EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

PRODUCTOS DIFERENCIADOS Y COMPRAS MÚLTIPLES BAJO EMPAQUETAMIENTO, MERCADOS DE DOS LADOS Y MERCADOS SEGMENTADOS

TESIS PRESENTADA POR

SERGIO ARTURO VARGAS MAGAÑA

PROMOCIÓN 2021-2024

CIUDAD DE MÉXICO MARZO DE 2025

EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

PRODUCTOS DIFERENCIADOS Y COMPRAS MÚLTIPLES BAJO EMPAQUETAMIENTO, MERCADOS DE DOS LADOS Y MERCADOS SEGMENTADOS

TESIS PRESENTADA POR

SERGIO ARTURO VARGAS MAGAÑA

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTOR EN ECONOMÍA

PROMOCIÓN 2021-2024

DIRECTORA DE TESIS

DRA. ADRIANA GAMA VELÁZQUEZ

CIUDAD DE MÉXICO MARZO DE 2025

EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

CONSTANCIA DE APROBACIÓN

Doctorante:	Sergio Arturo Vargas Magaña
Tesis:	*Productos diferenciados y compras múltiples bajo empaquetamiento, mercados de dos lados y mercados segmentados*
Directora de Tesis:	Dra. Adriana Gama Velázquez

Aprobada por el Jurado Examinador:

Dra. Adriana Gama Velázquez	Presidenta	_______________
Dra. Isabel Melguizo	Primer Vocal	_______________
Dr. Alejandro I. Castañeda Sabido	Vocal Secretario	_______________
Dr. Stephen McKnight	Suplente	_______________

Ciudad de México, 24 de marzo de 2025

A Margarita, por su infinito amor y apoyo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo y la orientación de diversas personas e instituciones, cuya generosidad y compromiso han acompañado cada etapa de esta investigación.

Agradezco al Colegio de México, y en particular al Centro de Estudios Económicos, por la excelencia académica de su formación y el respaldo financiero brindado durante mi trayectoria doctoral. Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por su apoyo a través de las becas nacionales para estudios de posgrado, que hicieron posible la realización de este proyecto.

Mi más profundo agradecimiento a la Dra. Adriana Gama, mi asesora, cuya confianza y guía fueron fundamentales para fortalecer mi seguridad en mi trabajo y en mi capacidad para culminar esta tesis. Al profesor Antonio Jiménez, por su interés, paciencia y detallados comentarios, que me impulsaron a mejorar los aspectos más débiles de mi investigación. A los profesores Alejandro Castañeda e Isabel Melguizo, por sus valiosas observaciones y cuestionamientos, que enriquecieron mi análisis y ampliaron mi perspectiva.

En un plano más personal, agradezco a Mariana por su amor, apoyo incondicional y constante motivación. Su dedicación y pasión por su trabajo han sido un ejemplo a seguir en este camino. A Itza, por su amistad, guía y apoyo en todo momento; a Itzel, por compartir conmigo las dificultades del doctorado; y a Damian, Milton, Rodrigo, Ana, Constanza, Alexa, Blanca, Wendy y Paola, por haber sido amistades invaluables en esta travesía. Gracias a todos por llenar de alegría y compañía esta etapa desafiante.

Índice general

Introducción

Esta tesis abarca tres estudios sobre mercados con productos diferenciados y compras múltiples (multi-homing). En este contexto, el primer capítulo analiza el impacto del empaquetamiento en las fusiones, el segundo examina la localización óptima en mercados de dos lados y el tercero se enfoca en las estrategias de diferenciación óptima en mercados segmentados.

En el primer capítulo, utilizo los modelos de diferenciación espacial de Hotelling y Salop para demostrar que la presencia de consumidores multiproducto en el mercado reduce los incentivos de fusión entre dos firmas vecinas. Sin embargo, estos incentivos se restablecen al considerar el empaquetamiento de productos.

En el segundo capítulo, analizo cómo la existencia de compradores multi-plataforma en un mercado de dos lados influye en la estrategia de diferenciación óptima y en la interacción entre los efectos de red y los precios.

Finalmente, en el tercer capítulo, estudio las estrategias de diferenciación óptima en mercados segmentados, considerando la posibilidad de producir bienes especializados para cada segmento o productos que puedan satisfacer múltiples segmentos simultáneamente. Además, considero dos escenarios de competencia, las firmas interactúan una única vez en el mercado o interactúan múltiples veces a lo largo del tiempo.

Capítulo 1

Efectos del empaquetamiento y las compras múltiples en fusiones horizontales con modelos de diferenciación espacial

1.1. Introducción

En los mercados con bienes diferenciados horizontalmente, es común que un consumidor adquiera más de un producto, ya que las características distintivas de cada uno ofrecen una utilidad adicional. Por ejemplo, alguien que compra audífonos over-ear, grandes y pesados, para disfrutar de música en alta calidad en casa, puede tener incentivos a adquirir también audífonos in-ear, más portátiles y ligeros, ideales para usar en la calle o durante el ejercicio. De manera similar, quien compra café de tueste ligero podría querer comprar también café de tueste oscuro, y quien opta por Zucaritas (cereal azucarado) podría encontrar valor en comprar, además, Chocochrispis (cereal con sabor a chocolate). Así una marca que produce dos tipos de café o dos cereales distintos podría encontrar incentivos para crear un paquete con ambos. Este tipo de empaquetamiento, de bienes diferenciados horizontalmente, es mucho más habitual (y rentable) en los mercados de bienes de información. Las compañías de videojuegos ofrecen paquetes con varios de sus juegos a precio reducido. Xbox tiene un paquete con los servicios de suscripción de videojuegos Gamepass y EA play. Disney recientemente (2024) ha empaquetado sus servicios de *streaming* Disney+ y Star+ en un solo servicio haciéndolos inaccesibles por separado.

Si bien, en la literatura se ha señalado que las fusiones en mercados con productos diferenciados pueden aumentar el poder de mercado de las firmas en la medida en que sus productos son sustitutos, suficientemente, cercanos (Baker y Bresnahan, 1985) o el nivel de competencia entre estos es alto (Hausman y Leonard 1997), estos análisis no han tomado en cuenta la posibilidad de compras múltiples y, por tanto, los efectos que pudiera tener, sobre las firmas y el mercado, la posibilidad de empaquetar los productos una vez consumada la fusión.

Empleo los modelos de diferenciación espacial de Hotelling y Salop, incorporando el supuesto de compras múltiples (multi-hogar), para estudiar los incentivos de dos empresas con bienes adyacentes a fusionarse. Analizo cómo la creación de un paquete conjunto de sus productos influye en los precios de mercado y en el bienestar social.

A diferencia del modelo de productos diferenciados sin compras múltiples, encuentro que en el modelo con compras múltiples no existen incentivos para que las firmas se fusionen. Esto se debe a que los consumidores obtienen utilidad al adquirir ambos bienes, lo que reduce significativamente la competencia entre las empresas. Debido a los bajos niveles de competencia, las decisiones independientes de las firmas y sus decisiones conjuntas bajo una fusión presentan pocas diferencias, lo que minimiza los beneficios potenciales de la fusión y, en consecuencia, sus incentivos para llevarla a cabo.

Cuando se introduce la posibilidad de empaquetar sus productos, las firmas encuentran incentivos para llevar a cabo la fusión. Esto se debe a que el empaquetamiento permite capturar el excedente de los consumidores que tienen una mayor afinidad por uno de los bienes y que, de otro modo, no habrían adquirido el segundo bien. En otras palabras, el empaquetamiento permite a las empresas extraer el excedente de aquellos consumidores que, si los productos se ofrecieran por separado, solo habrían comprado uno de ellos.

En el caso del duopolio de Hotelling los precios suben, así como el bienestar social, aunque el excedente del consumidor se ve reducido. En el caso del oligopolio de Salop los precios de los productos vendidos de forma individual se incrementan, las firmas obtienen mayores beneficios, el consumidor se ve perjudicado y el bienestar social puede aumentar o disminuir. Esto es consistente con lo observado en la literatura.

El empaquetamiento es una estrategia comercial habitual que consiste en vender dos bienes distintos de manera conjunta por un precio menor al que podrían adquirirse ambos bienes por separado. Existe una amplia literatura que estudia los efectos del empaquetamiento. El primero en escribir al respecto fue Stigler (1963) en un artículo que muestra cómo la venta por paquetes podría aumentar el beneficio de las firmas cuando las valoraciones de los consumidores de dos bienes tenían una correlación negativa. Después Adams y Yellen (1976) introdujeron un marco gráfico bidimensional para analizar la venta por paquetes, de un monopolista que produce dos bienes, como un medio para la discriminación de precios.

Los análisis más formales de Schmalensee (1984), McAfee et al. (1989) y Salinger (1995) también se centraron en paquetes de dos bienes vendidos por un monopolista. Los primeros análisis de competencia duopolística se centraron en el problema de la compatibilidad (Matutes y Regibeau (1988, 1992), Nicholas Economides (1989, 1993)). Bakos y Brynjolfsson (1999) fueron los primeros en estudiar la estrategia de un monopolista de empaquetar una gran cantidad de bienes de información no relacionados. Bakos y Brynjolfsson (2000) analizan la competencia entre un gran empaquetador con n bienes y n firmas que venden un solo bien, así como entre dos grandes empaquetadores y extienden sus resultados a cualquier número de firmas empaquetadoras. En cuanto a los efectos del empaquetamiento sobre las fusiones algunos artículos destacados son Nalebuff (2002), O'Brien y Shaffer (2005), Choi (2008), y Granier y Podesta (2010). Ninguno de los artículos mencionados hasta ahora ha tomado en cuenta la posibilidad de compras múltiples (multi-hogar).

La literatura de multi-hogar o compras múltiples es relativamente reciente, Kim y Serfes (2006) son los primeros en proponer un nuevo modelo de ubicación donde los consumidores pueden realizar compras múltiples (de bienes diferenciados en el mismo mercado). En general, la literatura de empaquetamiento no toma en cuenta la posibilidad de multi-hogar, algunas excepciones son: Choi (2010) que estudia los efectos de la vinculación en la competencia del mercado y el bienestar social, enfatizando el papel de la compras múltiples en ambos lados del mercado. Armstrong (2013) amplía el modelo estándar de venta por paquetes para permitir que los productos sean sustitutos parciales y que los productos sean suministrados por vendedores independientes. Jeitschko, Jung y Kim (2017) estudian los acuerdos de *mercadeo conjunto* de empresas competidoras que discriminan precios entre los consumidores que compran a una sola empresa y los que compran a ambos competidores, y consideran dos tipos de mercadeo conjunto.

Choi (2010), aunque permite la compra múltiple entre plataformas diferenciadas horizontalmente, considera el empaquetamiento entre plataforma y proveedor de contenido, es decir, entre bienes complementarios y no entre los diferenciados horizontalmente. Armstrong (2013) y Jeitschko et al. (2017) serían los más cercanos a este artículo ya que estudian el efecto del empaquetamiento entre firmas diferenciadas horizontalmente cuando los consumidores pueden comprar de una o ambas firmas. A diferencia de estos dos trabajos, en donde se analiza un duopolio con firmas que toman sus decisiones independientemente, yo considero la fusión (integración horizontal), primero de 2 firmas en el modelo de diferenciación espacial de Hotelling y luego de 2 firmas vecinas en un oligopolio en el modelo de diferenciación espacial de Salop. Por último, cabe mencionar que el modelo de Salop hasta donde sé, solo ha sido usado en la literatura de empaquetamiento en Economides (1989), aunque no considera la posibilidad de las compras múltiples.

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 desarrollo el modelo de Hotelling con compras múltiples, donde dos firmas pueden crear un paquete con sus productos al fusionarse, obtengo el equilibrio del mercado e investigo las implicaciones sobre el bienestar. En la sección 3 desarrollo un modelo de Salop con compras múltiples, donde dos firmas vecinas pueden empaquetar sus productos al fusionarse, obtengo el equilibrio del mercado e investigo las implicaciones sobre el bienestar. En la sección 4 modifico los modelos vistos en las secciones anteriores para permitir la inversión. En la sección 5 doy las conclusiones finales.

