible, (por ejemplo, en una gráfica de la función $x(\cdot)$ versus t) pues expresa a la señal a partir de sus proyecciones sobre las distintas localizaciones de las onduletas (variable t) y las distintas escalas (variable λ), de este modo quedan de relieve las características más relevantes de la señal, es decir se enfatizan las escalas en las que se presentan las mayores variaciones además de que se localizan en el tiempo.

1.1.3. La Transformada Discreta: DWT

Como se ha establecido la transformada continua en onduletas para una función de una variable es una función de dos variables, sin embargo dicha transformación es redundante pues cambios muy pequeños en la escala tienen efectos de magnitud similar en la transformada, por tanto la información adicional de dicha frecuencia es muy poca. Para “minimizar” la transformación uno puede seleccionar valores discretos de λ y t (que sirvan como representantes) y tener aún una transformación que es invertible. También se busca que, bajo algunas condiciones más sobre la función onduleta ψ , dicho muestreo produzca una base ortogonal para L^2 , a saber, $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ similar al caso continuo pero con una cantidad al menos numerable de elementos.

Aunque hemos introducido la DWT como un submuestreo de la CWT, esta se puede justificar independientemente como una poderosa herramienta

⁹Es decir que satisface que

$$\int_{-\infty}^\infty x^2(t) dt < \infty$$

para el análisis de las series de tiempo debido a sus propiedades prácticas. En primera instancia recordemos que en las aplicaciones se tienen datos discretos, los cuales no permiten una extensión obvia para la señal en tiempo continuo y por ende de su CWT, se recurre entonces a la DWT que esta diseñada para series discretas y arroja interpretaciones similares a las de CWT. Algunas otras características de la DWT que Percival y Walden (2000) enfatizan son la capacidad de la transformada para remover la correlación en algunas series¹⁰ y la eficiencia de su cálculo a través del algoritmo pirámide o piramidal. Además la partición de la energía de la serie de tiempo que resulta de la DWT está directamente asociada con las diferentes escalas y tiempos, así esta descomposición de energía es muy parecida a un análisis de varianza (ANOVA), basado en la escala que es análogo al análisis de varianza basado en el poder del espectro.

Ahora explicaremos más a detalle las propiedades de la DWT, primero como transformada ortonormal y luego desde la perspectiva de filtros. Estas dos alternativas nos permitirán interpretar los coeficientes de la DWT como proyecciones de la señal sobre subespacios con distintos componentes frecuenciales. La descripción siguiente de la DWT se hará en función de la onduleta de Haar, pero como en el caso continuo los resultados son válidos para otras onduletas. El análisis se aplicará a una serie de tiempo de N observaciones con valores reales, X_0, X_1, \dots, X_{N-1} , que en lo sucesivo denotaremos como $\{X_t : t = 0, \dots, N - 1\}$ o solamente $\{X_t\}$. Para simplificar definamos \mathbf{X} como el vector columna de dimensión N cuyo t -ésimo elemento es X_t para $t = 0, \dots, N - 1$. Asumiremos también que $N = 2^J$ para algún entero positivo J .

Al igual que la transformada de Fourier discreta ortonormal, la transformada en onduletas discreta (DWT) de $\{X_t\}$ es una transformada ortonormal. A continuación asumiremos que existe una matriz \mathcal{W} de valores reales y dimensiones $N \times N$ que define a la DWT y que satisface que $\mathcal{W}^T \mathcal{W} = I_N$. Más adelante discutiremos respecto a como definir sus renglones. Sea $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$, donde \mathcal{W} es la matriz antes mencionada, entonces denotamos por $\{W_n : n = 0, \dots, N - 1\}$ a los elementos del vector (columna) \mathbf{W} de dimensión $N = 2^J$, cuyo n -ésimo elemento es el n -ésimo coeficiente W_n de la DWT.

La ortonormalidad de \mathcal{W} implica que $\mathbf{X} = \mathcal{W}^T \mathbf{W}$ y $\|\mathbf{W}\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2$. Entonces W_n^2 representa la contribución de la energía atribuible al coeficiente de la DWT cuyo índice es n .

Ahora con el objetivo de mostrar que el n -ésimo coeficiente W_n está aso-

¹⁰Particularmente de aquellas conocidas como de Memoria Larga.

ciado con una escala particular y un conjunto particular de tiempos, consideremos la matriz \mathcal{W} asociada a la onduleta de Haar para $N = 16$. Las filas de esta matriz para $n = 0, 8, 12, 14$ y 15 son: ¹¹

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{0\bullet}^T &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{14 \text{ ceros}}\right], & \mathcal{W}_{8\bullet}^T &= \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{12 \text{ ceros}}\right] \\ \mathcal{W}_{12\bullet}^T &= \left[-\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{8}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{8}}}_{4 \text{ de estos}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{8 \text{ ceros}}\right] \\ \mathcal{W}_{14\bullet}^T &= \left[-\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{4}, \underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{8 \text{ de estos}}\right], & \mathcal{W}_{15\bullet}^T &= \left[\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}\right]_{16 \text{ de estos}} \end{aligned}$$

las once filas restantes de la matriz son versiones trasladadas de las anteriores:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{1\bullet} &= \mathcal{T}^2 \mathcal{W}_{0\bullet} & \mathcal{W}_{2\bullet} &= \mathcal{T}^4 \mathcal{W}_{0\bullet} & \dots & & \mathcal{W}_{7\bullet} &= \mathcal{T}^{14} \mathcal{W}_{0\bullet} \\ \mathcal{W}_{9\bullet} &= \mathcal{T}^4 \mathcal{W}_{8\bullet} & \mathcal{W}_{10\bullet} &= \mathcal{T}^8 \mathcal{W}_{8\bullet} & \mathcal{W}_{11\bullet} &= \mathcal{T}^{12} \mathcal{W}_{8\bullet} \\ \mathcal{W}_{13\bullet} &= \mathcal{T}^8 \mathcal{W}_{12\bullet} \end{aligned}$$

donde \mathcal{T} es una matriz de traslaciones ¹² y cuya forma específica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Retomemos ahora la noción de escala para el caso de una señal discreta. Para un entero positivo λ sea

$$\bar{X}_t(\lambda) \equiv \frac{1}{\lambda} \sum_{l=0}^{\lambda-1} X_{t-l} \quad (1.11)$$

que representa el promedio de los λ valores (datos) contiguos con índices desde $t - \lambda + 1$ hasta t (notemos que $\bar{X}_t(1) = X_t$, a quién podemos ver simplemente como “un promedio de un sólo punto” y que $\bar{X}_{N-1}(N) = \bar{X}$ que es el promedio muestral de todos los N valores). Nos referiremos a $\bar{X}_t(\lambda)$ como el promedio muestral para la escala λ sobre el conjunto de tiempos

¹¹En adelante se hará uso de la notación $\mathbf{A}_{j\bullet}$ y $\mathbf{A}_{\bullet k}$ para referirnos a la j -ésima fila y la k -ésima columna respectivamente de una matriz \mathbf{A}

¹²La matriz de traslaciones es una transformación (matriz) ortogonal ya que $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^T$

$t - \lambda + 1$ a t . Como $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$ es posible escribir:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_0 \\ \vdots \\ W_7 \\ W_8 \\ \vdots \\ W_{11} \\ W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_0) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{15} - X_{14}) \\ \frac{1}{2}(X_3 + X_2 - X_1 - X_0) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(X_{15} + X_{14} - X_{13} - X_{12}) \\ \frac{1}{\sqrt{8}}(X_7 + \dots + X_4 - X_3 - \dots - X_0) \\ \frac{1}{\sqrt{8}}(X_{15} + \dots + X_{12} - X_{11} - \dots - X_8) \\ \frac{1}{4}(X_{15} + \dots + X_8 - X_7 - \dots - X_0) \\ \frac{1}{4}(X_{15} + \dots + X_0) \end{bmatrix}$$

Usando la definición para $\bar{X}_t(\lambda)$ podemos escribir a las W_n 's como:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{X}_1(1) - \bar{X}_0(1)], \dots, W_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{X}_{15}(1) - \bar{X}_{14}(1)] \\ W_8 &= \bar{X}_3(2) - \bar{X}_1(2), \dots, W_{11} = \bar{X}_{15}(2) - \bar{X}_{13}(2) \\ W_{12} &= \sqrt{2}[\bar{X}_7(4) - \bar{X}_3(4)], \quad W_{13} = \sqrt{2}[\bar{X}_{15}(4) - \bar{X}_{11}(4)] \\ W_{14} &= 2[\bar{X}_{15}(8) - \bar{X}_7(8)] \\ W_{15} &= \bar{X}_{15}(16) \end{aligned}$$

A apartir de las ecuaciones anteriores notemos que los primeros ocho coeficientes de la DWT, W_0, \dots, W_7 , son proporcionales a diferencias (cambios) en promedios adyacentes de $\{X_t\}$ en la escala unitaria; los siguiente cuatro coeficientes, i.e. W_8, \dots, W_{11} son diferencias de promedios adyacentes en la escala de dos; W_{12} y W_{13} son proporcionales a diferencias en la escala de cuatro, W_{14} es proporcional a una diferencia en la escala de ocho y finalmente el coeficiente W_{15} es proporcional al promedio de todos los datos. Observemos que las ecuaciones anteriores tienen como análogo en el caso continuo a la ecuación (1.7), de esta manera la DWT preserva la interpretación de la CWT en cuanto a que cada coeficiente de onduletas es proporcional a la diferencia entre dos promedios adyacentes en su escala correspondiente.

Generalizando para $N = 2^J$ y para la onduleta de Haar, los elementos de \mathbf{W} pueden organizarse de tal manera que los primeros $N/2$ coeficientes están asociados con cambios en la escala unitaria; los siguientes $N/4$ coeficientes, con cambios en la escala de dos; y así sucesivamente hasta que llegamos a los coeficientes W_{N-4} y W_{N-3} , que están asociados con cambios en la escala de $N/4$; luego el coeficiente W_{N-2} está asociado con un cambio en la escala de $N/2$; y finalmente W_{N-1} es proporcional al promedio de todos los datos

(i.e. en la escala N).¹³ Entonces hay exactamente $N/(2\tau_j)$ coeficientes de la DWT asociados con cambios en la escala de τ_j , donde $\tau_j \equiv 2^{j-1}$ para $j = 1, \dots, J$, (notemos que $\tau_1 = 1$ y $\tau_J = N/2$)¹⁴; adicionalmente hay un sólo coeficiente W_{N-1} asociado con un promedio en la escala de N . Los $N-1$ coeficientes que están asociados son cambios en varias escalas son llamados *coeficientes de onduletas*, mientras que W_{N-1} es llamado el *coeficiente de escala*. El patrón observado en la DWT de Haar es similar para todas las onduletas que pertenecen a la clase de Daubechies¹⁵, en particular para la onduleta que se utiliza en el ejercicio empírico de este trabajo, la *symmlet* o *least asymmetric wavelet*.

Es importante mencionar que τ_j es una escala estandarizada sin unidades; sin embargo en las aplicaciones prácticas, es necesario tener en cuenta el intervalo Δt entre las observaciones, en cuyo caso τ_j corresponde a la escala $\tau_j \Delta t$, quién si tiene interpretación práctica.

Descompongamos los elementos del vector \mathbf{W} en $J+1$ subvectores. Los primeros J subvectores se denotan por \mathbf{W}_j , $j = 1, \dots, J$, y el j -ésimo vector contiene todos los coeficientes de la DWT para la escala τ_j . Note que \mathbf{W}_j es un vector columna con $N/2^j$ elementos. El subvector final está denotado como \mathbf{V}_J y contiene sólo al coeficiente de escala W_{N-1} . Es posible escribir

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \dots \\ \mathbf{W}_J \\ \mathbf{V}_J \end{bmatrix}$$

cuando $N = 2^J = 16$ de tal manera que $J = 4$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1^T &= [W_0, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7] \\ \mathbf{W}_2^T &= [W_8, W_9, W_{10}, W_{11}] \end{aligned}$$

¹³Percival y Walden (2000) p. 59

¹⁴Percival y Walden (2000) muestran que las filas de \mathcal{W} que producen los coeficientes de onduletas para un escala particular son versiones trasladadas circularmente unas de las otras y la distancia (o longitud) de la traslación entre filas adyacentes para la escala τ_j es $2\tau_j = 2^j$.

¹⁵Las onduletas de Daubechies son precisamente aquellas que presevan la interpretación descrita anteriormente para los coeficientes de su DWT, es decir que el i -ésimo coeficiente de onduletas está asociado a la escala $\tau_j = 2^{j-1}$ para j tal que $\frac{2^{j-1}-1}{2^j-1} < \frac{i}{N} \leq \frac{2^j-1}{2^j}$ o como veremos más adelante está asociado a frecuencias en el intervalo $[1/2^{j+1}, 1/2^j]$; es necesario aclarar que esta interpretación no es una consecuencia automática de la definición de una onduleta. Estas onduletas están asociadas a filtros obtenidos mediante la *factorización espectral* del módulo al cuadrado de su transformada de Fourier. Refierase a Percival y Walden (2000) capítulo 4.8

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_3^T &= [W_{12}, W_{13}] \\ \mathbf{W}_4^T &= [W_{14}] \\ \mathbf{V}_4^T &= [W_{15}]\end{aligned}$$

Análogamente definamos a \mathcal{W}_j y \mathcal{V}_J como las matrices que particionando las filas de \mathcal{W} conmesuran con las particiones de \mathbf{W} en $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_j$ y \mathbf{V}_J . Entonces la matriz \mathcal{W}_1 de $\frac{N}{2} \times N$ está formada por las filas desde $n = 0$ hasta $n = \frac{N}{2} - 1$ de \mathcal{W} ; la matriz \mathcal{W}_2 de $\frac{N}{4} \times N$ está formada por las filas desde $n = \frac{N}{2}$ hasta $n = \frac{3N}{4} - 1$; y así sucesivamente hasta que llegamos a las matrices \mathcal{W}_J y \mathcal{V}_J , que son las últimas dos filas de \mathcal{W} . Entonces tenemos que:

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_J \\ \mathcal{V}_J \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

donde \mathcal{W}_j es una matriz de $\frac{N}{2^j} \times N$ para $j = 1, \dots, J$ y \mathcal{V}_J es un vector fila de N elementos (y que de hechos todos son iguales a $\frac{1}{\sqrt{N}}$). En el ejemplo de la DWT con $N = 16$, \mathcal{W}_1 es un matriz de 8×16 cuyas filas son las ocho primeras filas de \mathcal{W} ; i.e.

$$\mathcal{W}_1 = [\mathcal{W}_{0\bullet}, \mathcal{W}_{1\bullet}, \mathcal{W}_{2\bullet}, \mathcal{W}_{3\bullet}, \mathcal{W}_{4\bullet}, \mathcal{W}_{5\bullet}, \mathcal{W}_{6\bullet}, \mathcal{W}_{7\bullet}]^T;$$

de la misma manera \mathcal{W}_2 es la matriz de 4×16 dada por:

$$\mathcal{W}_2 = [\mathcal{W}_{8\bullet}, \mathcal{W}_{9\bullet}, \mathcal{W}_{10\bullet}, \mathcal{W}_{11\bullet}]^T$$

mientras que \mathcal{W}_3 , \mathcal{W}_4 y \mathcal{V}_4 son las matrices de 2×16 , 1×16 y 1×16 respectivamente dadas por:

$$\mathcal{W}_3 = [\mathcal{W}_{12\bullet}, \mathcal{W}_{13\bullet}]^T, \quad \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_{14\bullet}^T \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_4 = \mathcal{W}_{15\bullet}^T.$$

La condición de conservación de la energía la podemos escribir como:

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \|\mathbf{W}\|^2 = \sum_{j=1}^J \|\mathbf{W}_j\|^2 + \|\mathbf{V}_J\|^2$$

de tal manera que $\|\mathbf{W}_j\|^2$ representa la contribución de la energía de $\{X_i\}$ debida a cambios en la escala τ_j . Para todas las DWTs formadas utilizando

alguna ondeleta de la clase de Daubechies se cumple que $W_{N-1}/\sqrt{N} = \bar{X}$;¹⁶ esto implica que $\|\mathbf{V}_J\| = N\bar{X}^2$ y es posible descomponer la varianza como:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N} \|\mathbf{X}\|^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{N} \|\mathbf{W}\|^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|\mathbf{W}_j\|^2 \quad (1.13)$$

de tal manera que $\|\mathbf{W}_j\|^2/N$ representa la contribución de la varianza muestral de $\{X_t\}$ debida a cambios en la escala τ_j . Esta descomposición de la varianza muestral puede ser utilizada para poder definir un poder del espectro empírico de la onduleta $\{P_{\mathcal{W}}(\tau_j) : \tau_j = 1, 2, 4, \dots, N/2\}$ para $\{X_t\}$ como

$$P_{\mathcal{W}}(\tau_j) \equiv \frac{1}{N} \|\mathbf{W}_j\|^2, \quad \text{para el cual tenemos} \quad \sum_{j=1}^J P_{\mathcal{W}}(\tau_j) = \hat{\sigma}_X^2$$

Consideremos ahora la síntesis en onduletas de \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = \mathcal{W}^T \mathbf{W} = \sum_{n=0}^{N-1} W_n \mathcal{W}_n \bullet = \sum_{j=1}^J \mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j + \mathcal{V}_J^T \mathbf{V}_J \quad (1.14)$$

de la ecuacion anterior es posible obtener lo que se puede considerar la versión discreta de la ecuación (1.9); para ello definamos como $\mathcal{W}_{j,k}$ a la k -ésima fila de la matriz \mathcal{W}_j ,¹⁷ lo que nos permite reescribir la ecuación anterior como:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J \sum_k \mathcal{W}_{j,k} \mathbf{W}_{j,k} + \mathcal{V}_J^T \mathbf{V}_J$$

así la señal es expresada como una combinación lineal de los primeros $N - 1$ vectores (fila) que conforman a la matriz \mathcal{W} (los cuales son una base ortonormal para \mathbb{R}^N , por construcción de esta matriz ortogonal y donde $\mathcal{W}_{j,k}$ es la versión discreta de $\psi_{j,k}$), mas un término de ajuste que asume el posible error por la discretización de la base de onduletas.¹⁸

Ahora definamos $\mathcal{D}_j \equiv \mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j$ para $j = 1, \dots, J$, el cual es un vector columna de dimensión N cuyos elementos están asociados con cambios en \mathbf{X} en la escala τ_j ; i.e. $\mathbf{W}_j = \mathcal{W}_j \mathbf{X}$ representa la porción del análisis $\mathbf{W} = \mathcal{W} \mathbf{X}$

¹⁶Para una demostración de este hecho remitase a Percival y Walden (2000) p.517

¹⁷Recordemos que \mathcal{W}_j tiene $\frac{N}{2\tau_j}$ filas.

¹⁸Cada vector de la matriz puede interpretarse como una versión trasladada y reescalada de la versión discreta de la onduleta básica, que está representada en la primera fila de la matriz.

atribuible a la escala τ_j , mientras que $\mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j$ es la porción de la síntesis $\mathbf{X} = \mathcal{W}^T \mathbf{W}$ atribuible a la escala τ_j . Sea $\mathcal{S}_J \equiv \mathcal{V}_J^T \mathbf{V}_J$, el cual tiene todos sus elementos iguales a la media muestral \bar{X} . Podemos escribir

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_J \quad (1.15)$$

la cual define un *análisis multiresolución* (MRA) de \mathbf{X} ; i.e. expresa a la serie \mathbf{X} como la suma de un vector constante \mathcal{S}_J y otros J vectores \mathcal{D}_j , $j = 1, \dots, J$, cada uno de los cuales contiene una serie de tiempo relacionada con variaciones in \mathbf{X} a cierta escala. Nos referiremos \mathcal{D}_j como el detalle al j -ésimo nivel de onduletas.

