EL COLEGIO DE MEXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRIA EN ECONOMIA

IMPUESTOS OPTIMOS EN UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL: REFORMAS FISCALES ALTERNATIVAS A LA REFORMA FISCAL MEXICANA DE 1987

Héctor V. Robles Vásquez

Promoción 1985-87

Asesor: Profr. Alvaro Baillet

Revisor: Profr. Eduardo Pérez Motta

IMPUESTOS OPTIMOS EN UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL : REFORMAS FISCALES ALTERNATIVAS A LA REFORMA FISCAL MEXICANA DE 1987

ASESOR : ALVARO BAILLET
ALUMNO : HECTOR V. ROBLES V.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS
EL COLEGIO DE MEXICO.
SEPTIEMBRE DE 1987.

INDICE

1. INTRODUCCION

Durante el presente sexenio el gobierno ha llevado a cabo dos grandes reformas fiscales - en 1983 y en el año en curso - que han atendido fundamentalmente a la recuperación de sus ingresos. La pérdida en bienestar social que cada reforma implicó no fue tomada en cuenta explícitamente por el gobierno al diseñar cada una de dichas reformas.

Este trabajo pretende mostrar que existen alternativas fiscales más deseables -en el sentido de minimizar la pérdida en bienestar social- a la reforma fiscal de este año.

Las hipótesis -que fueron posteriormente confirmadas- eran:

1. Existen alternativas fiscales más deseables que la presente reforma.

2. Las tasas impositivas óptimas sobre la renta en las empresas no tienen que ser uniformes como pretende la Reforma Fiscal de 1987. Difícilmente dicha tasa uniforme optimizará el bienestar social permitiendo al mismo tiempo que el gobierno alcance cierta meta recaudatoria.

Para verificar , rechazar o matizar las hipótesis se eligió el enfoque de los modelos walrasianos de equilibrio general aplicado. El modelo de equilibrio general aplicado (MEGA) utilizado fue el diseñado por Estrada (1987) para simular un aspecto de la Reforma Fiscal actual, a saber, la eliminacion del subsidio, que en los hechos, el gobierno daba a las empresas al permitirles deducir en la determinación de su base gravable, los intereses nominales sobre sus deudas (anteriormente el fisco no ajustaba ese concepto de la base gravable de las empresas por la inflación). Con este modelo de la economía mexicana, primeramente simulamos la Reforma Fiscal incorporando otro propósito de ésta, la imposición uniforme con una tasa de 0.35% a la renta de las empresas. Posteriormente, mediante la aplicación de un algoritmo numérico y de ideas de inteligencia artificial determinamos tres posibles Reformas Fiscales óptimas correspondientes a tres elecciones particulares de la función de bienestar social.

El problema que se intentó resolver fue maximizar una función de bienestar social sujeta a una recaudación que el gobierno se ha fijado como meta a alcanzar con la reforma fiscal actual y atendiendo además a rigideces institucionales y políticas. La especificación de este problema se hace en los capítulos 2 y 3 del presente trabajo.

En la sección siguiente de este capítulo se revisan someramente los propósitos de las reformas fiscales de 1983 y de 1987. En la que le sigue, se analiza en una primera aproximación la Reforma Fiscal de 1987 desde el punto de vista de la desigualdad del ingreso y del bienestar. Finalmente se da una visión de conjunto del resto del trabajo.

1.1 <u>Las reformas fiscales de 1983 y de 1987.</u>

Como respuesta a la crisis económica iniciada en nuestro país por la caida de los precios internacionales del petróleo en 1982, el gobierno emprendió un programa de ajuste denominado Programa

Inmediato de Reordenación Económica (PIRE) con el objetivo de amortiguar los efectos de la crisis y eventualmente para orientar a la economía a una senda de crecimiento con bajas tasas de inflación y desempleo.

Componentes centrales de este plan fueron los objetivos de reducir el déficit presupuestal del gobierno; de reestructurar el sistema financiero y de desarrollar nuevas políticas cambiarias y comerciales que permitieran revertir la tendencia deficitaria de nuestra balanza comercial.

La estrategia antiinflacionaria puso énfasis en el mecanismo tradicional de reducir el déficit presupuestal mediante la disminución en el gasto y en la elevación de sus ingresos. Para cumplir esto último, el gobierno emprendió en enero de 1983 una reforma fiscal que contemplaba en forma importante la modificación en las tasas del impuesto al valor agregado (IVA). Las modificaciones más importantes al IVA fueron elevar la tasa general del 10% al 15%; ampliar la base gravable incluyendo a los alimentos procesados que antes estaban exentos, gravándolos con la misma tasa que la aplicada a las transacciones fronterizas (6%); los artículos de lujo fueron gravados con una tasa del 20%.

Paralelamente el gobierno redefinió sus políticas de precios, tarifas y subsidios. Consecuencia de esto, la recaudación real del gobierno se incrementó en 1983, 16.64% respecto a 1982. Sin embargo la recaudación real cayó a una tasa de -6.3% en 1984 respecto al año anterior. Esta caída en la recaudación real se dio no obstante que el producto interno bruto de 1984 acusó un aumento, en relación al de 1983 de 3.7%.

La contracción en la recaudación real junto a aumentos en el gasto público más allá de lo programado, volvió a elevar el déficit presupuestal. Esto puede observarse en el cuadro 1.1 en el cual se muestra el déficit financiero y primario[1], se puede observar como ambos déficits se reducen inmediatamente después de la reforma. El déficit primario se torna superavitario de 1983 a 1986. Sin embargo, al incluir en el déficit el pago de intereses éste se eleva a partir de 1985 como proporción del PIB.

Cuadro 1.1

Déficits financiero y primario

(porcentaje del PIB)

	1982	1983	1984	1985	1986*
DEFICIT PRIMARIO	9.4	-3.3	-3.0	-2.1	-3.0
DEFICIT FINANCIERO	17.6	9.0	9.8	9.9	14.6

Fuente: Alberro José y Cambiaso Jorge, Documento de trabajo No. 1986-V, Col-Mex.

* Proyectado.

Por otro lado, la inflación en 1984 habíase reducido en 58% casi un 40% menos que en el año anterior, pero nuevamente se incrementaba en 1985 a 64%. Esto indicaba que la estrategia ortodoxa de reducir el déficit presupuestal para abatir la inflación no bastaba. Nuevos mecanismos mediante los cuales la inflación afecta al déficit público y éste afecta a la inflación estaban apareciendo en la economía. Uno de los mecanismos más obvios consiste en el círculo vicioso, inflación-tasas de interés-costos-inflación que afecta tanto a empresas como al gobierno. Con altas tasas de inflación los intereses nominales han aumentado para no desmotivar el ahorro, elevando así los costos nominales de las deudas. Esto presiona el balance presupuestal aumentando el déficit financiero y contribuyendo así a un incremento en la inflación.

Otro de estos mecanismos perversos que retroalimentan a la inflación y al déficit presupuestal, consiste en el deterioro de la base gravable de las empresas al permitirles -antes de la actual reforma fiscal- deducir la totalidad de sus intereses nominales de sus deudas sin ajustarlos por la inflación.

Desde 1985 el Banco de México en su informe anual apuntaba:

> "La causa más importante de la caída que la carga tributaria no petrolera del gobierno Fiscal ha experimentado en los últimos años ha sido la mayor inflación que distorsionó fuertemente el cálculo de la base gravable del Impuesto sobre la Renta. La ley del Impuesto sobre la Renta, al permitir la deducción total de los intereses nominales sin considerar al mismo tiempo la disminución que la inflación provoca en el valor real de los pasivos, posibilita en la práctica la deducibilidad de buena parte de la amortización real de las empresas"

La Subsecretaría de Ingresos de la SHCP ha estimado que la recaudación del impuesto sobre la renta diminuyó de 5.8% del PIB en 1981 al 4.2 en 1985 y 4% en 1986 (estimado), calculando que más del 70% de esta caída corresponde a las contribuciones de las empresas por este concepto.

El problema económico se complicó aún más en 1986. Nuevamente la caída de los precios del petróleo en los primeros meses de 1986 agudizó la crisis y el gobierno acudió como en noviembre de 1982, a la banca internacional por medio del Fondo Monetario Internacional en busca de recursos frescos. Un nuevo programa de ajuste convenido con el Fondo habría de implementarse.

A mediados de 1986 el gobierno emprendió el Programa de Aliento y Crecimiento. Instrumento central de este programa, vuelve a ser la política de finanzas públicas. Una nueva reforma impositiva se iniciaría, paralelamente la política de ajustes periodicos de precios y tarifas continuaría; del lado del gasto se planteó un recorte del gasto programable y mantener el control sobre el gasto corriente, esto se argumentaba que posibilitaría la inversión pública.

A principios de 1987 se inició esta nueva reforma fiscal que se ha fijado como metas:

> 'Incrementar en 1.3% del PIB los ingresos tributarios mediante el ajuste de la base gravable'.
> 'Incrementar a 0.6% del PIB sus ingresos mediante el ajuste de precios y tarifas del sector público'.
> 'Reducir su gasto en 0.5% del PIB y además incrementar la inversión pública en términos reales en un 15%'.

y en cuanto a sus objetivos específicos:

> 'Romper el círculo vicioso, entre inflación y disminución de los ingresos públicos'.
> 'Aumentar la recaudación, sin elevar las tasas impositivas en el equivalente a 1.3% del PIB'.
> 'Propiciar el crecimiento económico y el cambio estructural alentando la inversion productiva y la capitalización de las

'Restituir la equidad del sistema tributario Nacional'.
Combatir la evasión fiscal[2]

La medida más importante es sin lugar a dudas el ajuste en la base gravable de las empresas. Conviene para los propósitos de este trabajo destacar dos acciones de este ajuste. Una es que las empresas deduzcan sus intereses reales sobre sus deudas y no los nominales, la restante consiste en uniformizar la tasa impositiva sobre la renta de las empresas a un nivel de 35%.

Este breve bosquejo de ambas reformas nos permite concluir que ellas han tendido fundamentalmente a reducir el déficit presupuestal mediante la recuperación o elevación de los ingresos reales del gobierno.

1.2 Consideraciones preliminares sobre la Reforma Fiscal de 1987 en cuanto a sus efectos sobre la distribución del ingreso y el bienestar de la población.

Respecto a los efectos sobre la distribución del ingreso, siguiendo a García Alba (1982) es de esperarse una disminución en la desigualdad del ingreso. En efecto, en su estudio sobre la evasión fiscal en México este autor indicaba que un instrumento fiscal directo para disminuir la desigualdad del ingreso consistía en gravarlo progresivamente. No obstante, en esa época no era recomendable tratar de disminuir la desigualdad por esa vía debido al alto grado de evasión a este tipo de impuestos por parte de los individuos con mayores ingresos.

Dentro de esta perspectiva, la reforma adquiere sentido pues por un lado está reduciendo la tasa impositiva y aumentando la base gravable del impuesto sobre la renta de las empresas y por otro se propone combatir la evasión fiscal

Si se logra disminuirla significativamente es muy posible que la distribución del ingreso mejore.

En cuanto a las consideraciones de bienestar, extraña que no se haya atendido este aspecto de forma explícita. Sabemos, desde el punto de vista teórico y situándose en el terreno utilitarista, que es posible diseñar una reforma fiscal que minimice la pérdida en utilidad que surge de un aumento en los gravámenes que enfrentan los agentes económicos.

Existe un estudio en esa línea elaborado por Kanosky (1985) para diseñar Reformas Fiscales alternativas a la Reforma Fiscal Mexicana de 1983, sin embargo, no nos arroja pistas seguras para evaluar tentativamente la Reforma Fiscal de 1987. Lo único que en este momento podemos decir es que parece ser positivo que no se pretenda gravar más el consumo.

Como ya mencionamos, este trabajo intenta mostrar que existen alternativas fiscales más deseables a la reforma actual, en base a los efector en bienestarhacer el análisis.

1.3 Descripción de los capítulos restantes.

En el capítulo 2 damos un bosquejo teórico de la imposición y de las Reformas Fiscales Optimas. En el que le sigue, explicamos el método seguido para resolver el problema de la maximización del bienestar social sujeta a una recaudación dada y a rigideces institucionales y políticas.

En el capítulo 4 se revisa someramente el modelo de equilibrio general aplicado (MEGA) que utilizamos. En el capítulo 5 se presenta la evaluación en términos de bienestar de la Reforma Fiscal -o mejor dicho, de lo que aquí se considera como tal- así como el análisis de las simulaciones de tres reformas fiscales óptimas. En el último capítulo planteamos las conclusiones generales que pueden extraerse de los resultados y del desarrollo del proyecto.

Notas:

1 El déficit financiero es simplemente la diferencia entre ingresos y egresos del gobierno. El déficit primario es el déficit financiero menos el pago de interéses de la deuda gubernamental.

2 Fuente: SHCP, "1987, Reforma Fiscal, México 1987, pp. 13, 14 y 19.

2. MARCO TEORICO

Aquí mostramos en forma esquemática, cómo ha surgido el enfoque de encontrar impuestos óptimos en modelos de equilibrio general aplicado.

El enfoque moderno de las teorías de la Economía Pública, incorpora el criterio estandar del bienestar económico a través de una función de bienestar social del tipo Bergson-Samuelson[1] o del criterio de la optimalidad de Pareto en donde el bienestar social se eleva si un individuo puede mejorar sin empeorar a los demás.

El uso del óptimo de Pareto como criterio de bienestar pretende hacer de la teoría de la Economía Pública (TEP) una ciencia positiva como las matemáticas y la física teórica. Sin embargo, el problema de la maximización del bienestar social, en general, no puede resolverse únicamente por este criterio ya que como es sabido, de existir algún óptimo de Pareto es altamente probable que existan una infinidad de ellos. Por esta razón, el uso de la función de bienestar social ha encontrado amplia cabida en la TEP actual aunque por el teorema de imposibilidad de Arrow sabemos que no existe una función de bienestar social universal y por ende toda elección concreta de la función de bienestar social conlleva juicios éticos específicos.

Existen otras razones para que la TEP adopte esta función. En efecto, las condiciones que aseguran la existencia de un equilibrio competitivo que sea un "PRIMERO MEJOR" son restrictivas para que este concepto tenga aplicabilidad. Basta recordar los dos teoremas básicos de la teoría del Bienestar Económico.

Teorema 1.

Si existe un conjunto completo de mercados y no existen externalidades entonces el equilibrio competitivo es un óptimo de Pareto.

Teorema 2.

Si además de cumplirse las hipótesis del Teorema 1 se cumplen:

i) Las funciones de producción presentan rendimientos no crecientes a escala.

ii) Las tasas marginales de sustitución entre dos bienes cualesquiera y para cada consumidor son decrecientes.

iii) El gobierno tiene capacidad para efectuar transferencias e impuestos no distorsionantes[2] ('lump sum' tax).

Entonces el sistema económico puede alcanzar cualquier <u>distribución Pareto-óptima prescrita.</u> A esta distribución Pareto-Optima prescrita se le conoce en la literatura como el "PRIMERO MEJOR".

Como la realidad económica es más compleja que las hipótesis de estos teoremas, sobre todo en lo referente a la capacidad del gobierno de llevar a cabo impuestos neutros o 'no distorsionantes', la teoría de la imposición tiene que moverse en un mundo del 'SEGUNDO MEJOR'. Es precisamente en esta línea de investigación donde ha surgido la teoría de la imposición óptima. En ésta se distingue una parte analítica y otra empírica en la cual tienen poca aplicabilidad los resultados teóricos de la primera.

El trabajo que aqui se presenta cae dentro de la vertiente empirica y el enfoque es similar al desarrollado por Kanosky (1985) para determinar impuestos óptimos restringidos.

2.1 Imposición óptima a bienes.

Existe una extensa literatura que trata acerca de la imposición indirecta óptima. Se inicia con Ramsey (1927) y destacan los trabajos de Boiteux (1956), Samuelson (1951), Diamond y Mirrless (1971) y la excelente introducción al tema por Sandmo (1976).

El problema central que trata de responder esta teoría es ¿Cómo aumentar la recaudación del gobierno hasta un nivel dado, gravando los bienes que los consumidores demandan de forma de minimizar las pérdidas en utilidad que surgen de la imposición? o equivalentemente ¿qué impuestos indirectos le permiten al gobierno recaudar una cantidad prefijada de modo que el bienestar social sea máximo?