1.2. Modelo de Hotelling

En esta sección estudio el efecto del empaquetamiento sobre los incentivos de fusión, precios, beneficios y bienestar en un duopolio. Las compras múltiples se dan entre bienes diferenciados horizontalmente y por tanto el modelo de Hotelling ha sido el principal caballo de batalla para estudiarlas. Primero desarrollaré los elementos principales del modelo de Hotelling con compras múltiples, después encontraré los equilibrios para el caso cuando las firmas son independientes, cuando se fusionan, y cuando se fusionan y pueden empaquetar sus productos. Finalmente compararé los precios y el bienestar para la fusión con y sin empaquetamiento.

Siguiendo el modelo de Hotelling, tenemos un segmento de recta de longitud d que representa el conjunto de variedades posibles del producto. En los extremos de dicho segmento se ubican dos firmas i y j, en 0 y d respectivamente. La utilidad de un consumidor cuya variedad preferida se ubica en $x \in [0, d]$ de consumir el bien i es

$$u_i(x; p_i) = v - tx - p_i, \tag{1.2.1}$$

y de consumir el bien j:

$$u_j(x; p_j) = v - t(d - x) - p_j, \tag{1.2.2}$$

donde v es la utilidad de consumir el bien ideal, t es el parametro de desutilidad por la distancia al bien ideal, p_i es el precio del bien i y p_j es el precio del bien j. Por simplicidad, de ahora en adelante omitiré el argumento de las funciones de utilidad.

Siguiendo el principio de utilidad marginal de Kim y Serfes (2006), la utilidad de consumir el bien i marginal (adicional) al bien j esta dada por:

$$u_{ji} = \theta v - tx - p_i. \tag{1.2.3}$$

y la utilidad de consumir el bien j marginal al bien i es:

$$u_{ij} = \theta v - t(d - x) - p_j. \tag{1.2.4}$$

La valoración del bien se ve reducida a una proporción θ que representa las características que valora el consumidor del bien i y que no posee el bien j. Este modelo es idéntico al empleado por Anderson et al. (2017) salvo porque considero que el factor $\theta \in [0, 1]$, que reduce la valoración del segundo bien, afecta a todos los consumidores por igual en lugar de suponer que afecta en función de la diferencia entre la ubicación del bien y la del consumidor, el razonamiento detrás de este supuesto es que la valoración del conjunto de características comunes de los bienes, por el hecho de ser comunes, debe ser independiente de la ubicación de los bienes con respecto a la ubicación del consumidor. Ambos supuestos son válidos y, que uno sea más razonable que el otro, dependerá de las características de los consumidores en cada mercado.

La utilidad de consumir ambos bienes es:

$$u_{i+j}(p_i, p_j) = u_i + u_{ij} = u_j + u_{ji} = v(1 + \theta) - td - p_i - p_j. \tag{1.2.5}$$

Vemos que la utilidad de consumir ambos bienes es independiente de la posición (x) de la variedad preferida del consumidor, esto es consistente con la tradición en la literatura de que el empaquetamiento reduce la heterogeneidad de los consumidores. Una ventaja de modelar la reducción de la valoración de consumir el bien adicional de la forma en que lo he hecho, es que no importa el orden en el que se consuman los bienes la utilidad de consumir ambos es la misma, lo cual puede ser más realista que pensar que la utilidad cambia con el orden de consumo como ocurre en el modelo de Anderson et al. (2017). En la figura 1.1 se muestran las gráficas de las funciones de utilidad de consumir un bien, consumir un bien marginal al otro y consumir ambos bienes.

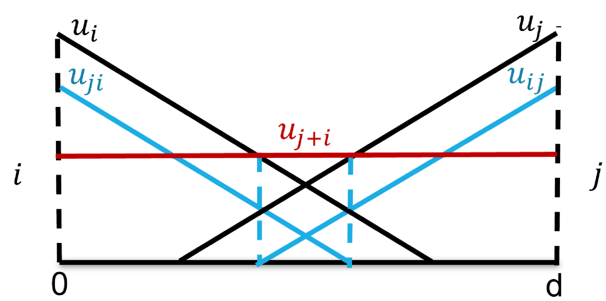

Figura 1.1: Utilidad de consumir un bien (negro), un bien adicional al otro (azul) y ambos bienes (rojo).

Hacemos $u_i = u_{i+j}$ para encontrar al consumidor indiferente entre comprar solo el bien i y comprar ambos bienes, o lo que es lo mismo, el consumidor cuya utilidad del bien j marginal al i es cero $u_{ij} = 0$.

$$\begin{aligned} u_{ij} &= 0, \\ \theta v - t(d-x) - p_j &= 0, \\ \theta v - td + tx - p_j &= 0, \\ x &= \frac{p_j - \theta v + td}{t}. \end{aligned}$$

Entonces el consumidor indiferente entre consumir solo i y consumir ambos bienes es:

$$x_{ij} = d - \frac{\theta v - p_j}{t}. \tag{1.2.6}$$

Análogamente el consumidor indiferente entre consumir solo j y consumir ambos bienes es:

$$x_{ji} = \frac{\theta v - p_i}{t}. \tag{1.2.7}$$

Los consumidores que se encuentren a la izquierda de x_{ij} prefieren consumir solo i, los que se encuentran entre x_{ij} y x_{ji} prefieren consumir ambos bienes (multi-hogar) y los que se encuentran a la derecha de x_{ji} prefieren consumir solo j como se muestra en la figura 1.2.

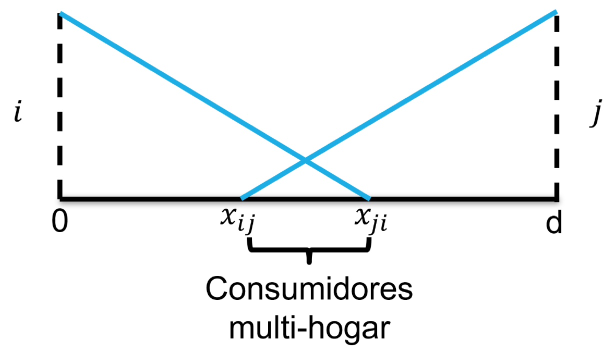

Figura 1.2: Consumidores multi-hogar.

Sean $x_i^e = x_{ij}$ la cantidad de consumidores que compran exclusivamente el bien i, $x_j^e = d - x_{ji}$ la cantidad de consumidores que compran exclusivamente el bien j y $x^{mh} = x_{ji} - x_{ij}$ la cantidad de consumidores que compran ambos bienes (multi-hogar). Los tipos de consumidores se muestran en la figura 1.3. Además definimos la demanda de i, D_i, como la suma de los consumidores exclusivos de i más los consumidores multi-hogar.

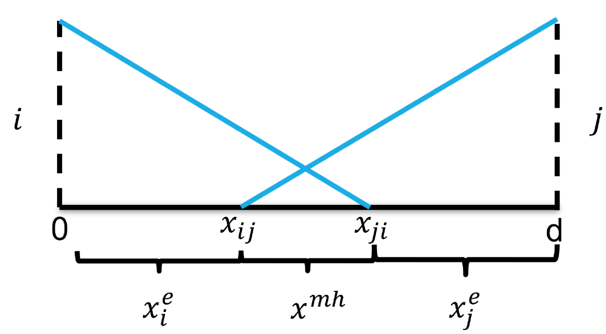

Figura 1.3: Consumidores multi-hogar y exclusivos.

Para que nuestro modelo represente correctamente la competencia entre 2 firmas, con productos diferenciados en un mercado donde los consumidores pueden comprar más de un bien, supondremos que $v, t, d \geq 0$, $\theta \in [0, 1]$ y además:

a. Los precios son no negativos ($0 \leq \{p_i, p_j\}$).

b. Existen consumidores multi-hogar ($0 < x^{mh}$).

c. La demanda es menor igual que el numero de consumidores en el mercado ($\{D_i, D_j\} \leq d$).

1.2.1. Duopolio

Primero encontremos el equilibrio cuando las firmas son independientes. Asumo que no hay costos marginales dado que trabajamos con bienes de información. Cuando se permite a los consumidores hacer compras múltiples cada firma actúa como si fuera un monopolio. Entonces el beneficio de la firma está dado por:

$$\Pi_i = p_i D_i. \tag{1.2.8}$$

Obtenemos la demanda de i despejando x de la función de utilidad marginal de i cuando esta es igual a cero

$$D_i = \frac{v\theta - p_i}{t}. \tag{1.2.9}$$

Análogamente, la demanda de j es

$$D_j = \frac{v\theta - p_j}{t}. \tag{1.2.10}$$

Finalmente, resolvemos el problema de maximización para i

$$\max_{p_i} \Pi_i = \max_{p_i} \left\{ p_i \cdot \frac{v\theta - p_i}{t} \right\}, \tag{1.2.11}$$

los precios de equilibrio son

$$p_i^* = \frac{v\theta}{2} = p_j^*. \tag{1.2.12}$$

En la sección A.1.1 del apéndice muestro que el equilibrio cumple con todos los supuestos para el conjunto de parámetros no negativos que satisface

$$\frac{v\theta}{dt} \in [1, 2]. \tag{1.2.13}$$

Entonces:

$$D_i^* = D_j^* = \frac{v\theta}{2t}, \tag{1.2.14}$$

$$\Pi_i^* = \Pi_j^* = \frac{(v\theta)^2}{4t}, \tag{1.2.15}$$

$$x_i^e = x_j^e = d - \frac{v\theta}{2t}, \text{ y} \tag{1.2.16}$$

$$x^{mh} = x_j^e = \frac{v\theta}{t} - d. \tag{1.2.17}$$

Bienestar Social

Ahora calculemos el excedente del consumidor (EC*), el excedente del productor (EP*) y el bienestar social (BS*), todos en el óptimo.

El excedente del consumidor esta compuesto por la suma de las utilidades de todos los que consumen exclusivamente el bien i, los que consumen ambos bienes y los que consumen exclusivamente el bien j.

$$\begin{aligned} EC^* &= \int_0^{x_{ij}^*} u_i(x; p_i^*)dx + u_{i+j}(p_i^*, p_j^*)[x_{ji}^* - x_{ij}^*] + \int_{x_{ji}^*}^{d} u_j(x; p_j^*)dx \\ &= \int_0^{d-\frac{v\theta}{2t}} \left(v - tx - \frac{v\theta}{2}\right) dx + [v(1+\theta) - dt - v\theta]\left[\frac{v\theta}{t} - d\right] \\ &+ \int_{\frac{v\theta}{2t}}^{d} \left(v - t(d-x) - \frac{v\theta}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Resolvemos con *Wolfram Mathematica* y obtenemos

$$EC^* = \frac{v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta). \tag{1.2.18}$$

Sabemos que el excedente del productor es igual a los beneficios de la industria, entonces

$$EP^* = \frac{(v\theta)^2}{2t}, \tag{1.2.19}$$

por lo tanto el bienestar social es

$$BS^* = EC^* + EP^* = \frac{3v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta). \tag{1.2.20}$$

1.2.2. Fusión

Ahora obtengamos el equilibrio cuando las dos firmas se fusionan. Para ello resolvemos el problema de maximización

$$\max_{p_i,p_j} \Pi_{i+j} = \max_{p_i,p_j} \left\{ \Pi_i + \Pi_j \right\}. \tag{1.2.21}$$

Como vimos antes, al considerar compras múltiples y un factor de descuento θ exógeno, la demanda de un producto solo depende de su propio precio, por lo que las firmas actúan como monopolios. Entonces, maximizar el beneficio conjunto es equivalente a maximizar los beneficios de cada firma de forma independiente; por lo tanto, la fusión no incrementa los beneficios y las firmas no tienen incentivos a fusionarse.

Las variables no cambian su valor en el equilibrio con respecto al caso sin fusión. Cuando sea necesario distinguirlas, nos referiremos a las variables del caso con fusión sin empaquetamiento con el superíndice m.