La ortonormalidad de \mathcal{W} implica que para $1 \leq j, k \leq J$,

$$\mathcal{D}_j^T \mathcal{D}_k = \mathbf{W}_j^T \mathcal{W}_j \mathcal{W}_k^T \mathbf{W}_k = \begin{cases} \mathbf{W}_j^T \mathbf{W}_j, & k = j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\|\mathcal{D}_j\|^2 = \|\mathbf{W}_j\|^2$ y usando la ecuación (1.13), tenemos que

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{X}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|\mathcal{D}_j\|^2, \quad j = 1, \dots, J,$$

donde $\|\mathcal{D}_j\|^2 / N$ puede ser interpretada como la varianza muestral de N elementos de \mathcal{D}_j . Entonces el poder del espectro discreto de onduletas $P_{\mathcal{W}}(\tau_j) \equiv \|\mathbf{W}_j\|^2 / N$ puede ser expresado en términos de los detalles como $P_{\mathcal{W}}(\tau_j) = \|\mathcal{D}_j\|^2 / N$

Recordemos que hemos definido $\mathcal{S}_J = \mathcal{V}_J^T \mathbf{V}_J$ como un vector cuyos elementos son todos \bar{X} . Para $0 \leq j \leq J - 1$ sea

$$\mathcal{S}_j \equiv \sum_{k=j+1}^J \mathcal{D}_k + \mathcal{S}_J \quad (1.16)$$

y para $j \geq 1$

$$\mathbf{X} - \mathcal{S}_j = \sum_{k=1}^j \mathcal{D}_k$$

podemos argumentar que \mathcal{S}_j es una versión suavizada de \mathbf{X} por que la diferencia entre los dos vectores involucra sólo detalles en la escala $\tau_j = 2^{j-1}$ y menores, entonces mientras el índice j crece, \mathcal{S}_j debe ser más suave (como en

el caso cuando $j = J$ donde todos los elementos son el mismo). No referiremos a \mathcal{S}_j como el j -ésimo *wavelet smooth* para \mathbf{X} . Para ilustrar los conceptos hasta ahora definidos tomemos como ejemplo a la función doppler a la que se le ha añadido un ruido blanco.¹⁹ El grafico siguiente nos muestra en la parte superior a los datos generados, mientras que en la columna izquierda se muestran los detalles hasta el cuarto nivel, en la derecha se muestran los *smooths* también hasta el cuarto nivel, donde es posible apreciar como se tienen “versiones” cada vez más suavizadas de la señal.

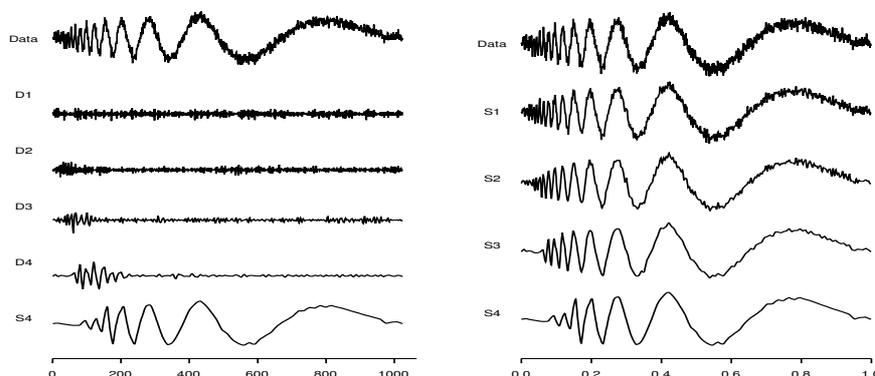


Figura 1.3: Ejemplo

Similarmente definimos el j -ésimo *wavelet rough* para \mathbf{X} como:

$$\mathcal{R}_j \equiv \begin{cases} 0, & j = 0; \\ \sum_{k=1}^j \mathcal{D}_k, & 1 \leq j \leq J \end{cases} \quad (1.17)$$

entonces tenemos que $\mathbf{X} = \mathcal{S}_j + \mathcal{R}_j$ para toda j , donde \mathcal{S}_j está asociado con las escalas τ_{j+1} y mayores, mientras que \mathcal{R}_j está asociado a la escala τ_j y menores. Notemos que $\mathcal{S}_j - \mathcal{S}_{j+1} = \mathcal{D}_{j+1}$ y $\mathcal{R}_j - \mathcal{R}_{j+1} = \mathcal{D}_{j+1}$; i.e. los detalles son las diferencias entre los *smooths* y los *roughs* adyacentes. De este modo podemos apreciar como el vector de *smooths* \mathcal{S}_j resulta de refinamientos sucesivos de la señal que van retirando sus componentes de alta frecuencia (o *roughs* \mathcal{R}_j) y que lo aproximan a la tendencia, en tanto que los vectores \mathcal{D}_j representan las fluctuaciones de la señal en la escala j correspondiente.

¹⁹Ejemplo tomado de Bruce y Gao (1996) pp. 27-30. La función doppler está definida como $\text{doppler}(t) = \sqrt{t(1-t)} \sin\left(\frac{2,1\pi}{t+0,05}\right)$.

1.2. El filtro Hodrick-Prescott

La extracción de componente cíclico mediante el filtro de Hodrick Prescott fue originalmente desarrollado como solución a un problema de minimización en la variación de los componentes cíclicos de una serie de tiempo observada, $\epsilon_t = y_t - \mu_t$, sujeto a una condición sobre el componente tendencial de crecimiento μ_t , quien representa un suerte de “suavización” de la serie original y se obtiene penalizando la aceleración en la tendencia, a través del siguiente problema de minimización con respecto a μ_t :

$$\begin{aligned} & \text{máx } \sum_{t=1}^T (y_t - \mu_t)^2 \\ \text{s.a. } & \sum_{t=1}^T [(\mu_{t+1} - \mu_t) - (\mu_t - \mu_{t-1})]^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Cuya funcion lagrangiana está dada por:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T (y_t - \mu_t)^2 + \lambda \sum_{t=1}^T [(\mu_{t+1} - \mu_t) - (\mu_t - \mu_{t-1})]^2 \quad (1.19)$$

para $T = 0, 1, \dots, T + 1$ ²⁰. Donde T es el tamaño de la muestra y λ es un multiplicador lagrangiano que se puede interpretar como parámetro de suavización de la tendencia de crecimiento del producto (potencial), de manera que al cambiar esta ponderación se afecta la respuesta del producto potencial (o tendencia) a los movimientos del producto real.

La elección del valor de λ en el proceso de minimización es crucial pues ella incide directamente en la estimación de la tendencia de crecimiento. Entre más alto sea el valor de λ , más suave será la trayectoria, de modo que en el límite, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, μ tiende a una senda de crecimiento lineal, ya que la función de pérdida se minimiza penalizando cambios en el producto potencial y esto solo ocurre cuando se hace constante la tasa de crecimiento del producto potencial. En cambio cuando el factor de crecimiento se aproxima a cero, la función de pérdida se minimiza eliminando la diferencia entre el producto real y potencial lo cual se obtiene igualando el producto potencial al real ($\mu_t = y_t$). Estos dos extremos nos permiten observar la importancia de la elección del parámetro de suavización, que sin embargo es hasta cierto punto arbitrario. Esta característica acerca del filtro representa quizá su mayor desventaja pues, al no existir un modo preciso de elegir λ no es posible

²⁰La función lagrangiano también se puede expresar como:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^S \epsilon_t^2 + \lambda \sum_{t=2}^{S-1} (\Delta\mu_{t+1} - \Delta\mu_t)^2 \quad (1.20)$$

identificar de manera certera el valor absoluto de la brecha entre el producto real observado y su tendencia para un año en particular del tiempo. Pese a la controversia a cerca del valor del multiplicador, generalmente se establece $\lambda = 1600$, que es el valor propuesto por los creadores de esta técnica, Hodrick y Prescott (1993), y que afirman es el valor más apropiado para series de datos trimestrales. No obstante Guay y Saint Amant (1996) presentan evidencia mediante simulaciones de Monte Carlo en la que el parámetro de 1600 sólo es apropiado realizando supuestos poco plausibles; finalmente es preciso aclarar que cualquier posible valor óptimo tendrá que depender, necesariamente y entre otras cosas de las características propias del proceso que genera la serie de los datos.

Por otro lado, Mills (2003) afirma que al establecer el parámetro de suavización como $\lambda = 1600$ el filtro HP este es comparable a un filtro ideal *high pass*, cuando se usan datos trimestrales.²¹ Esto produce un filtro que es muy parecido al óptimo, por que permite el paso de componentes cíclicos que tienen periodos de 32 trimestres o menos, lo cual corresponde a las descripciones más usuales del ciclo económico. Por otro lado evidencias recientes sugieren que cuando se filtran datos trimestrales que tienen cercana una raíz unitaria, el valor óptimo del parámetro de suavizamiento está en el rango de 1000-1050, aunque el valor de 1600 no conduce a serias distorsiones. Mientras que para datos anuales, se debe seleccionar un valor mucho más pequeño, entre 5 y 10 y para datos mensuales se deben elegir valores mucho más grandes, entre 80,000 y 160,000.²²

Hay más dudas tanto acerca de la precisión del filtro HP en la descomposición de series de tiempo en tendencias y ciclos, como en las propiedades de las series resultantes. Por ejemplo, existe evidencia de que la primera varía sobre los diferentes procesos generadores de datos y sobre los distintos conjuntos de ellos (Brouwer, 1998); mientras que entre las propiedades más apreciadas del filtro está la capacidad de obtener una serie (de ciclos) estacionaria para cualquier proceso integrado hasta el orden cuatro (King y Rebelo, 1993). Otra característica relevante del filtro HP, señalada por autores como Singleton (1988), es que este puede proveer una aproximación apropiada a un filtro ideal *high pass* cuando es aplicado a una serie de tiempo estacionaria. Esta afirmación resulta de la comparación de las funciones de ganancia²³ del filtro ideal *versus* el HP. En la gráfica siguiente se puede

²¹Se llega a esta conclusión por medio de la comparación de la función de ganancia al cuadrado (valor absoluto al cuadrado de la transformada de Fourier) de filtro HP con la de un filtro ideal *high pass*.

²²Mills (2003) p. 95

²³La función de ganancia o respuesta-frecuencia del filtro está definida como el valor ab-

observar este contraste.

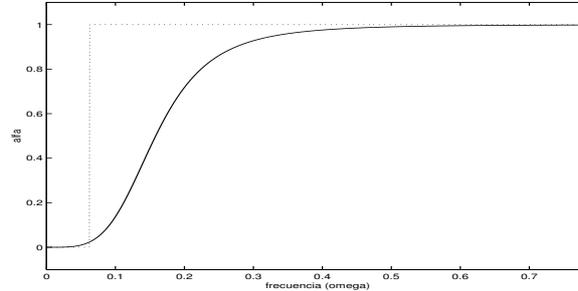


Figura 1.4: Función de ganancia del filtro HP, con $\lambda = 1600$, comparada con la de un filtro ideal *high pass* (línea punteada).

Uno de los propósitos fundamentales de este trabajo es la estimación de la brecha del producto que normalmente puede ser asociada con las frecuencias del ciclo económico además de la volatilidad de alta frecuencia en los datos, por ello es necesario conocer la eficiencia del filtro HP como vía para su estimación. Sin embargo el problema de asumir que el filtro HP puede ser visto como una medida adecuada del ciclo económico es que la mayoría de la series de tiempo económicas o son integradas de orden cero o son procesos altamente persistentes. Sobre el particular Guay y St-Amant (1996) condujeron una investigación sistemática de la habilidad del filtro HP para capturar las frecuencias del ciclo económico, es decir aquellas que se encuentran en el área limitada por el espectro de la serie original en las frecuencias entre seis y treinta y dos trimestres. Su mayor hallazgo es que cuando el pico de la serie se localiza en la frecuencia cero y la mayor parte de la varianza se concentra en las bajas frecuencias,²⁴ entonces el filtro HP no puede capturar adecuadamente las frecuencias del ciclo económico. De acuerdo con estos autores esto es ocasionado por que la mayor parte de las fluctuaciones de las series macroeconómicas se encuentra en la banda de frecuencias en que las función de ganancia del filtro HP difiere más de la del

soluta de su transformada de Fourier y representa la intensidad con la cual los componentes cíclicos de la serie original son alterados através de la función de filtrado. En particular el filtro HP tiene como función de ganancia

$$\alpha_{HP}(\omega) = \frac{4(1 - \cos(\omega))^2}{\lambda^{-1} + 4(1 - \cos(\omega))^2}.$$

²⁴Estas características corresponden con la forma descrita por Granger como típicas de las series de tiempo macroeconómicas

ideal.

Existe otro problema con las estimaciones del filtro HP y está relacionado con la estimación que se hace en las fronteras de la serie. Para entender como se desempeña el filtro al final de las muestras, recordemos que el problema de optimización resuelve la disyuntiva entre el tamaño de las desviaciones de la tendencia y la suavidad de la tendencia. Cuando ocurre un choque transitorio, el filtro difícilmente cambiará mucho la tendencia ya que esto implica elevarla antes del choque y bajarla después de él. Sin embargo al final de la muestra esta penalización está ausente implicando que la tendencia óptima será más sensible a los choques transitorios al final de la muestra que en medio de ella. Este problema se presenta aún cuando al final de la muestra la menor parte de la varianza de las desviaciones de la tendencia de HP es debida a variaciones en las frecuencias del ciclo económico y más debida a las fugas de frecuencias menores. La magnitud del problema descrito se constata por el hecho de que las diferencias de las desviaciones estimadas respecto a la tendencia, son del orden del 2% mayores al final de las muestras que en la parte media de la series, cuando en promedio las diferencias entre la tendencia y el ciclo son de sólo 3% (i.e. dos tercios de la variación en los extremos es sólo resultado del corte de la serie).²⁵

Finalmente es necesario precisar que el hecho de que el filtro HP no es el filtro óptimo no necesariamente significa que no sea una buena aproximación. De acuerdo con Amant y Norden (1998), las condiciones requeridas para identificar apropiadamente el componente cíclico mediante el filtro HP pueden ser sintetizadas de la siguiente manera: el espectro de la serie original debe tener un pico localizado en las frecuencias del ciclo económico y en estas frecuencias se debe concentrar una parte importante de la varianza de la serie. En cambio si la variabilidad de la señal está dominada por las bajas frecuencias, como es el caso de la mayoría de las series macroeconómicas en niveles, incluyendo el PIB real, el filtro HP hace un trabajo mediocre al extraer la brecha del producto asociada con el componente cíclico del PIB real.²⁶

La descripción hecha hasta ahora de ambos filtros (HP y onduletas) ya nos permite esbozar una estrategia metodológica para abordar el análisis de series de tiempo en busca de su componente cíclico. En primera instancia se filtrarán las series mediante la transformada en onduletas, lo que da lugar a

²⁵Amant y Norden (1998) p. 17

²⁶*Ibid.* p 18

un análisis multiresolución de la forma

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_J \quad (1.21)$$

donde \mathbf{X} es la señal bajo análisis (por ejemplo el PIB), \mathcal{D}_j para $j = 1 \dots J$ son los detalles (de corto plazo) que capturan los movimientos en la escala $[1/2^{j+1}, 1/2^j]$ para $j = 1 \dots J$ respectivamente y \mathcal{S}_J es el componente de largo plazo asociado a la escala $[0, 1/2^{J+1}]$. En esta ecuación el componente \mathcal{S}_J puede ser identificado como la tendencia de la serie en tanto que los detalles \mathcal{D}_j pueden ser identificados como los componentes cíclicos. De modo que se puede estudiar a $\sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j$ como una aproximación a la brecha entre la señal misma y su componente de tendencia, o visto de otro modo, como las fluctuaciones de la serie en las escalas de corto plazo. Esta interpretación sugiere inmediatamente una comparación con el filtro Hodrick Prescott pues este produce como resultado dos series, una que representa la tendencia (μ_t) y otra los componentes cíclicos (ϵ_t). Después de presentar los datos que serán utilizados en siguiente capítulo, en el tercero se presenta una comparación entre las series filtradas tanto filtro Hodrick Prescott como por onduletas.

Capítulo 2

Datos

El presente trabajo explora entre otras cosas, los comportamientos cíclicos en el PIB y sus componentes, es decir, el consumo, la inversión, el gasto gubernamental y las exportaciones e importaciones. También se investiga el comportamiento de los movimientos en tasa de inflación, los agregados monetarios y el desempleo. El análisis está centrado en la series históricas de los Estados Unidos, el Reino Unido y México; se eligieron a estos dos primeros países dado su papel fundamental en la historia económica de occidente así como por la calidad de sus datos económicos, que presentan series de una longitud razonable para el análisis en onduletas; en cambio el análisis del ciclo económico para México mediante onduletas es inédito y por tanto resulta de particular interés para nosotros.

Los datos utilizados para documentar los movimientos anteriores a la Segunda Guerra Mundial han sido obtenidos principalmente de Mitchell (1992) quien presenta una amplia recopilación de series históricas (que en algunos casos comienzan en 1780) y para complementar los datos acerca del Reino Unido previos a 1965 se empleó la compilación de Feinstein (1972).

Para los datos correspondientes a lo que se ha denominado como el periodo de la Postguerra se tiene como fuente fundamental al Fondo Monetario Internacional a través de sus IMF World Tables (2000) así como a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OECD) en su publicación, National Accounts Main Aggregates (2000), ambas fuentes proporcionan datos en todos los rubros necesarios para este trabajo. Así mismo la series estadounidenses más recientes se obtuvieron de el banco de datos de la reserva federal de Saint Louis, research.stlouisfed.org/fred2.

En cuanto a la información para la economía mexicana se tiene como fuentes primordiales al Banco de México quien ofrece series de datos a través

de su dirección electrónica www.banxico.org.mx, así como el Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática mediante su Banco de Información Económica, (BIE-INEGI) accesible via internet en www.bie.inegi.gob.mx. En particular las serie mexicana del Producto Interno Bruto fue extraída del BIE-INEGI y abarca una ventana de tiempo de 82 años comprendidos entre 1922 y 2003, se utiliza la serie de inflación y los agregados monetarios M1 y M2 proporcionados por Banxico (las series de M1 y M2 fueron complementadas con las reportadas por Mitchell(1992)), la serie de desempleo es tomada del BIE-INEGI.

Es preciso aclarar que en la parte que corresponde al análisis del ciclo económico se utilizan series anuales (a excepción de las series de agregados monetarios de quienes se utilizan las versiones mensuales¹) con el objetivo de evadir el problema de estacionalidad inherente a las series de tiempo económicas, y pese a que el filtro de onduletas podría discriminar (en cierta medida) los movimientos de ascenso y descenso habituales en las distintas épocas del año, prefiero no complicar el análisis y en su lugar busco los movimientos de más largo alcance.

En cuanto a los datos de mayor relevancia en este trabajo, i.e. los concernientes a la producción agregada, estos presentan las siguientes características. La serie del Producto Interno Bruto de México abarca un periodo de ochenta y tres años, comprendido entre 1922 y 2005; en tanto que las series de la producción (GDP) de los Estados Unidos y de la Gran Bretaña reportan datos en un periodo de 134 años desde 1870 hasta 2005. Enseguida se incluyen los gráficos correspondientes a las series de tasas de crecimiento de los tres países. En primera instancia la gráfica para los datos mexicanos permiten apreciar claramente los periodos establecidos por Torres García (2000), a saber, un primer periodo de gran volatilidad que incluye varios años con tasas de crecimiento negativas, que se extiende desde 1922 hasta 1932, luego se observa un periodo de relativamente poca volatilidad con tasas de crecimiento positivas que concluye a fines de los años setentas y finalmente se observa un periodo de volatilidad intermedia que incluye las crisis de los años ochentas y la de 1994-95. Por otro lado los gráficos de las tasas de crecimiento del PIB tanto de los Estados Unidos como del Reino Unido permiten apreciar los periodos reseñados en el capítulo 2, estos son, un periodo anterior a la Primera Guerra Mundial (anterior a 1914), luego una etapa de alta volatilidad y bruscos descensos en la trayectoria de crecimiento acotada por las dos guerras mundiales, en seguida se presenta la

¹Se eligieron las series mensuales ajustadas estacionalmente, en lugar de las series anuales, pues estas últimas no tienen la longitud recomendada para el análisis en onduletas.

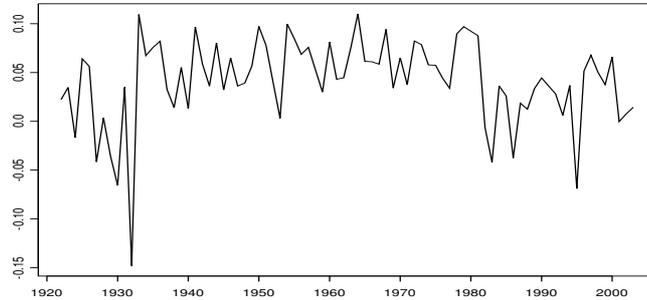


Figura 2.1: Gráfico de la serie de tasas de crecimiento anuales PIB de México (1922-2003)

época dorada del crecimiento que concluyo alrededor de 1971 y finalmente la etapa posterior al “quiebre” del acuerdo Bretton Woods.

Por lo que respecta las series concernientes a la economía mexicana, se consideran al Índice Nacional de Precios al Consumidor y sus tasas de inflación para estudiar a los precios. Estas series abarcan un periodo de setenta años desde 1935 a 2005. Los agregados monetarios son estudiados a través de M1 y M2, estas series son las únicas de periodicidad mensual en este estudio y abarcan el periodo comprendido entre diciembre de 1985 y julio de 2005. El indicador de desempleo, es la tasa de desempleo abierto en zonas urbanas (con metodología de INEGI), se considera una serie que abarca desde 1975 hasta 2005. Finalmente los componentes del PIB, i.e. Consumo, Inversión, Gasto de Gobierno e Impotaciones y Exportaciones fueron tomados de Banxico y cubren periodos entre 1970 y 2004. En el cuadro siguiente (2.1) se detallan los periodos comprendidos por cada una de las series para los tres países en estudio.