Esta teoría ha avanzado del caso simple de Ramsey de un solo consumidor (o de todos los individuos con idénticas preferencias y dotaciones), que ignora los aspectos distributivos al caso de una economía con distintos grupos de consumidores que poseen diferentes dotaciones.

2.2 Imposición óptima al ingreso.

Este tópico fue iniciado por Mirrlees (1971). En su modelo él examina simultáneamente los problemas de distribución y de incentivos, indispensables en un análisis del impuesto al ingreso.

La complejidad técnica de esta teoría es mayor a la de la imposición indirecta óptima. Por ejemplo, Mirrlees (1971) se limitó a determinar estructuras impositivas al ingreso de tipo lineal. Para dar una idea del problema que enfrenta la teoría de la imposición óptima al ingreso, plantearemos el problema que ella intenta resolver. Supóngamos que el modelo considera individuos que difieren únicamente en su salario antes de impuestos y además solo existe un tipo de incentivo -el ocio-. Así, el problema a resolver es:

¿Cuál es la estructura impositiva al ingreso que le permite al gobierno maximizar una función de bienestar social del tipo Bergson-Samuelson sujeta a alcanzar una meta recaudatoria dada?

Las hipótesis acerca de las características de los individuos y de los incentivos, permiten suponer que los individuos poseen la misma función de utilidad. Luego, para cada elección de la estructura impositiva hecha por el gobierno, los consumidores maximizan su utilidad -que depende del consumo y del ocio- sujeta al salario antes de impuestos y a la estructura impositiva.

Como puede notarse, la optimización del bienestar es sobre el conjunto -infinito- de estructuras impositivas al ingreso admisibles, en esto consiste la dificultad de la imposición óptima al ingreso.

La teoría se simplifica al considerar estructuras impositivas seccionalmente lineales o con un número finito de individuos. También en esta rama de la IEP existe una extensa literatura como Guesnerie y Seade (1982), Stern (1982), Seade (1985), etc.

No obstante, la teoría de imposición óptima ha recibido fuertes críticas. Las principales son:

i) No tiene en cuenta la estructura impositiva existente (Feldstein (1976)).

ii) No indica cómo alcanzar los niveles impositivos óptimos (Harris y Mackinnon (1978)).

iii) No considera las restricciones institucionales y políticas que determinan que las tasas impositivas deben situarse entre ciertos rangos (Kanosky (1985)).

iv) El conocimiento del vector impositivo óptimo puede ser inútil porque 'los cambios actuales son lentos y por etapas' (Feldstein (1976)).

Estas críticas han inducido a economistas a desplazar su interés hacia la teoría de la reforma fiscal que busca responder a las interrogantes.

¿Bajo qué condiciones los cambios en la reforma fiscal contribuyen a incrementar el bienestar social?, o mejor dicho, dado un conjunto de juicios de valor, un estado inicial y un modelo de la economía ¿Existe algun cambio factible en los impuestos que pueda incrementar el bienestar?

2.3 La teoria de la Reforma Fiscal.

La parte de esta teoría ligada a cambios marginales en los impuestos se planteó, inicialmente, la búsqueda de las direcciones de cambio en los impuestos en presencia de estructuras fiscales no óptimas. Véase por ejemplo los trabajos de Guesnerie (1977), Diewert (1979), Dixit (1979) y trabajos más recientes como los de J. Tirole (1981), Ahmad y Stern (1984) y S. Wibaut(1987).

En estos últimos trabajos a excepción del de Tirole, se enfatiza tanto la parte analítica de la teoría como su aplicación práctica, aunque la literatura inicial de imposición y reformas fiscales enfatizaba los aspectos teóricos. Entre los trabajos pioneros y los actuales surgió un enfoque de equilibrio general para calcular numéricamente los impuestos óptimos. Dentro de esta perspectiva han contribuido Harris y MacKinnon (1979), Kanosky (1985), Heady y Mitra (1976).

La teoría de la Reforma Fiscal Marginal y las teorías de optimalidad están muy relacionadas. En efecto, supóngase que la Reforma pretende modificar los impuestos t_i y t_j. Cada par de estos impuestos modificará el equilibrio de la economía. Al restaurarse nuevamente éste, se tendrá -entre otras variables económicas- un nivel de bienestar y una recaudación fiscal dependientes de t_i y t_j. Denotemos estas variables por $W(t_i,t_j)$ y $R(t_i,t_j)$ respectivamente.

Consideremos ahora un incremento de t_i y t_j suficiente para incrementar en un peso la recaudación fiscal, por lo tanto

$$(\partial R/\partial t_i)=1 \quad y \quad (\partial R/\partial t_j)=1$$

y el monto en que deben incrementarse los impuestos t_i y t_j son:

$$(\partial R/\partial t_i)^{-1} \quad y \quad (\partial R/\partial t_j)^{-1}$$

respectivamente.

La tasa de cambio del bienestar respecto a la modificación de los impuestos es:

$$(\partial W/\partial t_i)^{-1} \quad y \quad (\partial W/\partial t_j)^{-1}$$

respectivamente. Definiendo la caída en bienestar, λ_i, como la reducción en W a consecuencia de haber incrementado el impuesto al i-ésimo bien resulta:

$$\lambda_i=-(\partial W/\partial t_i)/(\partial R/\partial t_i) \qquad ....(2.1)$$

Este número puede interpretarse como el costo marginal en términos de bienestar de incrementar la recaudación en un peso aumentando el impuesto i-ésimo. De esta forma, si el costo marginal de modificar el impuesto i excede al costo marginal que resulta del cambio del impuesto j, entonces una reforma es benéfica, si se cambia la imposición en el margen del impuesto i al impuesto j. Esto es, si $\lambda_i>\lambda_j$ existe una ganancia en bienestar $\lambda_i-\lambda_j$ de aumentar un peso en la recaudación via el impuesto j y de reducir un peso via el impuesto i.

En una forma más amplia, una reforma es deseable o benéfica si como resultados de la modificación de los impuestos, el incremento neto de bienestar, ΔW, y el incremento en la recaudación, ΔR, son no negativos. El problema de encontrar una reforma benéfica, en general no tiene solución única, la elección de alguna de ellas depende de criterios que no pueden ser puestos directamente en el modelo.

Sin embargo, si definimos un estado óptimo como aquel estado de la economía en el cual ninguna reforma es posible entonces la optimalidad requiere que $\lambda_i=\lambda_j=\lambda$ y de la ec. (2.1):

$$(\partial W/\partial t_l)+\lambda(\partial R/\partial t_l)=0 \text{ para } l=i,j \qquad ...(2.2)$$

Estas ecuaciónes son precisamente las condiciones de primer orden del problema.

$$\text{Máx } W(t_i,t_j)$$
$$\text{s.a.} \qquad ....(2.3)$$
$$R(t_i,t_j)=\bar{R}$$

con $\bar{R}$ una recaudación fijada por el gobierno.

La ligazon entre la teoria de la Reforma y la imposición óptima viene dada por esta ecuación. Una reforma fiscal que lleva a cabo los impuestos óptimos que resuelven el problema (2.3) le llamaremos en adelante Reforma Fiscal Optima.

Dentro de la linea de determinar empiricamente impuestos óptimos, mencionaremos el enfoque que se utilizó en el trabajo para determinar Reformas Fiscales Optimas alternativas a la Reforma Fiscal que ya está en marcha en nuestro país.

El enfoque utilizado fue el de equilibrio general aplicado, gracias a este enfoque, las reformas graduales en donde parte de la estructura fiscal se modifica y el resto permanece inalterada, pueden modelarse con relativa facilidad. También, permite la incorporación de las restricciones que existen en la economía contribuyendo así a resolver el problema del 'segundo mejor', esto es, determinar las tasas óptimas de un subconjunto de las tasas impositivas sujeta a una recaudación dada y a rigideces institucionales y políticas.

En lo que sigue, entendemos por TASAS IMPOSITIVAS OPTIMAS RESTRINGIDAS al subconjunto $\{t_1^*,\dots,t_s^*\}$ de impuestos que ya no son suceptibles de modificaciones que incrementen el bienestar social, manteniendo al mismo tiempo la recaudación fijada por el gobierno y obedeciendo a rigideces institucionales y políticas.

El subconjunto, $\{t_1^*,\dots,t_s^*\}$ se obtiene del proceso de maximizar la función de bienestar social cuando $t_1,\dots\bar{t}_s$ son las únicas tasas variables y el resto de la estructura fiscal $\{\bar{t}_{s+1},\dots,\bar{t}_m\}$ se mantiene fija. Además este proceso de maximización obedece las restricciones señaladas.

El problema de determinar tasas impositivas óptimas que obedezcan rigideces del sistema económico y que le permitan recaudar al gobierno una cantidad $\bar{R}$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned} &\underset{\vec{t}k}{\text{Máx}} \quad W(\vec{t}k) \\ &\text{s.a.} \quad R(\vec{t}k)=\bar{R} \\ &\quad l_1 \le tk_1 \le U_1 \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \\ &\quad l_s \le tk_s \le U_s \end{aligned} \qquad \ldots.(2.4)$$

Notas:

1 En un mundo de k consumidores cada uno con función de utilidad U^i, $i=1,\ldots,k$, la función de bienestar social del tipo Bergson-Samuelson es una función $W=F(U^1,\ldots,U^k)$. Véase Samuelson (1948).

2 Un impuesto es no distorsionante (lump-sum tax) si el individuo no puede evitarlo con alguna de sus acciones, por ejemplo los impuestos indirectos sobre un bien son distorcionantes porque basta que el individuo no consuma ese bien para que no sea gravado por ese tipo de impuestos.

3. METODO PARA DETERMINAR IMPUESTOS OPTIMOS RESTRINGIDOS

La búsqueda del máximo bienestar de la población en un proceso de reforma fiscal óptima conlleva la especificación de la función de utilidad social a utilizar. Por eso, en este capítulo primeramente describiremos la forma general de la función de utilidad social que se utilizó para encontrar los impuestos óptimos restringidos. Posteriormente, describiremos el primer algoritmo conque se intentó resolver este problema y finalmente presentaremos las ideas de inteligencia artificial que permitieron resolver exitosamente el problema (2.4).

3.1 La función de Bienestar Social.

Se utilizó una especificación aditiva y separable de la función de Bienestar social del tipo Bergson-Samuelson en la cual, un parámetro (α) llamado "parámetro de aversión a la desigualdad", permite elegir criterios normativos particulares. En efecto, si $\alpha=-\infty$ la función de Bienestar Social ponderará únicamente a los grupos de menores ingresos al momento de maximizar la utilidad social; si por el contrario, $\alpha > 1$ al optimizar la función de bienestar social los grupos que se toman en cuenta preferentemente son los de mayores ingresos. Con $\alpha=0$ la función de bienestar social no da preferencia a ningún grupo social.

Si $\alpha=0$ la función de bienestar social tendrá la forma:

$$W=\sum_{h=1}^{H} \ln(U_h) \qquad \ldots(3.1)$$

en caso contrario:

$$W=(1/\alpha)\sum_{h=1}^{H} (U_h)^{\alpha} \qquad \ldots(3.2)$$

en donde H es el número de grupos de consumidores y U_h es la función de utilidad del grupo h-ésimo.

Cuando $\alpha=1$, W adopta la forma $W=U_1+U_2+...+U_h$ que corresponde a la forma usual del principio utilitario clásico; cuando $\alpha=-\infty$, W asumirá la forma determinada por el criterio de Rawls.

Sabemos que tanto las funciones de utilidad de cada grupo social, luego W, dependen de las cantidades óptimas demandadas por cada grupo de consumidores de cada bien de consumo existente en la economía, de modo tal que cada consumidor respeta su restricción presupuestal. Pero aquí, al variar algunos parámetros impositivos, el sistema económico determinará un nuevo equilibrio competitivo[1] y por ende las cantidades óptimas demandadas por cada grupo de consumidores. Esto nos muestra que podemos considerar las funciones de utilidad de cada grupo de consumidores como funciones de las tasas impositivas que la Reforma Fiscal pretende modificar.

De esta forma:

$$W(\vec{tk})=(1/\alpha)\sum_{h=1}^{H}[Uh(\vec{tk})]^{\alpha} \qquad ...(3.3)$$

para $\alpha\neq0$; el vector $\vec{tk}$ representa el vector de tasas impositivas que la reforma modificará.

3.2 El algoritmo de Lagrange Aumentado (LA).

El problema más fuerte a que uno se enfrenta al intentar resolver el problema (2.4) es que no se dispone de expresiones analiticas para W y R (las funciones de bienestar social y recaudación respectivamente). Se dispone únicamente de un modelo de equilibrio general aplicado que funciona como una caja negra.

Se varían algunos impuestos y el modelo nos da como respuestas, entre otras cosas, la valuación que alcanzan W y R al reestablecerse el equilibrio competitivo. En forma diagramática:

$$(t_{k1},...,t_{ks}) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{modelo de}\\ \text{equilibrio}\\ \text{general}\\ \text{aplicado}\end{array}} \longrightarrow \begin{array}{l}\text{Precios de equilibrio}\\ \text{niveles de actividad}\\ \text{de equilibrio.}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ W(t_{k1},...,t_{ks})\\ R(t_{k1},...,t_{ks})\end{array}$$

De contarse con expresiones analíticas para W y R la forma usual de resolver el problema (2.4) es con el método de los multiplicadores de Lagrange. No obstante no contarse con esas, se optó primeramente por un algoritmo numérico que estimaría de forma iterativa un multiplicador de Lagrange para el problema (2.4). Me refiero al algoritmo de Lagrange aumentado.

El algoritmo de Lagrange aumentado (LA) resuelve el problema[2]

$$\begin{array}{ll} \underset{(t_1,...,t_s)}{\text{Min}}\ F(t_1,...,t_s) & \\ \text{s.a.} & ....(3.4) \\ C(t_1,...,t_s)=R(t_1,...,t_s)-\overline{R}=0 & \end{array}$$

estimado en forma iterativa su multiplicador de Lagrange.

Como es usual en los procesos numéricos iterativos, se inicia con cierto valor del parámetro a estimar, digamos, λ_0, este valor determina un sistema de ecuaciones que se resuelve. La solución de este sistema más ciertas reglas permiten modificar a λ_0. Llamemos a este nuevo valor, λ_1. Este valor vuelve a determinar un sistema de ecuaciones. La solución de este sistema más las reglas para cambiar el valor del parámetro dan como resultado el valor λ_2, etc.

El proceso continuará hasta que se observe que los valores λ_k se acercan (ó mejor dicho convergen) a cierto valor λ^*. Al trabajar con cálculos numéricos la convergencia se establece con el grado de precisión conque se quiera determinar λ^*.

La necesidad de conocer primeramente el multiplicador de Lagrange -y no en forma simultánea con los puntos criticos del problema(3.4)- se debe a que no pueden resolverse analiticamente las condiciones de primer orden para el lagrangiano usual[3].

El lagrangiano aumentado correspondiente al problema es:

$$\mathcal{L}(t_1,\ldots,t_s,\lambda,\rho)=F(t_1,\ldots,t_s)+\lambda C(t_1,\ldots,t_s)+\rho[C(t_1,\ldots,t_s)]^2 \qquad (3.5)$$

en el cual, λ, es el multiplicador de lagrange usual y ρ es un parámetro de sanción.

El algoritmo de LA propone inicialmente un valor para λ y ρ, llamémosles $\lambda^{(k-1)}$ y $\rho^{(k-1)}$ respectivamente.

Estos valores determinan el sistema de ecuaciones[4]:

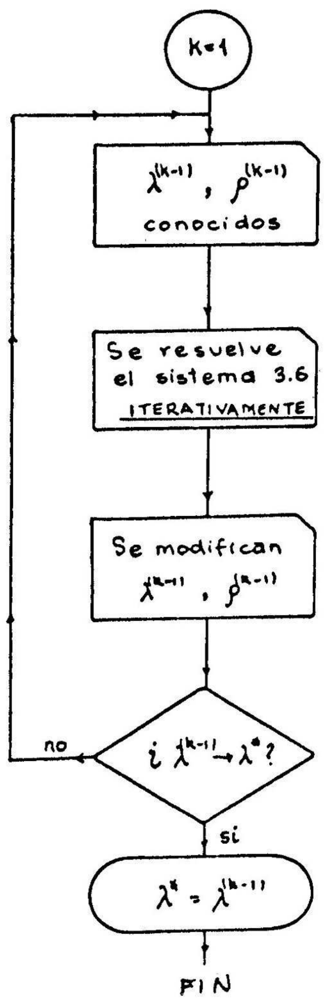
$$\frac{\partial F}{\partial t_i}+\lambda^{(k-1)}\frac{\partial C}{\partial t_i}+2\rho^{(k-1)}\cdot C(t_1,\ldots,t_s)\cdot\frac{\partial C}{\partial t_i} = 0 \qquad \ldots(3.6)$$

para $i=1,\ldots,s$.