1.2.3. Empaquetamiento

Supongamos que la firma elige un mismo precio para cada bien vendido de forma independiente $p_i = p_j = p_s$ donde p_s es el precio individual (*single*), este supuesto no es crucial dada la simetría del problema, por lo que no afecta a los resultados en el equilibrio, pero es útil para facilitar los cálculos. Sea p_b el precio de comprar los dos bienes en paquete (*bundle*). Entonces:

$$u_i = v - tx - p_s, \tag{1.2.22}$$

$$u_j = v - t(d-x) - p_s, \tag{1.2.23}$$

$$u_{ji} = \theta v - tx - p_b + p_s, \tag{1.2.24}$$

$$u_{ij} = \theta v - t(d-x) - p_b + p_s, \text{ y} \tag{1.2.25}$$

$$u_{i+j} = v(1+\theta) - td - p_b. \tag{1.2.26}$$

La función de beneficio es el precio del bien individual por la cantidad de consumidores que solo compran un bien más el precio del paquete por la cantidad de consumidores que compran ambos bienes

$$\Pi^b = p_s(x_i^e + x_j^e) + p_b(x^{mh}). \tag{1.2.27}$$

Para que nuestro modelo represente correctamente lo que queremos supondremos que $v, t, d > 0$, $\theta \in [0, 1]$ y además:

1. El precio del paquete no es menor que el precio de un solo bien ($p_s \leq p_b$).
2. El precio del bien individual es no negativo ($0 \leq p_s$).
3. Existen consumidores multi-hogar ($0 < x^{mh}$).
4. La demanda es menor igual que el numero de consumidores en el mercado ($\{D_i, D_j\} \leq d$).
5. El precio del paquete no es mayor que la utilidad de consumirlo ($p_b \leq v(1+\theta) - dt$).

El problema $\text{máx}_{p_s,p_b} \Pi^b$ no tiene soluciones interiores y la evaluación mediante un programa informático es muy compleja, por lo que usaré un análisis gráfico para restringir los posibles equilibrios. El análisis se puede encontrar en la sección A.1.2 del apéndice.

Encuentro que los precios de equilibrio son:

$$(p_b^*, p_s^*) = \begin{cases} (v, v) & \text{si} \quad p_s \leq v \\ (v(1+\theta) - td, p_s \in (v, v(1+\theta) - td]) & \text{si} \quad p_s > v \end{cases} \tag{1.2.28}$$

Note que, si $p_s^* \leq v$, el precio de los bienes en solitario es el mismo que el del paquete. Por tanto comprar el paquete es una estrategia débilmente dominante (en particular solo los consumidores en los extremos serán indistintos). Al empaquetar los productos se reduce la heterogeneidad en las preferencias de los consumidores, lo que permite a la firma quedarse con todo el excedente escogiendo un precio v, tal que la utilidad de los consumidores sea cero, que es el mínimo valor al cual todos comprarán el paquete.

Si $p_s^* > v$, como el precio de un solo bien es mayor que su valoración, no habrá consumidores exclusivos y todos comprarán el paquete.

En cualquier caso todos los consumidores compran el paquete, entonces

$$D^{b*} = x^{bmh*} = d, \tag{1.2.29}$$

por tanto la demanda de consumidores exclusivos del bien i y j es cero

$$x_i^{be*} = x_j^{be*} = 0. \tag{1.2.30}$$

Como la utilidad de todos los consumidores es cero entonces

$$EC^{b*} = 0. \tag{1.2.31}$$

El beneficio del empaquetamiento es igual al excedente del productor y éste igual al bienestar social por ser el excedente del consumidor cero:

$$BS^{b*} = EP^{b*} = \Pi^{b*} = [v(1+\theta) - dt]d \tag{1.2.32}$$

Proposición 1.1 *En un mercado con 2 productos diferenciados horizontalmente, ubicados en los extremos de un intervalo de longitud d, cada uno vendido por una firma distinta y donde los consumidores pueden comprar ambos productos, si las firmas se fusionan y pueden vender ambos bienes en un paquete, entonces su estrategia de equilibrio es vender los bienes solo en paquete y no de manera independiente.*

Los efectos, sobre las principales variables económicas, de fusionarse y empaquetar los bienes con respecto a no empaquetarlos quedan resumidos en la proposición 1.2. En la sección A.1.4 del apéndice se puede encontrar la prueba.

Proposición 1.2 *En el modelo de dupolio de Hotelling, cuando las compras múltiples son permitidas y se cumplen $v, t, d > 0$, $\theta \in [0, 1]$ y los supuestos 1, 2, 3, 4 y 5. Si las firmas se fusionan y además de por separado también ofrecen sus bienes en paquete entonces, respecto a si solo los vendieran por separado:*

- *El precio de comprar un solo bien es **mayor**.*
- *El precio de comprar ambos bienes es **mayor igual**.*
- *La demanda total de ambos bienes es **mayor**.*
- *El beneficio es **mayor**.*
- *La demanda de consumidores exclusivos es **menor**.*
- *La demanda de consumidores multi-hogar es **mayor**.*
- *El excedente del consumidor es **menor**.*
- *El excedente del productor es **mayor**.*
- *El Bienestar social es **mayor**.*

Observemos que la posibilidad de empaquetar aumenta el beneficio de la firma fusionada lo que genera incentivos para la fusión que previamente no existían, esto se debe a que la heterogeneidad de las preferencias por el paquete es menor que la de cada bien por separado, aumentado la capacidad de extraer el excedente del consumidor.

1.3. Modelo de Salop

El objetivo de esta sección es ver cómo afecta la competencia a los incentivos de fusión derivados del empaquetamiento y sus consecuencias sobre los precios, beneficios y bienestar social. En la literatura de empaquetamiento abundan los modelos de duopolio, con dos firmas que venden dos productos, donde los consumidores se distribuyen sobre un cuadrado y los modelos de oligopolio, donde las valoraciones de un consumidor para los productos de una empresa son sorteos aleatorios de alguna distribución, en los que todas las firmas compiten entre sí. Una ventaja de utilizar un modelo de oligopolio espacial como el de Salop es que reconoce que las firmas pueden tener cierto poder monopólico sobre los consumidores que sean más cercanos a su producto. Si bien el modelo está lejos de la complejidad de la realidad, captura la noción de que las firmas en un mercado con bienes diferenciados compiten con aquellas cuyos productos son más cercanos.

Sea una circunferencia donde cada punto representa una variedad de un producto, los consumidores están distribuidos uniformemente sobre la circunferencia y hay n firmas cuyos productos se ubican en puntos separados una distancia d de sus vecinos. En la figura 1.4 se representa el modelo de Salop con 3 firmas.

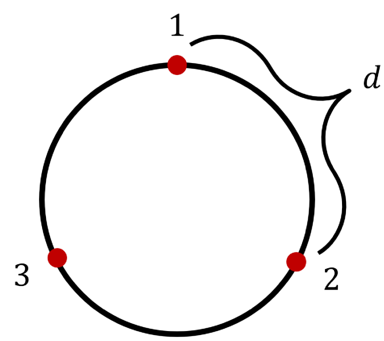

Figura 1.4: Modelo de Salop con n = 3 firmas

Sean h, i y j tres firmas consecutivas de modo que h es el vecino más cercano de i por la izquierda y j es el vecino más cercano de i por la derecha, entonces las funciones de utilidad son como sigue

$$u_{ih} = v\theta - tx - p_h, \tag{1.3.1}$$

$$u_{hi} = v\theta - t(d-x) - p_i, \tag{1.3.2}$$

$$u_{ji} = v\theta - tx - p_i, \tag{1.3.3}$$

$$u_{ij} = v\theta - t(d-x) - p_j. \tag{1.3.4}$$

Entonces los consumidores indiferentes son

$$x_{hi} = d - \frac{v\theta - p_i}{t}, \tag{1.3.5}$$

$$x_{ih} = \frac{v\theta - p_h}{t}, \tag{1.3.6}$$

$$x_{ij} = d - \frac{v\theta - p_j}{t}, \tag{1.3.7}$$

$$x_{ji} = \frac{v\theta - p_i}{t}. \tag{1.3.8}$$

La demanda por la izquierda (D_i^L), por la derecha (D_i^R) y total de i es

$$D_i^L = D_i^R = \frac{v\theta - p_i}{t}, \tag{1.3.9}$$

$$D_i = 2\left(\frac{v\theta - p_i}{t}\right). \tag{1.3.10}$$

La cantidad de consumidores exclusivos de i por la izquierda (x_i^{Le}), por la derecha (x_i^{Re}) y total es

$$x_i^{Le} = d - \frac{v\theta - p_h}{t}, \tag{1.3.11}$$

$$x_i^{Re} = d - \frac{v\theta - p_j}{t}, \tag{1.3.12}$$

$$x_i^e = 2d - \frac{2v\theta - p_h - p_j}{t}. \tag{1.3.13}$$

La cantidad de consumidores multi-hogar de i con h, con j y en total es

$$x_{hi}^{mh} = x_{ih} - x_{hi} = \frac{2v\theta - p_h - p_i}{t} - d. \tag{1.3.14}$$

$$x_{ij}^{mh} = x_{ji} - x_{ij} = \frac{2v\theta - p_i - p_j}{t} - d. \tag{1.3.15}$$

$$x_i^{mh} = \frac{4v\theta - 2p_i - p_h - p_j}{t} - 2d. \tag{1.3.16}$$

1.3.1. Oligopolio, n $\geq$ 3

Primero consideraremos el caso en el que hay $n \geq 3$ firmas que compiten entre sí. En este contexto la función de beneficios de i es

$$\Pi_i = p_i \cdot D_i = p_i \cdot 2\left(\frac{v\theta - p_i}{t}\right), \tag{1.3.17}$$

resolvemos el problema de maximización:

$$\max_{p_i} \Pi_i = \max_{p_i} \left\{p_i \cdot 2\left(\frac{v\theta - p_i}{t}\right)\right\}. \tag{1.3.18}$$

Para que nuestro modelo represente correctamente lo que queremos supondremos que $v, t, d \geq 0$, $\theta \in [0, 1]$ y además:

a. Los precios son no negativos ($0 \leq p_i$).

b. Existen consumidores multi-hogar ($0 < x^{mh}$).

c'. Existen consumidores exclusivos ($0 < x^e$).

Entonces el precio de equilibrio es

$$p_i^* = \frac{v\theta}{2}, \tag{1.3.19}$$

este equilibrio es el mismo que encontramos para el caso de Hotelling. Los supuestos 1 y 2 son idénticos a los del caso de Hotelling y el 3 es equivalente excepto por que la desigualdad es estricta en este caso, por tanto el equilibrio cumple los supuestos para todos los parámetros no negativos que satisfacen:

$$\frac{v\theta}{dt} \in [1, 2).$$

Entonces las cantidades y beneficio de equilibrio son

$$D_i^* = \frac{v\theta}{t}, \tag{1.3.20}$$

$$x_i^{e*} = \frac{2dt - v\theta}{t}, \tag{1.3.21}$$

$$x_i^{mh*} = 2 \cdot \frac{v\theta - dt}{t}, \text{ y} \tag{1.3.22}$$

$$\Pi_i^* = \frac{(v\theta)^2}{2t}. \tag{1.3.23}$$

Bienestar Social

Para un número fijo $n \geq 3$ de firmas, la distancia entre cada firma es d así que calcularemos el excedente de los consumidores en este intervalo d y luego lo multiplicaremos por el número de intervalos. El excedente del consumidor en un intervalo es lo que calculamos en la sección 2 para el caso del duopolio.

Entonces el excedente del consumidor es

$$EC^* = n\left(\frac{v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta)\right), \tag{1.3.24}$$

Hacemos lo mismo para el excedente del productor

$$EP^* = n\frac{(v\theta)^2}{2t}, \tag{1.3.25}$$

Entonces el bienestar social es

$$BS^* = n\left(\frac{3v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta)\right). \tag{1.3.26}$$

1.3.2. Fusión

Ahora analicemos qué pasa si se fusionan dos firmas adyacentes. Sean h, i, j y k firmas consecutivas de tal forma que h esta a la izquierda de i, i a la izquierda de j y j a la izquierda de k, y supongamos que la firma i y j se fusionan. Además definimos *mhe* como los consumidores multi-hogar exclusivos, es decir, aquellos que compran ambos productos de las firmas fusionadas y *mhr* los consumidores multi-hogar rivales, aquellos que compran un producto de alguna de las dos firmas fusionadas y otro de alguna de las firmas vecinas, como se muestra en la figura 1.5.