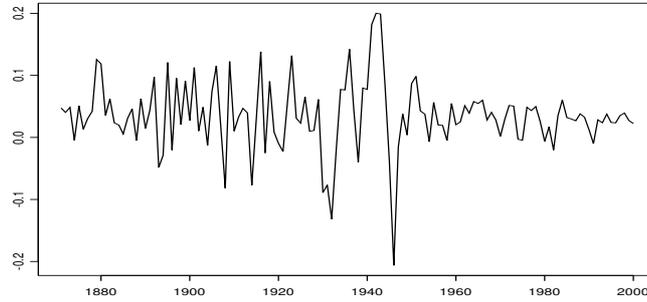


Figura 2.2: Gráfico de la serie de tasas de crecimiento anuales PIB de Estados Unidos

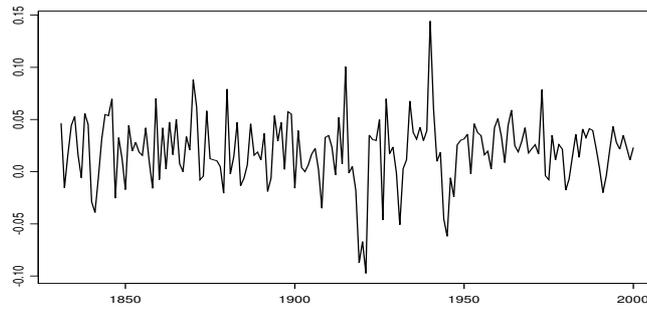


Figura 2.3: Gráfico de la serie de tasas de crecimiento anuales PIB del Reino Unido

Serie	México		USA		UK	
	Año Inicial	Año Final	Año Inicial	Año Final	Año Inicial	Año Final
PIB	1922	2005	1870	2005	1870	2005
Agregados Monetarios (M1 y M2)	Dic 1985	Jul 2005	Ene 1959	Ago 2005	Sep 1986	Ago 2005
Inflación	1935	2005	1870	2004	1870	2004
Desempleo	1975	2005	1860	2005	1860	2005
Consumo	1970	2004	1919	2004	1870	2004
Gasto Gubernamental	1970	2005	1929	2005	1970	2005
Inversión	1980	2004	1930	2004	1970	2004
Exportaciones e Importaciones	1970	2004	1930	2004	1970	2004

Cuadro 2.1: Datos

Capítulo 3

Análisis Comparativo Filtro H-P vs. Onduletas

La descripción hecha en el primer capítulo de la transformada en onduletas como método para descomponer una señal en componentes cíclicos y de tendencia nos sugiere similitudes y diferencias entre esta y el filtro Hodrick-Prescott (herramienta con mucho más utilizada en el análisis del ciclo económico); es por eso que en este capítulo se busca hacer una comparación entre ambos métodos, primero contrastando sus características teóricas y luego, desde una perspectiva más empírica, estableciendo diferencias y coincidencias entre las series tratadas por ambas metodologías.

En primera instancia es necesario mencionar que pese a la que la transformada en onduletas no fue conceptualizada, a diferencia del filtro Hodrick Prescott, como resultado de un proceso de minimización, los coeficientes que ella produce son el resultado de una proyección de la señal en la base ortonormal definida por los renglones de la matriz \mathcal{W} y por tanto representan la distancia mínima a los elementos de la base, es decir la señal puede ser expresada a través de una combinación lineal de onduletas (o desde nuestra perspectiva ciclos), como en la siguiente ecuación¹:

$$y(t) \approx \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^N \mathbf{w}_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_{J,k} \phi_{J,k}(t)$$

donde $\mathbf{w}_{j,k}$ y $\mathbf{v}_{J,k}$ representan los coeficientes de onduletas (y escala respectivamente) que son elementos del vector \mathbf{W} , de manera que los valores contenidos en este vector indican la aportación de cada onduleta (en su

¹Esta ecuación es resultado directo de $\mathbf{Y} = \mathcal{W}\mathbf{W}$

propia escala y localización particular en el dominio del tiempo) al comportamiento de la serie. Así la magnitud del coeficiente asociado a cada uno de estos “pequeños ciclos” cuantifica la influencia para la señal en general del elemento de la base (o ciclo) al que corresponde.

Por otro lado recordemos que, mientras el filtro HP realiza una descomposición de la señal en dos porciones, una asociada directamente a la tendencia de la señal y otra a sus componentes cíclicos, $y_t = \mu_t + \epsilon_t$, el filtro de onduletas produce un análisis multiresolución en el que se expresa a la señal mediante componentes asociados a distintas escalas, $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_J$, en este último caso la suma de los detalles \mathcal{D}_j , corresponde a los componentes cíclicos de la serie, más aún, cada uno de dichos componentes puede ser interpretado como un ciclo de periodicidad específica dada por la escala.

Otra característica que comparten ambos métodos es su capacidad para tratar con series no estacionarias, pues ni uno ni otro hacen supuestos de este tipo sobre la señal, a diferencia de otros métodos de análisis espectral como el análisis de Fourier.² Ambos métodos requieren condiciones especiales sobre las series para que una vez filtradas estas sean estacionarias; en el caso del filtro HP es necesario que la señal original sea integrada de a lo más orden $I(4)$, en tanto que el filtro de onduletas requiere que los procesos sean de memoria larga, aunque existen numerosos ejemplos de series que sin cumplir esta condición tienen series filtradas estacionarias.³

Como método de comparación para las bandas de frecuencias que son filtradas por cada uno de los filtros contrastemos las funciones de ganancia, de los filtros, de onduletas asociado a la función básica *symmlet* y Hodrick-Prescott,⁴ que están definidas respectivamente como:

$$\alpha_{\mathcal{W}}(\omega) = 2 \sin^8(\pi\omega) [1 + 4 \cos^2(\pi\omega) + 10 \cos^4(\pi\omega) + 20 \cos^6(\pi\omega)]$$

$$\alpha_{HP}(\omega) = \frac{4(1 - \cos(\omega))^2}{\lambda^{-1} + 4(1 - \cos(\omega))^2}$$

donde recordemos que la función de ganancia cuadrada cuantifica la magnitud de la alteración que sufren los componentes cíclicos mediante la operación de filtrado. A partir de sus gráficos es posible analizar las diferencias entre las funciones.

²El análisis de Fourier también involucra la proyección de la señal sobre un conjunto ortonormal de componentes, pero mientras que en este último sólo se utilizan senos y cosenos como funciones base, la transformada de onduletas puede utilizar una amplia gama de funciones base.

³Percival y Walden (2000).

⁴En la figura (??)

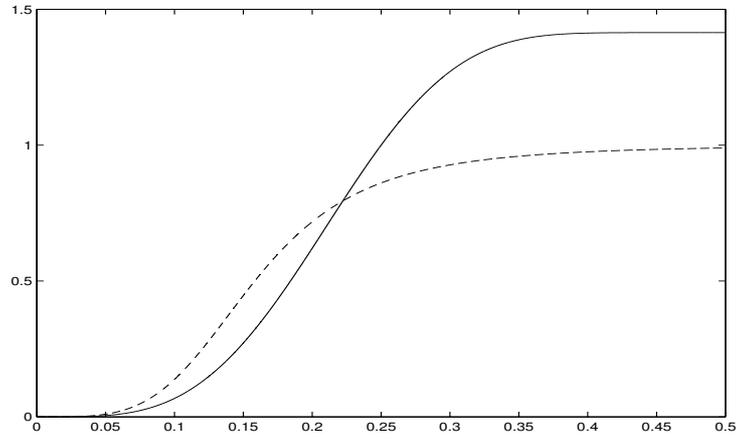


Figura 3.1: Comparación entre las funciones de ganancia del filtro Hodrick Prescott (línea punteada) y del filtro LA(4) o *symmlet*; con valor $\lambda = 1600$

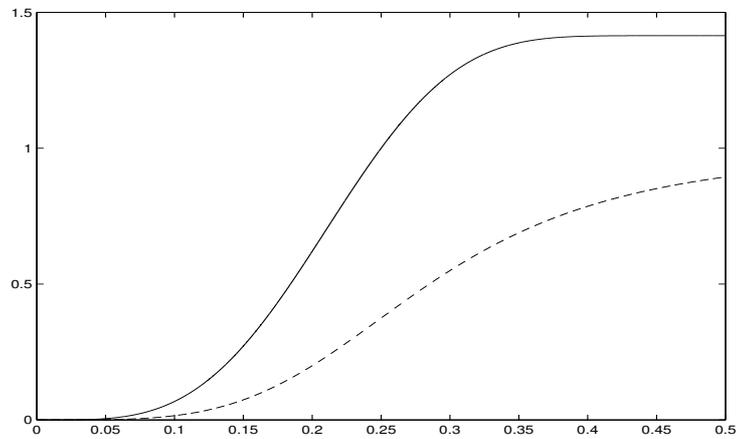


Figura 3.2: Comparación entre las funciones de ganancia del filtro Hodrick Prescott (línea punteada) y del filtro LA(4) o *symmlet*; con valor $\lambda = 100$

En el gráfico (3.1) donde podemos apreciar una comparación de las funciones de ganancia de los filtros Hodrick Precott (con valor $\lambda = 1600$) y del filtro de onduletas, que toma como onduleta básica a una *symmlet* o LA(4), nos muestra que el filtro HP otorga una mayor ponderación a las porciones de frecuencia en la banda entre 0 y 0.22 de modo que al realizar la operación de filtrado con HP se elimina una porción menor de los componentes de baja frecuencia de la señal que cuando se aplica el filtro de onduletas.⁵

En la figura (3.2) se hace un contraste similar, con la salvedad que ahora $\lambda = 100$ y aunque en este caso la función de ganancia del filtro HP está por debajo de la de filtro de onduletas, no obstante las transición entre las bajas y las altas frecuencias es muy lenta y esto hace que el filtro pierda la similitud con un filtro ideal *high pass*, situación que era observable cuando $\lambda = 1600$.

Aunque en ambos casos el proceso de filtrado produce series de tendencia suavizadas, el filtro de onduletas parece ser más apropiado para evitar el excesivo “alisamiento” de la señal cuando esta presenta periodos con graves disrupciones (como la señal del PIB de los Estados Unidos en la época de la Gran Depresión, o la serie del PIB de México entre los años 80 y 90). No obstante debemos señalar que el filtro HP permite una amplia gama de valores para el parametro de suavización λ , de modo que variando este valor se producen series muy similares a las filtradas a través de onduletas en sus distintas resoluciones; además la transformada en *wavelets* puede producir ligeras variantes del análisis de una misma serie cambiando la onduleta básica.

El análisis de los coeficientes de correlación, mostrados en la siguiente serie de tablas nos muestra que existe una gran similitud entre las serie filtradas vía onduletas y aquellas suavizadas mediante el filtro Hodrick-Precott. También se reafirma la hipótesis planteada líneas arriba en donde se establece que para cada nivel de detalle en el filtrado de la serie mediante onduletas hay un valor de λ que hace un filtrado similar, de manera que el suavizamiento dado por H-P coincide con algún \mathcal{S}_j .

Los cuadros (3.1) y (3.2), nos permiten apreciar que tan próxima es la tendencia estimada por ambos filtros a la señal misma del PIB. En este caso las mejores aproximaciones al PIB están dadas por el fitro H-P con $\lambda = 100$ asi como el \mathcal{S}_3 de onduletas. También es importante mencionar que estas dos series presentan un alto coeficiente de correlación al igual que la serie filtrada con H-P para $\lambda = 1600$ y \mathcal{S}_4 . En cuanto a las series filtradas

⁵Es necesario aclarar que la función de ganancia depende directamente de onduleta básica elegida, de manera que el análisis hecho aquí puede no replicarse completamente los gráficos (o sus conclusiones) si se cambia de onduleta.

	log PIB	HP $_{\lambda=1600}$	HP $_{\lambda=100}$	S4	S3
log PIB	1.0				
HP $_{\lambda=1600}$	0.99878	1.0			
HP $_{\lambda=100}$	0.99944	0.99961	1.0		
S4	0.99865	0.99981	0.99949	1.0	
S3	0.99924	0.99951	0.99987	0.99938	1.0

Cuadro 3.1: Matriz de coeficientes de correlación de las series filtradas del PIB, México 1922-2005, componentes de tendencia.

	y -S4	y -S3	HP $_{\lambda=100}$	HP $_{\lambda=1600}$
y -S4	1.0			
y -S3	0.72575	1.0		
HP $_{\lambda=100}$	0.76132	0.90579	1.0	
HP $_{\lambda=1600}$	0.85601	0.76381	0.84272	1.0

Cuadro 3.2: Matriz de coeficientes de correlación de las series filtradas del PIB, México 1921-2004, componentes cíclicos.

de inflación las mejores aproximaciones (medidas por su coeficiente) son la serie filtrada por H-P con $\lambda = 100$ y S_3 ; así mismo estas dos series siguen conservando altas correlaciones, sin embargo en la escala de cuatro S_4 y H-P con $\lambda = 1600$ pierden cierto grado de similitud. Existe además un contraste entre los resultados del filtrado de la señal del PIB y la de la inflación, mientras que en la primera se tienen valores altos para los coeficientes, en la segunda estos son menores y se observan diferencias mayores entre los resultados de cada filtro, es decir que las diferencias en el desempeño de los filtros se hacen más notorias cuando, el componente de la tendencia es más débil en la señal, como es el caso de la inflación, por el contrario las series con un fuerte componente de tendencia como el PIB o los agregados monetarios, en particular M1 (tabla 3), no muestran resultados muy distintos entre las series filtradas por un método u otro.

	Inflación	HP $_{\lambda=1600}$	HP $_{\lambda=100}$	S4	S3
Inflación	1.0				
HP $_{\lambda=1600}$	0.70238	1.0			
HP $_{\lambda=100}$	0.80088	0.94580	1.0		
S4	0.67196	0.93388	0.90802	1.0	
S3	0.73427	0.93144	0.96898	0.90580	1.0
Desviacion Std.	0.2608	0.1389	0.1868	0.1999	0.1697

Cuadro 3.3: Matriz de coeficientes de correlación de las series filtradas de inflación, México 1935-2004, componentes de tendencia.

	π -S4	π -S3	HP $_{\lambda=100}$	HP $_{\lambda=1600}$
π -S4	1.0			
π -S3	0.8971	1.0		
HP $_{\lambda=100}$	0.9202	0.9623	1.0	
HP $_{\lambda=1600}$	0.9449	0.8914	0.9334	1.0

Cuadro 3.4: Matriz de coeficientes de correlación de las series filtradas del PIB, México 1921-2004, componentes cíclicos.

	log PIB	HP $_{\lambda=1600}$	HP $_{\lambda=100}$	S5	S4
log PIB	1				
HP $_{\lambda=1600}$	0.99768	1			
HP $_{\lambda=100}$	0.99871	0.99962	1		
S5	0.99721	0.99979	0.99921	1	
S4	0.99778	0.99977	0.99968	0.99942	1

Cuadro 3.5: Matriz de coeficientes de correlación de PIB de Estados Unidos y de sus series filtradas

	Inflación	S2	S3	S4	S5	HP $_{\lambda=100}$	HP $_{\lambda=10}$	HP $_{\lambda=1600}$
Inflación	1							
S2	0.7905	1						
S3	0.5992	0.7801	1					
S4	0.4615	0.6328	0.8084	1				
S5	0.3204	0.3917	0.5070	0.6228	1			
HP $_{\lambda=100}$	0.6377	0.5807	0.7272	0.8178	0.5905	1		
HP $_{\lambda=10}$	0.7469	0.6659	0.7594	0.7190	0.5010	0.9562	1	
HP $_{\lambda=1600}$	0.5039	0.5601	0.7177	0.8752	0.7728	0.8902	0.7826	1

Cuadro 3.6: Matriz de coeficientes de correlación de la serie de inflación de México con sus series filtradas.

	M1	S3	S4	S5	HP $_{\lambda=100}$	HP $_{\lambda=1600}$	HP $_{\lambda=14400}$
M1	1						
S3	0.9999	1					
S4	0.9997	0.9998	1				
S5	0.9993	0.9994	0.9996	1			
HP $_{\lambda=100}$	0.9999	0.9999	0.9998	0.9994	1		
HP $_{\lambda=1600}$	0.9998	0.9999	0.9998	0.9995	0.9999	1	
HP $_{\lambda=14400}$	0.9996	0.9997	0.9997	0.9996	0.9997	0.9998	1

Cuadro 3.7: Matriz de coeficientes de correlación entre la serie de M1 de México y sus series filtradas.

Como resultado de las comparaciones entre las señales filtradas, es posible afirmar que el desempeño de ambos métodos es similar para aquellas series que muestran componentes de tendencia importantes, como las series en niveles del PIB, en estos casos también existe gran similitud entre algunos de los \mathcal{S}_j y la serie filtrada con con H-P para algún λ específico. En cambio las series con componentes cíclicos o aleatorios más determinantes dentro de ella, como las series de inflación, muestran mayores diferencias en el resultado de los dos métodos. Finalmente observemos que las desviaciones estándar de las series de inflación filtradas mediante onduletas conservan una desviación más cercana a la de la señal original, que las de las series filtradas vía H-P.

Capítulo 4

El Ciclo Económico y la Brecha del Producto

4.1. Introducción

Las fluctuaciones en la actividad económica son una característica de todas las economías modernas; estas se hacen presentes en las mediciones de la producción (en todos sus sectores), los inventarios, las utilidades, las exportaciones e importaciones, las tasas de interés, el nivel de precios, la tasa de desempleo y fundamentalmente en el Producto Interno Bruto; en todas ellas se presentan constantes movimientos de ascenso y descenso que en cada una constituyen una trayectoria oscilante (en torno a su senda de crecimiento). Dicha característica, ha sido ampliamente descrita como una serie de episodios circulares que se repiten a intervalos y que aunque no son todos iguales comparten similitudes que los hacen materia de estudio sistemático. Entre los estudios en este campo se encuentra el trabajo clásico de Arthur Burns y Wesley Claire Mitchell (1946), “*Measuring Business Cycle*”, en donde dan la siguiente definición acerca del ciclo económico:

Los ciclos económicos son una forma de fluctuación que se encuentra en la actividad económica agregada de las naciones que organizan su trabajo principalmente en empresas: un ciclo consiste de expansiones que ocurren simultáneamente en múltiples actividades económicas, seguidas de recesiones, contracciones y recuperaciones igualmente generalizadas, que se entrelazan con la fase expansiva del siguiente ciclo; esta secuencia de cambios es recurrente pero no periódica; en duración, los ciclos económicos varían desde más de un año a diez o doce años pero no son divi-

*sibles en ciclos más cortos de carácter similar, cuyas amplitudes se aproximen a la propia.*¹

La definición anterior, resultante de los estudios de Burns y Mitchell a cerca de la economía estadounidense entre mediados del siglo XIX y mediados del s. XX, describe el siguiente patrón: “cada ciclo comenzó en un *trough*, o el punto más bajo de la actividad económica, a partir de la cual comienza una **expansión**. Con el tiempo la economía alcanzaba el *peak*, el punto más alto del ciclo, para luego iniciar un periodo de **contracción**. Después de algún tiempo la economía tocaba fondo en una nueva *trough*, desde la partía hacia una nueva fase expansiva. Así un ciclo completo va de *trough* a *trough*, pasando por un *peak*. Y todos los ciclos estan conectados, pues el final de uno coincide con el comienzo del siguiente.”²

Una hipótesis central del enfoque de Mitchell y Burns para el ciclo económico es que el producto y el empleo siguen una trayectoria de crecimiento, conocida como tendencia y que el ciclo economico fluctua alrededor de dicha tendencia. La tendencia está en función de los factores que determinan el crecimiento de largo plazo de la economía, como son la tasa de ahorro, el crecimiento de la fuerza laboral, los cambios tecnológicos, etc. En general se presume que aquellos factores que determinan los ciclos económicos producen un efecto menor sobre la tendencia de largo plazo de la economía. Dicho de otro modo el ciclo económico representa las desviaciones transitorias alrededor de una trayectoria dada. Existe un enfoque más general para describir el ciclo económico, en él se distinguen tres componentes separables en las variables de estudio, que son la *tendencia*, el *ciclo* y las *influencias aleatorias*. Estas hipótesis han sido empleadas recurrentemente en la literatura de ciclos economicos, por ejemplo Kydland y Prescott(1990) o Hodrick y Prescott (1997) quienes proponen alternativas para identificar el ciclo y aislarlo de la tendencia largo plazo para después, tomando el patrón de desviación de esta tendencia, describir las fluctuaciones ciclicas.