La solución de este sistema más las reglas dadas en los apéndices 1 y 2, permiten cambiar $\lambda^{(k-1)}$ y $\rho^{(k-1)}$. Estos valores permiten recomenzar el proceso y construir las sucesiones $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots)$ y $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \ldots)$, el proceso dará fin cuando $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda^{*}$

El algoritmo de LA adolece de severas restricciones, como se constató en el desarrollo del proyecto. La más importante de ellas consiste en la solución del sistema de ecuaciones no lineales (3.6). Para su solución se requería también de un proceso iterativo.

La solución de (3.6) implicaba un proceso iterativo interno como se muestra en el siguiente diagrama de flujo de la programación del algoritmo de LA.



Del diagrama de flujo pueden observarse que existen dos procesos iterativos. El más extremo corresponde a los cambios en $\lambda^{(k-1)}$ y $\rho^{(k-1)}$. El proceso iterativo anidado corresponde al proceso para resolver numéricamenteel sistema (3.6).

3.3 <u>Desarrollo de un nuevo algoritmo para determinar impuestos óptimos.</u>

El algoritmo de LA que se construyó no mostró convergencia precisamente en la fase de resolver el sistema (3.6) que es el núcleo del algoritmo. Sin embargo, el trabajo realizado pudo aprovecharse siguiendo métodos heurísticos[5] para determinar óptimos de funciones.

Aclaremos esto. Ya comentamos en la sección anterior la falta de representación analítica para W y R. En su lugar tenemos una caja negra -el modelo de equilibrio general aplicado de Estrada (1987)- que recibe valores de los parámetros impositivos y da como respuesta los valores numéricos para W y R correspondientes a esos impuestos.

Ahora bien, el proceso iterativo para resolver el sistema de ecuaciones (3.6) requería de la evaluación de las primeras y segundas parciales para W y R. Esto se tuvo que hacer con la técnica de diferencias finitas[6] que requería de conocer 12 puntos cercanos al punto en el cual se calcularían las primeras y segundas parciales. Hubo necesidad de recurrir en forma reiterada a la caja negra en 13 ocasiones consecutivas. El resultado de todo esto fue que la programación del algoritmo nos suministró información abundante del comportamiento de W y R en el contorno de algún conjunto de tasas impositivas elegidas.

El criterio seguido para resolver el problema (2.4) ó equivalente el (3.4) fue entonces:

Conociendo la meta recaudatoria, $\bar{R}$, a alcanzar por medio de la Reforma Fiscal de 1987 encontramos un conjunto de impuestos que le permiten al gobierno recaudar $\bar{R}$ y en el cual la función de bienestar es mayor que en los impuestos propuestos por la Reforma. Por lo tanto, este nuevo conjunto de impuestos es más deseable que los de la Reforma. Después conseguimos más información en el contorno del conjunto de impuestos hallado previamente y procedimos de forma similar. Este proceso lo detendremos cuando algún o algunos impuestos se encuentren en la restricción:

$$l_i \leq t_i \leq u_i, \quad i=1,\ldots,s.$$

En el apéndice 3 se justifica este proceso de búsqueda del máximo de W sujeto a las restricciones ya señaladas.

Notas:

1 La noción de equilibrio competitivo es la usual a la utilizada en los modelos de equilibrio general aplicado que analizan impactos fiscales en las economías. En el capítulo 3 de este trabajo se recuerda este concepto.

2 El problema de minimizar una función W equivale al de maximizar -W. Por lo tanto el problema (3.4) equivale a maximizar W sujeta a $C(t_1,\ldots,t_2) = 0$ si $F = -W$.

3 Estas condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial F}{\partial t_i} = \lambda \frac{\partial R}{\partial t_i} \text{ para } i = 1,\ldots,s \ \& \ R(t_1,\ldots,t_s) = \bar{R}$$

4 Como podrá notar el lector este sistema corresponde a las condiciones de primer orden de la minimización sin restricciones de la función:

$$F(t_1,\ldots,t_s)+\lambda^{(k-1)}\cdot C(t_1,\ldots,t_s)+\rho^{(k-1)}\cdot[C(t_1,\ldots,t_s)]^2$$

5 En inteligencia artificial la heurística es el estudio de los procesos mentales implicados en un problema a resolver, en la tomas de decisiones, en el aprendizaje, etc. Un programa heurístico computaciona es aquél en el cual una computadora trata cada uno de varios métodos de resolución de un problema y juzga si el programa se acerca más a la solución después de cada intento.

6 Por ejemplo, el cálculo de $f^{1}(x_0)$ puede aproximarse por el cociente $\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$. Si por ejemplo, h=0.001 la aproximación es del orden de 0.000001.

4. EL MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL UTILIZADO.

En este capítulo, describimos el modelo de equilibrio general que se usó en estetrabajo para la determinación de los impuestos óptimos al uso del capital.

El modelo utilizado es el desarrollado por Estrada (1987) cuyo objeto fue analizar el impacto en eficiencia y asignación de recursos que la reforma fiscal de 1987 tendrá sobre la economía mexicana, al eliminar el subsidio otorgado por el gobierno a las empresas por endeudarse. Destacamos del modelo lo que tiene relación directa con el fin de este trabajo, el análisis normativo de la actual Reforma.

4.1 Descripción del modelo

Es un modelo Walrasiano de tipo estático con producción simple en el cual los precios de equilibrio, niveles de actividad e ingresos fiscales de equilibrio se determinan de modo que los excesos de demanda de bienes y factores sean cero. Además, todos los sectores tienen ganancias netas de impuestos nulas. Consta únicamente de dos grupos de consumidores (pobres y ricos). El año base es el de 1984 y es altamente agregado ya que consta únicamente de 6 sectores y 3 factores productivos como se muestra en la siguiente lista.

Cuadro 4.1

<u>Lista de Sectores</u> [1]

1. Sector Primario
2. Industria Manufacturera
3. Servicio
4. Servicios Gubernamentales
5. Importaciones y Exportaciones
6. Inversión Fija y acumulación de inventarios (capital mañana)

FACTORES DE PRODUCCION

7. Trabajo
8. Capital financiado por acciones (capital acción)
9. Capital financiado por deuda (capital deuda)

Demanda

Los sectores de demanda de consumo como son por ejemplo abarrotes, carnes y pescado, etc. aparecen modelados de la siguiente forma implícita. Cada bien de demanda de consumo se supone que demanda proporciones fijas de los bienes producidos en los 3 primeros sectores productivos. Al asumir para los dos grupos de consumidores funciones de utilidad del tipo Cobb-Douglas -que dependen de las cantidades demandadas de bienes de consumo final- resulta que, en virtud de la suposición de proporciones fijas de insumos, las funciones de utilidad dependerán directamente de cantidades demandadas a los sectores productivos del modelo. En la especificación de Estrada (1987) los consumidores demandarán bienes de consumo final que requieren insumos de los tres primeros sectores. Sus funciones de utilidad adoptan la forma:

$$U_1 = xc1_{11}^{\beta_{11}} . xc1_{21}^{\beta_{21}} . xc1_{31}^{\beta_{31}} \qquad \ldots.(4.1)$$

$$U_2 = xc2_{11}^{\beta_{12}} \; xc2_{21}^{\beta_{22}} \; xc2_{31}^{\beta_{32}}$$

$$\text{con } \sum_{i=1}^{3} \beta_{ij}=1 \qquad \text{para } j=1,2$$

El grupo 1 corresponde a los "pobres", el 2 a los "ricos". Además $xc1_{i1}$, $xc2_{i1}$ son las demandas del bien i que requieren los consumidores 1 y 2 respectivamente.

Antes de la producción cada grupo de consumidores posee dotaciones iniciales de trabajo y de ambos tipos de capital (ver cuadro (4.5) que evaluados a los precios del mercado dan como resultado el ingreso bruto del grupo, los consumidores derivan sus demandas por bienes, de la maximización de sus funciones de utilidad (ecs. 4.1) sujeta a su ingreso neto de impuestos y de una proporción fija que se destina ahorro.

Producción

Como es usual en los modelos de equilibrio general aplicado, las funciones de producción aparecen modeladas como funciones anidadas requiriendo un insumo agregado y el valor agregado por sector. El insumo agregado modela el supuesto de insumos intermedios que intervienen en la producción en proporciones fijas, el valor agregado se supone producido por los factores primarios mediante una función de producción Cobb-Douglas y de este modo se permite sustitución entre los factores primarios.

La característica central del modelo consiste en la desagregación del capital en capital financiado por acciones y el financiado por deuda. Esto permite la simulación de uno de los objetivos de la Reforma Fiscal de 1987, a saber, eliminar el subsidio al capital financiado por deuda y de esa forma subsanar las estructuras ineficientes de financiamiento que han adoptado las empresas en estos últimos años de altas tasas de inflación.

Los factores aparecen como dotaciones iniciales de los consumidores. Naturalmente los productores maximizan ganancias.

Gobierno

El modelo considera al gobierno como el único agente que produce y consume el bien 'servicios gubernamentales' para lo cual grava con impuestos indirectos al productor y al consumo, al ingreso personal y finalmente al uso del factor capital. Se asume que de la recaudación total destina proporciones fijas al consumo del bien que él produce, el resto lo destina a la demanda del bien 6 'capital mañana'

Inversión

Como el modelo es estático la inversión física no se considera, sin embargo, la inversión realizada en el período se toma en cuenta introduciendo el sector cuya actividad consiste en producir un "bien" llamado capital mañana en oposición al capital utilizado en forma corriente en la producción del período.

El bien capital mañana es demandado por los consumidores y el gobierno en proporciones fijas de sus ingresos.

Sector Externo

Se supone que todas las importaciones son no competitivas y forman un bien homogéneo empleado únicamente como insumo en la producción y la inversión mediante proporciones fijas. Las cuales son adquiridas mediante las exportaciones generadas en cada uno de los sectores.

En el año base (1984)se tenía un superavit comercial, el cual, para llegar a un equilibrio con el exterior, se modelo como el componente de importaciones en la inversión total.

4.2 El equilibrio en el año base

El año elegido como base para los ejercicios de estática comparativa fue el de 1984. El siguiente cuadro nos muestra el valor de los principales variables económicos en 1984, ajustadas de tal forma que pudieran representar un equilibrio.

Cuadro 4.2

Valor de las principales variables macroeconómicas en 1984

(miles de millones de pesos)

Consumo Intermedio	16,441,216
Importaciones	2,367,060.8
Valor Agregado	25,735,792
Impuestos Indirectos netos de subsidios	1,952,502.3
Excedente bruto de Explotación.	20,025,799
Producto Bruto Total	44,530,441
Demanda Intermedia	16,441,216
Demanda Privada neta de Impuestos al Consumo	17,006,948
Consumo del Gobierno	615,423.1
Exportaciones	4,250,061.3
Inversión	6,216,789

Los siguientes cuadros nos muestran los impuestos efectivos, las dotaciones iniciales, las proporciones del gasto que cada consumidor dedica a la compra de bienes (parámetros de la función de utilidad) y la proporción de su ingreso neto de impuestos que destina al ahorro.

Cuadro 4.3

Tasas de Impuestos

Tasa de Impuesto Indirecto al consumo		0.053225
Tasa de Impuestos indirectos al productor		
Sector Primario		0.108591
Sector Industrial		0.068615
Sector Servicios		0.003035
Tasas de Impuestos al uso de factores		
	Capital acción	Capital deuda
Sector 1	0.3231	-0.09997
Sector 2	0.4511	-0.13929
Sector 3	0.3932	-0.12139
Tasas de impuestos al ingreso personal		
	Pobres	0.042095
	Ricos	0.113141

Fuente: Estrada (1987)

Cuadro 4.4

Dotaciones Iniciales

(en miles de millones de pesos)

	Trabajo	Capital-Acción	Capital-Deuda
Pobres	5929806	4065280	6866154
Ricos	2038534	2172518	3669327

Fuente: Estrada (1987)

Cuadro 4.5

Parámetros de la función de utilidad

y propensión media a ahorrar.

	Pobres	Ricos
Proporción del gasto destinado al bien producido en el sector 1	0.1003310507	0.070349245
Proporción del gasto destinado al bien producido en el sector 2	0.3208617269	0.2632788364
Proporción del gasto destinado al bien producido en el sector 3	0.5788072225	0.6663719201
Propensión media a ahorrar	0.2056016448	0.2729128492

Fuente: Estrada (1987)

La réplica del equilibrio

La definición de equilibrio utilizada es la usual en este tipo de modelos, a saber, un vector de precios de bienes y de factores, un vector de análisis de actividades tales que los excesos de demanda en cada mercado sea cero y las actividades productivas generen un nivel de ganancias nulas, además un nivel de recaudación compatible con estos precios y niveles de actividades.

Debido a que no existen estimaciones acerca de la elasticidad de sustitución entre factores para los diferentes sectores productivos utilizados, se asumió una elasticidad de sustitución entre factores igual a 1 y por tanto las funciones de producción utilizadas son del tipo Cobb-Douglas. La parametrización del modelo se escogio de forma de reproducir los datos del año base y de que los precios de equilibrio fuesen igual a uno en todos los bienes y factores como se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadro 4.6

<u>Precios y niveles de actividad del equilibrio en el año base</u>

Sector	Precio	Nivel de actividad
1. Primario	1,0000	107512.16.0
2. Manufacturas	1,0000	17176457.0
3. Servicios	1,0000	16602758.0
4. Gobierno	1,0000	2736953.0
5. Importaciones Exportaciones	1,0000	4250062.0
6. Inversión Fija y Acumulación de Inv.	1,0000	8099791.0

Fuente: Estimado por el modelo de Equilibrio General.

Cuadro 4.7

<u>Precios de Factores</u>

1. Trabajo	1.0
2. Capital Acción	1.0
3. Capital Deuda	1.0

Fuente: Estimado por el modelo de Equilibrio General.

Los cuadros siguientes nos muestran la recaudación del año base replicada por el modelo de equilibrio original y los índices de utilidad.

Cuadro 4.8

Estructura de la recaudación del año base

(millones de pesos)

Recaudación del IVA	905 195.0
Recaudación por ingreso	1601 383.0
Recaudación por el uso del factor capital	1149 568.0
Recaudación por impuestos indirectos al productor	1952 503.0

Fuente: Estimado por el modelo de Equilibrio General

Cuadro 4.9

Indices de utilidad en el equilibrio original

Pobres	4,894,290.316
Ricos	2,149,358.513

Fuente: Estrada (1987)

Notas:

1 El sector primario está constituido por las grandes divisiones: Construcción y electricidad; mineria;y agropecuaria, silvicultura y pesca.
El sector industria manufacturera es ésa gran división.
El sector servicios está constituido por las grandes divisiones: comercio, restaurantes y hoteles; transportes, almacenamiento y comunicaciones; servicios financieros, seguros y bienes inmuebles y, finalmente, servicios comunales, sociales y personales.
El sector 4 está constituido por los servicios gubernamentales.
El sector 5 por las actividades de importaciones y exportaciones.
Finalmente el sector 6 comprende las actividades de inversión.

5. IMPUESTOS OPTIMOS: SIMULACIONES DE REFORMAS OPTIMAS ALTERNATIVAS A LA REFORMA FISCAL MEXICANA DE 1987.

En los capítulos anteriores se ha planteado en su forma general el problema de determinar impuestos óptimos restringidos. En este, especificamos el problema concreto que resolvimos y los impuestos óptimos encontrados para tres diferentes elecciones de la función de bienestar social.

Efectuamos un análisis comparativo entre cada Reforma Fiscal Optima y la Reforma Fiscal de 1987 -simulada-, naturalmente, como es usual en estática comparativa, cada nuevo equilibrio que genera cada una de las reformas es referido a lo que se considera como el estado de equilibrio original -O histórico- de la economía. Cabe recordar que tal equilibrio histórico se supone es el estado económico de la Economía Mexicana en 1984 -véase capítulo 4-.