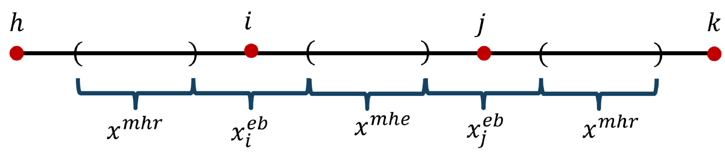

Figura 1.5: Firmas i y j fusionadas

Como vimos antes, al considerar compras múltiples y un factor de descuento θ exógeno, la demanda de un producto solo depende de su propio precio, las firmas actúan como monopolios, por lo tanto el valor de las variables en equilibrio no cambia antes y después de la fusión.

Los precios, de equilibrio, de los bienes producidos por las firmas después de la fusión:

$$p_i^{m*} = p_j^{m*} = \frac{v\theta}{2}. \tag{1.3.27}$$

Los cantidad de consumidores exclusivos, de equilibrio, de los bienes producidos por las firmas después de la fusión:

$$x_i^{me*} = x_j^{me*} = \frac{2dt - v\theta}{t}. \tag{1.3.28}$$

Los cantidad de consumidores multi-hogar exclusivos, de equilibrio, de los bienes producidos por las firmas después de la fusión:

$$x_m^{mhe*} = \frac{v\theta - dt}{t}. \tag{1.3.29}$$

Los cantidad de consumidores multi-hogar rivales, de equilibrio, de los bienes producidos por las firmas después de la fusión:

$$x_m^{mhr*} = 2\frac{v\theta - dt}{t}. \tag{1.3.30}$$

Los beneficios, de equilibrio, de la firma producto de la fusión:

$$\Pi^{m*} = \frac{(v\theta)^2}{t}. \tag{1.3.31}$$

La demanda total de bienes, de equilibrio, después de la fusión:

$$D^{m*} = x_i^{me*} + x_j^{me*} + x_m^{mhr*} + 2x_m^{mhe*} = \frac{2v\theta}{t}. \tag{1.3.32}$$

El excedente del consumidor, de equilibrio, después de la fusión:

$$EC^{m*} = n\left(\frac{v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta)\right). \tag{1.3.33}$$

El excedente del productor, de equilibrio, después de la fusión:

$$EP^{m*} = n\frac{(v\theta)^2}{2t}. \tag{1.3.34}$$

El bienestar social, de equilibrio, después de la fusión:

$$BS^{m*} = n\left(\frac{3v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta)\right). \tag{1.3.35}$$

1.3.3. Empaquetamiento

Ahora supongamos que las firmas fusionadas pueden empaquetar sus bienes y venderlos juntos por un precio p_b, además de vender por separado cada bien a un precio p_s.

Sea u_{ji}^b la utilidad de consumir i marginal a j cuando hay empaquetamiento, entonces

$$u_{ji}^b = v\theta - tx - p_b + p_s. \tag{1.3.36}$$

Sea u_{ij}^b la utilidad de consumir j marginal a i cuando hay empaquetamiento, entonces

$$u_{ij}^b = v\theta - t(d-x) - p_b + p_s. \tag{1.3.37}$$

Sea x^b_{ji} el consumidor indiferente entre consumir i y el paquete, entonces

$$x^b_{ji} = \frac{v\theta - p_b + p_s}{t}. \tag{1.3.38}$$

Sea x^b_{ij} el consumidor indiferente entre consumir j y el paquete, entonces

$$x^b_{ij} = d - \frac{v\theta - p_b + p_s}{t}. \tag{1.3.39}$$

Sea x_b^{mhe} la cantidad de consumidores multi-hogar exclusivos cuando hay empaquetamiento, entonces

$$x_b^{mhe} = 2\left(\frac{v\theta - p_b + p_s}{t}\right) - d. \tag{1.3.40}$$

Sea x_i^{be} la cantidad de consumidores exclusivos de i cuando hay empaquetamiento, entonces

$$x_i^{be} = x^b_{ij} + x_i^{Le} = 2d - \frac{2v\theta - p_b + p_s - p_h}{t}. \tag{1.3.41}$$

Sea x_j^{be} la cantidad de consumidores exclusivos de j cuando hay empaquetamiento, entonces

$$x_j^{be} = d - x^b_{ji} + x_j^{Re} = 2d - \frac{2v\theta - p_b + p_s - p_k}{t}. \tag{1.3.42}$$

Sea x_{ij}^{be} el total de consumidores exclusivos de i o j cuando hay empaquetamiento, entonces

$$x_{ij}^{be} = 4d - \frac{4v\theta - 2p_b + 2p_s - p_h - p_k}{t}. \tag{1.3.43}$$

Sea x_b^{mhr} la cantidad de consumidores multi-hogar rivales cuando hay empaquetamiento, entonces

$$x_b^{mhr} = \frac{4v\theta - p_h - 2p_s - p_k}{t} - 2d. \tag{1.3.44}$$

Sea Π^b La función de beneficios cuando hay empaquetamiento, entonces

$$\Pi^b = p_s(x_i^{be} + x_j^{be} + x_{ij}^{mhr}) + p_b \cdot x_{ij}^{mhe}. \tag{1.3.45}$$

El problema de maximización es entonces

$$\max_{p_s, p_b} \Pi^b. \tag{1.3.46}$$

Para que nuestro modelo represente correctamente lo que queremos supondremos que $v, t, d > 0$, $\theta \in [0, 1]$ y además:

1. El precio del bien individual es no negativo ($0 \leq p_s$).

2. El precio del paquete no es menor que el precio de un solo bien ($p_s \leq p_b$).

3. El precio del paquete no es mayor que la utilidad de consumirlo ($p_b \leq v(1+\theta) - dt$).

4. Existen consumidores multi-hogar ($0 < x^{mh}$).

5'. Existen consumidores exclusivos ($0 < x^e$).

Resolvemos el problema de maximización usando *Wolfram Mathematica* y obtenemos que los precios de equilibrio son:

$$p_s^* = \frac{2v\theta + dt}{4}, \tag{1.3.47}$$

$$p_b^* = v\theta. \tag{1.3.48}$$

En la sección A.1.5 del apéndice, demuestro que en el equilibrio se cumplen los supuestos para todos los parámetros no negativos que satisfacen

$$\frac{1}{2} < \frac{v\theta}{td} < \frac{3}{2} \text{ y } 1 \leq \frac{v}{td}, \tag{1.3.49}$$

por ejemplo, los parámetros: $v = 2, \theta = \frac{1}{2}, d = 1\ y\ t = 1$ satisfacen las condiciones.

Como la demanda del resto de firmas solo depende de sus propios precios entonces sus precios de equilibrio no cambian

$$p_h^* = p_k^* = \frac{v\theta}{2}, \tag{1.3.50}$$

Entonces

$$x_i^{be*} = x_j^{be*} = \frac{7dt - 4v\theta}{4t}, \tag{1.3.51}$$

$$x_b^{mhe*} = \frac{2v\theta - dt}{2t}, \tag{1.3.52}$$

$$x_b^{mhr*} = \frac{4v\theta - 5dt}{2t}. \tag{1.3.53}$$

Note que la cantidad de consumidores multi-hogar rivales es negativa si $\frac{v\theta}{td} < \frac{5}{4}$. Esto significa que $x_{ih} < x_{hi}$ lo que implica que no habrá usuarios multi-hogar rivales. Nos mantendremos en el caso en que existen consumidores multi-hogar rivales.

$$\Pi^{b*} = \frac{4v^2\theta^2 + d^2t^2}{4t}. \tag{1.3.54}$$

$$D^{b*} = x_i^{be*} + x_j^{be*} + x_{ij}^{mhr*} + 2 \cdot x_{ij}^{mhe*} = \frac{2v\theta}{t}. \tag{1.3.55}$$

Bienestar Social

Los únicos consumidores que se ven afectados por el empaquetamiento son los que se encuentran entre las firmas fusionadas y entre las firmas fusionadas y sus vecinos. En este caso, los que se encuentran entre la firma h y la k. Para el resto de consumidores su excedente va a permanecer igual. Entonces calculamos el excedente del consumidor de equilibrio en este intervalo

$$\begin{aligned} EC_{h-k}^b = & \int_0^{x_{hi}^*} u_h(x;p_h^*)dx + u_{h+i}(p_h^*,p_s^*)[x_{ih}^* - x_{hi}^*] + \int_{x_{ih}^*}^d u_i(x;p_s^*)dx \\ & + \int_0^{x_{ij}^*} u_i(x;p_s^*)dx + u_b(p_b^*)[x_{ji}^* - x_{ij}^*] + \int_{x_{ji}^*}^d u_j(x;p_s^*)dx \\ & + \int_0^{x_{jk}^*} u_j(x;p_s^*)dx + u_{j+k}(p_s^*,p_k^*)[x_{kj}^* - x_{jk}^*] + \int_{x_{kj}^*}^d u_k(x;p_k^*)dx, \end{aligned}$$

resolvemos con *Wolfram Mathematica*

$$EC_{h-k}^b = \frac{3(2v^2\theta^2 - d^2t^2)}{8t} + 3dv(1-\theta). \tag{1.3.56}$$

El excedente del consumidor es el excedente en el intervalo de h a k (que equivale a 3 intervalos de tamaño d) más el excedente en el resto de la circunferencia

$$EC^b = EC^b_{h-k} + EC^m_{n-3} = \frac{3(2v^2\theta^2 - d^2t^2)}{8t} + 3dv(1-\theta) + (n-3)\left(\frac{v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta)\right). \quad (1.3.57)$$

El excedente del productor es igual a la suma de los beneficios de las firmas que hacen el empaquetamiento más los beneficios del resto de firmas el cual no cambia

$$EP^b = EP^b_{i+j} + EP^m_{n-2} = \frac{4v^2\theta^2 + d^2t^2}{4t} + (n-2)\frac{(v\theta)^2}{2t} = \frac{(2+n)v^2\theta^2 - d^2t^2}{2t}, \quad (1.3.58)$$

Por tanto el bienestar social es

$$BS^b = \frac{(4+3n)v^2\theta^2}{4t} - \frac{7t^2d^2}{8t} + nvd(1-\theta). \quad (1.3.59)$$

Los efectos, sobre las principales variables económicas, de fusionarse y empaquetar los bienes con respecto a no empaquetarlos quedan resumidos en la proposición 1.3. En la sección A.1.6 del apéndice se puede encontrar la prueba.

Proposición 1.3 *En el modelo de Salop, cuando las compras múltiples son permitidas y se cumplen* $v, t, d > 0$, $\theta \in [0, 1]$ *y los supuestos 1, 2, 3, 4 y 5'. Si las firmas se fusionan y ofrecen sus bienes tanto por separado como en paquete entonces,*

- *El precio de comprar un solo bien es* ***mayor****.*
- *El precio de comprar ambos bienes es* ***igual****.*
- *La demanda total de ambos bienes es* ***igual****.*
- *El beneficio es* ***mayor****.*
- *La demanda de consumidores exclusivos es* ***menor****.*
- *La demanda de consumidores multi-hogar es* ***mayor****.*

- *La demanda de consumidores multi-hogar rivales es **menor**.*

- *El excedente del consumidor es **menor** cuando se empaqueta.*

- *El excedente del productor es **mayor**.*

- *El Bienestar social puede ser **mayor o menor**.*

respecto a si solo se vendieran por separado.

La firma empaquetadora aumenta los precios de los bienes al venderlos por separado pero mantiene el mismo precio de comprarlos juntos que tendría si no pudiera empaquetar. El aumento de precio de los bienes por separado hace que sea menos atractivo comprarlos junto con algún bien rival, lo cual se observa en la reducción de consumidores multi-hogar rivales. Esta estrategia incentiva a un grupo de los que previamente eran consumidores exclusivos a comprar ambos artículos en paquete, esto lo vemos en la reducción de consumidores exclusivos y el aumento de consumidores multi-hogar exclusivos.