Por lo que respecta a las causas que originan el ciclo, se asumen dos maneras de explicarlas: *impulso* y *propagación*. En la primera se postula que los ciclos son fruto impactos exógenos en la economía, mientras que la perspectiva de propagación los explica como parte del funcionamiento endógeno del sistema. Los enfoques no son mutuamente excluyentes, ya que no basta la existencia de un choque para explicar la prevalencia del ciclo, y por tanto se hace necesario un argumento de propagación para hacerlo; por otro lado, dado que la perspectiva de propagación sólo es capaz de explicar

¹A. Burns y W. Mitchell (1946) p. 3

²Larrain y Sachs (2002) p. 189. En dicho texto se traduce a *trough* como **sim**.

parcialmente los ciclos observados en la historia, se hace necesario reconocer que las perturbaciones aleatorias dan forma a los detalles específicos particulares de los ciclos y por ello se explica que haya ciclos mas pronunciados que otros. Entonces se acepta generalmente que los ciclos económicos son causados por impulsos, que afectan el sistema económico y desatan un conjunto de reacciones cíclicas en el sistema, luego el carácter cíclico de cualquier respuesta tiende a disminuir con el tiempo, sin embargo, los ciclos vuelven por que llegan nuevos impulsos que perturban el equilibrio económico. En consecuencia el patrón cíclico que se observa es el reflejo de una serie de impulsos independientes que alteran a la economía en el tiempo y cada uno de estos impulsos o choques se propaga luego por toda ella en una forma particular que dependerá de su estructura subyacente. Sin embargo es necesario recalcar que las diversas escuelas de pensamiento difieren en sus hipótesis respecto a los choques y los mecanismos de difusión.³

Larrain(2002) distingue tres tipos de perturbaciones que han sido planteadas por diversos autores como la fuente posible de los impulsos que a la postre resultan en un ciclo económico. Los *shocks de oferta* que afectan directamente a la economía por el lado de la producción. Entre ellos se encuentran los avances de la tecnología, los cambios climáticos, las catástrofes naturales, el descubrimiento de nuevos recursos o (desde el punto de vista de un país individual) una variación en los precios de las materias primas. En ciertas circunstancias también las variaciones en el salario nominal pueden caer en la categoría de choque de oferta. Los *shocks de política* son el resultado de decisiones que toma la autoridad macroeconómica y que afectan principalmente a la demanda. Estos incluyen las variaciones en la oferta monetaria, el tipo de cambio y la política fiscal. Por último están los *shocks de demanda privada*. Entre ellos se encuentran los movimientos de inversión o el consumo del sector privado, que pueden ser provocados por una modificación en las expectativas sobre el comportamiento futuro de la economía. En todos los casos los choques pueden haberse originado dentro del país en cuestión, o pueden llegar desde afuera a través del comercio internacional o los vínculos financieros.⁴

Los mecanismos que propagan las fluctuaciones cíclicas después de que ocurre un choque inicial son materia de controversia. La cuestión fundamental al respecto es; si es posible siquiera que ocurran ciclos dentro de un marco económico de mercados perfectamente competitivos, precios flexibles y agentes optimizadores, o si los ciclos requieren que la economía se desvíe

³*Ibid.*p. 195

⁴*Idem.*

significativamente de las condiciones de competencia perfecta. Dos corrientes de investigación, con perspectivas antagónicas, responden a dicha pregunta, la teoría de los ciclos económicos reales y la nueva economía keynesiana.

Según la teoría de los ciclos económicos reales, las fluctuaciones económicas a largo plazo deben explicarse, manteniendo los supuestos del modelo clásico; entre los cuales resulta de gran relevancia la hipótesis de que los precios son totalmente flexibles, incluso a corto plazo. De manera que casi todo el análisis macroeconómico dentro de esta vertiente se basa en la premisa de que los precios se ajustan para equilibrar los mercados. Ahora, como la teoría de los ciclos económicos reales supone que los precios son totalmente flexibles, esta es coherente con la dicotomía clásica, es decir, las variables nominales como la oferta monetaria y el nivel de precios, no influyen en las variables reales, como la producción y el empleo. Por tanto para explicar la fluctuaciones de las variables reales, esta teoría pone énfasis en los cambios reales de la economía, como son los cambios de la tecnología de la producción que pueden alterar la tasa natural de la economía, mientras que a las variables nominales se les excluye de la explicación de la fluctuaciones económicas al menos en el corto plazo.⁵

En cambio la nueva economía Keynesiana se basa en la premisa de que los modelos de equilibrio de mercado, tal y como son postulados en los ciclos económicos reales, no pueden explicar las fluctuaciones económicas a corto plazo. En la *Teoría General*, Keynes instó a los economistas a abandonar el supuesto clásico de que los precios y los salarios se ajustan rápidamente para equilibrar los mercados, además, puso énfasis en que la demanda agregada es un determinante fundamental de la renta nacional a corto plazo. De modo que los nuevos economistas keynesianos aceptan estas conclusiones básicas y abogan por los modelos donde las fallas de mercado ocasionan que las variables nominales sean rígidas; es decir, aceptan el modelo IS-LM como teoría de la demanda agregada y en sus investigaciones tratan de refinar dicho modelo mediante estudios que tratan de explicar como se comportan los precios y los salarios en el corto plazo, identificando mejor las imperfecciones del mercado que hacen que sean rígidos y como consecuencia de las cuales la economía retorna lentamente a la tasa natural de equilibrio.⁶

El debate teórico al que hemos hecho alusión de forma muy general no ha sido resuelto, es por ello que este trabajo aborda el ciclo económico desde una perspectiva meramente empírica. La siguiente sección se avoca precisamente a hacer una síntesis bajo este mismo enfoque poniendo énfasis

⁵Mankiw, G. (2000) p. 635-636.

⁶*Idem.*

en lo que cada autor considera como los hechos estilizados o las regularidades que caracterizan al ciclo económico.

4.2. La evidencia empírica acerca de las características históricas del ciclo económico

Hay tres cuestiones sustantivas que se desean saber acerca del ciclo económico:

¿Cual es el periodo promedio del ciclo?⁷

¿Cual es la amplitud promedio del ciclo?⁸

¿Que variables se mueven junto con el producto (PIB) durante el ciclo económico?

Diversos trabajos, entre los que se incluyen Backus y Kehoe (1992), Basu y Taylor (1999), Romer (1999) y Solomuo (1998), coinciden en su respuesta a las primeras dos interrogantes. Tanto la amplitud como la simetría (y por ende el periodo) del ciclo han variado con el tiempo; sin embargo, establecen cuatro periodos en los que se puede encontrar cierta regularidad tanto en la longitud como en la amplitud del ciclo. Durante el periodo comprendido entre 1870 y 1913 (anterior a la Primera Guerra Mundial o simplemente de la Pleguerra) se observaron ciclos largos con una duración promedio de 20 años. El periodo comprendido entre las dos conflagraciones mundiales (o periodo de entreguerras) se caracterizó por fluctuaciones muy cortas y de gran amplitud (mayores que en los demás periodos). En los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial (de la Posguerra o época dorada) se observaron ciclos promedio de 5 años; finalmente desde 1973 a la fecha (era Post Breton Woods) los ciclos se alargan nuevamente promediando 10 años.

En cuanto a la amplitud, durante el periodo de entreguerras se presentaron fluctuaciones más volátiles que en la época del patrón oro (anterior a 1913) y el periodo de la posguerra, el cual es marginalmente menos volátil que el periodo de preguerra (Romer, 1999). Además dentro del periodo de la posguerra se distingue la época dorada del periodo posterior a 1973, pues

⁷Se entiende por periodo promedio a la longitud o duración de cada onda del ciclo, en el dominio del tiempo.

⁸Por amplitud promedio se entiende la longitud de la frecuencia de la onda que define a un ciclo, es decir, que tan pronunciado es el “pico”.

este último se caracterizó por una volatilidad relativa, mientras que en el primero se observaron ciclos de poca amplitud.⁹

En particular en su estudio, sobre los episodios cíclicos para una muestra de diez países, Backus y Kehoe (1992) observaron que las fluctuaciones del periodo de entreguerra en el producto son uniformemente mayores que aquellas del periodo de la postguerra. Con la sola excepción de Japón, la desviación estandar de las fluctuaciones de producto son de dos a cuatro veces mayores entre 1914 y 1939, sin embargo no encontraron un patrón consistente para la comparación entre los periodos de la preguerra y de la postguerra. En seis de los diez países (principalmente europeos), las fluctuaciones de la preguerra son, a lo más, 60 por ciento mayores que aquellas del periodo de la postguerra. Sin embargo en los otros cuatro (Canada, Australia, Suecia y los Estados Unidos) las fluctuaciones son considerablemente mayores en el periodo de la preguerra. En su análisis para el caso de Estados Unidos concluyen que parte del exceso de volatilidad del periodo de la preguerra puede ser atribuido a un error de medición, no obstante esta afirmación es controvertida, pues mientras Romer(1999) la confirma, Sheffrin(1988) la cuestiona. Backus y Kehoe (1992) también encuentran, con diferentes métodos, un resultado similar al hallado por Bergman y Jonung (1989) esto es, que casi la mitad del exceso de volatilidad que Sheffrin encuentra en el periodo de preguerra desaparece cuando se usan los estimados revisados del producto de la preguerra. En particular Australia y Canada tienen las diferencias más extremas entre periodos, con producto tres y dos veces más volátil respectivamente en el periodo de la preguerra. Los datos para ambos países son razonablemente buenos, entonces la mayor volatilidad de producto medido probablemente indica un cambio en la variabilidad de la actividad economica real.

No obstante, la hipótesis que afirma que el periodo de la preguerra fue más volátil que el de la posguerra ha sido cuestionada por Cristina Romer (1999) a través un análisis de los ciclos de la economía estadounidense, donde propone métodos alternos para estimar la mediciones del producto en la época de la preguerra. En efecto ella halló que las fluctuaciones han cambiado de alguna manera en el tiempo, pero no sustantivamente, i.e. que los principales indicadores macroeconómicos no se han vuelto mas estables entre ambos periodos y las recesiones apenas han sido menos severas en promedio, aunque observa que si son más uniformes a traves del tiempo. Encuentra que la influencia de la politica macroeconómica juega un rol crucial y le atribuye

⁹La amplitud en los periodos de la Penguerra y Postguerra son similares para la muestra de países de Bergman et al. (1998)

al incremento en el control gubernamental sobre la demanda agregada en la postguerra alguna utilidad para suavizar las recesiones y contrarrestar algunos choques. Al mismo tiempo encuentra que ha habido una serie de episodios en la época de la posguerra donde la política monetaria ha buscado crear una recesión de magnitud moderada para reducir la inflación. Este incremento en las recesiones inducidas por política explican por que la economía sigue siendo volátil. Cree incluso que el reemplazo de choques grandes y pequeños de una variedad de fuentes, que causaron las recesiones de la preguerra, con choques moderados inducidos por el Banco de la Reserva Federal también explican que las recesiones sean más uniformes.

En cuanto a la tercera interrogante establezcamos primero la clasificación de las variables, dependiendo si se mueven a favor del ciclo, en contra del ciclo o independientemente de él. Las variables *procíclicas* son aquellas que tienden a aumentar durante las expansiones y caer durante las contracciones del ciclo económico. Las variables *contracíclicas* tienden a aumentar durante las recesiones y a caer durante las expansiones. Finalmente las variables *acíclicas* no se mueven en coordinación con el ciclo económico.

Backus y Kehoe (1992) hallaron mucha regularidad en el comportamiento cíclico de las cantidades reales. Afirman que aunque la magnitud de las fluctuaciones del producto varía entre los países y a través del tiempo, las relaciones entre las variables son bastante estables. En cuanto a los componentes del producto nacional: consumo, inversión, gasto gubernamental y exportaciones netas; hallaron que muchas de las propiedades de los ciclos de la postguerra en los Estados Unidos son similares para otros países. En particular la inversión es consistentemente de 2 a 4 veces más variable que el producto (en términos porcentuales); el consumo es tan variable como el producto y tanto la inversión como el consumo son fuertemente procíclicos. La balanza comercial, para los países de su muestra, es generalmente contracíclica exhibiendo mayores *booms* durante las recesiones. La excepción a esta regularidad en cantidades son las compras del gobierno, las cuales no exhiben tendencia sistemática y aunque han sido generalmente más variables que el producto, han sido casi tan contracíclicos como procíclicos. Los autores también advierten que los patrones de fluctuaciones del nivel de precios han variado notablemente a través de las diferentes épocas. Observaron que antes de la Segunda Guerra Mundial, los precios fueron notablemente procíclicos y de entonces a la fecha han sido consistentemente contracíclicos, además han sido sustancialmente más persistentes en la mayoría de los países desde el fin de la Segunda guerra Mundial que en los periodos previos. También encontraron que las fluctuaciones en la oferta monetaria ha evolucionado de manera menos correlacionada con el ingreso a partir de de la

Segunda Guerra. Sin embargo, a pesar del declive en la correlación del dinero y el producto en el periodo de la postguerra, no encontraron una tendencia general entre los países, hacia mayor persistencia en las tasas de crecimiento del dinero. Finalmente observaron que las correlaciones entre los movimientos del producto medido entre diferentes países son típicamente positivas y más pronunciadas en el periodo de la postguerra que en el de la preguerra.

Solomuo (1998) corrobora el hallazgo de Backus y Kehoe (1992), de que los precios y el producto tienen fluctuaciones contracíclicas durante la postguerra, que en el periodo de entreguerras dicha fluctuación fue procíclica, sin embargo el no encontró una relación estable para el periodo del patrón oro (preguerra). También halló un claro patrón procíclico entre el PIB y los siguientes componentes del gasto: consumo, inversión importaciones y exportaciones. En su estudio la variación de las importaciones, exportaciones e inversión es mayor que la del PIB real, en cambio este último y el consumo son muy similares. Además confirma que no hay un patrón claro que relacione el PIB real y los gastos e ingresos del gobierno. Sostiene que hay una correlación positiva entre la oferta monetaria y el producto y muestra evidencia de que la primera guía el ciclo económico, resultado que contrasta con el de Backus y Kehoe (1992), que afirma que esta relación está perdiendo importancia. Finalmente Solomuo (1998) halló que durante las recesiones la mayor proporción de declinación en el PIB se debe a la caída en los tres componentes principales del gasto, consumo, inversión y exportaciones.

Bergman et al. (1998) también observan patrones procíclicos para la relación entre el PIB real y los siguientes componentes, consumo, inversión importaciones y exportaciones entre todos los países de su muestra y bajo los distintos regímenes monetarios. Así mismo, no encuentran una relación clara entre el PIB real y el gasto y el ingreso gubernamental. Los agregados monetarios de varios países mostraron una correlación positiva con el PIB y confirman que existe evidencia de que el stock monetario lidera el ciclo económico. Hacen notar que la mayor correlación se da para Estados Unidos durante el periodo de entreguerras, resultado que sería congruente con la percepción de que la gran depresión fue causada por fallas de política por parte del Banco de la Reserva Federal. En todos los países de su muestra el nivel de precios es procíclico con la única excepción de los Estados Unidos. Ellos creen que la mayor proporción del declive del PIB durante las recesiones se debe a caídas en los tres componentes del gasto, consumo, inversión y exportaciones. Concluyen que ni el gasto o ingreso gubernamental, ni los stocks monetarios contribuyen significativamente a las recesiones, aunque en el caso del dinero ponen en duda esta conclusión por razones más bien técnicas. Sugieren que los movimientos procíclicos del PIB y los precios son

resultado de las crecientes vinculaciones internacionales (crecientes en el tiempo) y la integración global.

Los cuatro periodos establecidos, en los que se observa cierta regularidad, presentan características históricas distintivas que fueron determinantes en las fluctuaciones de cada época. El primer periodo entre 1870 y 1913 representa la época en la que una gran parte del mundo funcionaba de acuerdo al patrón oro; este sistema fue un régimen estable y creíble para la mayor parte de los países, caracterizado por tasas de cambio fijas y la disciplina monetaria que también facilitó la integración de los mercados globales de capitales. En el segundo periodo, entre 1919 y 1939, esta economía global ampliamente integrada fue destruida, se transitó de la globalización a la autarquía en espacio de unas pocas décadas. Los controles de capital se generalizaron, los flujos de capital fueron mínimos y la inversión internacional fue vista con sospecha. En el tercer periodo, la era Bretton Woods de 1945 a 1971, tomó forma un intento por reconstruir la economía global, se incrementaron los flujos de capital y el comercio global. Sin embargo las tasas de cambio permanecieron fijas mediante tratados internacionales y el diseño del Fondo Monetario Internacional permitió los controles de capitales como un medio para prevenir las crisis cambiarias y las quiebras bancarias y para facilitar una política monetaria activa. El cuarto periodo, la era de las tasas de cambio flotantes, ha durado desde los 1970s a la fecha. Los tipos de cambio flotantes hicieron que los controles de capital ya no fueran necesarios: los cambios en las percepciones de mercado resultaron en movimientos en los tipos de cambio y no en presión para los flujos de capitales. Esto generalmente fomentó la integración de los mercados de capitales, sin embargo inconvenientes importantes a los movimientos globales de capitales se observaron en las crisis de deuda de economías en desarrollo a principios de los años 1980 y en las crisis de los mercados emergentes de capitales de 1997-1998. Todas estas características se presentaron aunque de forma diferenciada en la economía mexicana y sus diferencias, descritas en el siguiente apartado, están fuertemente influenciadas por desarrollos históricos propios de esta nación;¹⁰ posteriormente se presentan los resultados obtenidos mediante el análisis en onduletas.

4.2.1. El ciclo económico en México

El análisis del ciclo económico en México presenta particularidades que lo hacen distinto de la experiencia internacional. En primer lugar, la ausen-

¹⁰La siguiente descripción de las características propias de ciclo en México son principalmente una síntesis de los resultados de Torres García (2000).

cia de mediciones anteriores a 1900, aunada a la grave inestabilidad política y la devastación que el país sufrió con motivo de la Revolución de 1910 hacen imposible una evaluación del periodo que hemos llamado, en el contexto internacional, de la preguerra. En segunda instancia hablar de un periodo de entreguerras para la economía mexicana, similar a los observados en otros países, no parece del todo apropiado pues una vez superado el conflicto armado propiamente dicho, siguió un periodo de inestabilidad política a cuyo término el régimen gobernante evitó la participación directa en la economía internacional y por tanto apartó a la economía nacional de sus efectos más nocivos, sin embargo la mediciones del PIB (disponibles a apartir de 1921) si sugieren, a simple vista, la existencia de un periodo de alta volatilidad y bajo crecimiento que concluyó en 1933. Posteriormente Torres García (2000) identifica claramente dos diferentes etapas de desarrollo en México. “Aproximadamente de los años cuarenta a los años setenta la economía experimentó un proceso de crecimiento económico sostenido y de estabilidad en las principales variables nominales. Por el contrario, durante los años ochenta y parte de los noventa el desempeño de la economía mexicana se caracterizó por altas tasas de inflación, devaluaciones del tipo de cambio y bajo crecimiento económico.”¹¹

Durante el periodo de 1933 a 1979, el desempeño de la economía mexicana se caracteriza por un vigoroso crecimiento económico y una volatilidad moderada. Asimismo, Torres García (2000) observa, en un análisis comparativo, que mientras la Segunda Guerra Mundial afectó el desempeño de la economía de los EUA, ésta parece no haber tenido un efecto importante en la economía mexicana. Este mismo autor muestra que (a partir de 1940) el consumo privado, el consumo del gobierno, la inversión, las importaciones y exportaciones, presentaron mayor variabilidad que el PIB durante el periodo. Observa también que el consumo privado es, de acuerdo a lo esperado, procíclico y contemporáneo al PIB (con coeficiente de correlación igual 0.73), al igual que el consumo del gobierno (0.40). Por su parte, la inversión es procíclica y al parecer sigue al producto con un periodo de rezago (0.39). Con respecto a las importaciones y exportaciones, su estudio concluye que ambas son procíclicas, sin embargo, mientras que las importaciones son contemporáneas (0.43), las exportaciones parecen anteceder el ciclo (0.38). En cuanto al análisis de los distintos agregados monetarios encontró que la relación entre el ciclo del producto y el dinero (tanto en términos nominales como reales) parece ser procíclica, aunque la definición en término nominales de los agregados monetarios es contemporánea al PIB, mientras que

¹¹Torres García (2000), p. 4.

en término reales antecede el ciclo en un periodo. Finalmente encontró que los precios en este periodo son contracíclicos y que anteceden el ciclo, resultado que desde su punto de vista sugiere que las fluctuaciones del PIB en México se deben principalmente a movimientos (choques) de oferta y no de demanda.¹²

El siguiente cambio importante en la tendencia de crecimiento en México ocurre a finales de los años setenta y en su trabajo Torres García (2000) muestra que, de 1980 a 1997 el PIB crece solamente 2.51 % por ciento anual en promedio, comparado con el promedio de 6.1 % anual del periodo anterior (1933-79), mientras que la volatilidad se duplicó pasando de 2.4 % en el periodo anterior a 4 % en el periodo de 1980-97. Argumenta entonces que este incremento en la volatilidad del PIB mexicano puede estar asociado con cuatro eventos importantes: la crisis de la deuda en 1982, el plan de estabilización adoptado por el gobierno en 1987, la crisis financiera de 1995 y la estabilización posterior.¹³

Así mismo, Torres García reporta que, del primer (1940-1979) al segundo (1980-1997) periodo, el consumo privado, el consumo del gobierno y especialmente la inversión experimentaron una reducción en su tasa de crecimiento promedio. Por el contrario, tanto las importaciones como las exportaciones experimentaron un incremento en su tasa de crecimiento, situación que es congruente con la mayor apertura que la economía ha experimentado desde que México ingresó al GATT en 1986. En general, observa que la volatilidad de casi todas las variables es mayor en el periodo 1980-97 y argumenta que dicho aumento en volatilidad está asociado con un incremento considerable en la inflación y en la tasa promedio de depreciación del tipo de cambio nominal. Sin embargo, observa que la volatilidad relativa del consumo privado y del gobierno, así como de la inversión, no cambian de manera significativa, mientras que la volatilidad relativa de las importaciones y exportaciones es dos veces más grande en el periodo 1980-97. A través de este resultado, combinado con el incremento en la volatilidad del tipo de cambio, sugiere que en el primer periodo el comportamiento de las importaciones y exportaciones fue influenciado principalmente por el nivel de actividad económica (PIB), mientras que en el segundo periodo su mayor volatilidad obedeció a las fluctuaciones en el tipo de cambio y a la inestabilidad generada por las crisis financieras experimentadas durante las últimas dos décadas. Con respecto a los agregados monetarios, afirma que el crecimiento en términos nominales es mayor durante el periodo 1980-97, mientras que en términos

¹²Ibid. p. 11-12

¹³Ibid. p. 8

reales disminuye y especula que los efectos de mayores tasas de inflación y depreciaciones recurrentes del tipo de cambio también se ven reflejados en mayor volatilidad en los agregados monetarios.