En la primera sección aclaramos lo que simulamos como Reforma Fiscal de 1987 -en adelante, la 'Reforma Fiscal', mientres no se especifique lo contrario- y analizamos el impacto que tiene en la economía enfatizando los aspectos de bienestar social.

En la sección siguiente, presentamos y discutimos los impuestos óptimos encontrados para cada especificación ética de la función de bienestar social que elegimos. En la sección última (4.3) comparamos cada Reforma Optima con la 'Reforma Fiscal' así como algunas de las conclusiones que pueden derivarse de este ejercicio.

5.1 La Reforma Fiscal de 1987.

En el capitulo 1 se enlistan las metas y los objetivos específicos que persigue la Reforma Fiscal de este año. En este trabajo modelamos dicha Reforma considerando únicamente dos de las acciones del ajuste en la base gravable de las empresas más importantes. La primera consiste en permitir únicamente la de deducción de los intereses reales y la segunda en uniformizar la tasa impositiva a la renta de las empresas a un nivel de 0.35%.

La simulación de las dos medidas anteriores las incorporamos al modelo de equilibrio general haciendo cero el subsidio que el gobierno da a las empresas por ocupar capital-deuda, y gravando con 35% el uso del capital acción.

Esto último requiere de la siguiente anotación:

El propósito de gravar con 35% las ganancias de las empresas, no puede simularse directamente en los modelos de equilibrio general aplicado donde la producción esta modelada por funciones de producción con rendimientos constantes a escala. Sin embargo, se puede mostrar que si existe un impuesto al uso del capital, representado como una proporción del costo del capital productivo y el único factor productivo es el capital, entonces existe una relación única entre los impuestos efectivos al uso del capital y aquel que grava a las ganancias de las empresas bajo un comportamiento optimizador de los productores. Bajo la hipótesis de que esto es generalizable dados los supuestos del MEGA utilizado, la tasa única de 0.35% de la Reforma debe tener una tasa (ó tasas) equivalente (s) a las tasas al uso del capital.

Para fines de simulación escogimos la misma tasa uniforme de 0.35% para gravar al uso del capital como la equivalente a la que propone la reforma.

El impacto que estas modificaciones impositivas tienen sobre la economía son expansionarias, el PIB real aumenta 0.238% respecto al año base (1984) pero los niveles de actividad de los sectores primarios, industrial y de servicios caen a tasas de -0.05%, -1.72% y -1.72% respectivamente. Los únicos sectores que elevan su producción (a costa de los que la contraen) son el gobierno, el sector de importaciones -exportaciones y la inversión.

El gobierno incrementa su actividad en 13.77% siguiéndole la inversión con una tasa de crecimiento de 3.19%. El sector importador-exportador aumenta a una tasa de 0.779%.

La razón de este gran incremento se deriva de la redistribución de ingreso en favor del gobierno como consecuencia de la 'Reforma'. El gobierno incrementa su actividad y destina mayores montos de sus ingresos a la inversión.

Los precios de todos los bienes y de los dos tipos de capital disminuyen en relación al del trabajo

Cuadro 5.1

Precios y niveles de actividad de equilibrio de la 'Reforma Fiscal'

(Porcentajes en que aumentan los niveles de actividad)

Sector	Precios relativos	Nivel de actividad	Δ% de los niveles de actividad de la 'Reforma' respecto al año base.
1. Sector Primario	0.9702531661	10,745,810.349	-0.5%
2. Industria	0.9593992184	16,941,319.551	-1.72%
3. Servicios	0.9608795747	16,316,775.316	-1.72%
4. Gobierno	0.9907014804	3,114,041.6263	13.77%
5. Imp.-Exp.	0.9961389321	4,283,213.7647	0.7798%
6. Inversión capital mañana	0.9650621584	8,358,480.7082	3.19%
7. Trabajo	1.0		
8. Capital-acción	0.9780357811		
9. Capital-deuda	0.8350834472		

Fuente: Estimado por MEGA.

No obstante la contracción en la producción de los tres primeros sectores, los ingresos fiscales (reales) aumentan a una tasa de 12.718% respecto al año base (1984). El aumento en la recaudación se debe a la eliminación del subsidio y a la uniformización del impuesto sobre el uso del capital acción. La recaudación por estos conceptos aumentó en 85.73% respecto a 1984 (la eliminación de un subsidio equivale a un incremento en la tasa impositiva efectiva).

Las recaudaciones por los demás conceptos caen. Lo que veremos posteriormente que se debe a una contracción en los ingresos de los consumidores.

Cuadro 5.2

Ingresos Fiscales de la 'Reforma Fiscal'
(millones de pesos reales)

Concepto	Monto	Δ% respecto al año base
Recaudación del IVA	83694.853	-7.54%
Recaudación por imposicición al ingreso	1 476093.384	-7.8234%
Recaudación por uso del capital		85.733%
Recaudación impuestos indirectos al productor	1 873741.302	-4.034%
Recaudación total	6 322053.58	12.7180%

Fuente: Estimado por MEGA

5.1.1 El impacto en bienestar de la 'Reforma Fiscal'

Como el modelo no imcorpora subsidios y transferencias que dependan del nivel de recaudación total del gobierno. Un aumento de la recaudación real disminuye el bienestar de la población reduciendo directamente su ingreso disponible y por tanto sus demandas. La 'Reforma' afecta proporcionalmente más a los ricos que a los pobres. Como puede apreciarse en el cuadro siguiente, en el cual mostramos los niveles de utilidad de ambos grupos así como su cambio porcentual respecto a 1984.

Cuadro 5.3

Nivel e Indice de utilidad de los consumidores en la Reforma

Grupo de Consumidores	Nivel de Utilidad	Δ%respecto al año base
Pobres	4 722 263.028	-3.514%
Ricos	2 050 990.450	-4.576%

Como las funciones de utilidad son homogéneas de grado uno, los cambios porcentuales de los índices de utilidad en el cuadro anterior, pueden interpretarse como cambios porcentuales en el ingreso de cada grupo de consumidores.

Es claro entonces que la 'Reforma Fiscal' tendrá efectos redistributivos importantes, el beneficiario principal de esa redistribución del ingreso es el gobierno. Por otro lado, la 'Reforma Fiscal' cumple sus cometidos en cuanto aumentar su recaudación y propiciar la inversión.

5.2 Impuestos Optimos Restringidos.

Como nuestro modelo considera solo dos grupos de consumidores ("pobres y ricos"), la función de bienestar social ec.(3.3) toma la forma

$$W(t_1,t_2,t_2) = \frac{1}{\alpha}\left(U_1^{\alpha}+U_2^{\alpha}\right)$$

con U_1, y U_2 la función de utilidad de pobres y ricos respectivamente. El parámetro α es el parámetro de aversión a la desigualdad.

La recaudación que se deriva de la 'Reforma Fiscal' -ver sección anterior- la consideramos como la meta recaudatoria que el gobierno pretende alcanzar mediante la Reforma Fiscal de 1987, la denotaremos por $\bar{R}$(=6322053.5871). En cuanto a los rangos, que representan rigideces institucionales y políticas, en que deben estar comprendidos los impuestos óptimos al uso del capital escogimos intervalos uniformes e iguales a [0.32, 0.40]. Las razones fueron por simplicidad y porque en el MEGA utilizado, la tasa más baja al uso del capital acción es 0.3231, la más alta es de 0.4511 (véase cuadro (4.3)). Así, los impuestos óptimos no deben ser muy diferentes de 0.3231; en cuanto al límite superior éste no debe ser grande-en relación al de otros países- para no desalentar el capital. Se eligió 0.40 como límite superior debido a que en Estados Unidos la tasa efectiva que enfrentan las empresas es de 39.89%.

El problema (2.4) adoptó la forma

$$\underset{\{t_1,t_2,t_3\}}{\text{Máx}}\ \frac{1}{\alpha}\left[U_1^{\alpha}(t_1,t_2,t_3)+U_2^{\alpha}(t_1,t_2,t_3)\right]$$

$$\text{s.a.} \qquad \ldots\ldots\ldots(5.1)$$

$$R(t_1,t_2,t_3) = \bar{R}$$

$$0.32 \leq t_1,t_2,t_3 \leq 0.40$$

Los impuestos variables, ti, son las tasas impositivas al uso del capital en el sector i, i=1,2,3.,

El problema (5.1) se resolvió para las tres especificaciones éticas.

$$\alpha = 0.1,\ 1,\ -1$$

Los impuestos óptimos para cada, α, se muestran en el siguiente cuadro.

Cuadro 5.4

Impuestos óptimos al uso del capital en cada sector

Parámetro de aversión	Primario	Manufacturas	Servicios
$\alpha = 0.01$	0.39936556151	0.3440212935	0.31998744427
$\alpha = 1.0$	0.3999226	0.3254938	0.3311877
$\alpha = -1.0$	0.37043629029	0.375817644	0.31994571648

Fuente: Calculados en base a los métodos descritos en este trabajo.

Nótese la sensibilidad de los impuestos óptimos al parámetro de aversión a la desigualdad. Por ejemplo, al comparar con las tasas impositivas que enfrentan las empresas antes de la Reforma Fiscal (ver cuadro (4.3)). Por ejemplo para $\alpha = 0.01$ los impuestos óptimos gravan más al sector 1 que antes de la 'Reforma Fiscal' tenía la tasa más baja al uso del capital y el subsidio más bajo por capital deuda (0.3231 y -0.09997 respectivamente). En términos generales es el sector 1 el más perjudicado en la determinación de los impuestos óptimos.

Para los tres valores de α, los sectores 2 y 3 se ven favorecidos con la imposición óptima porque antes de la Reforma Fiscal esos sectores eran los que enfrentaban las tasas impositivas más altas al capital-acción (véase cuadro (4.3)). Estas consideraciones intuitivas se formalizarán en la sección siguiente.

En el cuadro 5.5 se muestran los niveles de utilidad social para cada función de bienestar . Al comparar los niveles de utilidad social derivadas de los impuestos que propone la 'Reforma Fiscal' y las 'Reformas óptimas' se observa que en términos de bienestar, éstas elevan el bienestar . Los números entre paréntesis son los indices del bienestar social[1] tomado como base el correspondiente nivel de utilidad de la Reforma Fiscal.

Cuadro 5.5

Niveles e Indices de Bienestar Social para los impuestos Optimos

Parámetro de desigualdad	'Reforma Fiscal'	'Reforma Optima'
$\alpha = 0.01$	232.2546086	232.25839839
	(1.0)	(1.0000163)
$\alpha = 1.0$	6773253.5681	6782869.5003
	(1.0)	(1.001419)
$\alpha = -1.0$	$6.99332179 88\times10^{-7}$	$-6.9859627888\times10^{-7}$
	(1.0)	(-0.99896)

5.2.1 Algunas observaciones sobre nuestros resultados.

1.Hemos reportado impuestos óptimos sin aproximar . la razón de esto es que cambios en las tasas impositivas del orden de milésimas producen variaciones en la recaudación del orden de millones de pesos reales.Esta dificultad técnica puede salvarse relativamente fácil .

2.Las ganáncias en bienestar social de utilizar los impuestos óptimos en lugar de los propuestos por la 'Reforma 'son muy pequeños . Esto se debe a que la longitud del intervalo en que deben estar comprendidos dichos impuestos es muy pequeña (igual a 0.08).

3.A diferencia de nosotros Kanosky (1985) encontró reformas óptimas alternativas a la Reforma de 1983 en las cuales las ganancias en bienestar que se derivan de su utilización son significativas .Sin embargo, él utiliza más instrumentos óptimos -precios de Pemex y las tasas del IVA - que los que nosotros ocupamos,además los rangos en que pueden variar tales impuestos es relativamente grande.También su modelo es altamente agregado tanto del lado de la producción como a nivel de los consumidores.

4.Por último ,el propósito de este trabajo es mostrar la factibilidad de diseñar Reformas óptimas alternativas. Si se disponen de modelos con una adecuada desagregación a nivel de producción , de demanda y de una adecuada representación de los objetivos de la Reforma es muy posible que. los resultados sean significativos.

5.3 Reformas Fiscales Optimas alternativas a la 'Reforma Fiscal' de 1987.

Tomando como base los precios (iguales a 1) del año de 1984 (que constituye nuestro equilibrio histórico) resulta que las distintas alternativas fiscales óptimas tienen efectos expansionarios sobre la economía. Sin embargo, el crecimiento porcentual en el PIB ocasionado por cada alternativa fiscal óptima es menor al generado por la Reforma. Como puede observarse en el siguiente cuadro que nos muestra los incrementos porcentuales del PIB respecto al año base que tienen la 'Reforma Fiscal' y las distintas Reformas Fiscales óptimas.

Cuadro 5.6

Incremento porcentual del PIB

(respecto al año de equilibrio)

	'Reforma Fiscal'	Reforma $\alpha = 0.01$	Fiscales $\alpha = 1$	óptimas $\alpha = -1$
Δ% del PIB	0.238%	0.1067%	0.1447%	0.1235%

De esta forma, la 'Reforma Fiscal' es la más eficiente en términos del crecimiento del producto. Pero no así con respecto al bienestar social, como puede verse del valor de los índices de bienestar social de la 'Reforma' y de las reformas óptimas en el cuadro 4.2.

Ninguna de las tres alternativas óptimas varía respecto a la 'Reforma Fiscal' en sus efectos sobre precios, niveles de actividad y recaudación de equilibrio como lo muestran los cuadros 5.7, 5.8 y 5.9.

Cuadro 5.7

Precios de equilibrio del mercado

(Numeraire = mano de obra)

	α = 0.01	α = 1	α = -1
<u>SECTORES</u>			
1. Sector Primario	0.980240	0.979834	0.975198
2. Industria Manufacturera	0.961232	0.958494	0.964334
3. Servicios	0.955426	0.957392	0.955767
4. Gobierno	0.989598	0.989980	0.989646
5. Importaciones-Exportaciones	0.970888	0.970704	0.968476
6. Inversión	0.968874	0.968525	0.967244
<u>FACTORES DE PRODUCCION</u>			
7. Trabajo	1.0	1.0	1.0
8. Capital acción	0.978649	0.978626	0.978338
9. Capital deuda	0.833870	0.834358	0.833818

Fuente: Estimado por MEGA.

Cada política impositiva alternativa tiene efectos diferentes en cuanto a magnitud, pero no respecto a la tendencia del cambio en las magnitudes económicas. Esta tendencia coincide con la generada por la Reforma.

Cuadro 5.8

Niveles de actividad y Cambios porcentuales respecto al año base

Sector	α = 0.01	α = 1	α = -1
1. Primario	0.995468 (-0.453%)	0.996268 (-0.373%)	0.996532 (-0.346%)
2. Industria Manufacturera	0.984308 (-1.56%)	0.985678 (-1.43%)	0.983317 (-1.66%)
3. Servicios	0.985321 (-1.46%)	0.984386 (-1.56%)	0.985286 (-1.47%)
4. Gobierno	1.139028 (0.1390%)	1.138589 (0.1385%)	1.138973 (0.1389%)
5. Imp-Exp.	1.005000 (0.5%)	1.005742 (0.574%)	1.005459 (0.545%)
6. Inversión fija y acumulación de Inversión	1.027631 (2.76%)	1.028136 (2.81%)	1.029295 (2.92%)

Fuente: Estimado por MEGA.

Cuadro 5.9

Recaudación real que se consigue con las reformas óptimas

Concepto	α = 0.01	α = 1	α = -1
Recaudación del IVA	836616.7799 (-7.576%)	836798.9505 (-7.559%)	836526.2088 (-7.586%)
Recaudación por ingreso laboral	1475494.82 (-7.861%)	1475829.229 (-7.840%)	1475328.559 (-7.87%)
Recaudación por uso del capital	2129900.658 (85.280%)	2130067.623 (85.280%)	2132679.382 (85.507%)
Recaudación por impuestos al productor	1880041.305 (-3.711%)	1879357.334 (-3.746%)	1877519.382 (-3.840%)
Recaudación total	6322053.56 (12.718%)	6322053.137 (12.7180%)	6322053.506 (12.718%)

Nota: Los cambios porcentuales son respecto al año base.

5.3.1 El bienestar social derivado del uso de los instrumentos óptimos

Una forma estandar de comparar la situación de un consumidor en dos estados económicos posibles es mediante el uso de índices. El índice de Paasche[2] calculado para cada grupo de consumidores nos indica que la situación de cada consumidor es mejor en la Reforma Optima que en la 'Reforma'[3] .