1.4. Inversión

Ahora modificaré el modelo para que permita a las firmas decidir su nivel de inversión, el cual tendrá un costo, y estudiaré el efecto del empaquetamiento sobre la inversión y como cambia de un duopólio a un oligopólio. El nivel de inversión determina la calidad del producto por lo que un mayor nivel de inversión incrementa la valoración del bien. Propondremos entonces la siguiente función de utilidad marginal

$$u_{ji} = v\theta k I_i^{\alpha} - tx - p_i, \tag{1.4.1}$$

con $\alpha > 0$ para que la utilidad sea una función creciente en la inversión. Expresaremos la inversión I en unidades monetarias, por lo tanto, el costo de invertir I es I ($C(I) = I$).

1.4.1. Hotelling

La función de beneficios es:

$$\Pi_i = p_i D_i - I_i. \tag{1.4.2}$$

Consideremos un juego de dos etapas. En la primera etapa las firmas escogen su nivel de inversión y en la segunda sus precios. Entonces podemos tomar las funciones de beneficio óptimas obtenidas en las secciones anteriores (incorporando la inversión y sustituyendo v por vkI^α) y resolver para el nivel óptimo de inversión.

$$\Pi_i^m(p_i^*) = \frac{v^2\theta^2k^2I_i^{2\alpha}}{2t} - 2I_i, \tag{1.4.3}$$

usando la condición de primer orden obtenemos

$$I_i^{m*} = \left(\frac{2t}{\alpha v^2\theta^2k^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \text{ con } 0 < \alpha \neq \frac{1}{2}. \tag{1.4.4}$$

Para el caso del empaquetamiento la función de beneficios es

$$\Pi^b(p_s^*, p_b^*) = [vkI_s^\alpha(1+\theta) - dt]d - 2I_s, \tag{1.4.5}$$

de donde obtenemos

$$I_s^{b*} = \left(\frac{2}{\alpha vd(1+\theta)k}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ con } 0 < \alpha \neq 1. \tag{1.4.6}$$

Comparar la inversión para un valor cualquiera de α puede ser complicado por lo que utilizaré un valor particular a modo de ejemplo. Para comparar los valores es necesario que sea bajo un conjunto de parámetros común que satisfaga las condiciones encontradas en las secciones anteriores, por ejemplo, $\alpha = 2$. En este caso, la inversión disminuye con el empaquetamiento. La demostración se encuentra en la sección A.1.7 del apéndice.

1.4.2. Salop

Consideraremos el mismo juego de dos etapas que en el caso de Hotelling. Entonces, la función de beneficio evaluada en el precio óptimo es:

$$\Pi_i^{m*}(p_i^*) = \frac{v^2\theta^2k^2I_i^{2\alpha}}{t} - 2I_i, \tag{1.4.7}$$

de donde obtenemos

$$I_i^* = \left(\frac{t}{\alpha v^2\theta^2 k^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}}. \tag{1.4.8}$$

En el caso del empaquetamiento tenemos la función de beneficios:

$$\Pi^{b*} = \frac{4v^2\theta^2k^2I_i^{2\alpha} + d^2t^2}{4t} - 2I_s, \tag{1.4.9}$$

de donde obtenemos

$$I_s^* = \left(\frac{t}{\alpha v^2\theta^2 k^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}}, \tag{1.4.10}$$

observemos que para el caso de Salop el empaquetamiento no cambia el nivel óptimo de inversión (para todo α).

Proposición 1.4 *Cuando las firmas fusionadas empaquetan sus productos el nivel óptimo de inversión, respecto a el modelo sin empaquetamiento,*

- *Cambia en el modelo duopolístico de Hotelling con compras múltiples,*
- *No cambia en el modelo oligopolístico de Salop con compras múltiples.*

Una posible explicación es que, en el primer caso, las firmas ajustan su inversión bajo la premisa de que todos los consumidores adquieren el paquete, lo que hace que el nivel óptimo de inversión cambie. En el segundo caso, las firmas cuentan con un grupo de consumidores cautivos que compran el paquete, pero aún enfrentan competencia lateral por otros consumidores. Dado que el grupo cautivo está asegurado, la decisión sobre el nivel óptimo de inversión ya no dependerá de este grupo, sino solo de la competencia lateral, que sigue siendo la misma que antes del empaquetamiento, lo que implica que el nivel óptimo de inversión no cambiará.

1.5. Conclusiones

En este artículo hemos analizado el efecto de las fusiones entre firmas diferenciadas horizontalmente cuando estas pueden empaquetar sus productos y los consumidores pueden adquirir más de un producto. Un marco que permanecía hasta ahora inexplorado en la literatura sobre empaquetamiento.

Encontramos que en mercados con compras múltiples donde las firmas no tienen incentivos a fusionarse debido a que se comportan como cuasimonopolistas, el empaquetamiento genera incentivos para la fusión, esto ocurre por el efecto de reducción de la heterogeneidad de los consumidores y la apropiación de su excedente.

En ambos modelos encontramos que el excedente del productor aumenta y el del consumidor se reduce. En el caso del modelo de Salop las firmas fusionadas aumentan sus precios individuales reduciendo la demanda de usuarios que preferirían combinar su producto con alguno de la competencia y aumentando la demanda de aquellos consumidores más propensos a combinar los productos de su propiedad. Además mostramos que el empaquetamiento no tiene efectos sobre la inversión en el oligopolio en Salop.

Este artículo muestra que las preocupaciones habituales sobre el empaquetamiento se extienden a los mercados, con productos diferenciados horizontalmente, donde las compras múltiples son habituales. Esto es relevante para las autoridades de competencia a la hora de analizar fusiones que se enmarquen en este contexto, pues si bien la fusión de dos firmas que produzcan bienes diferenciados, que no sean sustitutos muy cercanos, puede resultar poco relevante en mercados donde los consumidores no suelen comprar más de un bien, en los mercados donde los consumidores típicamente compran múltiples bienes, el empaquetamiento puede ser un mecanismo efectivo para aumentar el beneficio de las firmas y reducir el de los consumidores.

Capítulo 2

Localización Óptima en Mercados de dos lados con Compras Múltiples

2.1. Introducción

En numerosos mercados, las firmas actúan como intermediarios entre dos grupos distintos de consumidores que interactúan entre sí. Por ejemplo, las plataformas de comercio electrónico, como Amazon o AliExpress, conectan a compradores con vendedores, mientras que las consolas de videojuegos, como Xbox o PlayStation, vinculan a jugadores con desarrolladores de videojuegos.

Este tipo de mercados se denomina mercados de dos lados. Cada lado del mercado corresponde a un grupo distinto de consumidores. Estos mercados se caracterizan porque los agentes de un grupo obtienen mayores beneficios a medida que crece la cantidad de miembros en el otro grupo, esto se conoce como externalidad de red cruzada.

La investigación sobre competencia espacial comienza con Hotelling (1929) y su "principio de mínima diferenciación", que muestra que dos empresas con tecnologías de transporte lineal tienden a ubicarse en el centro de un mercado lineal. Después, d'Aspremont et al. (1979) hacen una crítica al trabajo de Hotelling y considerando una función cuadrática de costos de transporte, muestran que las firmas se ubican por separado en los extremos de un mercado lineal. A partir de ahí surgieron numerosos trabajos, algunos de los más relevantes son, por ejemplo, Economides (1986) que cambia la configuración de las funciones de utilidad; Anderson y Thisse (1988) quienes adoptan el costo del transporte como lineal-cuadrático y Neven (1986) que supone que los consumidores están normalmente distribuidos.

Desde que Rochet y Tirole (2003), Caillaud y Jullien (2003) y Armstrong (2006) establecieran un marco teórico para determinar los precios en monopolios y duopolios para mercados de dos lados, estos han sido el objeto de numerosos trabajos, a pesar de ello pocos se han preocupado por abordar el problema de la ubicación óptima. Uno de ellos es Chang, Lin y Ohta (2013) quienes muestran que cuando las externalidades de red cruzadas de los dos grupos de clientes son iguales, las plataformas en duopolio se aglomerarán en el centro del mercado, pero que también existen condiciones diferentes bajo las cuales las plataformas permanecerán separadas en los extremos del mercado o se aglomerarán en uno de ellos.

Expando la propuesta de Chang et al. al considerar la posibilidad de compras múltiples en uno de los lados. El concepto de compras múltiples o "multihoming" en inglés, se refiere a que, en los mercados con productos diferenciados, los consumidores pueden comprar más de un producto de firmas distintas. En el caso de los mercados de dos lados, esto significa que, cada comprador o vendedor puede participar en más de una plataforma. Esta es una adición relevante al modelo, a la luz de que en el mundo real, en muchos mercados, de dos lados al menos uno tiene presencia en más de una plataforma a la vez; por ejemplo, en el mercado de aplicaciones para celulares, los desarrolladores de aplicaciones suelen tener presencia tanto en la Appstore como en la Playstore.

Dos modelos surgen naturalmente a la hora de querer implementar las compras múltiples en un modelo de localización espacial en un mercado de dos lados. En el primer modelo, las compras múltiples se asumen en el lado del mercado en el que las plataformas no determinan su ubicación, es decir en el lado en que la ubicación se da de forma exógena.

En este trabajo asumiré que las plataformas deciden su ubicación en el lado de los compradores, mientras que las características que las diferencian para los vendedores están dadas de forma exógena. También es posible asumir que las plataformas eligen cuánto diferenciarse en el lado de los vendedores y su diferenciación en el lado de los compradores se da de forma exógena, ambos problemas son equivalentes matemáticamente. Que un supuesto o el otro se aproxime mejor a la realidad dependerá de las particularidades de cada mercado.

Bajo el supuesto anterior, en el primer caso las compras múltiples se darán en el lado de los vendedores. En los mercados de dos lados, donde los costos de entrada al mercado por parte de los consumidores sean elevados, por ejemplo porque se requiera de algún dispositivo para poder acceder a dichos mercados (teléfono celular, computadora, consola de videojuegos, etc.) los consumidores adquirirán una sola plataforma y los vendedores (desarrolladores de software) tendrán presencia en más de una (iOS/Android, Windows/Mac, Xbox/Playstation/Nintendo).

El segundo caso es que las compras múltiples ocurran en el lado de los consumidores. Cuando los costos de acceso a la plataforma son bajos o nulos para los consumidores, como ocurre con las plataformas en línea como Amazon, Mercado Libre, Aliexpress, los consumidores tenderán a consultar en varias plataformas antes de hacer alguna compra. Los vendedores, por otro lado, tendrán desincentivos para estar en más de una plataforma a la vez, en primer lugar porque la mayoría de los consumidores ya estarán en varias plataformas y después porque tengan cuotas de acceso, descuentos por cantidad de venta en las comisiones o contratos de exclusividad.

El resto del capítulo está estructurado de la siguiente forma: en la sección 2 se presenta el modelo de compras múltiples en el lado con ubicación exógena, se encuentran los precios de equilibrio y la ubicación óptima, en la sección 3 se presenta el modelo de compras múltiples en el lado con ubicación endógena, se encuentran los precios de equilibrio y la ubicación óptima y finalmente en la sección 4 se ofrecen las conclusiones.

2.2. Compras múltiples en el lado con ubicación exógena

2.2.1. Modelo

Existen dos grupos de agentes, por lo general identificados como compradores y vendedores, que interactúan entre sí a través de alguna de dos plataformas, A o B, que compiten en un duopolio. Los compradores y vendedores se distribuyen uniformemente a lo largo de dos mercados lineales diferentes; la longitud de cada uno está normalizada a uno.

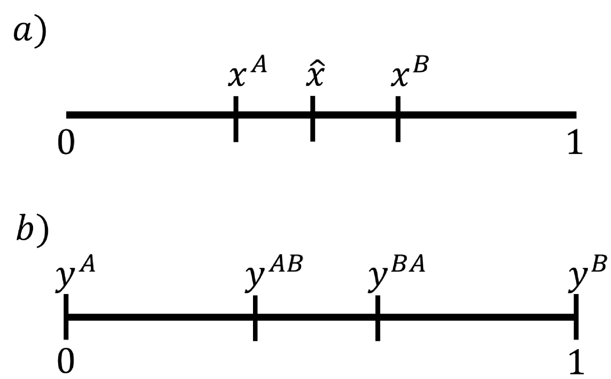

Figura 2.1: a) Mercado lineal donde la ubicación es endógena y no hay compras múltiples. b) Mercado lineal donde la ubicación es exógena (extremos) y se permiten las compras múltiples.