No obstante que el periodo de 1980 a 1997 estuvo caracterizado por la inestabilidad en las variables nominales, Torres García (2000) reporta que la volatilidad del componente cíclico de cada una de las variables reales con respecto al PIB es menor en el periodo 1980-1997 que en el periodo 1940-1979 y especula que el desarrollo del mercado financiero haya suavizado el efecto que los choques que ha sufrido la economía mexicana pudieran haber tenido sobre los diferentes componentes del producto. Este resultado le sugiere que la alta volatilidad observada en la mayoría de las variables a partir de 1980 no se debe a una mayor volatilidad en el componente cíclico de las mismas. En el mismo estudio, los resultados de los coeficientes de correlación cruzada para el periodo 1980-1997, son congruentes con la evidencia del periodo 1940-1979; sin embargo, a partir de 1980 las exportaciones parecen ser contracíclicas, resultado que es contrario a lo encontrado en el periodo anterior. Para Torres García, el hecho de que las importaciones y exportaciones se muevan en direcciones opuestas sugiere que la actividad económica (PIB) no es la fuerza que predomina sobre estas dos variables, cree además que la inestabilidad nominal y las crisis financieras experimentadas durante el segundo periodo parecen haber influido de manera importante sobre el comportamiento de las exportaciones e importaciones.¹⁴

4.3. Metodología

La investigación del ciclo económico generalmente ha sido emprendida bajo el supuesto de que cualquier variable económica puede ser descompuesta en tres partes separables: tendencia, ciclo e influencias aleatorias. Dentro de esta perspectiva el ciclo puede ser identificado ajustando a la serie de datos una tendencia simple de largo plazo, y luego tomando el patrón de las desviaciones alrededor de esta tendencia es posible describir las fluctuaciones cíclicas del señal; en particular, si se trata de la serie del producto real, se descompone entonces en una tendencia que constituye el producto potencial y sus componentes cíclicos equivalen, a la *brecha del producto* definida como la diferencia entre el producto real y el potencial.¹⁵ Sin embargo, existen dos problemas cuando se busca describir la trayectoria cíclica: primero, en las

¹⁴Ibid. p. 13

¹⁵Ocasionalmente se eliminan también las fluctuaciones que se cree son originadas por errores de medición.

series generalmente coexisten una variedad de ciclos con diferentes periodos y amplitudes; segundo, un supuesto importante para hacer dicha descomposición es que las economías siguen trayectorias estacionarias en tendencia, lo cual significa que el crecimiento económico tiene lugar alrededor de un estado estacionario. Y tomar como válido este supuesto, cuando de hecho sea falso, conducirá a serios errores de interpretación, esto es, las variaciones de la tendencia serán interpretados como variaciones cíclicas. Sin embargo Nelson y Plosser (1982) rechazaron el supuesto de estacionariedad en tendencia en un análisis de las series económicas el siglo XX. Por tanto en este trabajo se hace uso de la transformada en onduletas para confrontar dicho problema, debido a que este método no hace supuestos acerca de la estacionariedad de la señal. Ahora, basados en la primera sección del primer capítulo recordemos que la transformada en onduletas produce una descomposición que discrimina la aportación de distintos componentes cíclicos a la señal, diferentes tanto en longitud como en amplitud y a los que en su momento denominamos los detalles \mathcal{D}_j , y el componente de tendencia \mathcal{S}_J , por tanto este método evade los dos problemas antes mencionados.

La metodología a seguir, a partir del uso de la transformada en onduletas, aunque es en cierto modo distinta a los procedimientos usuales en la investigación del ciclo económico, conserva los rasgos fundamentales de ellos. Recordemos que el procedimiento para calcular la transformada produce coeficientes que capturan las características de la serie en las diversas escalas y localizaciones del tiempo y que una vez ordenadas apropiadamente conforman el vector \mathbf{W} . A través de este vector es posible reconstruir distintas “versiones” de la señal que enfatizan las propiedades de la serie entre las diferentes escalas, estas son \mathcal{D}_j para $j = 1 \dots J$ y \mathcal{S}_J , asociados a las frecuencias $[1/2^{j+1}, 1/2^j]$ para $j = 1 \dots J$ y $[0, 1/2^{J+1}]$ respectivamente y que de acuerdo a la ecuación de síntesis (1.15) cumplen que:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_J \quad (4.1)$$

donde \mathbf{X} es la señal en cuestión (por ejemplo el PIB), ahora como \mathcal{S}_J contiene la información de baja frecuencia este puede ser considerado la tendencia de la serie, que a diferencia de otros procedimientos no es necesariamente lineal.¹⁶ A partir de la ecuación anterior es posible establecer fácilmente las desviaciones con respecto a la tendencia, lo cual, en principio, ya permitiría

¹⁶La forma específica de la tendencia depende tanto de la onduleta básica elegida, como de la señal misma.

hacer un análisis del ciclo económico. Sin embargo las desviaciones así estimadas serían el resultado de una combinación de ciclos muy heterogéneos, por eso quizá sea más apropiado analizar cada uno de los \mathcal{D}_j , pues en ellos se encuentran desglosados cada uno de los posibles movimientos cíclicos que intervienen en la serie. Es necesario recordar que la interpretación que se obtenga de ciclo a partir del análisis en onduletas, no será una en la que el episodio periódico se repita indefinidamente en el tiempo conservando las mismas características, sino más bien se le considerará un fenómeno localizado en el tiempo y cuya intensidad será establecida por la escala en la que sea observable (mediante la transformada). Además las series \mathcal{D}_j para $j = 1 \dots J$, resultantes del filtrado de la serie del PIB, también serán propuestas como *proxy* de la brecha del producto; en tanto que \mathcal{S}_J , será una aproximación al producto potencial.

Para ser mas específico la metodología a seguir es la que se describe a continuación: Por un lado se aplicará el filtro HP a las series del PIB, inflación, tasas de interés, precios, agregados monetarios y desempleo, las cuales servirán de contraste a las que se obtengan mediante onduletas. El proceso de minimización asociado al filtro HP será realizado mediante el *software* estadístico *Eviews*. Mientras que por otro lado se filtrarán las mismas series a través de la transformada de onduletas para obtener el vector de coeficientes de onduletas, \mathbf{W} , lo que permitirá identificar las fluctuaciones con mayor influencia en la serie, luego a apartir de dicho vector se calcularán los vectores \mathcal{D}_j que dan cuenta de las fluctuaciones de la señal para la escala 2^{j-1} , así como la series de tendencia \mathcal{S}_j . Los cálculos, fundamentados en el algoritmo pirámide, que permiten obtener estos vectores se ejecutan a través del programa *S+ wavelets*.

Enseguida en se procede al análisis comparativo entre las series obtenidas por uno y otro método, lo cual nos permitirá discriminar las características enfatizadas a traves de un filtro y del otro, así como sus similitudes. Esto último se establece mediante los coeficientes de correlación que existen entre una misma serie filtrada por los dos diferentes métodos. En el siguiente capítulo se emprende un análisis más enfocado a las particularidades del ciclo económico (reflejado en las señales ya mencionadas), pero hecho a partir de las series obtenidas mediante onduletas. Este análisis será conducido en manera similar a los realizados tanto por Backus y Kehoe (1992) como Bergman et al. (1998), es decir a partir de las serie filtradas se calcula la desviación estandar de ellas, restringidas a distintos periodos, para así discernir las diferentes características del ciclo en cada época. Enseguida se estiman los coeficientes de correlación con otras variables, asi como sus rezagos, con el objetivo de establecer la relación de ellas con respecto al ciclo

en general. En lo que respecta a los cálculos tanto de la desviación estándar como de la varianza, que serán realizados con el objetivo de analizar las características de las fluctuaciones, se utilizarán series en tasas de crecimiento pues su interpretación resulta más clara; sin embargo también se realiza la descomposición en onduletas para algunas series en niveles o en logaritmos (que son generalmente las que se presentan en los gráficos), ya que son necesarias para la estimación de la regla de Taylor.

Finalmente la brecha del producto definida habitualmente como el porcentaje desviación del producto real (Y) respecto a su tendencia (μ), es decir $\ln(Y) - \ln(\mu)$, será estimada como la tendencia que resulte mediante el filtrado de onduletas, i.e. \mathcal{S}_J ; o bien, recordando la ecuación que da origen al análisis multiresolución (1.15), podemos conceptualizar al *output gap* como alguna combinación de los detalles de la serie \mathcal{D}_j para j que representan los movimientos cíclicos de la serie, en la escala j y que aportan información en las frecuencias asociadas a ellos.

Ahora que hemos establecido la metodología a seguir en el ejercicio empírico en las siguientes secciones se muestran los resultados obtenidos a través de ella.

4.4. Fluctuaciones en el Producto Interno Bruto

Pese a que la definición del ciclo económico lo caracteriza a través de los movimientos en “al unísono” de un grupo de variables, los cambios más importantes en la actividad económica se hacen más patentes a través de la medición del Producto Interno Bruto, quien sintetiza en buena medida las fluctuaciones de numerosos factores, por este motivo es conveniente iniciar con él el estudio de las fluctuaciones.

En primera instancia el análisis via la DWT (transformada discreta en onduletas) de la serie del PIB de México, nos permite apreciar tres etapas muy bien diferenciadas. La primera, que inicia con los datos en 1922 y termina diez años después, está caracterizada por movimientos de muy corto plazo que expresan en el detalle en la escala de uno (d_1), que es posible apreciar en la gráfica (4.1). Ahí mismo se distingue otro periodo más largo que comienza en 1933 y termina en 1981, en donde se observan tasas de crecimiento del PIB mayores que cero, con pocos cambios en las escalas de uno y dos (dos y cuatro años respectivamente), pero que se expresan con un crecimiento en la tendencia de la serie (s_4) que alcanza su máximo alrededor de 1970, fecha a partir de la cual comienza a declinar y da lugar a un tercer periodo que abarca de 1983 hasta el año final de la muestra (2005),

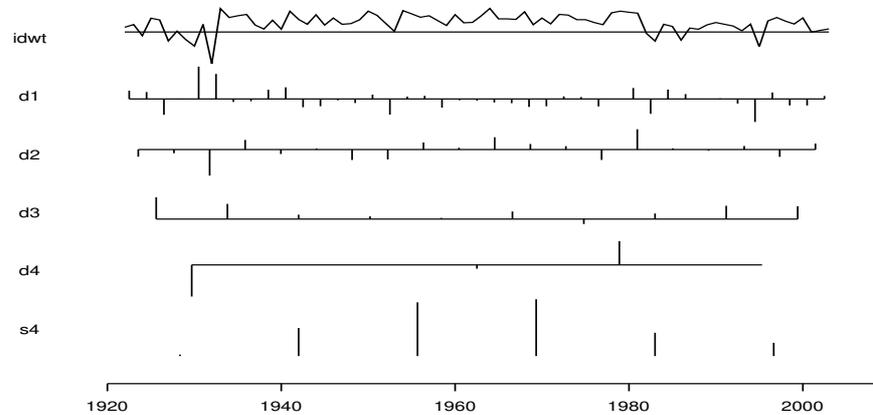


Figura 4.1: DWT de la serie de tasas de crecimiento del PIB para México (1922-2003), con su reconstrucción iDWT en la parte superior.

en donde se promedian tasas de crecimiento nulas y aquí ya es patente el descenso en la tendencia de la serie. La figura (4.2), en donde se reconstruye la señal, a partir de los dieciseis coeficientes mayores de la DWT, muestra que la tendencia de la serie está marcada por un crecimiento en las tasas que empieza a declinar a partir de comienzos de los años ochenta, también son apreciables cambios abruptos en la escala de uno, tres de ellos en el periodo de 1922-33, luego solo hay dos más de ellos uno ubicado en 1952 y el otro asociado a la crisis de 1994-95. Por otro lado la escala de dos (cuatro años) marca las transiciones entre los tres periodos ya señalados. Finalmente las escalas de tres y cuatro complementan las fluctuaciones más abruptas en el periodo inicial y la transición del modelo de la revolución al de la economía abierta (años ochenta). Observemos en esta gráfica y en todas las subsecuentes que al hacer el análisis via la DWT se puede reconstruir la señal y esta reconstrucción está plasmada en la parte superior de cada uno de estos gráficos.

En el gráfico (4.3) se muestra una variación del análisis en onduletas anterior, en donde se utiliza como función básica a un *spline*. Esta variación nos permite constatar que los resultados obtenidos mediante una onduleta básica *symmlet* no cambian de manera importante la serie filtrada. En el gráfico (4.4) se presenta una descomposición multiresolución de la serie de tasas de crecimiento del PIB mexicano. Este análisis es muy similar a los

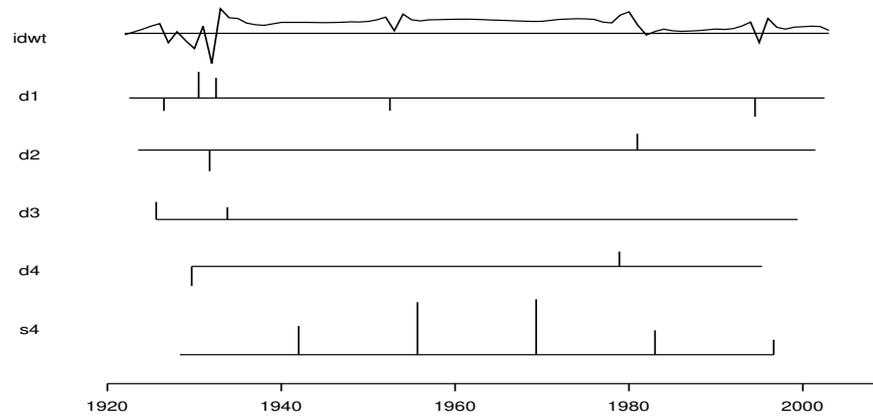


Figura 4.2: DWT de la serie de tasas de crecimiento del PIB para México (1922-2003) incluyendo solo los 16 coeficientes mayores y reconstrucción respectiva.

presentados anteriormente, con la salvedad de que ahora se presenta la gráfica de los vectores \mathcal{D}_j y \mathcal{S}_j que son de misma longitud que la serie original, en tanto que el número de coeficientes de onduletas depende de la escala a la que hagan referencia.

En la figura (4.5) se muestra el análisis en onduletas de la serie de tasas de crecimiento del Producto Nacional Bruto (PNB) de los Estados Unidos. En la última fila del gráfico se observan los coeficientes que constituyen la tendencia. Estos indican que la tendencia en la tasa de crecimiento estadounidense ha tenido etapas de gran auge desde mediados del siglo XVII y hasta antes de la primera guerra mundial, en donde la tendencia muestra una caída muy importante. Posteriormente se presenta un incremento ligero en la tendencia. Los coeficientes de primer nivel (d_1) nos permiten apreciar como luego de la Segunda Guerra Mundial, se ha presentado una sensible disminución de los movimientos abruptos de corto plazo (con la salvedad de los tres coeficientes asociados a las crisis de los años setenta y ochentas). Similarmente los coeficientes en la escala de dos y tres (d_2 y d_3) evidencian que buena parte de la volatilidad del periodo de la guerras mundiales estaba concentrada en ciclos de longitud de cuatro a ocho años. Del mismo modo podemos constatar que el periodo anterior a la Primera Guerra Mundial, se caracterizó tanto, por una elevada volatilidad, plasmada en las primeras dos

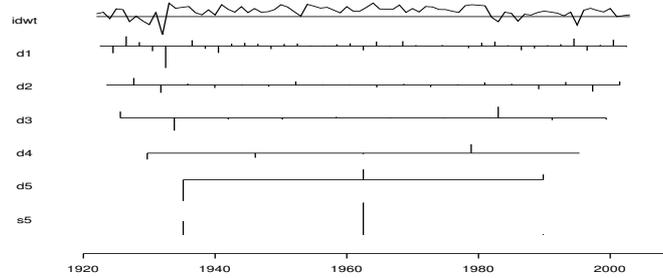


Figura 4.3: DWT de la serie de tasas de crecimiento del PIB para México (1922-2003) utilizando como onduleta básica *b-spline3.1*

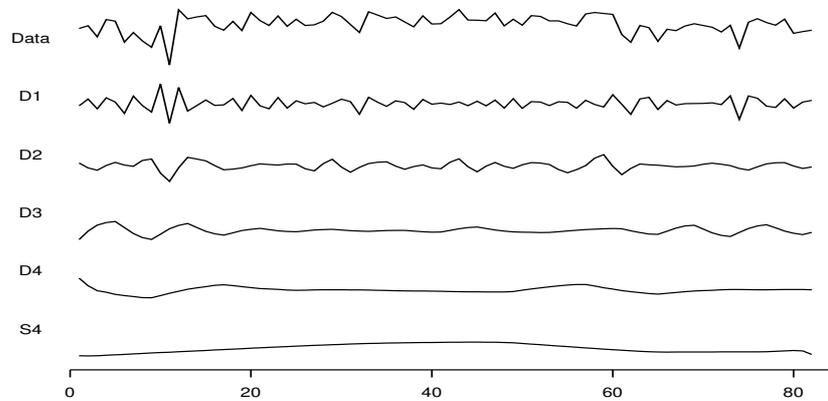


Figura 4.4: Descomposición multiresolución (MRD) de la serie de tasas de crecimiento del PIB para México (1922-2003)

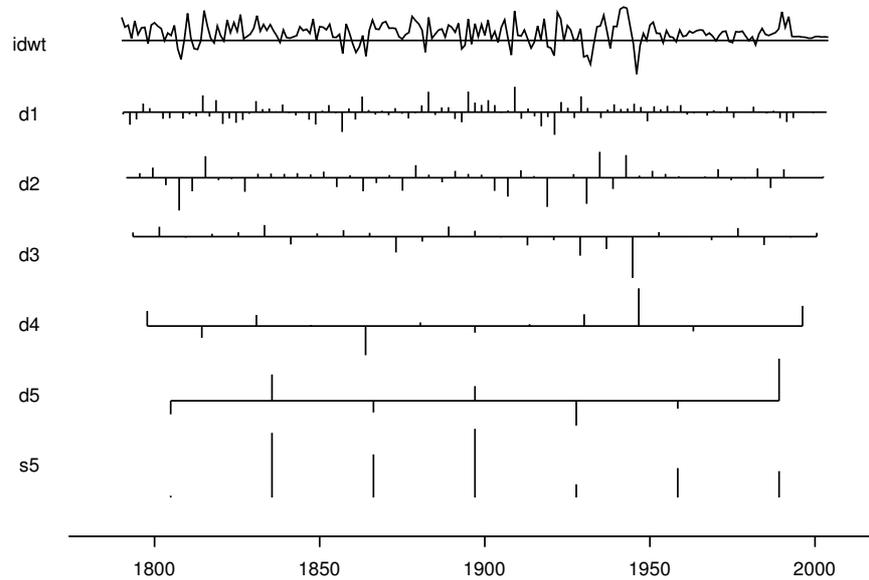


Figura 4.5: Descomposición multiresolución de la serie de tasas de crecimiento del Producto Nacional Bruto de los Estados Unidos

escalas, como en altas tasas de crecimiento que impactaron en la tendencia. Finalmente mencionemos que la Gran Depresión se mostró en el análisis como un coeficiente negativo en la escala de dos (para ser más específico el $d_{2,33}$), en tanto que las fluctuaciones entorno al año de 1945 se expresaron de manera fundamental en la escala de tres y de cuatro, además de que siete de los mayores coeficientes estuvieron relacionados con el periodo de entreguerras.