Cuadro 5.10

Indices de Paasche para cada grupo de consumidores en las Reformas Optimas .

Grupos de consumidores	α=0.01	α=1	α=-1
Pobres	1.001152	1.00125	1.000437
Ricos	1.00204	1.00178	1.00128

La deseabilidad de las Reformas Fiscales queda de manifiesto al calcular los cambios porcentuales de los índices de utilidad de los consumidores respecto a la 'Reforma '.

Cuadro 5.11

Cambios porcentuales de los indices de utilidad de los consumidores respecto a la 'Reforma'.

Grupos de consumidores	0.01	1	-1
Pobres	0.121104%	0.125806 %	0.04509%
Ricos	0.205876%	0.1790846%	0.129276%

Hemos mostrado la deseabilidad de las Reformas Fiscales óptimas en relación a la 'Reforma Fiscal' en términos de indices de utilidad. La deseabilidad social de los impuestos óptimos, es decir, el criterio de maximizar el bienestar social más el supuesto de funciones de utilidad Cobb-Douglas homogéneas de grado uno implican los siguientes resultados. El impuesto óptimo al sector servicios, que es el sector al que los consumidores dedican entre el 58% y el 66% de sus ingresos, es el menor. Lo contrario ocurre en el sector primario que enfrenta los mayores impuestos óptimos (al sector primario dedican 10 y 7 centavos de cada peso los pobres y los ricos respectivamente). La razón de este tipo de resultados es que por simplicidad en la construcción del modelo de equilibrio general, la utilidad depende directamente de bienes demandados a los tres primeros sectores productivos. La utilidad de cada consumidor disminuirá más si se grava con la mayor tasa al uso del capital al sector productivo que produce el bien que los agentes demandan en mayor proporción. De esta forma,se espera que la mayor tasa impositiva óptima al capital se aplique al sector productivo cuya producción es la que menos demanda tiene por los consumidores.

Existen algunos otros comportamientos en las variables económicas determinadas por la politicas óptimas. Las alternativas fiscales óptimas estimulan el crecimiento del producto pero no tanto como en la 'Reforma'. Recordemos que el crecimiento del PIB en la 'Reforma' se da a costa de una contracción en los niveles de actividad de los sectores 1, 2 y 3 ocasionada por la reducción en su correspondiente demanda privada, y un aumento en los sectores 4, 5 y 6, las alternativas fiscales óptimas contraen menos la producción en los tres primeros sectores que la contracción provocada por la 'Reforma Fiscal', además elevan relativamente más el nivel de actividad del gobierno y la inversión (comparese los cuadros 5.1 y 5.8).

Respecto a la recaudación, se tiene que la recaudación por uso del capital acción no se eleva tanto en la alternativas óptimas y la recaudación por iva y por el ingreso disminuyen relativamente más.

Tomando el indice de productos de productos de Paache (vease cuadro 5.10) o los indices de utilidad respecto a la reforma nos damos cuenta que la reformas óptimas ponderan más a los ricos que a los pobres. Este resultado se debe a que el grupo "pobres" no esta ponderado por población y así, al momento de agregar este grupo tiene la dotación mayor de factores apareciendo realmente como los ricos. Observese el indice correspondiente $\alpha = -1$ que teóricamente no debe considerar a los ricos.

5.3.2 Algunas conclusiones del análisis comparativo.

En un esquema neoclásico de equlibrio general aplicado, el análisis normativo permite modelar y analizar el efecto de distintas alternativas fiscales más deseables que la actual. Los responsables del diseño y puesta en marcha de medidas impositivas pueden, bajo este esquema, elegir con criterios económicos y éticos específicos una de varias alternativas óptimas. El costo que tal decisión implica es un intercambio entre eficiencia y equidad. En nuestras simulaciones, se observa este fenomeno nitidamente pues la reforma aumenta la eficiencia económica relativamente más. Sin embargo, la perdida en el bienestar social es mayor al generado por cada reforma alternativa.

Los resultados que se presentan son sensibles al parámetro de aversión a la desigualdad, mostrando que modelos con suficiente desagregación a nivel de consumidores este parámetro puede ser el criterio que permite elegir una reforma óptima en forma única.

De manera empírica puede extraerse una regla de imposición óptima al uso del capital, a saber: los sectores productivos con mayores gravámenes deben ser aquellos cuyos bienes son demandados por los consumidores en la menores proporciones. Lo contrario ocurre para los sectores cuyos bienes son demandados en mayores proporciones.

Finalmente, bajo la especificación del modelo aquí utilizado todas las reformas óptimas generan los siguientes cambios que se propone la reforma fiscal para 1987. Aumentan la recaudación real , la inversión y el PIB.

Notas.

[1]Los índices así construidos no dicen nada respecto a las comparaciones de bienestar entre las tres reformas óptimas.

[2]El índice de Paasche se define como : $Q_P = \dfrac{\Sigma_i p'_i q'_i}{\Sigma_i p'_i q^o}$

donde q_i^o y q'_i son las cantidades óptimas demandadas a los precios p_i y p'_i respectivamente. Es fácil mostrar que si $Q_p > 1$, la situación a los precios p_i^1 es preferible a la de los precios p_i

[3]Para calcular los índices de Paasche del cuadro, se tomo como situación 0 al equilibrio de la 'Reforma' y como situación 1 a cada reforma óptima.

6. CONCLUSIONES GENERALES.

Nos interesa destacar cuatro tipos de conclusiones que se pueden extraer del desarrollo del proyecto.

Las referentes a la relativización de las simulaciones efectuadas; las que se refieren a la medida en que las hipótesis iniciales fueron verificadas; las que plantean la necesidad de caracterizar más las propiedades analiticas de la función de bienestar ligada al modelo de equilibrio general aplicado y finalmente, la propuesta de un método flexible para la determinación de impuestos óptimos.

6.1.-

Es claro que los resultados de los modelos Walràsianos de equilibrio general dependen de los supuesto en que descansan y de los valores de los parámetros clave, como son las elasticidades de sustitución entre factores o de los parámetros de las funciones de utilidad de los consumidores. Varios de los autores consultados hacen el análisis de sensibilidad de los parámetros y encuentran que los resultados varían -no alterando la tendencia general de los cambios de las variables. Estos resultados indican que los cambios cuantitativos que arrojan las simulaciones de modelos de equilibrio general solo deben indicar la tendencia de los cambios que ocurren en el modelo económico. Otra de las restricciones es la falta de incorporación de fenómenos monetarios e inflacionarios.

Todo esto conduce a tomar de las simulaciones efectuadas, únicamente las tendencias de los cambios en las magnitudes de las variables para los que fue construido el modelo -en nuestro caso, la estructura de financiamiento de las empresas-. La determinación de los impuestos óptimos a la renta de las empresas necesita de un modelo que presente una mayor desagregación a nivel de consumidores, además se requieren estimaciones más finas de los parámetros de las funciones de producción y de utilidad.

6.2.-

No obstante las dificultades que hacen del modelo neoclásico de equilibrio general una aproximación a la realidad económica, y sobre todo, a la nuestra, al menos bajo la modelación de esos supuestos la búsqueda de alternativas fiscales óptimas siempre es factible.[1] Así en nuestro modelo, con todas las limitaciones señaladas, las hipótesis de las que partimos, son confirmadas. La hipótesis empírica que se dedujo como regla impositiva óptima al uso del capital para no disminuir tanto el bienestar de la población, parece ser obra de la modelación de las funciones de producción con rendimientos constantes a escala. Parece fácil, de forma empírica, analizar como se modifica esta regla cuando la elasticidad de sustitución no es unitaria.

6.3-

Los impuestos óptimos al uso del capital tienen la característica de que algunos de ellos cumplen con igualdad alguna de las restricciones. Lo cual nos lleva a suponer que la función de bienestar, $W = (1/\alpha)\left[\sum_{i=1}^{H} U_i^{\alpha}\right]$, posee propiedades que implican que los óptimos restringidos se encuentran en las fronteras de las restricciones. Luego, es interesante, desde el punto de vista analitico caracterizar a W (en función de los parámetros impositivos) para ver a si satisface las propiedades para alcanzar sus óptimos en las fronteras de sus restricciones.

6.4.-

En el capítulo 3 se comentó el algoritmo que se utilizó para resolver el problema de encontrar los impuestos restringidos óptimos para W.

La experiencia acumulada en el desarrollo de este trabajo. nos hace pensar que un algoritmo de búsqueda heurística del máximo de la función de bienestar social es factible. La idea central de este algoritmo es, a partir de un punto en el subespacio de impuestos a modicar, digamos $t_o = (t_1, \ldots, t_s)$ generamos todo un conjunto de puntos $t_1, \ldots, t_n$ cercanos y uniformemente distribuidos al rededor de t_o. Por medio de MEGA hallamos los correspondientes valores númericos para W y R (las funciones de bienestar y la recaudación de equilibrio). Desechamos el punto t_o si existe un punto t_i con $i \in (1, \ldots, n)$ en el cual la recaudación $R(t_i) = R(t_o)$ pero donde $W(t_i) > W(t_o)$. Tales puntos siempre existen porque R es una función continua si $t_i > 0$, $i = 1, \ldots, s$

Este tipo de enfoque es meramente empírico y en modelos de equilibrio general aplicados la determinación de impuestos óptimos por este método parece ser siempre posible.

Este tipo de métodos heurísticos no aparece reportada en ningún artículo-de los consultados-. En éstos se trabajan métodos númericos o técnicas de punto fijo que no garantizan en general la determinación de impuestos óptimos restringidos.

Notas

[1] Las limitaciones al final de cuentas son de cómputo ya que si el modelo es muy desagregado y el algoritmo para determinar el equilibrio competitivo no es eficiente el tiempo de cómputo puede ser demasiado grande.

APENDICE 1. EL ALGORITMO DE LAGRANGE AUMENTADO

Sabemos[1] que si $\vec{t}_k^{\,*}$ es un vector que resuelve el problema de

$$\text{Min } F(\vec{t}_k)$$
$$\text{s.a.}$$
$$C(\vec{t}_k)=0$$

y las funciones reales de varias variables F y C poseén primeras derivadas parciales continuas, entonces $\vec{t}_k^{\,*}$ es un punto estacionario de la función lagrangiana

$$L_1(\vec{t}_k;\lambda) = F(\vec{t}_k) + \lambda\cdot C(\vec{t}_k) \qquad \text{........(1)}$$

Es decir $\vec{t}_k^{\,*}$ satisface las ecuaciones

$$\nabla L_1(t_k ; \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial t_{k_1}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial L_1}{\partial t_{k_5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = C(\vec{t}_k^{\,*}) = 0 \qquad \text{.........(2)}$$

en donde λ^* también es un punto estacionario de L_1.

De esta forma la técnica usual para determinar los puntos máximos y mínimos de una función sujeta a una restricción, consiste en determinar los puntos estacionarios de L_1 es decir resolver el sistema de ecuaciones (2).

Si además de conocer las primeras parciales, conocemos también las segundas parciales y estas son continuas. Entonces para poder discriminar entre los puntos $(\vec{t}_k^{\,*}, \lambda^*)$ que son puntos estacionarios de L_1, es decir, determinar cuales son máximos o mínimos locales o puntos silla, basta conocer la matriz hessiana de L_1, así por ejemplo, si ésta es semipositiva definida en el punto $(\vec{t}_k^{\,*}, \lambda^*)$ y además satisface la restricción, entonces la función F alcanza un mínimo local en $\vec{t}_k^{\,*}$.

Nuestro problema consiste en que no conocemos las expresiones analíticas para las primeras y segundas derivadas parciales, razón por la cual se acude al lagrangiano aumentado.

$$L(\vec{t}_k;\ \rho,\ \lambda) = F(\vec{t}_k) + \lambda C(\vec{t}_k) + \rho[\,C(\vec{t}_k)\,]^2$$

Es sencillo notar que todo punto estacionario de L_1 es también punto estacionario de $L(\vec{t}_k;\ \rho,\ \lambda)$. Razón por la cual el punto que minimiza a $F(\vec{t}_k)=0$, es también un punto estacionario de $L(\vec{t}_k;\ \rho,\lambda)$, es decir un punto que resuelve al sistema.

$$\nabla_{\vec{t}_k} L = 0$$

$$C(\vec{t}_k) = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

que es exactamente equivalente al sistema (2)

Ilustremos el algoritmo del lagrangiano aumentado para el problema siguiente

$$\text{Min } F(t_1, t_2)$$

s.a.

$$C(t_1, t_2) = 0$$

Proponemos

$$L(t_1, t_2, \lambda, \rho) = F(t_1, t_2) + \lambda C(t_1, t_2) + \rho[C(t_1, t_2)]^2$$

1° Se propone $\lambda^{(1)} = 0$, $\rho^{(1)} = 1$ ($\rho^{(1)}$ siempre debe ser > 0).

2° Se minimiza

$$L(t_1, t_2; \lambda^{(1)}. \rho^{(1)}) = F(t_1, t_2) + [C(t_1, t_2)]^2$$

es decir se encuentra $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$ que resuelve el problema

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_2} = 0$$

y que es un mínimo de $L(t_1, t_2; \lambda^{(1)}, \rho^{(1)})$

3° Hallado el vector $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$

se propone: $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 2\rho^{(1)} C(t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$

$\rho^{(2)} = \rho^{(1)}$

Si $C(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}) = 0$

Si $C(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}) \neq 0$ se propone

$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)}$

$\rho^{(2)} = 10\, \rho^{(1)}$

4° Se calcula el mínimo de

$$L\left[t_1, t_2; \rho^{(2)}, \lambda^{(2)}\right]$$

Si $(t_2^{(2)}, t_2^{(2)})$ resuelve este problema se define

$$\eta^{(1)} = 1/4\left|C(t_1^{(1)},\ t_2^{(1)})\right|$$

5° Si $\left|C(t_2^{(2)},\ t_2^{(2)})\right| < \eta^{(1)}$

Se propone

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} + 2\rho^{(2)}\ C\left[t_1^{(2)},\ t_2^{(2)}\right]$$

$$\rho^{(3)} = \rho^{(2)}$$

Si $\left|C(t_2^{(2)},\ t_2^{(2)})\right| \geq \eta^{(1)}$ entonces

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(2)}$$

$$\rho^{(3)} = 10\ \rho^{(2)}$$

6° Se sigue iterando hasta que: $\lambda^{(k)} \longrightarrow \lambda^*$

con el grado de aproximacion deseado.

En cada iteración a partir de la segunda será necesario calcular $\left[t_1^{(k)},\ t_2^{(k)}\right]$, $C\left[t_1^{(k)},\ t_2^{(k)}\right]$, $\eta^{(k-1)}$ que nos permitirá proponer

$$\lambda^{(k+1)}$$

$$\rho^{(k+1)}$$

Notas:

1 El teorema de Khun Tucker lo garantiza.

APENDICE 2

UN EJEMPLO DISEÑADO PARA ILUSTRAR Y VERIFICAR EL ALGORITMO.