Las plataformas eligen su ubicación en el lado de los compradores, mientras que del lado de los vendedores se encuentran ubicadas en los extremos del intervalo unitario, como muestra la figura 1, donde la localización de las plataformas A y B está identificada por x^A y x^B en el lado de los compradores y, y^A y y^B en el lado de los vendedores. Los vendedores pueden participar en más de una plataforma a la vez, mientras que los compradores solo pueden participar en una plataforma, como se muestra en la figura 1. El comprador indiferente entre participar solo en A o solo en B está designado por $\hat{x}$ y el vendedor indiferente entre participar exclusivamente en una de las dos plataformas A o B y participar en ambas está representado por y^{AB} y y^{BA}, respectivamente.

Utilidad de los compradores

Suponemos que el beneficio $u_b^i(x)$ que disfruta un comprador ubicado en x al participar en la plataforma $i = A, B$ es:

$$u_b^i(x) = V_b + \alpha n_s^i - t|x - x^i| - p_b^i, \tag{2.2.1}$$

donde x^i identifica la ubicación de la plataforma i; V_b es el beneficio bruto del comprador al unirse a una plataforma; α es la externalidad de red cruzada de los compradores; n_s^i es el número de vendedores a registrarse en la plataforma i; p_b^i es el precio que la plataforma i cobra a los compradores; y t es la tasa de transporte. Además, suponemos que α y t son estrictamente mayores que cero.

Utilidad de los vendedores

Suponemos que los vendedores no tienen contratos de exclusividad con ninguna plataforma. Haciendo referencia a Kim y Serfes (2006), el beneficio marginal de un vendedor en j de participar en la plataforma i (es decir, el beneficio adicional de participar en una segunda plataforma) u_s^{ji} se puede expresar de la siguiente manera:

$$u_s^{BA}(y) = \beta n_b^A - ry - p_s^A, \tag{2.2.2}$$

$$u_s^{AB}(y) = \beta n_b^B - r(1-y) - p_s^B, \tag{2.2.3}$$

donde β es la externalidad de red cruzada de la que disfruta el vendedor; n_b^i es el número de compradores que se unen a la plataforma i; p_s^i es el precio que la plataforma cobra a los vendedores; r es la desutilidad del vendedor por unidad de distancia de las características preferidas a las que ofrece la plataforma i; y y representa la ubicación de un vendedor en el mercado lineal. La distancia que recorre un vendedor desde su posición hasta alguno de los extremos donde se ubican las plataformas representa la brecha entre las características preferidas por el vendedor y las características proporcionadas por las plataformas. Además, suponemos que β y r son estrictamente mayores que cero y que el beneficio bruto de participar en una segunda plataforma es despreciable y el vendedor solo se beneficia del acceso que tiene al nuevo grupo de compradores.

La demanda en el mercado de dos lados

Según las funciones de utilidad de los dos grupos de agentes, podemos derivar la demanda para cada uno de los mercados bilaterales. Respecto a la ecuación (2.2.1), asumimos que la ubicación de la plataforma A está siempre a la izquierda de la ubicación de la plataforma B, es decir, $x^A \leq x^B$. Dado un número de vendedores n_s^i en la plataforma i, el comprador marginal, indiferente entre participar en las plataformas A y B, se ubica en $\hat{x}$. Suponiendo una cobertura total del mercado, derivamos el número de compradores que eligen participar en la plataforma $i(= A$ o $B)$ de la siguiente manera:

$$n_b^A = \hat{x} = \frac{x^A + x^B}{2} + \frac{\alpha(n_s^A - n_s^B) - (p_b^A - p_b^B)}{2t}; \;\; n_b^B = 1 - n_b^A. \tag{2.2.4}$$

A través de las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.3), dado un número de compradores n_b^i en cada plataforma, igualamos el beneficio marginal a cero para encontrar al consumidor indiferente entre comprar un segundo bien o comprar solo el primero, de donde deducimos que el número de vendedores que eligen la plataforma i viene dado por:

$$n_s^A = y^{BA} = \frac{\beta n_b^A - p_s^A}{r}; \;\; n_s^B = 1 - y^{AB} = \frac{\beta n_b^B - p_s^B}{r}. \tag{2.2.5}$$

En el equilibrio, el número de compradores y vendedores viene dado por la solución al sistema de ecuaciones simultáneas, (2.2.4) y (2.2.5), que es:

$$n_b^A = \frac{1}{2} - \frac{r\Delta p_b + \alpha \Delta p_s - rt\Delta x}{2(tr - \alpha\beta)}; n_b^B = 1 - n_b^A, \tag{2.2.6}$$

$$n_s^A = \frac{\beta - 2p_s^A}{2r} - \frac{r\beta\Delta p_b + \alpha\beta\Delta p_s - rt\beta\Delta x}{2r(tr - \alpha\beta)}, \tag{2.2.7}$$

y

$$n_s^B = \frac{\beta - 2p_s^B}{2r} + \frac{r\beta\Delta p_b + \alpha\beta\Delta p_s - rt\beta\Delta x}{2r(tr - \alpha\beta)} \tag{2.2.8}$$

donde $\Delta p_b \equiv p_b^A - p_b^B$, $\Delta p_s \equiv p_s^A - p_s^B$ y $\Delta x \equiv x^A - (1 - x^B)$, que representan las diferencias entre los precios que las dos plataformas cobran a compradores y vendedores, y la diferencia entre las zonas de influencia de las dos plataformas, respectivamente. Note que como asumimos compras múltiples en el lado de los vendedores, la suma de las demandas en ese lado del mercado será mayor que uno ($n_s^A + n_s^B > 1$) pues habrá vendedores que participaran en las dos plataformas. De la función de demanda anterior, podemos ver claramente que si una plataforma establece precios más altos (p_b o p_s, o ambos p_b y p_s) a los dos grupos de agentes que la plataforma rival, entonces la demanda de la plataforma será menor; y si el interior de una plataforma es más grande que el de la plataforma rival, la demanda de dicha plataforma será mayor.

Beneficio de las plataformas

Para simplificar, asumimos que las dos plataformas brindan servicios a los dos grupos de agentes sin ningún costo, fijo o variable, es decir, los costos fijos y marginales son iguales a cero. Por lo tanto, la función de beneficio de la plataforma i es:

$$\pi^i = p_b^i n_b^i + p_s^i n_s^i, \quad i = A, B, \tag{2.2.9}$$

2.2.2. Precios de Equilibrio

El juego se compone de dos etapas. En la primera etapa, las dos plataformas seleccionan simultáneamente sus ubicaciones. En la segunda etapa, dadas las decisiones de ubicación, las dos plataformas compiten en precios en el mercado de dos lados. El equilibrio perfecto en subjuegos del modelo se resuelve por inducción hacia atrás, comenzando con la etapa final. En esta sección, cada plataforma elige precios para maximizar sus ganancias dadas las ubicaciones x^A y x^B, y también los precios del rival.

Resolviendo las cuatro condiciones de primer orden, que se pueden encontrar en la sección A.2.1 del apéndice, sujetas a las condiciones de estabilidad de segundo orden $\phi = tr - \alpha\beta > 0$ y $D \equiv 8tr - 4\alpha\beta - (\alpha + \beta)^2 > 0$ encontramos los precios de equilibrio para las dos plataformas.

$$p_b^A = t - \frac{\beta(3\alpha + \beta)}{4r} - \frac{t}{2J}(4\phi + \beta(\alpha - \beta))\Delta x, \quad p_s^A = \frac{\beta - \alpha}{4} + \frac{tr}{2J}(\alpha - \beta)\Delta x, \tag{2.2.10}$$

$$p_b^B = t - \frac{\beta(3\alpha + \beta)}{4r} + \frac{t}{2J}(4\phi + \beta(\alpha - \beta))\Delta x, \quad p_s^B = \frac{\beta - \alpha}{4} - \frac{tr}{2J}(\alpha - \beta)\Delta x, \tag{2.2.11}$$

donde $J \equiv 2\phi - D$. De las ecuaciones (2.2.10) y (2.2.11), sabemos que si las ubicaciones dadas son simétricas, es decir, $x^A + x^B = 1$, entonces los programas de precios de las dos plataformas se pueden expresar como $p_b^A = p_b^B = t - \frac{\beta(3\alpha+\beta)}{4r}$ y $p_s^A = p_s^B = \frac{\beta-\alpha}{4}$.

Tal como indican Chang et al. (2013), las tasas de desutilidad por transporte t y r representan el poder de mercado de las plataformas en cada lado. Valores mayores de t o r implican mayor dificultad para que los dos grupos de agentes cambien de posición y se unan a la otra plataforma.

Se observa que, si no existe un problema de ubicación, o si las ubicaciones de las empresas son simétricas, entonces un mayor poder de mercado (t) sobre el lado de los compradores y el lado de los vendedores hará que aumente el precio cargado a los compradores, mientras que un incremento en cualquiera de los efectos de red tendrá el efecto contrario (reducirá el precio). Por otro lado, el precio cargado a los vendedores solo dependerá de los efectos de red, disminuirá con los efectos de red propios y aumentará con los efectos de red de los compradores. Estos resultados son distintos a la literatura estándar (ver Armstrong, 2006).

Si bien llama la atención que el efecto del poder de mercado en el lado de los vendedores se traslade hacia el precio de los compradores, más llamativo es que los efectos de red generados por los vendedores (α) reduzcan el precio del lado de los compradores. En la literatura estándar mientras mayores sean los efectos de red que genere un lado habrá más incentivos para subsidiarlo y, por tanto, aumentar el precio del otro lado. Estos hallazgos se capturan en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Considere un mercado de dos lados con competencia duopolística donde en uno de los lados no se permiten las compras múltiples y las plataformas determinan de forma endógena su ubicación (características) y en el otro lado se permiten las compras múltiples y la ubicación (características) de las plataformas está dada de forma exógena. Si las ubicaciones de equilibrio son simétricas, entonces:*

- *El efecto del poder de mercado (r) de las plataformas sobre el precio del lado con compras múltiples desaparece y se traslada a los precios del lado sin compras múltiples.*
- *Un aumento en los efectos de red (α) del lado con compras múltiples no solo reduce los precios en ese lado, sino que también reduce los precios del otro lado (sin compras múltiples).*

La intuición detrás del segundo punto de la proposición 2.1 es que como las plataformas no pueden competir directamente en el lado del mercado con compras múltiples, compiten a través del lado sin compras múltiples, reduciendo su precio para disminuir la demanda del rival de ese lado lo que aminora sus efectos de red sobre el lado con compras múltiples, disminuyendo su demanda también de ese lado. Por eso cuando los agentes del lado con compras múltiples se vuelven más valiosos (aumentando sus efectos de red) las firmas compiten por ese lado recortando su precio en el otro.

Para enfatizar cómo las ubicaciones influyen en los precios que las dos plataformas cobran a los dos grupos de agentes, considere dos casos ($\Delta x > 0$ y $\Delta x < 0$) en la discusión a continuación.

Siguiendo a Chang et al. (2013) asumire por simplicidad que $t - \frac{\beta(3\alpha+\beta)}{4r} = \frac{\beta-\alpha}{4}$ en el caso de $\Delta x > 0$ y $J < 0$ o $\Delta x < 0$ y $J > 0$, comparando p_b^i y p_s^i en las ecuaciones (2.2.10) y (2.2.11) encuentro que cuando $Z \equiv 4\phi + (\beta + r)(\alpha - \beta) > 0$, la plataforma A(B) cobrará un precio mayor(menor) a los compradores que a los vendedores, es decir, $p_b^A > p_s^A (p_b^B < p_s^B)$. En el caso $\Delta x > 0$ y $J > 0$ o $\Delta x < 0$ y $J < 0$, $p_b^A < p_s^A$ y $p_b^B > p_s^B$ dado $Z > 0$. Por el contrario, si $Z < 0$, entonces los resultados deben ser los opuestos. La Tabla 1 resume lo anterior.