Las figuras (4.7) y (4.8), muestran el análisis en ondulas de las series de tasas de crecimiento del PIB del Reino Unido, así como la reconstrucción de la señal a través de sus dieciseis coeficientes mayores. En particular resulta interesante notar, en la segunda figura, que de los mayores coeficientes ocho capturan las fluctuaciones asociadas al periodo comprendido entre el inicio de la Primera Guerra Mundial y el final de la Segunda, mientras que solo dos pertenecen al periodo de entreguerra y el resto (seis) están relacionados directamente con la tendencia; también hay que notar que el inicio y el fin

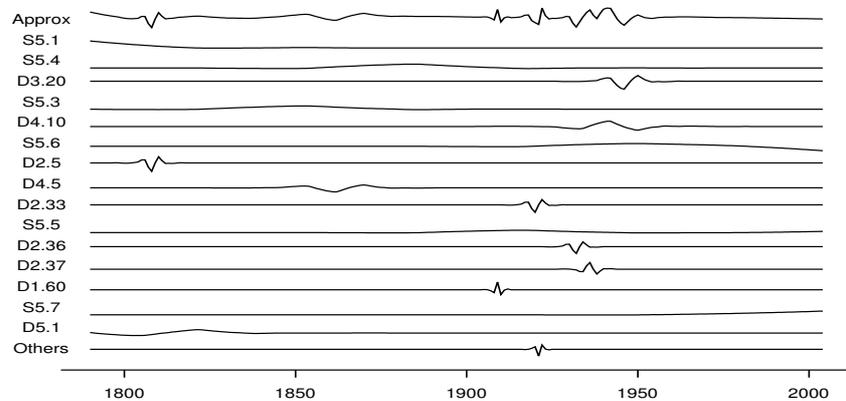


Figura 4.6: Reconstrucción de la serie de tasas de crecimiento del PNB para Estados Unidos mediante los 16 coeficientes mayores de su DWT.

de este periodo convulso están marcados de manera notable en coeficientes en la escala de tres y cinco respectivamente y que el coeficiente de tendencia del periodo de entreguerras es muy cercano a cero. En el análisis escala a escala podemos apreciar que, al igual que en E.U., la volatilidad asociada a periodos cortos (d_1) ha disminuido a partir del fin de la Segunda Guerra, con respecto a cualquier otro periodo en su historia. En cuanto a los coeficientes relativos a la tendencia podemos apreciar al periodo de la postguerra como el de mayor auge y posteriormente se observa un declive, mientras que en el periodo de la preguerra existen un par de coeficientes comparables a los de la época de crecimiento de la postguerra.

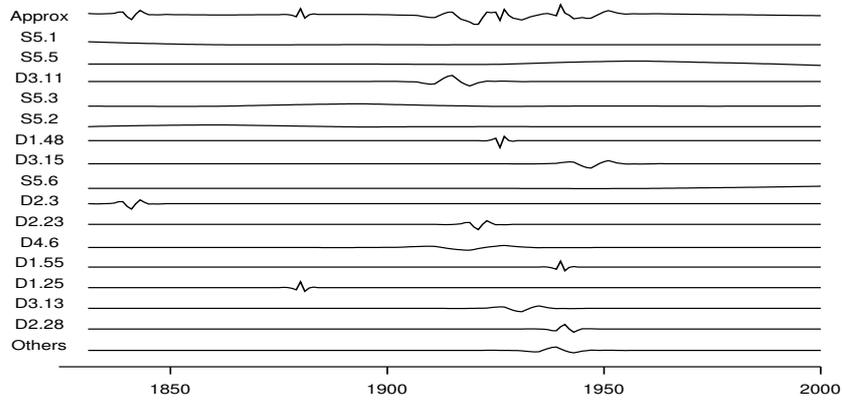


Figura 4.7: Descomposición multiresolución de la serie de tasas de crecimiento del Producto Interno Bruto del Reino Unido.

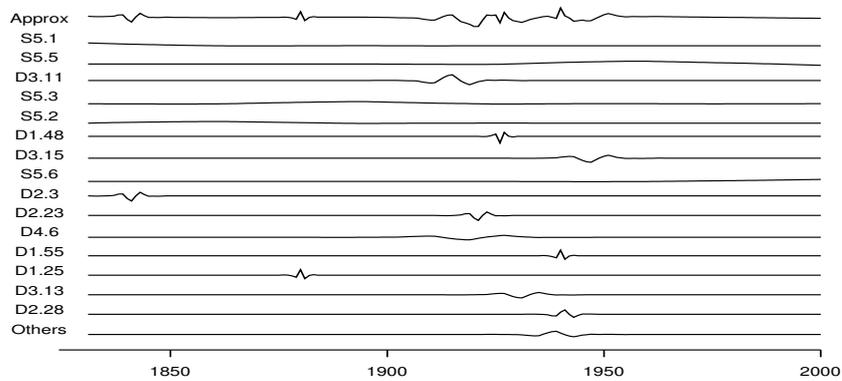


Figura 4.8: DWT de la serie de tasas de crecimiento del PIB para el Reino Unido y reconstrucción con los 16 coeficientes mayores.

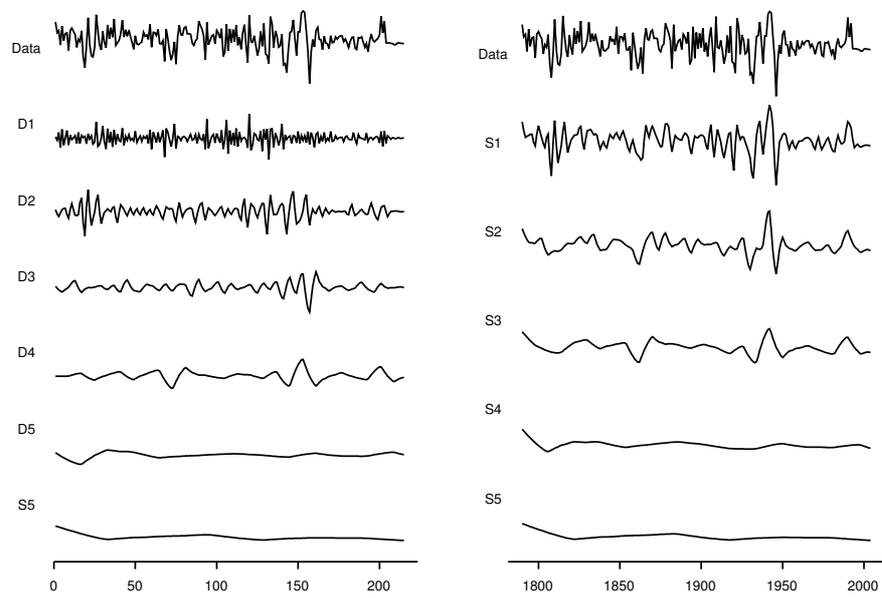


Figura 4.9: Análisis (izq.) y Descomposición (der.) Multiresolución de la serie del PNB de Estados Unidos.

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	0.01234	2.773 (39.3)	-0.0018	3.469 (1.12)	0.0075	1.999 (39.1)
D2	-0.0078	1.899 (18.4)	0.00687	2.195 (0.45)	0.0114	1.699 (28.3)
D3	0.00337	1.528 (11.9)	0.02516	3.253 (98.1)	0.0415	1.550 (23.5)
D4	-0.0346	1.429 (10.4)	-0.0154	1.717 (0.27)	0.0093	0.877 (7.5)
D5			-0.1245	0.520 (0.02)	0.0263	0.401 (1.6)
S5	4.1659*	1.97* (19.8)	3.52988	0.368 (0.01)	1.8688	0.608 (3.6)
Total	4.13924	4.402	3.42015	5.568	1.9649	3.208

Cuadro 4.1: Desviaciones Estandar y (porcentaje)Promedio de los componentes de la descomposición de las series de tasas de crecimiento del PIB. Además entre paréntesis se muestran los porcentajes respecto a la variabilidad total de la serie (*para México solo se calcularon hasta 4 niveles, el dato que se reporta en realidad corresponde a S4)

La tabla (4.1), que nos muestra el análisis de varianza dado por ondulatas para las series del Producto Interno Bruto de México, Estados Unidos y Reino Unido, nos muestra en términos generales, que las series tienen una distribución muy heterogénea de su varianza entre las distintas escalas temporales. Así mientras que la serie de Estados Unidos concentra 98% de su variabilidad en los movimientos (ciclos) en la escala de tres (ocho años), tanto la del Reino Unido como la de México concentran un 39% de ella en las fluctuaciones en la escala de uno (un año). De la misma manera la variabilidad de la tendencia para la serie norteamericana no aporta prácticamente nada a la variación general de la serie, en tanto que en caso mexicano este aporte alcanza prácticamente el 20%. Este resultado puede atribuirse a la poca longitud de la serie nacional comparada con la otras series que abarcan más de cien años, así como a la accidentada historia económica de México durante el siglo XX. Es preciso hacer la siguiente aclaración respecto a la tabla en cuestión. Aunque el valor promedio de la tasa de crecimiento el producto es el mayor de los reportados, la comparación directa puede resultar engañosa, pues estos estadísticos (y la transformada misma) han sido calculados para distintos periodos temporales (por ejemplo las series del Reino Unido y Estados Unidos incluyen los valores correspondientes a la dos guerras mundiales.)

La tabla (4.2) caracteriza las fluctuaciones observadas en el PIB mexicano diferenciándolas en tres periodos, el primer periodo comprende desde 1922 hasta 1932, el siguiente se encuadra entre 1933 y 1979 y finalmente un

	1921-1932		1933-1979		1980-2003	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	1.28	4.9 (42.5)	-0.0	1.7 (28.5)	0	2.9 (55.7)
D2			0.14	1.9 (35.0)	0	2.2 (31.6)
D3			0.16	1.1 (11.4)		
Tendencia	-2.12	6.7 (57.5)	5.83	1.6 (25.1)	2.5	1.4 (12.7)
Total	-0.83	6.8	6.14	2.6	2.5	4.1

Cuadro 4.2: Descomposicion multiresolucion de la serie del PIB por periodos mexicanos

periodo de 1980 a 2003. En esta tabla se hacen patentes claras diferencias cualitativas entre estas tres etapas. En la primera se observa una elevada desviación estándar que rebasa a cualquiera de los otros periodos (triplica a la de 1933-79). El análisis multiresolución que disgrega a los movimientos en la escala de uno (un periodo) muestra que 42.5 % de la volatilidad del periodo se debe a ellos (aunque de hecho no sea la mayor proporción observada entre periodos), luego la tendencia estimada por el filtro (restringida al periodo) muestra también mucha variación (el periodo es tan corto y de movimientos tan bruscos que la tendencia restringida es de hecho muy irregular). El periodo que va de 1933-79 se caracteriza por su estabilidad que se observa a través de una baja desviación estándar (2.6 %) así como por sus elevadas tasas de crecimiento (6.14% anual en promedio). Se deduce a través de la descomposición multiresolución restringida que la mayor parte de la volatilidad se debe a las fluctuaciones en la escala de dos (periodos), los movimientos en la escala de uno aportan el 28.5 % de la volatilidad, finalmente la época de 1980 hasta 2003 es de volatilidad intermedia (con una desviación estándar de 4.1%) .

La tabla (4.4) muestra un análisis de varianza similar al de las anteriores, con la salvedad de que aquí se ha separado en los periodos históricos mencionados con anterioridad en el capítulo 2. Entre los resultados resalta la alta volatilidad del periodo de la Penguerra, pues tanto en la serie de los Estados Unidos como en la del Reino Unido se observa que la volatilidad de la señal (restringida al periodo) se concentra fundamentalmente en los movimientos en la escala de uno (que incluso pueden ser considerados simplemente como ruido) y en menor medida en la escala de dos, aunque a pesar de esta gran volatilidad no es este el periodo con mayor variabilidad, cuantificada como magnitud de la desviación estándar de la serie. El periodo de entreguerras se confirma como el de mayor variabilidad para los tres países,

sin embargo esta volatilidad sólo está dada por movimientos de corto plazo en el caso de México, mientras que en E.U. y el Reino Unido está variabilidad está fuertemente asociada a la tendencia. Durante el periodo de Bretton Woods se observan tasas de crecimiento altas con poca variabilidad (dada por la desviación estándar), en cuanto a las características de estas fluctuaciones se observan comportamientos distintos en los tres países. En Estados Unidos las fluctuaciones tiene su soporte de manera equitativa en todas las escalas. En el Reino Unido las fluctuaciones están más concentradas en la tendencia y en México la volatilidad esta enfocada en movimientos de corto plazo (en la escala de uno). Por lo que respecta al periodo post Bretton Woods los dos países más desarrollados tienen como fuente principal de fluctuaciones los movimientos de corto plazo (E.U. en la escala de dos y U.K. en la escala de uno), mientras que en México, en el mismo periodo, marcada por importantes crisis, tienen mayor peso el cambio en la tendencia, situación que seguramente se explica por cambios en las políticas gubernamentales. Finalmente mencionemos que la correlación entre las series de GDP de México y Estados Unidos es 0.3090398 (restringida a 1922-2000), mientras que el mismo indicador calculado ahora entre las series de Estados Unidos y el Reino Unido es 0.2793184 (restringida a 1871-2000).

En la figura (4.10) hay que observar atentamente que la tendencia estimada para la serie mexicana no es lineal y en ella se distinguen nuevamente tres periodos con características diferentes; en los periodos extremos (1922-32 y 1980-2003) se observan tasas de crecimiento que tienden a disminuir, situación que se expresa en la tendencia como un valor muy pequeño de su derivada. Por otro lado, en la época de 1933-1979 se observa un apogeo del crecimiento que se expresa en una tendencia con pendiente mayor. Así mismo la tendencia estimada sobre las tasas de crecimiento muestra un ascenso al inicio de la década de los años cuarenta y comienza su declive a partir de los años setenta.

La figuras (4.13) y (4.12), muestran los gráficos de las tendencias ajustadas para las series del PIB del Reino Unido y los Estados Unidos respectivamente. Estas confirman que la tendencia tiene su descenso más importante en el periodo comprendido entre el inicio de la Primera y el final de la Segunda Guerras Mundiales. A excepción de este periodo las tendencias no presentan cambios abruptos, de modo que en niveles la tendencias son muy parecidas a una aproximación lineal.

	México			USA			UK		
	media	dev.st.	(%)	media	dev.st.	(%)	media	dev.st.	(%)
Periodo de Pleguerra 1870-1914									
D1				0.037	4.0	(74.7)	0.091	2.3	(42.4)
D2				0.014	1.7	(12.9)	-0.077	1.8	(25.2)
D3				-0.006	1.4	(9.0)	-0.034	1.3	(13.2)
S3				3.997	0.8	(3.4)	1.993	1.6	(19.2)
TP				4.046	4.7		1.973	2.8	
Periodo de Entreguerras 1919-1929									
D1	-0.209	4.0	(45.0)	-0.589	3.8	(27.6)	-0.089	2.5	(28.8)
D2	0.077	2.4	(16.5)	-0.022	3.5	(22.9)	0.030	1.6	(12.2)
S2	2.869	3.7	(38.5)	2.635	5.1	(49.5)	0.919	3.6	(59.0)
TP	2.737	5.9		2.022	6.9		0.799	4.8	
Periodo de Bretton Woods 1945-1971									
D1	-0.003	1.8	(46.5)	-0.022	3.3	(36.8)	-0.027	1.4	(30.4)
D2	0.046	1.4	(27.9)	0.084	2.7	(23.7)	0.018	0.5	(3.5)
S2	5.978	1.3	(25.6)	2.229	3.5	(39.5)	2.248	2.1	(66.1)
TP	6.021	2.5		2.291	5.4		2.239	2.5	
Periodo Post Bretton Woods 1972-2000									
D1	0.005	2.4	(36.4)	-0.032	1.1	(29.4)	-0.079	1.5	(50.2)
D2	0.003	1.4	(12.3)	0.099	1.5	(52.5)	-0.026	0.8	(14.8)
S2	3.843	2.9	(51.3)	2.581	0.8	(18.1)	2.101	1.3	(35.0)
TP	3.852	4.0		2.648	1.9		1.995	2.1	
Periodo de la Postguerra 1945-2000									
D1	0.0654	2.1	(29.0)	0.030	2.4	(35.5)	0.003	1.3	(16.0)
D2	-0.027	2.1	(32.3)	-0.044	2.1	(25.9)	-0.170	1.5	(23.0)
D2	-0.045	1.3	(11.6)	0.157	1.3	(10.1)	0.279	1.8	(31.4)
S3	4.906	1.9	(27.1)	2.332	2.2	(28.5)	1.999	1.7	(39.6)
TP	4.898	3.5		2.476	4.0		2.113	2.3	

Cuadro 4.3: Descomposicion multiresolución de la series del PIB por periodos

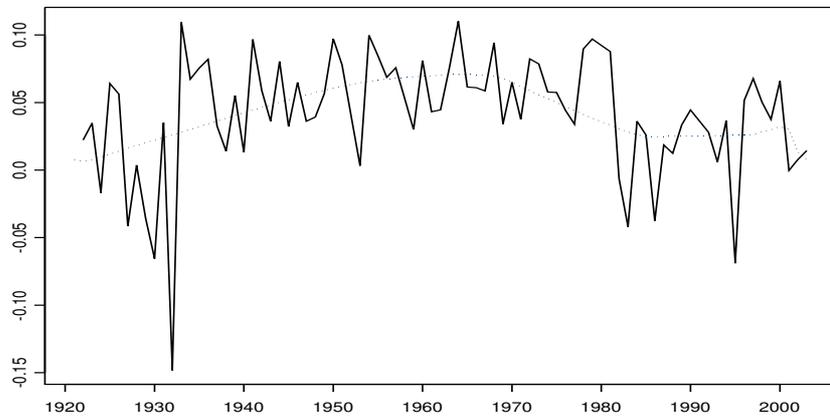


Figura 4.10: Tasas de Crecimiento del PIB, México 1922-2005, con tendencia ajustada por onduletas (línea punteada).

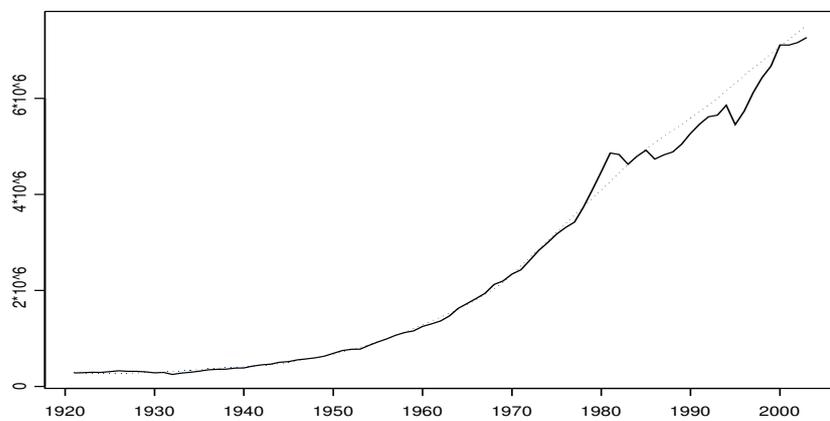


Figura 4.11: Logaritmo de la serie del PIB, México 1922-2005, con tendencia ajustada por onduletas (línea punteada).

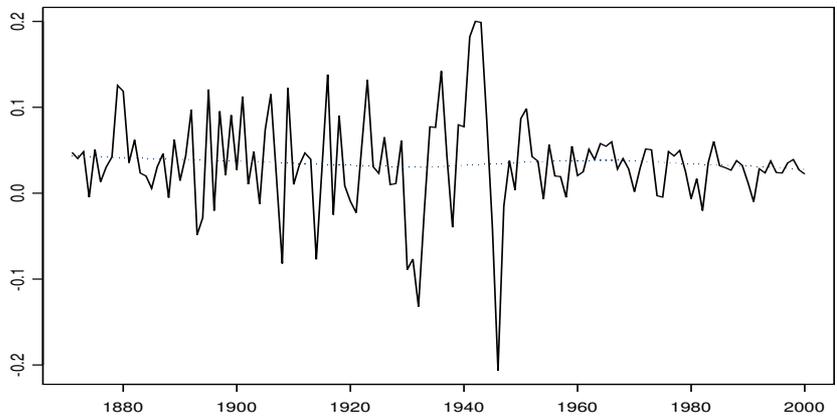


Figura 4.12: Tasas de Crecimiento del PIB, Estados Unidos 1870-2004, con tendencia ajustada por onduletas (línea punteada).