Consideremos el problema

$$\text{Min } (t_1^2 + t_2^2)$$

s.a.

$$t_1,\ t_2 \geq 0 \quad \ldots\ldots (*)$$

$$t_1 + t_2 = 1$$

La solución a este problema es $t_1^* = \frac{1}{2}$, $t_2^* = \frac{1}{2}$

Si intentamos resolver el problema (*) con el algoritmo del Lagrangiano aumentado:

$$L(t_1,\ t_2;\ \lambda,\ \rho) = (t_1^2+t_2^2) + \lambda(1-t_1-t_2)^2 + \rho(1-t_1-t_2)^2 \ldots (**)$$

El algoritmo nos indica que para k=1

1) $\lambda^{(1)} = 0$, $\rho^{(1)} = 1$ y tenemos que minimizar el lagrangiano aumentado $L\left[t_1,\ t_2;\ \lambda^{(1)},\ \rho^{(1)}\right]$ es decir, resolvemos el problema de minimizar sin restricciones a $L\left[t_1, t_2;\ \lambda^{(1)},\ \rho^{(1)}\right]$. Así, resolvemos el problema

$$\underset{t_1, t_2}{\text{Min}}\ L = (t_1^2+t_2^2) + (1-t_1-t_2)^2$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = 4t_1+2t_2-2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_2} = 2t_1+4t_2-2 = 0$$

Cuya solución es:

$$t_1^{(1)} = \frac{1}{3}, \quad t_2^{(1)} = \frac{1}{3}$$

2) Evaluamos la restricción en $\left[t_1^{(1)},\ t_2^{(1)}\right]$, es decir:

$$C\left[t_1^{(1)},\ t_2^{(1)}\right] = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

3) Se propone

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)}+ 2\rho^{(1)}C\left[t_1^{(1)},\ t_2^{(1)}\right] = \frac{2}{3}$$

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)}$$

4) Se minimiza la función

$$L\left[t_1,t_2;\ \lambda^{(2)},\rho^{(2)}\right] = \left(t_1^2+t_2^2\right) + \lambda^{(2)}\left[1-t_1-t_2\right] + \rho^{(2)}\left[1-t_1-t_2\right]^2$$

es decir

$$L\left[t_1,t_2,\ \lambda^{(2)},\rho^{(2)}\right] = t_1^2 + t_2^2 + \frac{2}{3}\left[1-t_1-t_2\right] + \left[1-t_1-t_2\right]^2$$

Las condicione de primer orden implican:

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = 4t_1 + 2t_2 - \frac{8}{3} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_2} = 2t_1 + 4t_2 - \frac{8}{3} = 0$$

La solución a este sistema es:

$$t_1^{(2)} = \frac{8}{18}, \qquad t_2^{(2)} = \frac{8}{18}$$

5) Evaluamos la restricción en este óptimo: $C\left[t_1^{(2)},t_2^{(2)}\right] = \frac{2}{18}$

6) Definimos $\eta^{(1)} = \frac{1}{4}\ \left|C(t_1^{(1)},t_2^{(1)})\right| = \frac{1}{4}\ (\frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$

a) Si $\left|C\left[t_1^{(2)},t_2^{(2)}\right]\right| \le \eta^{(1)} \longrightarrow \begin{cases} \lambda^{(3)} = \lambda^{(2)}+2\rho^{(2)}C(t_1^{(2)},t_2^{(2)}) \\ \rho^{(3)} = \rho^{(2)} \end{cases}$

b) Si $\left|C\left[t_1^{(2)},t_2^{(2)}\right]\right| > \eta^{(1)} \longrightarrow \begin{cases} \lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} \\ \rho^{(3)} = 10\ \rho^{(2)} \end{cases}$

En nuestro caso $\left|C\left[t_1^{(2)},t_2^{(2)}\right]\right| = \frac{2}{18}$ & $\eta^{(1)} = \frac{1}{12}$.

Naturalmente se cumple b). Por lo tanto

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} = \frac{2}{3}$$

$$\rho^{(3)} = 10\ \rho^{(2)} = 10$$

7) Nuevamente tenemos que minimizar sin restricciones a

$$L\left[t_1,t_2;\lambda^{(2)},\rho^{(3)}\right] = t_1^2 + t_2^2 + \frac{2}{3}\left[1-t_1-t_2\right] + 10\left[1-t_1-t_2\right]^2$$

Las condiciones de primer orden implican un sistema de ecuaciones lineales 2X2, cuya solución es:

$$t_1^{(3)} = \frac{102}{252}, \qquad t_2^{(3)} = \frac{102}{252}$$

8) Evaluando

$$\left|C\left[t_1^{(3)},t_2^{(3)}\right]\right| = \frac{48}{252}$$

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{4}\left|C\left[t_1^{(2)},t_2^{(2)}\right]\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{18}\right) = \frac{1}{36}$$

Al aplicar a estos valores el paso 6). Resulta que

$$\left|C\left[t_1^{(3)},\ t_2^{(3)}\right]\right| > \eta^{(2)} \longrightarrow \begin{cases} \lambda^{(4)} = \lambda^{(3)} = \frac{2}{3} \\ \\ \rho^{(4)} = 10\ \rho^{(3)} = 100 \end{cases}$$

9) Minimizando

$$L\left[t_1,t_2;\ \lambda^{(2)},\rho^{(2)}\right] = t_1^2 + t_2^2 + \lambda^{(4)}\left[1-t_1-t_2\right] + \rho^{(4)}\left[1-t_1-t_2\right]^2$$

Resulta que las condiciones de primer orden se transforman en:

$$202t_1 + 200t_2 = \frac{602}{3}$$

$$200t_1 + 202t_2 = \frac{602}{3}$$

Cuya solución es: $t_1^{(4)} = \frac{1204}{2412}$, $t_2^{(4)} = \frac{1204}{2412}$

10) Utilizando nuevamente el criterio para modificar λ & ρ

Se tiene:

$$\eta^{(3)} = \frac{1}{4}\left|C\left[t_1^{(3)},t_2^{(3)}\right]\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{48}{252}\right) = \frac{1}{63}$$

$$\left|C\left[t_1^{(4)},t_2^{(4)}\right]\right| = \frac{1}{603}$$

Naturalmente por el paso 6)

$$\left|C\left[t_1^{(4)},t_2^{(4)}\right]\right| < \eta^{(3)} \longrightarrow \begin{cases} \lambda^{(5)} = \lambda^{(4)} + 2\rho^{(4)}C\left[t_1^{(3)},t_2^{(4)}\right] = \dfrac{602}{603} \\ \\ p^{(5)} = p^{(4)} = 100 \end{cases}$$

Etcétera...

11) El algoritmo termina cuando $\lambda^k \longrightarrow \lambda^*$ con cierta aproximación prefijada.

Analicemos por medio de una tabla los valores que se van generando iterativamente.

Paso k	$t_1^{(k)}$	$t_2^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$	$\rho^{(k)}$	$\eta^{(k-1)}$	$C\left[t_1^{(k)},t_2^{(k)}\right]$
			valores iniciales			
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	NO DEFINIDO	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{18}$
3	$\frac{102}{252}$	$\frac{102}{252}$	$\frac{2}{3}$	10	$\frac{1}{36}$	$\frac{48}{252}$
4	$\frac{1204}{2412}$	$\frac{1204}{2412}$	$\frac{2}{3}$	100		$\frac{1}{603}$
5			$\frac{602}{603}$	100		

12) En este caso sencillo, resolver el problema (*), no

necesitamos acudir al algoritmo del lagrangiano aumentado.

El lagrangiano simple nos da las soluciones óptimas a este problema así como el valor óptimo del multiplicador de lagrange simple. Estos son:

$$t_1^* = \frac{1}{2}, \qquad t_2^* = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^* = 1$$

Si observamos la tabla notamos que: $\lambda^{(k)} \longrightarrow 1$

$$t_1^{(k)},\ t_2^{(k)} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

en esos puntos $\qquad C\left[t_1^{(k)}, t_2^{(k)}\right] \longrightarrow 0.$

El espíritu del algoritmo consiste precisamente en un mecanismo iterativo en el cual $\lambda^{(k)} \longrightarrow \lambda^*$ con $\lambda^{(k)}$ el multiplicador de Lagrange óptimo.

APENDICE 3

DETERMINACION DE IMPUESTOS OPTIMOS POR METODOS HEURISTICOS Y MEDIANTE UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL.

El modelo de equilibrio general aplicado (MEGA) funciona como una caja negra que nos permite calcular numéricamente el valor de equilibrio de la recaudación y el valor de la función de bienestar a las tasas impositivas (t^1,t^2,t^3).

Asumimos que ambas funciones son continuas. El problema a resolver es:

$$\text{Max} \quad W(t_1,t_2,t_3)$$
$$\text{s.a.} \quad R(t_1,t_2,t_3)$$
$$0.32 \leq t_1,t_2t_3 \leq 0.40$$

Donde W es la función de bienestar y R la función de recaudación.

El conjunto de puntos (t_1,t_2,t_3) tales que $t_1,t_2,t_3 > 0$

y $$R(t_1,t_2,t_3) = \bar{R}$$

define una curva en $\mathbb{R}^3$. Para fines prácticos se puede pensar en esta curva en la forma usual.

Sabemos que $R(0.35,0.35,0.35) = \bar{R}$. Por continuidad de $R(t_1,t_2,t_3)$ sabemos que la curva $R(t_1,t_2,t_3) = \bar{R}$ o parte de ella están contenidas en el paralelepipedo

$$\mathbb{P}=[0.32,0.40]\times[0.32,0.40]\times[0.32,0.40]$$

Para fines prácticos se consideró que <u>el vector de impuestos</u>

(t_1,t_2,t_3) permite recaudar $\bar{R}$ si $R(t_1,t_2,t_3)$ es igual a $\bar{R}$ hasta su parte entera.

El Algoritmo.

Partiendo de los impuestos $(t_1, t_2, t_3) = (0.35,0.35,0.35)$ generamos mediante algún mecanismo (para nosotros este mecanismo fue el proceso iterativo que se diseñó para resolver el sistema de ecuaciones (3.6)) un conjunto de vectores impositivos alrededor de $t_1=t_2=t_3=0.35$. Además mediante MEGA valuamos W y R.

En forma esquemática:

$$\begin{array}{lcl}
(t_1,t_2,t_3) \longrightarrow & & \longrightarrow W(t_1,t_2,t_3),\ R(t_1,t_2,t_3) \\
(t'_1,t'_2,t'_3) \longrightarrow & \boxed{\text{MEGA}} & \longrightarrow W(t'_1,t'_2,t'_3),\ R(t'_1,t'_2,t'_3) \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(t^N_1,t^N_2,t^N_3) \longrightarrow & & \longrightarrow W(t^N_1,t^N_2,t^N_3),\ R(t^N_1,t^N_2,t^N_3)
\end{array}$$

Una terna de impuestos es mas deseable que $(0.35,0.35,0.35)$ si nos permite recaudar $\bar{R}$ y si $W(t_1,t_2,t_3) > W(0.35,0.35,0.35)$.

De forma intuitiva este proceso de selección significa moverse sobre la curva (que es una curva continua, "sin cortes")

$$R(t_1,t_2,t_3) = \bar{R}, \qquad t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{P}$$

en una de las posibles direcciones que incrementan el bienestar social, es decir a W.

Por la continuidad de R siempre es posible hallar impuestos (t^i_1,t^i_2,t^i_3) para algún i cuya recaudación sea igual a $\bar{R}$, basta construir un contorno de puntos lo suficientemente cercano a $(0.35,0.35,0.35)$.

Hallado un punto (t^i_1,t^i_2,t^i_3) más deseable que $(0.35,0.35,0.35)$.

Tomamos (t_1^i, t_2^i, t_3^i) y nos preguntamos si existe un punto más deseable que éste.

El proceso lo interrumpimos cuando algún impuesto o dos de ellos se encuentren en la frontera del paralelepipedo $\mathbb{P}$.

Mostramos algunos de los puntos hallados para $\alpha=1$

			W	$\bar{R}$
0.35	0.35	0.35	6773253.5681	6322053.5871
0.3540813	0.3459955	0.3496464	6774029.5884	6333053.3871
....	....	....	....	....
0.3632020	0.3395427	0.3473294	6775801.9267	6322053.7437
....	....	....	....	....
0.3999116	0.3254938	0.3311877	6782869.5003	6322053.1550

Bibliografía

Alberro José y Cambiaso Jorge E. "Características del ajuste de la economía mexicana", Documento de trabajo No. 1986-V ColMex.

Ahmad, E. y N. Stern, "The theory of reform and Indian Indirect taxes", Journal of Public Economics, 1987.

Boiteux, M., "On the management of Public Monopolies subject to Budgetary Constraint", en Journal of Economic Theory, 1971.

Diamond, P.A, y J.A. Mirrless, "Optimal taxation and Public Production: I y II", American Economic Review, 1971.

Diewert, W.E., "Optimal tax perturbation" en Journal of Public Economics, 1978.

Dixit, A.K., "Welfare effects of tax and price changes" en Journal of Public Economics, 1975.

Estrada E., "El impuesto sobre la renta de las empresas y la Reforma Fiscal: Un Análisis de Equilibrio General Aplicado",Tesis de maestría en Economía, CEE, mimeo, ColMex, 1987.

Feldstein, M.S., "On the theory of tax reform", en Journal of Public Economics, 1976.

Gill, P.E. y W. Murray (eds.), "Numerical methods for constrained optimization, Academic Press, Londres, 1974.

Guesnerie, R., "On the direction of tax reform", en Journal of Public Economics, 1977.

García Alba, P., "La evasión fiscal en México", UAM Azcapotzalco (1982).

Guesnerie, R., y Seade J., "Nonlinear Pricing in a Finite Economy" en Journal of Public Economics, 1982.

Harris, R.G. y J. G. Mac Kinnon, "Computing optimal tax equilibria" en Journal of Public Economics, 1979.

Heady, C.J. y P.K. Mitra, "The computational of optimum linear taxation", en Review of Economic Studies, 1982.

Kanosky, May E., "Diseño de una reforma fiscal óptima, el caso de México", El Colegio de México, México, 1985.

Mirrless, J.A., "An exploration in the theory of optimum income taxation", en Review of Economic Studies, 1971.

Nilson, N.J., Problem-Solving methods in Artificial Intelligence, Mc. Graw Hill Book Co, 1971.

Ramsey, F.P., "A contribution to the Theory of taxation", en Economic Journal, 1927.

Sandmo, A., "Optimal taxation an introduction to the literature", en Journal of Public Economics, 1927.

Samuelson, P.A., Foundations of Economic Analysis, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948.

Samuelson, P.A., 1951, Theory of optimal taxation, unpublished paper.

Serra-Puche, J., "A general equilibrium model for the Mexican economy" en Applied General Equilibrium Models, H.E. Scarf y J. Shoven (eds.) Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

Seade, J., "On the shape of optimal schedules", en Journal of Public Economics, 1977.

Sen, Amartya, On Economic Inequality, Clarendon-Press, Londres, 1973.

Secretaría de Hacienda y Crédito Público, "1987. Reforma Fiscal", México, 1987.

Shoven, J.B. "A proof of the existence of a general equilibrium with a valorem comodity taxes", en Journal of Economic Theory, 1974.

Shoven, J.B. "Applied General-Equilibrium tax Modeling", en Staff Papers, 1983.

Shoven, J.B. y J. Whalley, "General Equilibrium with taxes: a computational procedure and existence proof", en Review of Economic Studies, 1973.

Stern, N.H., "Optimum taxation and Tax Policy", en Staff Papers, 1984.

Tirole, J. y R. Guesnerie, "Tax reform from the gradient projection view point", en Journal of Public Economics, 1981.

Wibaut, S., "A model of tax reform for Belgium", en Journal of Public Economics, 1987.