	J < 0		J > 0	
	Z > 0	Z < 0	Z > 0	Z < 0
$\Delta x > 0$	$p_b^A > p_s^A$	$p_b^A < p_s^A$	$p_b^A < p_s^A$	$p_b^A > p_s^A$
(Interior $A > B$)	$p_b^B > p_s^B$	$p_b^B < p_s^B$	$p_b^B < p_s^B$	$p_b^B > p_s^B$
$\Delta x < 0$	$p_b^A < p_s^A$	$p_b^A > p_s^A$	$p_b^A > p_s^A$	$p_b^A < p_s^A$
(Interior $A < B$)	$p_b^B < p_s^B$	$p_b^B > p_s^B$	$p_b^B > p_s^B$	$p_b^B < p_s^B$

Cuadro 2.1: Ubicaciones de plataformas asimétricas y precios del mercado de dos lados.

2.2.3. Ubicación óptima

Pasamos ahora al problema de la primera etapa. Anticipándose a la competencia en precios de la segunda etapa, cada plataforma elige una ubicación para maximizar sus ganancias dada la ubicación del rival. Sustituyendo las ecuaciones (2.2.10) y (2.2.11) en las ecuaciones (2.2.6), (2.2.7) y (2.2.8) y reescribiendo las funciones de beneficio de estas dos plataformas, obtenemos las condiciones de primer orden para la maximización del beneficio con respecto a x^A y x^B de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \pi^A}{\partial x^A} = \frac{rt^2 D}{2J^2}(\Delta X - Y) = 0 \tag{2.2.12}$$

y

$$\frac{\partial \pi^B}{\partial x^B} = \frac{rt^2 D}{2J^2}(\Delta X + Y) = 0 \tag{2.2.13}$$

donde $\Delta X = x^A + x^B$ y $Y = \frac{-J}{2rt}$. Las condiciones de segundo orden $\frac{\partial^2 \pi^i}{\partial (x^i)^2}$ son siempre positivas, por lo que para encontrar los equilibrios hacemos un análisis exhaustivo comprobando si en cada ubicación posible alguna de las firmas tiene incentivos a cambiar su ubicación, la demostración se puede encontrar en la sección A.2.2 del apéndice.

Del análisis anterior encontramos que si $Y \geq \frac{1}{2}$, habrá un equilibrio en el que las plataformas se ubicarán separadas en los puntos extremos $(0,1)$; si $Y \leq \frac{1}{2}$, habrá al menos dos equilibrios agrupadores uno en cada punto extremo $(0,0)$ y $(1,1)$ y cuando $Y \leq -\frac{1}{4}$, habrá un conjunto infinito de equilibrios agrupadores compuesto por todas las ubicaciones X en el intervalo $\frac{2}{3}(1+Y) \leq X \leq \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - Y)$.

Recuperando el valor de Y tenemos que $Y = \frac{(\alpha+\beta)^2}{2tr} + \frac{\alpha\beta}{tr} - 3$. Derivando con respecto a α, β, t y r encontramos que $\frac{\partial Y}{\partial \alpha} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial \beta} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial t} < 0$ y $\frac{\partial Y}{\partial r} < 0$. Estos resultados indican que la amplitud del intervalo de equilibrios agrupadores decrece con las externalidades de red y crece con las tasas de desutilidad. Además, las condiciones $Y \gtrless \frac{1}{2}$ y $Y \leq -\frac{1}{4}$ se pueden escribir como $(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta \gtrless 7tr$ y $(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta \leq 5.5tr$, respectivamente, dichas regiones se muestran en la figura 2.2 Estos resultados quedan recogidos en la siguiente proposición.

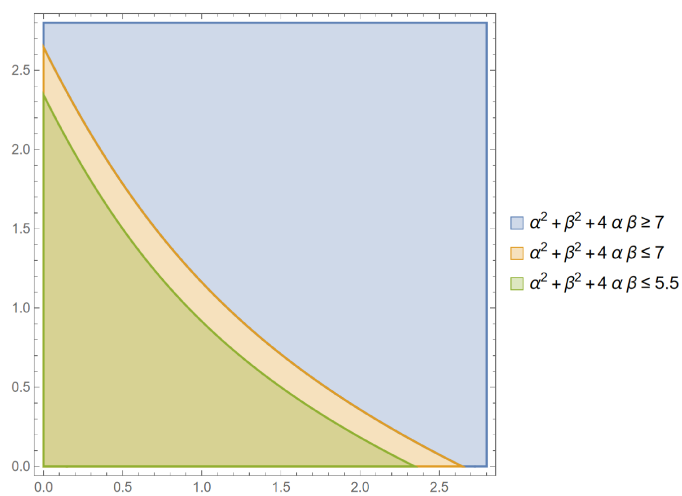

Figura 2.2: Equilibrios **agrupadores** en los extremos (azul), equilibrio **separador** en los extremos (anaranjado) y equilibrios **agrupadores** (verde).

Proposición 2.2 *En un mercado bilateral con competencia duopolística y compras múltiples en el lado donde la ubicación es exógena:*

Si las externalidades de red cruzadas α y β son suficientemente grandes en relación con el producto de las tasas de desutilidad (t y r), $(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta \geq 7tr$, las plataformas de duopolio se ubicarán ***agrupadas*** *en cualquiera de los extremos. En el caso contrario, $(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta \leq 7tr$, las plataformas de duopolio se ubicarán* ***separadas*** *en los extremos (ubicaciones simétricas).*

Además, si $(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta \leq 5.5tr$, habrá un intervalo continuo (centrado en 1/2) de ubicaciones ***agrupadoras*** *de equilibrio, que se ampliará a medida que el producto de las tasas de desutilidad aumenta en relación con las externalidades de red cruzadas α y β.*

El hallazgo de equilibrios agrupadores, en el centro y extremos así como de equilibrios separadores en los extremos, es consistente con lo encontrado por Chang et al. (2013). Sin embargo, los equilibrios agrupadores centrados alrededor de $1/2$ son una novedad derivada de la incorporación de las compras múltiples.

En los equilibrios con posiciones simétricas podemos expresar los precios de la siguiente manera:

$$p_b^i = \frac{4\phi + \beta(\alpha - \beta)}{4r} \tag{2.2.14}$$

$$p_s^i = \frac{(\beta - \alpha)}{4} \tag{2.2.15}$$

Dado que $\phi > 0$ inferimos que si el efecto de red generado por alguno de los lados es suficientemente más grande que el del otro, dicho lado del mercado será subsidiado, este es un resultado estándar en la literatura. En el caso especial en que los efectos de red sean iguales ($\alpha = \beta$) es el lado donde se permiten las compras múltiples el que será subsidiado (precio cero).

2.3. Compras múltiples en el lado con ubicación endógena

2.3.1. Modelo

Igual que en el caso anterior, supondremos que existen dos grupos de agentes, que interactúan entre sí a través de alguna de dos plataformas A y B que compiten en un duopolio. Los compradores y los vendedores se distribuyen uniformemente a lo largo de dos mercados lineales diferentes; la longitud de cada uno está normalizada a uno.

Las plataformas eligen su ubicación en el lado de los compradores, mientras que del lado de los vendedores se encuentran ubicadas en los extremos del intervalo unitario, como muestra la figura 2, donde la localización de las plataformas A y B está identificada por x^A y x^B en el lado de los compradores y y^A y y^B en el lado de los vendedores. En este caso los compradores pueden participar en más de una plataforma a la vez, mientras que los vendedores solo pueden participar en una plataforma, como se muestra en la figura 2, donde el comprador indiferente entre participar exclusivamente en una de las dos plataformas A o B y participar en ambas está representado por x^{AB} y x^{BA} respectivamente y el vendedor indiferente entre participar solo en A o solo en B está designado por $\hat{y}$.

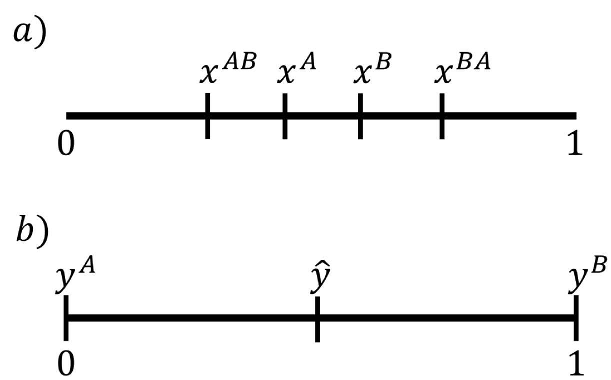

Figura 2.3: a) Mercado lineal donde la ubicación es endógena y se permiten las compras múltiples. b) Mercado lineal donde la ubicación es exógena (extremos) y no hay compras múltiples.

Utilidad de los compradores

Supondremos que los compradores no tienen contrato de exclusividad con ninguna plataforma. Siguiendo a Kim y Serfes (2006) suponemos que la utilidad $u_b^{ij}(x)$ que disfruta un comprador ubicado en x al participar en la plataforma i cuando ya está en la plataforma j es:

$$u_b^{ji}(x) = \alpha n_s^i - t|x^{ji} - x^i| - p_b^i, \quad i = A, B, \;\; i \neq j, \tag{2.3.1}$$

donde x^i identifica la ubicación de la plataforma i; α es la externalidad de red cruzada de los compradores; n_s^i es el número de vendedores a registrarse en la plataforma i; p_b^i es el precio que la plataforma cobra a los compradores; y t es la tasa de transporte. Además, suponemos que α y t son mayores que cero; y que el beneficio bruto del comprador al unirse a una segunda plataforma es cero, es decir, solo se beneficia del acceso a nuevos vendedores.

Utilidad de los vendedores

Suponemos que el vendedor celebra un contrato de exclusividad para participar en una sola plataforma. Haciendo referencia a Armstrong (2006), el beneficio u_s^i del vendedor por participar en la plataforma $i = A, B$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$u_s^A(y) = v_s^A + \beta n_b^A - ry - p_s^A, \tag{2.3.2}$$

$$u_s^B(y) = v_s^B + \beta n_b^B - r(1-y) - p_s^B, \tag{2.3.3}$$

donde v_s^i es el beneficio bruto del vendedor al unirse a la plataforma i; β es la externalidad de red transversal de la que disfruta el vendedor; n_b^i es el número de compradores que se unen a la plataforma i; p_s^i es el precio que la plataforma i cobra a los vendedores; r es la desutilidad del vendedor por unidad de distancia de las características preferidas que ofrece la plataforma i; y y representa la ubicación de un consumidor en el mercado lineal. La distancia que recorre un vendedor desde su posición hasta alguno de los extremos donde se ubican las plataformas representa la brecha entre las características preferidas por el vendedor y las características proporcionadas por las plataformas.

La demanda en el mercado de dos lados

Según las funciones de utilidad de los dos grupos de agentes, podemos derivar la demanda para cada uno de los mercados bilaterales. Respecto a la ecuación (2.3.1), asumimos que la ubicación de la plataforma A está siempre a la izquierda de la ubicación de la plataforma B, es decir, $x^A \leq x^B$. El comprador marginal, indiferente entre participar en ambas plataformas y solo participar en la plataforma i, se ubica en x^{ij}. Derivamos el número de compradores que eligen participar en la plataforma $i = A, B$ de la siguiente manera:

$$n_b^A = x^{BA} = x^A + \frac{\alpha n_s^A - p_b^A}{t}. \tag{2.3.4}$$

$$n_b^B = 1 - x^{AB} = 1 - x^B + \frac{\alpha n_s^B - p_b^B}{t}. \tag{2.3.5}$$

A través de la Ec. (2.3.2), el número de vendedores que eligen la plataforma i viene dado por:

$$n_s^A = \hat{y} = \frac{1}{2} + \frac{\beta(n_b^A - n_b^B) - (p_s^A - p_s^B)}{2r}; \;\; n_s^B = 1 - n_s^A. \tag{2.3.6}$$

En el equilibrio el número de compradores y vendedores viene dado por la solución al sistema de ecuaciones simultáneas, (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.6), que es:

$$n_b^A = x^A + \frac{\alpha - (p_b^A + p_b^B)}{2t} - \frac{tr\Delta p_b + t\alpha\Delta p_s - t\alpha\beta\Delta x}{2t(tr - \alpha\beta)} \tag{2.3.7}$$

$$n_b^B = 1 - x^B + \frac{\alpha - (p_b^A + p_b^B)}{2t} + \frac{tr\Delta p_b + t\alpha\Delta p_s - t\alpha\beta\Delta x}{2t(tr - \alpha\beta)} \tag{2.3.8}$$

$$n_s^A = \frac{1}{2} - \frac{\beta\Delta p_b + t\Delta p_s - t\beta\Delta x}{2(tr - \alpha\beta)}; \;\; n_s^B = 1 - n_s^A. \tag{2.3.9}$$

donde $\Delta p_b \equiv p_b^A - p_b^B, \ \Delta p_s \equiv p_s^A - p_s^B$ y $\Delta x \equiv x^A - (1 - x^B)$, que representan las diferencias entre los precios que las dos plataformas cobran a compradores y vendedores, y la diferencia entre las zonas de influencia de las dos plataformas, respectivamente. De la función de demanda anterior, podemos ver claramente que si una plataforma establece precios más altos (p_b o p_s, o ambos p_b y p_s) a los dos grupos de agentes que la plataforma rival, entonces la demanda de la plataforma será menor; y si el interior de una plataforma es más grande que el de la plataforma rival, la demanda de dicha plataforma será mayor.