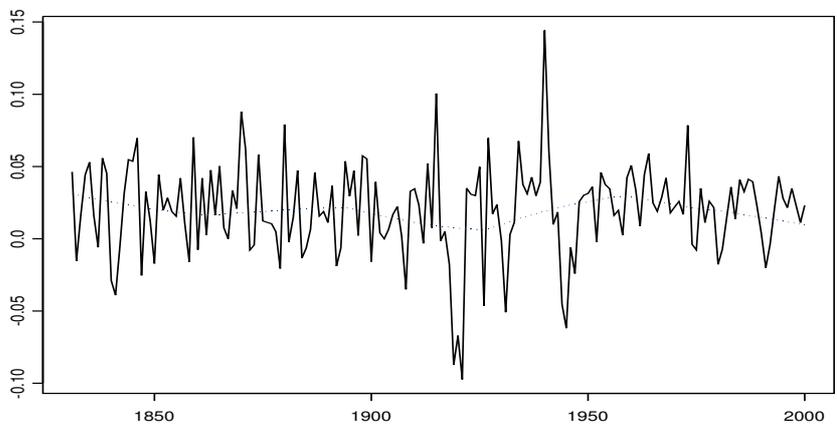


Figura 4.13: Tasas de Crecimiento del PIB, Reino Unido 1831-2004, con tendencia ajustada por onduletas (línea punteada).

4.5. Estimación de la Brecha del Producto

Una de las aplicaciones más frecuentes del filtro Hodrick Prescott se da en el contexto de la estimación de políticas monetarias que hacen uso de los diferenciales existentes entre el producto observado y el producto como tendencia de largo plazo, este último conocido como potencial. Esta diferencia se conoce como brecha del producto o *output gap* y en términos de la desagregación hecha por el filtro H-P está definido como la diferencia entre producto real y la tendencia (producto potencial), i.e.

$$y_t^{gap} = \epsilon_t = y_t - \mu_t \quad (4.2)$$

Observemos que la brecha del producto también es igual al componente cíclico de la serie. Su interpretación es simple: una cantidad positiva para el *gap* es indicativa de un exceso de demanda, mientras que una cantidad negativa revela un exceso de capacidad, de modo que esta brecha representa los movimientos transitorios del producto fuera de la senda de crecimiento potencial de la economía. Ahora, dado que la brecha del producto no es observable, tiene que ser estimada, por tanto no es sorprendente que los diferentes supuestos y las diferentes metodologías arrojen diferentes estimados del *output gap*. En esta sección se muestran las nuevas estimaciones de esta brecha resultantes de la aplicación del filtro de onduletas. Recordando el análisis de la señal en onduletas,

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_J \quad (4.3)$$

a partir del cual podemos definir a la brecha del producto como,

$$\mathbf{Y}^{gap} = \mathbf{Y} - \mathcal{S}_J = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j \quad (4.4)$$

Es necesario observar que debido a que las onduletas proveen distintos niveles de refinamiento de la serie (\mathcal{S}_j) es posible definir alternativamente la brecha de modo que sólo incluya los niveles relevantes para la serie o sean acordes con el propósito de la estimación.

Los siguientes gráficos muestran las brecha del producto estimadas por onduletas, para México (4.14) y (4.15) para las series en niveles y onduletas respectivamente, y para las serie en niveles de Estados Unidos (4.16) y el Reino Unido (4.17).¹⁷

¹⁷Las series en niveles son de hecho el logaritmo de los niveles de las series.

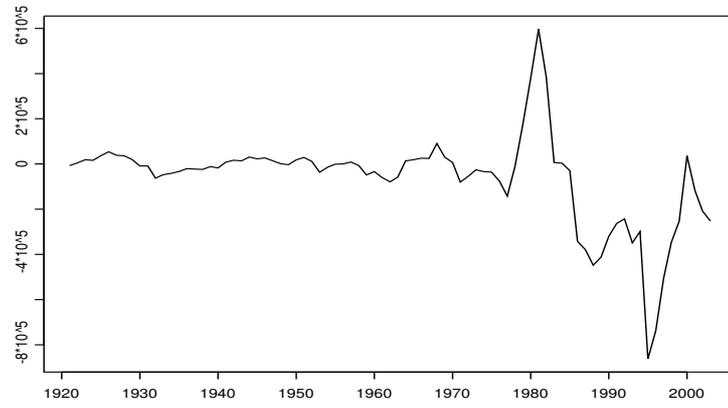


Figura 4.14: Brecha del Producto (en niveles), México 1922-2005.

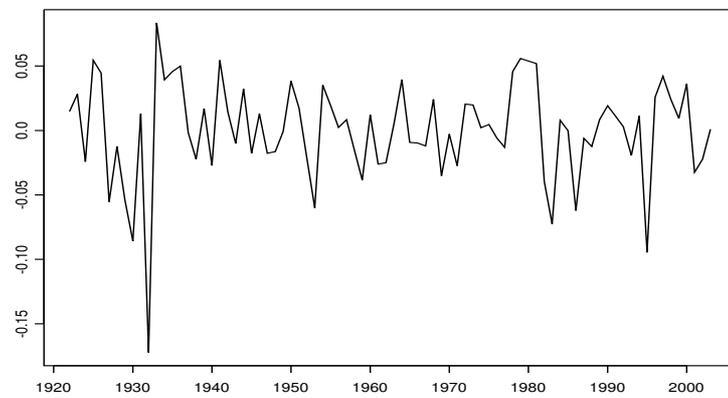


Figura 4.15: Brecha del Producto (en tasas de crecimiento), México 1922-2005.

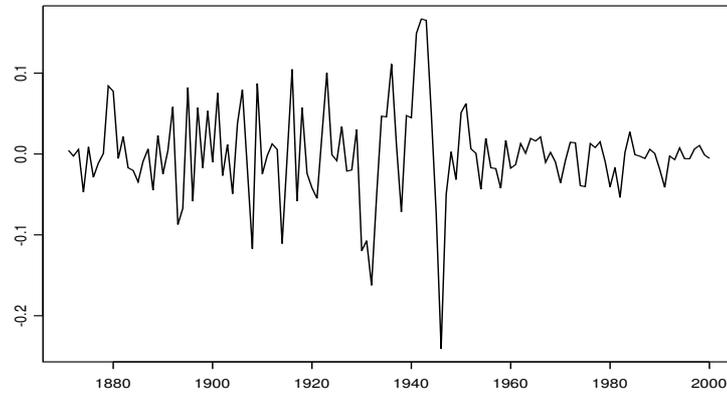


Figura 4.16: Brecha del Producto (en tasas de crecimiento), Estados Unidos 1870-2005.

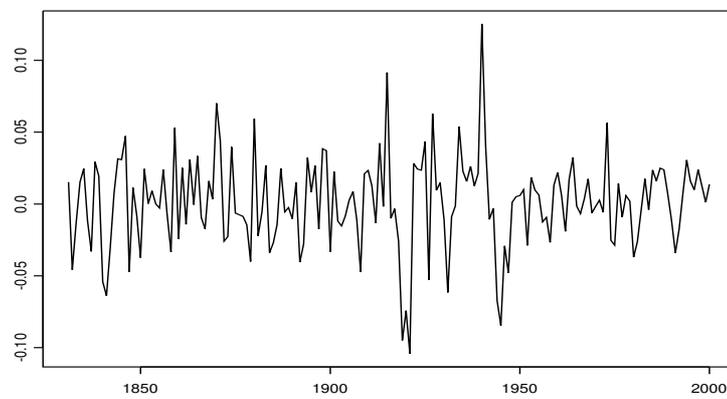


Figura 4.17: Brecha del Producto (en tasas de crecimiento), Reino Unido 1831-2005.

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	0.003	1.879 (21.3)	0.0005	1.357 (17.8)	0.011	1.44 (7.2)
D2	0.009	2.062 (25.6)	0.0097	2.044 (40.5)	0.001	2.11 (15.5)
D3	-0.003	2.376 (34.0)	-0.0020	0.921 (8.2)	0.050	1.34 (6.3)
D4			0.1268	0.945 (8.6)	0.015	1.73 (10.4)
D5					-0.045	2.40 (20.0)
S5	3.720	1.780 (19.0)	3.2180	1.599 (24.8)	3.888	3.41 (40.5)
Total	3.729	3.966	3.3533	3.084	3.922	5.23

Cuadro 4.4: Descomposicion multiresolucion de las series de Consumo en tasas de crecimiento porcentuales

4.6. Fluctuaciones en los Componentes del PIB

Los componentes del PIB, a saber el consumo, la inversión, el gasto gubernamental y el comercio exterior (importaciones y exportaciones) contribuyen de distintas maneras a la evolución del ciclo económico.

En la tabla (4.4) se presenta el análisis de varianza de la serie de tasas de crecimiento del consumo en México, Estados Unidos y el Reino Unido. Aquí podemos apreciar que el consumo en México tiene distribuida su variabilidad casi equitativamente entre todas las escalas, en tanto el mismo indicador para el Reino Unido concentra su variabilidad en los movimientos de largo plazo. Finalmente en los Estados Unidos se observa que los movimientos de mediano plazo (en la escala de dos) son los más relevantes, aunque la tendencia y los movimientos de corto plazo hacen en conjunto un aporte similar.

En la tabla (4.5) se presenta un análisis, separado en periodos históricos, de la serie de tasas de crecimiento del consumo, de los Estados Unidos y el Reino Unido. Aquí podemos apreciar que, en el Reino Unido las variaciones en el consumo han tenido una evolución de fluctuaciones enraizadas en el corto plazo hacia cambios basados en la tendencia, de modo que se observan más influencias de ella a partir de la Postguerra, mientras que en el periodo de la preguerra la mayor parte de la variabilidad de la serie se ubica en la escala de uno. En contraste la serie de los Estados Unidos durante todos los periodos tiene como factor fundamental a los movimientos de corto plazo, en particular de la escala de uno y es sólo hasta la etapa posterior a Bretton Woods que la influencia principal se traslada a los movimientos en la escala de dos. Este cuadro también confirma que el periodo de entreguerras es muy

volátil, pues aunque en valor absoluto su desviación durante este periodo es la menor, vista como proporción del crecimiento medio excede a la de otros periodos, con la sola excepción del periodo de entreguerras, donde en ambos países se observan muy bajas tasas de crecimiento promedio en el consumo.

En el análisis multiresolución de la serie de tasas de crecimiento de la inversión podemos observar que para los tres países la mayor parte de la variabilidad procede de movimientos de corto plazo asociados a las escalas de uno y dos (es decir fluctuaciones de uno a ocho años).

En el análisis de las series de gasto gubernamental se observan comportamientos variados. En el caso de México la mayor parte de la variación se debe a cambios en la tendencia, mientras que en Estados Unidos la variabilidad se explica principalmente a apartir de cambios en el mediano plazo (en las escalas de dos y cuatro, i.e. de cuatro a ocho años), finalmente en el Reino Unido el principal aporte a la varianza los hacen los movimientos de corto plazo (en la escala de uno, i.e a lo más dos años). La desviación estándar de la serie es notoriamente mayor en el caso norteamericano.

El análisis de la series de exportaciones netas muestra que en ninguno de los tres países las fluctuaciones de corto plazo (en la escala de uno) juegan un papel determinante en la variabilidad total de la serie. En el caso del Reino Unido, prácticamente toda la variabilidad se debe a cambios en la tendencia, en la serie estadounidense el mayor aporte lo realizan las fluctuaciones en la escala de cuatro (dieciseis años), finalmente en la serie mexicana las fluctuaciones están distribuidas entre las fluctuaciones de mediano plazo y la tendencia.

4.7. Fluctuaciones en los Precios y los Agregados Monetarios

Las características de las series filtradas de inflación se muestran en los cuadros (4.9) y (4.10). En la primera de estas tablas, podemos notar que no existe un patrón común entre los tres países para la distribución de la varianza de sus señales. En primer lugar la serie británica concentra alrededor de cuarenta por ciento de su variación en movimientos de corto plazo (en la escala de dos y tres, i.e. entre cuatro y ocho años), además concentra treinta y ocho por ciento de su variación total en la tendencia y en las fluctuaciones en la escala de cinco (treinta y dos años). Por otro lado la serie de Estados Unidos centra casi el cuarenta y siete por ciento de su varianza en los movimientos de corto plazo (en la escala de uno y dos), sólo el nueve por ciento corresponde a la tendencia y distribuye el resto entre el

	USA			UK		
	media	dev.st.	(%)	media	dev.st.	(%)
Periodo de Pregarra 1870-1914						
D1				0.008	1.224	60.3
D2				0.021	0.706	20.1
D3				-0.004	0.353	5.0
S3				1.684	0.603	14.6
TP				1.708	1.549	
Periodo de Entreguerras 1919-1929						
D1	0.610	2.021	62.4	0.297	2.494	31.9
D2				0.412	1.568	12.6
S2	1.113	1.569	37.6	0.016	3.291	55.5
TP	1.724	1.893		0.725	3.682	
Periodo de Bretton Woods 1945-1971						
D1	-0.095	1.068	45.3	0.072	0.984	7.4
D2	0.068	0.842	28.2	0.026	1.198	11.0
S2	1.833	0.816	26.5	4.278	3.261	81.6
TP	1.806	1.509		4.378	3.591	
Periodo Post Bretton Woods 1972-2000						
D1	-0.030	3.520	34.9	0.019	1.252	5.6
D2	0.017	1.939	10.6	-0.115	1.877	12.7
D3	-1.185	3.155	28.0	0.045	1.921	13.3
S3	2.064	3.072	26.5	9.873	4.365	68.4
TP	0.866	4.927		9.823	5.217	
Periodo de la Postguerra 1945-2000						
D1	0.009	1.549	16.3	0.004	1.373	6.1
D2	0.236	3.111	65.8	0.013	1.351	6.0
D3	-0.062	1.153	9.0	0.064	1.782	10.2
S3	1.105	1.137	8.8	7.254	4.901	77.7
TP	1.289	3.794		7.331	5.274	

Cuadro 4.5: Descomposicion multiresolucion de las series de consumo por periodos

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	0	6.98 (29.0)	-0.004	14.17 (22.9)	-0.234	6.273 (45.5)
D2	0	9.89 (58.3)	0.028	19.38 (42.9)	-0.462	5.919 (40.5)
D3			0.161	14.45 (23.8)	0.521	2.859 (9.4)
D4			0.182	4.56 (2.4)		
S4	2.779	4.61 (12.7)	7.409	8.33 (8.0)	4.162	1.998 (4.6)
Total	2.779	12.96	7.776	29.27	3.986	8.677

Cuadro 4.6: Descomposicion multiresolucion de las series de Inversion en tasas de crecimiento porcentuales

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	-0.066	1.956 (17.0)	-0.012	4.94 (5.8)	0.279	3.556 (62.2)
D2	-0.094	2.072 (19.0)	0.011	9.94 (23.6)	-0.015	0.511 (1.3)
D3	0.277	1.232 (6.7)	-0.176	16.27 (63.3)	-0.128	0.626 (1.9)
D4			-0.074	1.68 (0.7)		
S4	3.902	3.595 (57.3)	5.736	5.23 (6.6)	2.547	2.652 (34.6)
Total	4.019	4.555	5.484	20.47	2.683	5.172

Cuadro 4.7: Descomposicion multiresolucion de las series de Gasto Gubernamental en tasas de crecimiento porcentuales

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	-66.32	3751.09(7.2)	-2.773	40.98 (10.8)	-133.62	8781.04 (0.2)
D2	-387.47	7843.32(31.4)	-6.499	59.95 (23.2)	-2132.7	28380.27 (2.4)
D3	-1693.3	7928.28(32.1)	-1.104	40.11 (10.4)	-4461.7	34103.38 (3.5)
D4			-14.675	82.72 (44.2)		
S4	5941.5	7574.93(29.0)	-43.180	41.89 (11.3)	163439	176373.9 (93.8)
Total	3794.5	10955.1	-68.234	121.99	156711	170027.6

Cuadro 4.8: Descomposicion multiresolucion de las series de Exportaciones Netas en niveles

resto de las escalas. Esto hace presumir que la serie estadounidense tiene sus fluctuaciones de mayor relevancia en periodos en ciclos de a los más ocho años. Finalmente la serie mexicana se distribuye de manera casi equitativa su variación entre ciclos de mediano plazo (en las escalas de dos y tres) y en su tendencia.

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	0.02	7.02 (7.28)	0.016	2.68 (21.07)	-0.009	3.34 (15.79)
D2	-0.18	9.93 (14.58)	-0.004	2.97 (25.8)	-0.006	4.18 (24.86)
D3	0.33	12.95 (24.58)	-0.010	2.17 (13.82)	-0.028	2.87 (11.71)
D4	0.85	8.54 (10.79)	0.068	2.22 (14.49)	0.004	2.65 (9.94)
D5			0.237	2.33 (15.84)	-0.415	3.18 (14.31)
S5	18.08*	16.97* (42.55)	1.037	1.75 (8.96)	2.549	4.06 (23.37)
Total	19.108	26.08	1.344	5.71	2.095	7.29

Cuadro 4.9: Analisis Multiresolución descomposición de varianza para las series de inflación de México, Estados Unidos y el Reino Unido. * La tendencia de la serie mexicana corresponde al nivel (\mathcal{S}_4)

El análisis por periodos de la inflación, (cuadro 4.10) confirma que el periodo anterior a la Primera Guerra mundial se caracterizó, tanto en Estados Unidos como el Reino Unido, por una muy alta volatilidad fundamentalmente concentrada en fluctuaciones de corto plazo (en las escalas de dos y cuatro, i.e no más allá de ocho años). Durante el periodo de entreguerras no se observó una concentración clara de la variabilidad en ninguna de las escala (y en ambos países). En cambio los periodos de la postguerra muestran que además de la disminución de las tasas promedio de inflación se observó una concentración, inmediate en el caso estadounidense y más paulatina en caso de la Gran Bretaña, de su variabilidad de sus fluctuaciones hacía los movimientos de largo plazo y la tendencia. Por lo que respecta a México, los tres periodos analizados muestran que la mayor parte de sus variabilidad se concentró en el factor de la tendencia y esto se explica dada la magnitud de los cambios de la tasa promedio entre un periodo y otro.

El análisis multiresolución, de las series de tasas de crecimiento del dinero, M1 y M2 de los tres países muestra comportamientos diferenciados. Primero las señales de M1 tanto de México como del Reino Unido, comparten una alta concentración de la varianza en la fluctuaciones de la escala de uno y de dos (de cuatro a ocho meses), de modo que en ambos países el dinero circulante (junto con las cuentas bancarias) debe sus fluctuaciones más a cambios de corto plazo. Así mismo el análisis de M2 muestra que en ambos países la variabilidad de la serie está en mayor proporción definida por fluctuaciones en la tendencia. Por el contrario el análisis de M1 para los Estados Unidos muestra, que aunque casi el cuarenta y cinco por ciento (proporción menor en veinte punto porcentuales que la del Reino Unido) de su volatilidad está asociada a movimientos en las escalas de uno y dos, al menos una quinta parte de su variabilidad es debida a movimientos en la escala de cinco (21 trimestres) o bien a su tendencia. Por lo que respecta al análisis de M2 para el mismo país se observó que el setenta por ciento de su variación es de corto plazo (en las escalas de uno y dos).

4.8. Fluctuaciones en el Desempleo

El análisis de las series de tasas de desempleo de los tres países, (cuadros 4.13 y 4.14) muestra que este indicador es más estable que todos los observados por anterioridad. Esto es así por que todas las fluctuaciones de las señales están asociadas, en el análisis de onduletas, con la tendencia. Esta situación se observa en las tres naciones estudiadas y durante todos los periodos históricos, salvo quizá con la ligera excepción del Reino Unido, cuya serie concentra al menos 48% de su variabilidad en las fluctuaciones de la escala de cinco (i.e. treinta y dos años), lo cual bien puede considerarse como un movimiento de largo plazo, pese a no estar asociado a la tendencia, una situación similar se observa en el periodo de la preguerra donde la mayor parte de la variabilidad en la tasa de desempleo británica esta asociada a las escalas de dos y tres, es decir a fluctuaciones de entre cuatro y ocho años. Estos resultados parecen indicar que la serie de desempleo no muestra una tendencia cíclica, en cambio está más importantemente ligada a las tendencia de crecimiento del PIB.