LA PROGRAMACION DEL ALGORITMO DE LAGRANGE AUMENTADO (IOMEGA) LA LLEVO A CABO JOSE ANTONIO DELGADO EN LA UNIDAD DE COMPUTO DE EL COLEGIO DE MEXICO.AGRADECEMOS LA VALIOSA COLABORACION DE J. ANTONIO DELGADO EN ESTA FASE DEL PROYECTO .

```
program iomega ;       {Este programa se desarrollo}
                       {en la Unidad de Cómputo de }
                       {  El Colegio de México A.C.}
                       { Version            31/VII/87 }
type
   vertice  = array [1..3]  of integer ;
   vertices = array [1..13] of  vertice ;

const

   debug = false ;
   ep    = 0.0001;
   rM    = 6322053.560602654 ;

   v   : vertices = (    (  0,   0,   0),
                         (  1,   0,   0),
                         ( -1,   0,   0),
                         (  0,   1,   0),
                         (  0,  -1,   0),
                         (  0,   0,   1),
                         (  0,   0,  -1),
                         (  1,   1,   0),
                         ( -1,  -1,   0),
                         (  0,   1,   1),
                         (  0,  -1,  -1),
                         (  1,   0,   1),
                         ( -1,   0,  -1)         );

  type


   v2         = array [1..2] of real ;
   mat13      = array [1..1, 1..3] of real ;
   v4         = array [1..4] of real ;
   v13        = array [1..13] of real ;


   mat16 = array [1..1,  1..6] of real ;
   mat23 = array [1..2,  1..3] of real ;
   mat31 = array [1..3,  1..1] of real ;
   mat32 = array [1..3,  1..2] of real ;
   mat33 = array [1..3,  1..3] of real ;
   mat34 = array [1..3,  1..4] of real ;
   mat36 = array [1..3,  1..6] of real ;
   mat61 = array [1..6,  1..1] of real ;
   mat66 = array [1..6,  1..6] of real ;

     apu         = ^i_o_p_n_2 ;

     i_o_p_n_2 = record
                    i1      : real ;
                    i2      : real ;
                    i3      : real ;
                    lambda  : real ;
                    rho     : real ;
                    r_      : real ;
                    sig     : apu
                 end ;

var
  i                 : integer ;
  k                 : integer ;
  f                 : v13     ;
```

```
    r                 : v13      ;
    criterio1         : boolean ;
    criterio2         : boolean ;
    primero           : apu      ;
    paso              : apu      ;
    paso_sig          : apu      ;
    tmp               : apu      ;
    h                 : real     ;
    gradiente_g       : mat31    ;
    sol_gauss         : mat31    ;
    f0                : real     ;
    r0                : real     ;
    rho_inp           : real     ;
    h_inp             : real     ;
    t_inp1            : real     ;
    t_inp2            : real     ;
    t_inp3            : real     ;
    ep_inp            : real     ;
    epsilon           : real     ;
    aver              : real     ;

procedure  mega(t1, t2, t3, aver : real ;
                    var f_b, r : real) ;


 type
   v2    = array [1..2] of real ;
   mat13 = array [1..1, 1..3] of real ;
   v4    = array [1..4] of real ;
   mat16 = array [1..1, 1..6] of real ;
   mat23 = array [1..2, 1..3] of real ;
   mat31 = array [1..3, 1..1] of real ;
   mat32 = array [1..3, 1..2] of real ;
   mat33 = array [1..3, 1..3] of real ;
   mat34 = array [1..3, 1..4] of real ;
   mat36 = array [1..3, 1..6] of real ;
   mat61 = array [1..6, 1..1] of real ;
   mat66 = array [1..6, 1..6] of real ;

   const
       sh       : v2 = (0.2056016448, 0.2729128492) ;

       t_i      : v2 = (0.0420959, 0.113141) ;

       b        : v4 = (0.5482831824, 0.3316992953, 0.734564649, 0.76846526234);

       gamma    : v4 = (3.200550921, 3.2843262944, 3.0183361363, 1.0167278861);

       t_p      : v4 = (0.108591247, 0.0686155368, 0.0030350074, 0.0016974889);

       w        : mat23 = ( (5929806.4663, 4065280.9686, 6866154.7231),
                            (2038534.9337, 2172518.2773, 3669327.3467)) ;

       w_dot    : mat31 = ( (7968341.4),
                            (6237799.2459),
                            (10535482.0698)) ;

      alfa      : mat34 = ( (0.2634192801, 0.262238867, 0.2314869644, 0.9976472018),
                            (0.4133939025, 0.4233954904, 0.3122832546, 0.0),
                            (0.3231868174, 0.3143656629, 0.456229781, 0.0023527982)) ;

      beta      : mat32 = ( (0.1003310507, 0.070349245),
                            (0.3208617269, 0.2632788364),
                            (0.5788072225, 0.6663719201)) ;

      h         : mat66 = ( ( 0.9259034189   -0.1474344388   -0.0120119027
```

```
                  -0.0019676826,   -0.5855786605,   -0.3481558111),
                 (-0.2107000115,    0.6969417645,   -0.1318654087,
                  -0.0066932090,   -0.1551098076,   -0.2049153803),
                 (-0.0338804602,   -0.0537751856,    0.9025589398,
                  -0.2161961157,   -0.2593115319,   -0.2144535719),
                 ( 0.0,             0.0,             0.0,            1.0,            0.0,           0.
                 (-0.0324949361,   -0.0960118116,   -0.0213777061,
                  -0.00497988040,   1.0,            -0.2324752367),
                 ( 0.0,             0.0,             0.0,            0.0,            0.0,           1.

       : mat66 = ( ( 1.3802690856, 0.5012748083, 0.1136352533, 0.0352573773, 0.915475693,  0.820462535
                   ( 0.4926707509, 1.7857730185, 0.2834565563, 0.0775178673, 0.6389919415, 0.746796616
                   ( 0.1086400392, 0.1808143111, 1.1485352077, 0.2521004078, 0.3894917858, 0.411729671
                   ( 0.0,          0.0,          0.0,          1.0017003753, 0.0,          0.0       ),
                   ( 0.0944764419, 0.1916095906, 0.0554607959, 0.0189659936, 1.099425539,  0.339639252
                   ( 0.0,          0.0,          0.0,          0.0,          0.0,          1.0 )) ;

       : real = 0.4879879 ;

       : real = 0.0532250066 ;


      : mat61 ;
      : mat13;
      : mat16;
      : mat33;
      : mat31;
      : mat31;
      : mat36;
 t    : mat36 ;
      : mat61;
      : mat61;
      : mat61;
      : mat61;
      : mat61;
 di   : mat66;
      : mat66;
      : real ;
      : real ;
 j    : real ;
      : real ;
      : real ;
 lon: real ;
      : integer ;
 j    : boolean ;
 or_de_ajuste : real ;
       : text ;

 edure entrada ;
 r
 inp : text ;
 i   : integer ;

 in

 f[1,1] := 1.0 ;
 f[1,2] := 1.0 ;
 f[1,3] := 1.0 ;

 or i := 1 to 3 do
 for j := 1 to 3 do
    t_f[i, j] := 0.0 ;

 t_f[2,1] := t1 ;
 t_f[2,2] := t2 ;
 t_f[2,3] := t3 ;
```

```
        epsilon := 10.0 ;

        factor_de_ajuste :=  0.5 ;

      end ;

procedure suma61 ( a, b : mat61 ; var c : mat61 );

    var
     i, j      : integer ;
     tmp       : real ;
    begin
     for i := 1 to 6 do
        for j := 1  to 1 do
           c[i,j] := a[i,j] + b[i,j]
    end ;

  procedure suma66 ( a, b : mat66 ; var c : mat66 );

    var
     i, j      : integer ;
     tmp       : real ;
    begin
     for i := 1 to 6 do
        for j := 1 to 6 do
           c[i,j] := a[i,j] + b[i,j]
    end ;

  procedure resta66 ( a, b : mat66 ; var c : mat66 );

    var
     i, j      : integer ;
     tmp       : real ;
    begin
     for i := 1 to 6 do
        for j := 1 to 6 do
           c[i,j] := a[i,j] - b[i,j]
    end ;

procedure resta31 ( a, b : mat31 ; var c : mat31 );

    var
     i, j      : integer ;
     tmp       : real ;
    begin
     for i := 1 to 3 do
           c[i,1] := a[i,1] - b[i,1]
    end ;


  procedure mult36 ( a : mat36 ; b : mat66 ; var c : mat36 );

    var
     i, j , k : integer ;
     tmp      : real ;
    begin
       for i := 1 to 3 do
         for j := 1 to 6 do
          begin
            tmp := 0.0 ;
            for k := 1 to 6 do
              tmp := tmp + a[i,k]*b[k,j] ;
            c[i,j] := tmp
         end
```

```
end ;

procedure mult16 ( a : mat13 ; b : mat36 ; var c : mat16 );

 var
   j , k : integer ;
  tmp      : real ;
 begin

      for j := 1 to 6 do
       begin
         tmp := 0.0 ;
         for k := 1 to 3 do
           tmp := tmp + a[1,k]*b[k,j] ;
         c[1,j] := tmp
       end
 end ;

procedure mult16_ ( a : mat16 ; b : mat66 ; var c : mat16 );

 var
  j , k : integer ;
  tmp      : real ;
 begin

      for j := 1 to 6 do
       begin
         tmp := 0.0 ;
         for k := 1 to 6 do
           tmp := tmp + a[1,k]*b[k,j] ;
         c[1,j] := tmp
       end
  end ;

procedure mult61 ( a : mat66 ; b : mat61 ; var c : mat61 );

 var
  i,  k : integer ;
  tmp      : real ;
 begin
    for i := 1 to 6 do
       begin
         tmp := 0.0 ;
         for k := 1 to 6 do
           tmp := tmp + a[i,k]*b[k,1] ;
         c[i,1] := tmp
       end
 end ;

procedure mult31 ( a : mat36 ; b : mat61 ; var c : mat31 );

 var
  i,  k : integer ;
  tmp      : real ;
 begin
    for i := 1 to 3 do
       begin
         tmp := 0.0 ;
         for k := 1 to 6 do
           tmp := tmp + a[i,k]*b[k,1] ;
         c[i,1] := tmp
       end
 end ;
```

```
procedure mega_a ;

 var
   ingreso_bruto : array[1..2] of real ;
   ingreso_neto  : array[1..2] of real ;

  function ala(factor , val : real) : real ;
    begin
     ala := exp(factor*ln(val))
    end ;

  procedure entrada ;
    var
      inp : text ;
      nom : string[30] ;
      i   : integer ;
   begin
    clrscr ;
    gotoxy(20,5) ;
    write('Modelo de Equilibrio General Aplicado') ;

    gotoxy(5,8);
    write('Nombre del archivo? ') ;
    readln(nom) ;
    assign(inp,nom);
    reset(inp) ;

    readln(inp,p_f[1,1],p_f[1,2],p_f[1,3]) ;

    for i := 1 to  3 do
      readln(inp,t_f[i,1], t_f[i,2], t_f[i,3]) ;

    readln(inp,epsilon);
    readln(inp, factor_de_ajuste);
    close(inp)

   end ;

  procedure calculo_de_coeficientes_de_factores ;
   var
     i, j : integer ;
    begin

      i := 1 ;
       for j := 1 to 3 do
        f[i,j] := (b[j]/gamma[j])*
                 ala(alfa[2,j],((p_f[1,2]*(1+t_f[2,j])*alfa[1,j])/
                                (p_f[1,1]*alfa[2,j])))*
                 ala(alfa[3,j],((p_f[1,3]*(1+t_f[3,j])*alfa[1,j])/
                                (p_f[1,1]*alfa[3,j]))) ;
      i := 2 ;
      for j := 1 to 3 do
       f[i,j] := (b[j]/gamma[j])*
                 ala(alfa[1,j],((p_f[1,1]*(1+t_f[1,j])*alfa[2,j])/
                                (p_f[1,2]*(1+t_f[2,j])*alfa[1,j])))*
                 ala(alfa[3,j],((p_f[1,3]*(1+t_f[3,j])*alfa[2,j])/
                                (p_f[1,2]*(1+t_f[2,j])*alfa[3,j]))) ;
      i := 3 ;
      for j := 1 to 3 do
       f[i,j] := (b[j]/gamma[j])*
                 ala(alfa[1,j],((p_f[1,1]*(1+t_f[1,j])*alfa[3,j])/
                                (p_f[1,3]*(1+t_f[3,j])*alfa[1,j])))*
                 ala(alfa[2,j],((p_f[1,2]*(1+t_f[2,j])*alfa[3,j])/
                                (p_f[1,3]*(1+t_f[3,j])*alfa[2,j]))) ;
```

```
        j := 4 ;

        f[1,j] := (b[j]/gamma[j])*
                  ala(alfa[3,j],((p_f[1,3]*alfa[1,j])/
                                 (p_f[1,1]*alfa[3,j]))) ;
        f[2,j] := 0 ;

        f[3,j] := (b[j]/gamma[j])*
                  ala(alfa[1,j],((p_f[1,1]*alfa[3,j])/
                                 (p_f[1,3]*alfa[1,j]))) ;

        for i := 1 to 3  do
          for j := 5 to 6 do
           f[i,j] := 0.0  ;

       if debug then
         for i := 1 to 3 do
           begin
            for j := 1 to 6 do
              write(f[i,j]:10:8,' ') ;
             writeln
           end ;

    end ;

 procedure matriz_de_factores_neta ;
  var
   i, j : integer ;
  begin
    for i := 1 to 3 do
     for j := 1 to 3 do
       f_dot[i,j] := f[i,j]*(1+t_f[i,j]) ;

    for i := 1 to 3 do
      for j := 4 to 6 do
       f_dot[i,j] := f[i,j] ;

     if debug then
         for i := 1 to 3 do
           begin
            for j := 1 to 6 do
              write(f_dot[i,j]:10:8,' ') ;
             writeln
           end

  end ;

 procedure calculo_de_los_precios_de_los_bienes ;
   var
    tmp1 : mat16 ;
    i, j : integer ;
   begin

     mult16( p_f,    f_dot , tmp1) ;

     mult16_(tmp1,  b_t    , p_t)  ;

         if debug then
         for i := 1 to 1 do
           begin
            for j := 1 to 6 do
              write(p_t[i,j]:10:8,' ') ;
             writeln
           end ;

   end ;
```

```
    end ;

procedure  calculo_de_demandas_privadas ;
 var
  i, j            : integer ;
  tmp             : real ;
  ingreso_neto_de_ahorro : array[1..2] of real ;

  begin
    for i := 1 to 2 do
     begin
      tmp := 0.0 ;
      for j := 1 to 3 do
       tmp := tmp + p_f[1,j]*w[i,j] ;
       ingreso_bruto[i] := tmp
     end ;

    for i := 1 to 2 do
     begin
      ingreso_neto[i] := ingreso_bruto[i]*(1-t_i[i]) ;
      ingreso_neto_de_ahorro[i] := ingreso_neto[i]*(1-sh[i])
     end ;

    for i := 1 to 3 do
     begin
      xc1[i,1] := (beta[i,1]*ingreso_neto_de_ahorro[1])/
                  (p_t[1,i]*(1+t_c)) ;

      xc2[i,1] := (beta[i,2]*ingreso_neto_de_ahorro[2])/
                  (p_t[1,i]*(1+t_c))
      end  ;

     for i := 4 to 5 do
      begin
        xc1[i,1] :=  0.0 ;
        xc2[i,1] :=  0.0
      end   ;

      xc1[6,1] :=   ((sh[1]*ingreso_neto[1])/
                      p_t[1,6] ) ;

      xc2[6,1] :=   ((sh[2]*ingreso_neto[2])/
                      p_t[1,6] ) ;

      suma61(xc1, xc2, xc) ;

       if debug then
        begin
         for i := 1 to 1 do
           begin
            for j := 1 to 6 do
              writeln(xc[j,1]:10:8,' ',
                      xc1[j,1]:10:8,' ',
                      xc2[j,1]:10:8) ;
             writeln
           end ;

           writeln(ingreso_bruto[1]:10:8,' ',
                   ingreso_bruto[2]:10:8) ;
           writeln(ingreso_neto[1]:10:8,' ',
                   ingreso_neto[2]:10:8) ;
           writeln(ingreso_neto_de_ahorro[1]:10:8,' ',
                   ingreso_neto_de_ahorro[2]:10:8) ;

         end ;
       end ;
```

```
procedure calculo_de_niveles_de_actividades ;

  var
    imp  : mat66   ;
    i, j : integer ;
    tmpi : real ;
    tmp  : mat61   ;

 procedure sol( coe : mat66 ; d : mat61 ; var y : mat61) ;

  var
    i, j, k : integer ;
    a       : array[1..6,1..7] of real ;
    s       : real ;

   begin

      for i := 1 to 6 do
       for j := 1 to 6 do
        a[i,j] := coe[i,j] ;


      for j := 1 to 6 do
        a[j,7] := d[j,1] ;

       if debug then
       for i := 1 to 6 do
        begin
          for j := 1 to 7 do
            write(a[i,j]:10:2) ;
           writeln
        end ;

      for k := 1 to 6 do
        begin
          s := a[k,k] ;

          for j := k to 7 do
            a[k,j] := a[k,j]/s ;