	México			USA			UK		
	media	dev.st.	(%)	media	dev.st.	(%)	media	dev.st.	(%)
Periodo de Pleguerra 1870-1914									
D1				0	3.2	32.9	-0.001	3.8	32.0
D2				-0.006	2.9	27.6	-0.031	4.5	45.0
D3				0.001	2.3	16.6	-0.017	2.4	13.1
D4				0.028	1.9	11.6	0	0.9	1.8
S4				-0.328	1.8	11.2	0.183	1.9	7.9
TP				-0.304	5.61		0.134	7.03	
Periodo de Entreguerras 1919-1939									
D1				0	2.7	25.2	0.01	4.5	47.0
D2				-0.03	3.3	36.5	0.0	2.0	9.1
S2				-0.77	3.4	38.2	-0.99	4.4	43.8
TP				-0.81	5.7		-1.0	6.5	
Periodo de Bretton Woods 1945-1971									
D1	0	3.02	28.1	0.0	1.86	27.2	0	1.68	34.7
D2	0.09	1.66	8.5	0.03	1.46	16.8	0.18	1.69	35.1
S2	6.17	4.55	63.5	3.18	2.67	55.8	3.62	1.57	30.2
TP	6.26	5.74		3.27	3.32		3.81	2.69	
Periodo Post Bretton Woods 1972-2000									
D1	0	12.78	14.8	0	0.82	6.6	0	1.45	6.1
D2	0	10.28	9.6	0	1.37	18.4	0.015	2.34	15.8
D3	0	13.89	17.5	0	1.39	18.9			
S3	32.05	25.32	58.1	4.88	2.39	56.0	7.701	5.21	78.1
TP	32.05	33.22		4.88	3.2		7.716	5.84	
Periodo de la Postguerra 1945-2000									
D1	0	7.12	6.6	0	1.33	14.5	0	1.59	10.3
D2	0.024	12.31	19.7	0.016	1.49	18.0	0	1.91	14.8
D3	-0.072	8.05	8.4	0.008	0.83	5.6	0	0.66	1.8
S3	20.29	22.42	65.3	4.095	2.76	61.9	5.8	4.25	73.1
TP	20.24	27.79		4.121	3.33		5.8	4.97	

Cuadro 4.10: Desglose por periodos del análisis multiresolución de las series de Inflación.

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	9.1 e-4	4.261 (46.8)	2.1 e-4	0.332 (34.0)	0.001	1.026 (42.3)
D2	0.001	3.381 (29.5)	2.6 e-4	0.251 (19.4)	-1.1e-4	0.725 (21.1)
D3	2.6 e-4	1.578 (6.4)	-5.9 e-4	0.178 (9.8)	0.002	0.524 (11.1)
D4	0.002	1.189 (3.6)	-9.1 e-4	0.132 (5.4)	0.005	0.481 (9.3)
D5	0.041	1.585 (6.5)	-5.2 e-4	0.145 (6.5)	-0.002	0.256 (2.6)
D6			0.0086	0.188 (10.9)		
S6	2.516	1.669 (7.2)	0.4047	0.213 (13.9)	0.972	0.581 (13.6)
Total	0.026	6.175	0.4117	0.565	0.977	1.549

Cuadro 4.11: Analisis Multiresolución con descomposición de varianza para las series de tasas de crecimiento del DINERO: M1 de México, Estados Unidos y el Reino Unido

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	3.7e-4	1.073 (14.8)	2.3e-5	0.428 (49.5)	0.001	1.256 (16.5)
D2	0.001	0.813 (8.5)	2.5e-4	0.281 (21.2)	-0.003	1.056 (11.3)
D3	0.005	0.442 (2.5)	0.001	0.176 (8.4)	6.2 e-4	0.883 (8.1)
D4	0.017	0.479 (2.9)	0.001	0.122 (4.0)	7.2 e-4	0.740 (5.7)
D5	0.038	1.466 (27.6)	7.7e-5	0.106 (3.0)	0.015	0.625 (4.1)
D6			0.002	0.097 (2.5)		
S6	2.352	1.845 (43.7)	0.555	0.205 (11.3)	0.942	2.271 (53.7)
Total	2.415	2.384	0.561	0.603	0.955	3.897

Cuadro 4.12: Analisis Multiresolución con descomposición de varianza para las series de tasas de crecimiento del DINERO: M2 de México, Estados Unidos y el Reino Unido

	México		USA		UK	
	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)	media	dev.st.(%)
D1	0.01	0.44 (7.0)	-0.01	0.95 (3.9)	-0.002	0.69 (4.2)
D2	-0.02	0.61 (14.0)	0.01	1.50 (9.7)	-0.006	1.08 (10.5)
D3			-0.03	1.91 (15.7)	-0.017	1.21 (13.1)
D4			-0.07	2.55 (28.1)	0.035	1.09 (10.6)
D5					0.101	2.34 (48.4)
S5	4.39*	1.42*(78.0)	6.95	3.14 (42.4)	4.819	1.22 (13.1)
Total	4.36	1.651758	6.85	4.72	4.929	3.36

Cuadro 4.13: Analisis Multiresolución descomposición de varianza para las series de desempleo de México, Estados Unidos y el Reino Unido. *La tendencia de la serie mexicana corresponde al nivel \mathcal{S}_3 .

	USA			UK		
	media	dev.st.	(%)	media	dev.st.	(%)
Periodo de Pregarra 1870-1914						
D1	0.005	1.13	6.6	0.020	0.77	10.4
D2	-0.015	1.79	16.5	0.010	1.36	31.9
D3				-0.001	1.44	36.2
S3	7.101	3.87	76.9	4.338	1.11	21.4
TP	7.092	4.44		4.368	2.31	
Periodo de Entreguerras 1919-1929						
D1	-0.005	1.03	1.6	-0.005	1.25	12.9
D2	0.037	3.18	15.5	0.012	1.44	17.2
S2	10.939	7.35		9.103	2.91	69.9
TP	10.971	8.04	82.8	9.109	3.44	
Periodo de Bretton Woods 1945-1971						
D1	0.001	0.59	14.4	0.001	0.23	9.9
D2	0.127	0.94	35.9	0.063	0.54	55.5
S2	4.430	1.10	49.6	1.750	0.42	34.6
TP	4.559	1.20		1.814	0.59	
Periodo Post Bretton Woods 1972-2000						
D1	-0.0005	0.32	4.1	0.0003	0.28	1.2
D2	-0.0004	0.48	9.2	-0.003	0.87	12.2
D3	0.016	0.97	38.4	0.0007	1.04	17.4
S3	6.224	1.09	48.2	6.92	2.08	69.0
TP	6.239	1.33		6.91	2.51	
Periodo de la Postguerra 1945-2000						
D1	0.026	0.57	8.3	0.02441	0.44	1.8
D2	0.097	0.93	21.9	0.06928	0.77	5.4
D3	0.018	0.75	14.5	-0.0004	0.73	4.9
S3	5.341	1.48	55.3	4.528	3.09	87.8
TP	5.483	1.52		4.622	3.18	

Cuadro 4.14: Descomposicion multiresolucion por periodos de las series de desempleo

Conclusiones

Se puede considerar como aporte fundamental de la transformada en onduletas en el análisis del ciclo económico su capacidad de obtener un análisis de varianza asociado a las escalas de la descomposición, es decir, es posible discriminar cual es el aporte de ciclos de diferente longitud a la variabilidad total de la serie, de manera que se localizan las escalas más influyentes en la señal y de este modo, una vez localizados en el dominio del tiempo, los movimientos más relevantes de la serie, pueden ser asociados a cambios de política y choques de oferta o demanda específicos. Por ejemplo, la crisis cambiaria de 1994-95 en México se revela en el análisis de la DWT como un movimiento en la escala de uno, es decir una fluctuación con un horizonte de dos años, que se presenta en un contexto de un periodo (1980-2005), que de acuerdo a la estimación de la tendencia es de poca volatilidad (con desviación estándar de 4.1%) y bajo crecimiento (en promedio 2.5% anual). Un ejemplo más es la Gran Depresión, que en la serie del PIB de Estados Unidos se muestra como una fluctuación en la escala de dos, i.e. un movimiento con duración de cuatro años, pero que coexiste con otros ciclos muy volátiles con duraciones de ocho y dieciseis años, que se presentaron entre las dos Guerras Mundiales.

Por lo que respecta al análisis de las series de tasas de crecimiento del PIB, la mexicana presenta tres periodos muy bien identificados, el primero (1921-32) se caracteriza por fluctuaciones abruptas de corto plazo, en tanto que el segundo (1933-1979) y el tercero (1980-2003) son en términos generales estables pero se observan en ellos tasas de crecimiento promedio distintas, 6.4% y 4.1% respectivamente, que se reflejan en un nivel distinto para la tendencia. Esta misma serie concentra 39 % de su desviación estándar en fluctuaciones de corto plazo (en la escala de uno), sin embargo el resto de las escalas aportan cada una al menos 10% a la variabilidad total. Por otro lado, el análisis de la serie del PNB estadounidense, muestra que sus fluctuaciones han disminuido a través del tiempo, además su variabilidad total está concentrada (en un 98%) en la escala de tres. Finalmente la serie

del PIB del Reino Unido, concentra principalmente sus fluctuaciones en el corto y el mediano plazo (90.9% de varianza hasta la escala de tres), teniendo sus mayores coeficientes en el periodo de entreguerras.

En lo concerniente a los componentes del PIB, se observó que en las series de tasas de crecimiento del consumo del Estados Unidos la mayor parte de sus fluctuaciones se concentran en el corto plazo, mientras que las de México y el Reino Unido están distribuidas entre las distintas escalas. El componente inversión en los tres países mostró estar asociado a fluctuaciones de corto plazo. Las características del gasto gubernamental son distintas en los tres países. En el Reino Unido las mayores variaciones de este son de corto plazo, en los Estados Unidos son de mediano plazo y en México la tendencia tiene la mayor relevancia.

La series filtradas de inflación mostraron que la mayor parte de la variación de las serie de México esta concentrada en componentes cíclicos de largo plazo, mientras que en las series de Estados Unidos y el Reino Unido la variación no esta focalizada en alguna escala. En cuanto a los agregados monetarios se observa un movimiento diferenciado, es decir, en el caso de el Reino Unido, y México mientras de M1 está influenciado principalmente por fluctuaciones en el corto plazo, M2 tiene mayores componentes de largo plazo, a diferencia de Estados Unidos en donde M2 esta asociada a fluctuaciones de corto plazo y en M1 la tendencia tiene la misma relevancia que las escalas menores. Finalmente las series de desempleo de los tres países muestran mayor relevancia de los componentes de tendencia.

Por lo que respecta a la estimación de la brecha del producto mediante onduletas, esta sólo presenta ligeras diferencias con respecto a la estimación por el filtro Hodrick-Prescott. En particular en el análisis comparativo se mostró que las disparidades entre las señales filtradas por ambos métodos disminuyen cuando las series poseen un componente de tendencia más predominante. El principal rasgo distintivo de las series filtradas por *wavelets* es que estas asimilan de mejor manera los cambios en tendencia y la porción de las señal en donde se produce el cambio es aislada en alguna de las escalas.

Finalmente es necesario recalcar que este trabajo presenta una primera aproximación a algunas de las posibles aplicaciones de la transformada en *wavelets* en el ámbito del análisis macroeconómico; en él se vislumbran otras aplicaciones para esta metodología, en particular la propuesta de la brecha del producto puede ser de utilidad en diseño de reglas de política monetaria.

Bibliografía

- [1] **Abramovitz, M.** (1961) "*The nature and significance of Kuznetz cycles*". Economic Development and Cultural Change, 9: 225-49. (Economica, 35, 349-67)
- [2] **Agenor, P. Richard, C. John McDermott y Eswar Prasad** (1998), "*Macroeconomic Fluctuations in Developing Countries. Some Stylized Facts*", Working Papers, Economic Development Institute, The World Bank.
- [3] **Backus, D.K., and P.J. Kehoe** (1992), "*International Evidence of the Historical Properties of Business Cycles*". American Economic Review 82: 864-888.
- [4] **Backus, D., P. Kehoe, and F. Kydland** (1992) "*International real business cycles*". Journal of Political Economy 101: 745-775.
- [5] **Basu, S. and A. Taylor** (1999) "*Business cycles in international historical perspective*". Journal of Economic Perspectives 13(2): 45-68.
- [6] **Baxter, M. and R. King** (1995) "*Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters For Economic Time Series*". NBER Working Paper No. 5022.
- [7] **Bergman, Michael; Bordo, Michael y Jonung, Lars.** (1998) "*Historical Evidence on Business Cycles: The International Experience*". En Beyond Shocks: What Causes Business Cycles? (eds.) J.C. Fuhrer and S. Schuh. Boston, Massachusetts: Federal Reserve Bank of Boston, 65-113.
- [8] **Blanchard, O. J. y Fisher, S.**(1989) "*Lectures in Macroeconomics*". Cambridge, Massachusetts.
- [9] **Bruce, Andrew y Gao, Hong-Ye** (1996) "*Applied Wavelet Analysis with S-PLUS*". Springer-Verlag.
- [10] **Burns, A., y Mitchell, W.C.** (1946), "*Measuring Business Cycles*". New York: National Bureau of Economic Research.
- [11] **de Brouwer, Gordon.** (1998) "*Estimating Output Gaps*" Reserve Bank of Australia, Economic Research Department. Research Discussion Paper 9809.

- [12] **Cooley, T.F. y Ohanian, L.E.** (1991) *“The cyclical behaviour of prices”*. Journal of Monetary Economics, 28, 25-60.
- [13] **Chiquiar, D. y Ramos-Francia, M.** (2004) *“Bilateral Trade and Business Cycle Synchronization: Evidence from Mexico and United States Manufacturing Industries”*. Working Paper 2004-05, Dirección General de Investigación Económica, Banco de México.
- [14] **Daubechies, Ingrid.** (1992) *“Ten Lecture on Wavelets”*, Volumen 61 de la *CBMS-NFS Regional Conference Series in Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.
- [15] **Feinstein, Charles.** (1972) *“National Income, Expenditure, and Output of the United Kingdom”*. Chicago: University of Chicago Press.
- [16] **Fuhrer, J. C. y Shuh C.** (1998) *“Beyond Shocks: What Causes Business Cycles. An Overview ”*. En *Beyond Shocks: What Causes Business Cycles?* (eds.) J.C. Fuhrer and S. Schuh. Boston, Massachusetts: Federal Reserve Bank of Boston.
- [17] **Gençay, R., F. Selçuk, and B. Whitcher** (2001). *“An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics”*. San Diego, CA, USA: Academic Press.
- [18] **Goffe, William L.** (1994) *“Wavelets in Macroeconomics: An Introduction”*. En *Computational Techniques for Econometrics and Economic Analysis*, 137-149. Kluwer Academic Publishers Netherlands.
- [19] **Granger, C.** (1966). *“The typical spectral shape of an economic variable”*. *Econometrica* 34(1): 150-161.
- [20] **Hamilton, James D.** (1994) *“Time Series Analysis”* Princeton University Press.
- [21] **Harvey, A.C.**(1985) *“Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series”*. Journal of Business and Economic Statistics, 3: 216-27
- [22] **Hodrick, Robert J. y Edward C. Prescott** (1997) *“Postwar US Business Cycles: An Empirical Investigation”*, Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 29, No.1, 1997.
- [23] **Jagriè, T.** (2002), *“Measuring Business Cycles”*. Eastern European Economics 40: 63-87.
- [24] **Kaiser, Gerald.** (1994) *“A Friendly Guide to Wavelets”*, Birkhäuser Boston.
- [25] **Keynes, John Maynard.** (1936) *“The General Theory of Employment, Interest and Money”* Traducción al español: Fondo de Cultura Económica, México 1965.
- [26] **Kydland, F. y E. Prescott**(1977) *“Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans”*, Journal of Political Economy, Vol. 85, No. 3.

- [27] **Kydland, F. E. and E. C. Prescott.** (1982) “*Time to Build and Aggregate Fluctuations*”. *Econometrica*, 50 (November): 1345-1370.
- [28] **Kydland, F. E. and E. C. Prescott.** (1990) “*Business Cycles: Real Facts and a Monetary Myth*”. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 14, pp. 3-18.
- [29] **Kuznets, S.** (1958). “*Long swings in the growth of population and in related economic variables*”. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 102: 25-57.
- [30] **Larrain, F.B. y Sachs, J.D.**(2002) “*Macroeconomía en la economía global*” 2ª edición, Pearson-Prentice Hall.
- [31] **Mankiw, N.G.** (1989) “*Real Business Cycles*” *Journal of Economic Perspectives*, *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 3, No. 3 (Summer), pp. 79-90.
- [32] **Mankiw, N.G.** (2000) “*Macroeconomía*”, Cuarta Edición, Antoni Bosch, traducción de *Macroeconomics* (1992)
- [33] **Mejía Reyes, Pablo** (2002) “*Ciclos Económicos en México*”, El Colegio Mexiquense.
- [34] **Mills, T.C.** (2003) *Modelling Trends and Cycles in economic Time Series* Palgrave Texts in Econometrics.
- [35] **Mitchell, B.R.**(2002) “*International Historical Statistics: The Americas, 1750-2002*” Palgrave.
- [36] **Mitchell, B.R.**(2002) “*International Historical Statistics. Europe, 1750-2000*” Palgrave.
- [37] **Yogo, Motohiro.** (2003) “*Measuring Business Cycles: Wavelet Analysis of Economic Time Series*”. Department of Economics, Harvard University, Cambridge, MA.
- [38] **Nelson, C.R. y Plosser, C.I.** (1992) “*Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series*”. *Journal of Monetary Economics*, 10 (September): 139-162.
- [39] **Ogden, R. T.** (1997) “*Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*”, Birkhäuser, Boston
- [40] **Percival, Donald y Walden, Andrew.** (2000) “*Wavelet Methods for Time Series Analysis*”, *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics* (Cambridge University Press).
- [41] **Plosser, C.** (1989) “*Understanding Real Business Cycles* ”. *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 3, No. 3 (Summer), pp. 51-77.
- [42] **Romer, C.** (1994) “*Remeasuring Business Cycles*”. *Journal of Economic History*, 54 (September): 573-609.

- [43] **Romer, C.** (1999) “*Changes in Business Cycles: Evidence and Explanations*”. Journal of Economic Perspectives, 13(Spring): 23-44.
- [44] **Romer, D.**(2001) “*Advanced Macroeconomics*”, McGraw Hill.
- [45] **Ramsey, B. James.** (2002) “*The contribution of wavelets to the analysis of economic and financial data*”.
- [46] **Ramsey, B.J. y Lampart, Camille.** (1997) “*The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale using Wavelets*”. Economic Research Reports Number 97-08 January-1997 C.V. Starr Center for Applied Economics New York University.
- [47] **Rebelo, S.** (2005) “*Real Business Cycles Models, Present, Past and Future*”. National Bureau of Economic Research (NBER), Working Paper 11401.
- [48] **Samuelson, Paul A.** (1998) “*Summing Up on Business Cycles: Opening Address*”. En *Beyond Shocks: What Causes Business Cycles?* (eds.) J.C. Fuhrer and S. Schuh. Boston, Massachusetts: Federal Reserve Bank of Boston.
- [49] **Solomuo, Solomos.** (1998) “*Economic Cycles: Long Cycles and Economic Cycles since 1870*”, Manchester University Press.
- [50] **Shumway, Robert H. y Stoffer, David S.** (2000) “*Time Series Analysis and Its Applications*”, Springer-Verlag, New York.
- [51] **St-Amant, P. and van Norden, S.** (1997) “*Measurement of the Output Gap: A Discussion of Recent Research at the Bank of Canada*” Technical Report No. 79
- [52] **Stock, James H., and Mark W. Watson,** (2002), “*Has the business cycle changed and why?* ”. en *NBER Macroeconomics Annual 2002* eds. Mark Gertler and Kenneth Rogoff, MIT Press: Cambridge, MA.
- [53] **Stock, J. H.** (1987) “*Measuring Business Cycle Time*”. Journal of Political Economy, 95, pp.1240-61.
- [54] **Stock, J. H. and M. W. Watson.** (1998) “*Business Cycle Fluctuations in U.S. Macroeconomic Time Series*”. NBER Working Paper No. 6528.
- [55] **Temin, Peter.**(1998) “*The causes of american business cycles: an essay in economic historiography*”. En *Beyond Shocks: What Causes Business Cycles?* (eds.) J.C. Fuhrer, and S. Schuh. Boston, Massachusetts: Federal Reserve Bank of Boston.
- [56] **Torres García, Alberto.** (2000) “*Estabilidad en Variables Nominales y el Ciclo Económico: El caso de México*”. Documento de Investigación No. 2000-03, Dirección General de Investigación Económica, Banco de México.
- [57] **Torres García, A. y Vela Treviño, O.** (2002) “*Integración Comercial y Sincronización entre los Ciclos Económicos de México y los Estados Unidos*”. Documento de Investigación No. 2002-06, Dirección General de Investigación Económica, Banco de México.

- [58] **Vidakovic, Brani.** (1999) *“Statistical Modeling by Wavelets”*, John Wiley and Sons.
- [59] **Zarnowitz, Victor.** (1991) *“What is a Business Cycle?”*. National Bureau of Economic Research (NBER), Working Paper 3863.
- [60] **Zarnowitz, V.** (1992) *“Business Cycles: Theory, History, Indicators, and Forecasting”*. National Bureau of Economic Research (NBER), Studies in Business.
- [61] **Zarnowitz, V. y Ozyildirim, A.** (2002) *“Time Series Decomposition and Measurement of Business Cycles, Trends and Growth Cycles”*. National Bureau of Economic Research (NBER), Working Paper 8736.