          for i := 1 to 6 do
            if i <> k then
              begin
                s := a[i,k] ;
                for j := k to 7 do
                  a[i,j] := a[i,j] - s*a[k,j]
              end
        end        ;


          for j := 1 to 6 do
            y[j,1] := a[j,7]
   end ;

   begin

    for i := 1 to 3 do
     for j := 1 to 6  do
      imp[i,j] := 0.0 ;

     i := 5 ;
     for j := 1 to 6 do
      imp[i,j] := 0.0 ;

    i := 4 ;
```

```
for j := 1 to 3 do
 imp[i,j] := (g/p_t[1,4])*
             (t_p[j]*b_[j,j]*p_t[1,j]+
              t_f[2,j]*p_f[1,2]*f[2,j]+
              t_f[3,j]*p_f[1,3]*f[3,j]) ;
i := 6 ;
for j := 1 to 3 do
 imp[i,j] := ((1-g)/p_t[1,6])*
             (t_p[j]*b_[j,j]*p_t[1,j]+
              t_f[2,j]*p_f[1,2]*f[2,j]+
              t_f[3,j]*p_f[1,3]*f[3,j]) ;
i := 4 ;
j := 4 ;
 imp[i,j] := (g/p_t[1,4])*
             (t_p[j]*b_[j,j]*p_t[1,j]) ;

i := 6 ;
j := 4 ;
 imp[i,j] := ((1-g)/p_t[1,6])*
             (t_p[j]*b_[j,j]*p_t[1,j]) ;


for i := 4 to 6 do
 for j := 5 to 6  do
      imp[i,j] := 0.0 ;

if debug then
    begin

      for i := 1 to 6 do
       begin
        for j := 1 to 6 do
          write(imp[i,j]:10:8,' ') ;
         writeln
       end ;
    end;


resta66(b_, imp, b_modi) ;

tiva := t_c*(p_t[1,1]*xc[1,1]+
             p_t[1,2]*xc[2,1]+
             p_t[1,3]*xc[3,1]) ;

ting := (t_i[1]*ingreso_bruto[1]+
         t_i[2]*ingreso_bruto[2]) ;

j := 1 ;
for i := 1 to 3 do
  tmp[i,j] := 0.0 ;

tmp[4,1] := (g/p_t[1,4])*
            (tiva+ting) ;

tmp[5,1] := 0.0 ;


tmp[6,1] := ((1-g)/p_t[1,6])*
            (tiva+ting) ;

suma61(xc, tmp, d) ;

sol(b_modi, d, y) ;
```

```
    tind := 0 ;

     for j := 1 to 4 do
       tind := tind + t_p[j]*b_[j,j]*y[j,1]*p_t[1,j] ;

    tmp1 := 0.0 ;

     for j := 1 to 3 do
       tmp1 := tmp1 + t_f[2,j]*f[2,j]*y[j,1] ;

      tmp1 := p_f[1,2]*tmp1 ;

    tfat := 0.0 ;

     for j := 1 to 3 do
       tfat := tfat + t_f[3,j]*f[3,j]*y[j,1] ;

      tfat := p_f[1,3]*tfat + tmp1 ;

     t := tfat + tind + tiva + ting ;

     r := t/p_f[1,1] ;

     if debug then
         begin
             for j := 1 to 6 do
               writeln(y[j,1]:10:8,' ') ;

           for i := 1 to 6 do
            begin
             for j := 1 to 6 do
               write(b_modi[i,j]:10:8,' ') ;
              writeln
            end ;
         end;
    end ;

procedure calculo_de_demanda_de_factores ;
 begin
     mult31(f, y, demf) ;

     resta31(demf, w_dot, exdf) ;
      if debug then
         begin

           for i := 1 to 3 do
            begin
               write(demf[i,1]:10:8,' ',exdf[i,1]:10:8) ;
              writeln
            end ;
         end;
 end;

procedure calculo_de_el_bienestar ;
  var
    u1 : real ;
    u2 : real ;
  begin
     u1 := ala(beta[1,1], xc1[1,1])*
           ala(beta[2,1], xc1[2,1])*
           ala(beta[3,1], xc1[3,1]) ;

     u2 := ala(beta[1,2], xc2[1,1])*
           ala(beta[2,2], xc2[2,1])*
           ala(beta[3,2], xc2[3,1]) ;
```

```
        f_b := (1/aver)*
                ((ala(aver, u1)) + (ala(aver,u2)))

    end ;

    begin
      calculo_de_coeficientes_de_factores ;
      matriz_de_factores_neta ;
      calculo_de_los_precios_de_los_bienes ;
      calculo_de_demandas_privadas ;
      calculo_de_niveles_de_actividades ;
      calculo_de_demanda_de_factores  ;
      calculo_de_el_bienestar
    end ;

procedure ajuste_walrasiano_de_precios_de_factores ;

  var
   j : integer ;

 begin
   for j := 1 to 3 do
     p_f[1,j] := p_f[1,j] + factor_de_ajuste*(exdf[j,1]/demf[j,1])
 end ;

 procedure genera_salida ;
  var
   i : integer ;

  begin
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Numero de iteraciónes para la convergencia:',j:5);
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Precios de factores:');
    writeln(out1,p_f[1,1]:12:8,p_f[1,2]:12:8,p_f[1,3]:12:8) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Precios de bienes:');
     for i:= 1 to 6 do
       writeln(out1,p_t[1,i]:15:12) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Demanda de factores:');
     for i:= 1 to 3 do
       writeln(out1,demf[i,1]:15:12) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Exceso de demanda de factores:');
     for i:= 1 to 3 do
       writeln(out1,exdf[i,1]:15:12) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Demanda de los pobres:');
     for i:= 1 to 6 do
       writeln(out1,xc1[i,1]:15:12) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Demanda de los ricos:');
     for i:= 1 to 6 do
       writeln(out1,xc2[i,1]:15:12) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Demanda privada:');
     for i:= 1 to 6 do
       writeln(out1,xc[i,1]:12:10) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Niveles de actividad:');
     for i:= 1 to 6 do
       writeln(out1,y[i,1]:12:10) ;
    writeln(out1);
    writeln(out1,'Recaudación total:');
    writeln(out1,t:12:10) ;
```

```
   writeln(out1);
   writeln(out1);
   writeln(out1,'Recaudación del iva:');
   writeln(out1,tiva:12:10) ;
   writeln(out1);
   writeln(out1,'Recaudación al ingreso:');
   writeln(out1,ting:12:10) ;
   writeln(out1);
   writeln(out1,'Recaudación por uso de factores:');
   write(out1,tfat:12:10) ;

   writeln(out1);
   writeln(out1,'Recaudación por impuestos al productor:');
   write(out1,tind:12:10) ;
   close(out1);

end ;

begin

   entrada ;
   flag := true ;
   j := 0 ;

    while  flag do
      begin
        mega_a ;
         j := j + 1 ;

          gotoxy(1,25) ;
          clreol ;
          {write(j:8,'  ',
                      exdf[1,1]:15:8,' ',
                      exdf[2,1]:15:8,' ',
                      exdf[3,1]:15:8) ; }

         if   ((abs(exdf[1,1]) > epsilon) or
               (abs(exdf[2,1])  > epsilon) or
               (abs(exdf[3,1])  > epsilon)) then
                  ajuste_walrasiano_de_precios_de_factores
         else
               flag := false
       end ;
       {genera_salida  ;}
 end ;

procedure mega13 ;
  var
  i : integer ;

 begin

    with paso^ do
        for i := 1 to 13 do
          begin
            mega( i1 + v[i,1]*h, i2 + v[i,2]*h, i3 + v[i,3]*h,
                  aver, f[i], r[i]) ;
            writeln('-->',(i1 + v[i,1]*h),' ', i2 + v[i,2]*h,' ', i3 + v[i,3]*h,' ',
                        f[i],' ', r[i]) ;
            writeln(lst,'-->',(i1 + v[i,1]*h),' ', i2 + v[i,2]*h,' ', i3 + v[i,3]*h,' ',
                        f[i],' ', r[i]) ;

           end      ;

 end ;
```

```
procedure calculos_de_primeras_y_segundas_parciales
          ( var sol_gauss, gradiente_g : mat31 )   ;
  const
   rM = 6322053.560602654 ;

  var
   gradf : mat31   ;
   gradr : mat31   ;
   gradg : mat31   ;
   hessf : mat33   ;
   hessr : mat33   ;
   hessg : mat33   ;
   i     : integer ;
   j     : integer ;
   h_h   : real    ;
   delta : real    ;

procedure sol( coe : mat33 ; d : mat31 ;
               var sol_gauss : mat31 ) ;

 var
   i, j, k : integer ;
   a       : array[1..3,1..4] of real ;
   s       : real ;

  begin

     for i := 1 to 3 do
      for j := 1 to 3 do
       a[i,j] := coe[i,j] ;


     for j := 1 to 3 do
       a[j,4] := d[j,1] ;

      if debug then
      for i := 1 to 3 do
       begin
        for j := 1 to 4 do
          write(a[i,j]:10:2) ;
         writeln
       end ;

     for k := 1 to 3 do
       begin
        s := a[k,k] ;

        for j := k to 4 do
          a[k,j] := a[k,j]/s ;

        for i := 1 to 3 do
          if i <> k then
            begin
              s := a[i,k] ;
              for j := k to 4 do
                a[i,j] := a[i,j] - s*a[k,j]
            end
       end       ;


        for j := 1 to 3 do
          sol_gauss[j,1] := a[j,4]
  end ;


  begin
```

```
delta := 2*h ;
h_h   := h*h ;

 for i := 1 to 3 do
  begin
   gradf[i,1] := (f[2*i] - f[2*i+1]) / delta ;
   gradr[i,1] := (r[2*i] - r[2*i+1]) / delta
  end ;

 for i := 1 to 3 do
   gradg[i,1] := gradf[i,1] -
                 paso^.lambda*gradr[i, 1] -
                 2.0*paso^.rho*(rM-r[1])*gradr[i,1] ;

  hessf[1,1] :=  (f[2] - 2.0*f[1] + f[3]) / h_h ;

  hessf[1,2] :=  (f[8] + f[9] +
                  2.0*f[1] - f[2] -
                  f[3] - f[4] - f[5]) / h_h ;

  hessf[1,3] :=  (f[12] + f[13] +
                  2.0*f[1] - f[2] -
                  f[3] - f[6] - f[7]) / h_h ;

  hessf[2,1] :=  hessf[1,2] ;

  hessf[2,2] :=  (f[4] - 2.0*f[1] + f[5]) / h_h ;

  hessf[2,3] :=  (f[10] + f[11] +
                  2.0*f[1] - f[4] -
                  f[5] - f[6] - f[7]) / h_h ;

  hessf[3,1] := hessf[1,3] ;

  hessf[3,2] := hessf[2,3] ;

  hessf[3,3] :=  (f[6] - 2.0*f[1] + f[7]) / h_h ;

  hessr[1,1] :=  (r[2] - 2.0*r[1] + r[3]) / h_h ;

  hessr[1,2] :=  (r[8] + r[9] +
                  2.0*r[1] - r[2] -
                  r[3] - r[4] - r[5]) / h_h ;

  hessr[1,3] :=  (r[12] + r[13] +
                  2.0*r[1] - r[2] -
                  r[3] - r[6] - r[7]) / h_h ;

  hessr[2,1] :=  hessr[1,2] ;

  hessr[2,2] :=  (r[4] - 2.0*r[1] + r[5]) / h_h ;

  hessr[2,3] :=  (r[10] + r[11] +
                  2.0*r[1] - r[4] -
                  r[5] - r[6] - r[7]) / h_h ;

  hessr[3,1] := hessr[1,3] ;

  hessr[3,2] := hessr[2,3] ;

  hessr[3,3] :=  (r[6] - 2.0*r[1] + r[7]) / h_h ;

  for i := 1 to 3 do
   for j := 1 to 3 do
    hessg[i, j] := hessf[i, j] -
```

```
                        paso^.lambda*hessr[i, j] -
                        2.0*paso^.rho*(rM-r[1])*hessr[i, j] +
                        2.0*paso^.rho*gradr[j, 1]*gradr[i,1] ;

        {for i := 1 to 3 do
          for j := 2 to 3 do
           hessg[i, j] := hessf[j, i] -
                        paso^.lambda*hessr[j, i] -
                        2.0*paso^.rho*(rM-r[1])*hessr[j, i] +
                        2.0*paso^.rho*gradr[j,1]*gradr[i,1] ; }

        sol( hessg, gradg, sol_gauss) ;

        for i := 1 to 3 do
          gradiente_g[i,1] := gradg[i,1] ;


        writeln('sali del gauss con... ') ;

        writeln( sol_gauss[1,1]:10:8,
                 sol_gauss[2,1]:10:8,
                 sol_gauss[3,1]:10:8) ;
        writeln(lst,'sali del gauss con... ') ;
          writeln(lst, sol_gauss[1,1]:10:8,
                 sol_gauss[2,1]:10:8,
                 sol_gauss[3,1]:10:8) ;

        writeln( gradg[1,1]:10:8,
                 gradg[2,1]:10:8,
                 gradg[3,1]:10:8) ;

        writeln(lst,'sali del gauss con... ') ;
          writeln(lst, gradg[1,1]:10:8,
                       gradg[2,1]:10:8,
                       gradg[3,1]:10:8) ;

  end ;

begin  {main de iomega}

  criterio1 := true  ;

  clrscr ;
  gotoxy(1,5);
  write('Programa para obtener impuestos optimos mediante un ');
  writeln('modelo de equlibrio general') ;


 gotoxy(5,7);
 writeln('Ingreso de los parametros de arranque...');
 gotoxy(7,10);
 write('Valor del paramatro de sanción (rho) ? ');
 readln(rho_inp);

 gotoxy(7,12);
 write('Criterio de la solución (epsilon) ? ');
 readln(ep_inp);

 gotoxy(7,14);
 write('Valor del incremento (h) ? ');
 readln(h_inp);

 gotoxy(7,16);
 write('Valor de los impuestos de arranque  ? ');
```

```
readln(t_inp1, t_inp2, t_inp3);

gotoxy(7,18);
write('Valor del parametro de aversión a la desigualdad (aver)? ');
readln(aver);


 h          := h_inp ;

 epsilon := ep_inp ;

  new(paso) ;

  with paso^ do
   begin
     lambda := 0.0        ;
     rho    := rho_inp    ;
     r_     := 0.0        ;
     sig    := nil
   end ;

 primero := paso ;

 k := 1 ;

 while (k <= 20) and
        criterio1 do
   begin

    i := 1 ;
    criterio2 := true ;

    with paso^ do
     begin
       i1      := t_inp1      ;
       i2      := t_inp2      ;
       i3      := t_inp3
     end      ;


    while (i <= 5) and
           criterio2 do
     begin


      writeln('entre a mega13 valor de ',i) ;
      writeln(lst,'entre a mega13 valor de ',i) ;
      mega13 ;
      calculos_de_primeras_y_segundas_parciales
                 (sol_gauss, gradiente_g ) ;

      if ( (abs(gradiente_g[1,1]) > ep) or
           (abs(gradiente_g[2,1]) > ep) or
           (abs(gradiente_g[3,1]) > ep   )   ) then
                                   begin
                                     i := i + 1 ;
                                     paso^.i1 := paso^.i1 - sol_gauss[1,1] ;
                                     paso^.i2 := paso^.i2 - sol_gauss[2,1] ;
                                     paso^.i3 := paso^.i3 - sol_gauss[3,1] ;
                                   end
                                  else
                                     criterio2 := false
     end ;

    new(paso_sig) ;
```

```
    with paso_sig^ do
     begin
      i1 := paso^.i1  ;
      i2 := paso^.i2  ;
      i3 := paso^.i3
     end ;

    paso^.sig := paso_sig ;
    paso_sig^.sig := nil  ;
     {paso := paso_sig        ; aguas aguas  ojo}

    with paso_sig^ do
     mega( i1, i2 , i3, 1.0, f0, r0) ;

      if (k = 1) then
                    begin
                      with paso_sig^ do
                       begin
                        lambda := paso^.lambda +
                                  2.0*paso^.rho*(rM-r0) ;
                        rho    := paso^.rho ;
                        r_     := r0
                       end
                    end
      else
                    if  ( (4.0*abs(rM-r0)) <= (abs(rM-paso^.r_))) then
                             begin
                              with paso_sig^ do
                               begin
                                  lambda := paso^.lambda +
                                  2.0*paso^.rho*(rM-r0) ;
                                  rho    := paso^.rho ;
                                  r_     := r0
                               end
                             end
                     else
                             begin
                              with paso_sig^ do
                                begin
                                  lambda := paso^.lambda ;
                                  rho    := 10.0*paso^.rho ;
                                  r_     := r0
                               end
                             end ;

       if (abs(paso^.lambda -
           paso_sig^.lambda) <= 0.0001 ) then
                                                    criterio1 := false   ;
       paso := paso_sig ;
       k    := k + 1    ;
       clrscr ;
       tmp   := primero ;
       while tmp <> nil do
        begin
         with tmp^  do
          begin
           writeln( i1:8:7,' ',i2:8:7,' ',i3:8:7,' ',
                    lambda:8:7,' ',rho:8:7,' ',r_) ;
           tmp := sig
          end ;
        end;
       paso := paso_sig ;
       k    := k + 1
end

            end.
```