Beneficio de las plataformas

Para simplificar, asumimos que las dos plataformas brindan servicios a los dos grupos de agentes sin ningún costo, fijo o variable, es decir, los costos fijos y marginales son iguales a cero. Por lo tanto, la función de beneficio de la plataforma i es:

$$\pi^i = p_b^i n_b^i + p_s^i n_s^i, \quad i = A, B. \tag{2.3.10}$$

2.3.2. Precios de Equilibrio

El juego consta de dos etapas. En la primera etapa, las dos plataformas seleccionan simultáneamente sus ubicaciones. En la segunda etapa, dadas las decisiones de ubicación, las dos plataformas compiten en precios en el mercado de dos lados. El equilibrio perfecto en subjuegos del modelo se resuelve por inducción hacia atrás, comenzando con la etapa final. En esta sección, cada plataforma elige un programa de precios para maximizar sus ganancias dadas las ubicaciones x^A y x^B, y también el programa de precios del rival.

Resolviendo las cuatro condiciones de primer orden, que se pueden encontrar en la sección A.2.3 del apéndice, sujetas a las condiciones de estabilidad de segundo orden $\phi = tr - \alpha\beta > 0$ y $D \equiv 8tr - 4\alpha\beta - (\alpha+\beta)^2 > 0$ encontramos los precios de equilibrio para las dos plataformas.

$$p_b^A = \frac{(\alpha-\beta)}{4} + \frac{tx^A}{2} + \frac{t(\alpha^2-\beta^2)}{4J}\Delta x, \tag{2.3.11}$$

$$p_b^B = \frac{(\alpha-\beta)}{4} + \frac{t(1-x^B)}{2} - \frac{t(\alpha^2-\beta^2)}{4J}\Delta x, \tag{2.3.12}$$

$$p_s^A = r - \frac{\alpha(\alpha+3\beta)}{4t} - \frac{\alpha x^A}{2} - \frac{(\alpha+\beta)(4\phi+\alpha(\beta-\alpha))}{4J}\Delta x, \tag{2.3.13}$$

y

$$p_s^B = r - \frac{\alpha(\alpha+3\beta)}{4t} - \frac{\alpha(1-x^B)}{2} + \frac{(\alpha+\beta)(4\phi+\alpha(\beta-\alpha))}{4J}\Delta x, \tag{2.3.14}$$

donde $J \equiv 2\phi - D$. De las ecuaciones (2.3.11), (2.3.12), (2.3.13) y (2.3.14) sabemos que si las ubicaciones dadas son simétricas, es decir, $x^A + x^B = 1$ (pues la distancia de 0 a x^A es la misma que de 1 a x^B), entonces los precios de las dos plataformas se pueden expresar como $p_b^A = \frac{(\alpha-\beta)}{4} + \frac{tx^A}{2}$, $p_b^B = \frac{(\alpha-\beta)}{4} + \frac{t(1-x^B)}{2}$, $p_s^A = r - \frac{\alpha(\alpha+3\beta)}{4t} - \frac{\alpha x^A}{2}$ y $p_s^B = r - \frac{\alpha(\alpha+3\beta)}{4t} - \frac{\alpha(1-x^B)}{2}$.

Observamos que, si no existe un problema de ubicación, o si las ubicaciones de las plataformas son simétricas, entonces un mayor poder de mercado sobre cualquiera de los lados hará que aumente el precio cargado a los vendedores, mientras que un incremento en cualquiera de los efectos de red tendrá el efecto contrario (reducirá el precio).

Por otro lado, el precio cargado a los compradores disminuirá con los efectos de red propios y aumentará con los efectos de red de los vendedores y, a diferencia de lo que ocurría en el caso anterior, el efecto del poder de mercado sobre el precio no desaparece. Además, a medida que las plataformas se alejan de los extremos se reduce el precio de los vendedores y aumenta el precio de los compradores, este es un nuevo efecto que no estaba presente en el caso anterior ni en la literatura previa, pues no consideraba la ubicación espacial.

Nuevamente, es llamativo que los efectos de red generados por los compradores (β) reduzcan el precio del lado de los vendedores, contraponiéndose a la literatura estándar. También es destacable que ahora son importantes las posiciones absolutas de las plataformas y no solo sus posiciones relativas respecto de la otra (Δx, diferencia entre el tamaño de sus interiores). Estos hallazgos se capturan en la siguiente proposición.

Proposición 2.3 *Considere un mercado de dos lados con competencia duopolística donde en uno de los lados no se permiten las compras múltiples y la ubicación (características) de las plataformas está dada de forma exógena y en el otro lado se permiten las compras múltiples y las plataformas determinan de forma endógena su ubicación (características). Si las ubicaciones de equilibrio son simétricas, entonces:*

- *El efecto del poder de mercado de las plataformas sobre el precio del lado con compras múltiples también afecta a los precios del lado sin compras múltiples.*
- *Un aumento en los efectos de red del lado con compras múltiples no solo reduce los precios en ese lado, sino que también reduce los precios del otro lado (sin compras múltiples).*
- *Una posición más central de las plataformas aumenta el precio en el lado con compras múltiples y lo reduce en el lado sin compras múltiples.*

2.3.3. Ubicación óptima

Pasamos ahora al problema de la primera etapa. Anticipándose al juego de precios de Bertrand en la segunda etapa, cada plataforma elige una ubicación para maximizar sus ganancias dada la ubicación del rival. Sustituyendo las ecuaciones (2.3.11), (2.3.12), (2.3.13) y (2.3.14) en las ecuaciones (2.3.7), (2.3.8) y (2.3.9) y reescribiendo las funciones de beneficio de estas dos plataformas, obtenemos las condiciones de primer orden para la maximización del beneficio con respecto a x^A

y x^B, de las cuales se derivan las ubicaciones de equilibrio señaladas en la proposición 2.4. Las condiciones de segundo orden son $\frac{\partial^2 \pi^i}{\partial (x^i)^2} = 3J^2 + 8rt(\phi - 2J) + 4\phi^2 < 0$ para $i = A, B$.

Proposición 2.4 *Considere un mercado bilateral duopolístico con compras múltiples en el lado donde la ubicación es endógena. Si $3J^2 + 8rt(\phi - 2J) + 4\phi^2 < 0$ entonces existe un único par de ubicaciones de equilibrio, que además son simétricas*

$$x^A = \frac{(\alpha + \beta)D}{4tJ} \quad y \quad x^B = 1 - \frac{(\alpha + \beta)D}{4tJ}. \tag{2.3.15}$$

A diferencia de la literatura previa, Chang et al. (2013) donde la diferenciación de equilibrio entre plataformas solo podía ser mínima o máxima, encuentro que es posible un nivel de diferenciación intermedia, que es algo más cercano a lo que podríamos ver en la realidad. Por ejemplo en el mercado de consolas de videojuegos, aunque cada consola tiene juegos y características exclusivas que la hacen mas atractiva para un grupo de consumidores, todas comparten la mayoría de los juegos y funciones.

Los precios y beneficios en equilibrio son funciones complicadas de los parámetros, por lo que no es fácil obtener conclusiones generales de ellos, sin embargo, en el caso especial en que los efectos de red cruzados son iguales entre sí ($\alpha = \beta$) y el poder de mercado en ambos lados es idéntico ($t = r$) encontramos que se subsidia el precio en el lado con compras múltiples. Podemos pensar que las firmas reducen sus precios en el lado del mercado en el que no tienen competencia directa con el fin de atraer más clientes en el lado en el que enfrentan competencia directa.

Cuando $\alpha = \beta$ encontramos que los beneficios son decrecientes en los efectos cruzados de red, mientras que, cuando $t = r$ las pruebas numéricas para diferentes valores de los parámetros apuntan a que los efectos de red cruzados tienen un efecto negativo sobre los beneficios.

Si comparamos los modelos con y sin compras múltiples cuando $\alpha = \beta$ las simulaciones numéricas realizadas muestran que para valores pequeños de α y β los beneficios sin compras múltiples son mayores y para valores más grandes de α y β los beneficios con compras múltiples son más grandes. Estas observaciones son consistentes con el hecho de que en el modelo con compras múltiples los efectos de red tienen un mayor impacto sobre la cantidad de compradores y vendedores al no haber competencia directa en un lado del mercado.

2.4. Conclusiones

Este capítulo propone la incorporación de compras múltiples en alguno de los lados en un modelo de mercado de dos lados en el que se determina la ubicación óptima de manera endógena, mediante el análisis de un juego de dos etapas en el que dos plataformas en la primera etapa seleccionan simultáneamente sus ubicaciones y en la segunda etapa participan en la competencia de precios de Bertrand.

Encontramos que el efecto sobre el precio del poder de mercado se traslada del lado con compras múltiples al lado sin compras múltiples, que los efectos de red cruzados del lado sin compras múltiples reducen el precio en el lado con compras múltiples y que bajo ciertas circunstancias las plataformas pueden preferir un nivel de diferenciación intermedio, es decir ni muy parecidas ni muy diferentes, resultados que son atípicos en la literatura de mercados de dos lados.

Estos resultados están sujetos a los supuestos simplificadores de linealidad sobre los costos de transporte, aditividad de los efectos de red en la utilidad, distribución uniforme de los vendedores/compradores, utilidad de participar en la segunda plataforma solo dependiente del acceso a nuevos usuarios y compras múltiples en un solo lado.

Algunas extensiones interesantes, además de aquellas que se ocuparan de explorar la generalidad de los resultados, podrían venir por permitir que la ubicación se determine de forma endógena en ambos lados del mercado, condicionar la ubicación en un lado a la composición de los agentes en el otro lado, utilizar un mercado circular tipo Salop o agregar más plataformas.

Capítulo 3

Diferenciación de productos con segmentación de mercado: mono-producto vs multi-producto

3.1. Introducción

Motivación

En muchos mercados es posible clasificar a los consumidores según sus características o preferencias, lo que permite a las firmas hacer una segmentación del mercado. En tales casos tiene sentido para las firmas basar su estrategia de diferenciación en esta segmentación. En este contexto las firmas pueden tener incentivos para producir múltiples bienes, cada uno orientado a un segmento diferente o un bien que pueda satisfacer a varios segmentos. Por ejemplo, el mercado de las computadoras portátiles está segmentado según la funcionalidad, *gamer*, portabilidad y táctiles (2 en 1); el mercado de las plataformas de *streaming* está segmentado por el tipo de contenido: infantil, deportes, animación, cine independiente, etc.

En el primer caso los fabricantes suelen diseñar sus portátiles para un segmento en específico, mientras que en el segundo hay plataformas que apuntan a un segmento específico, como pueden ser MUBI para cine independiente o Crunchyroll para animación, pero también podemos encontrar plataformas que apuntan a múltiples segmentos como Netflix o Amazon Prime Video.

Dada la variedad de opciones que pueden presentarse a la hora de determinar una estrategia de diferenciación cuando el mercado está segmentado, se vuelve relevante el problema de determinar la estrategia de diferenciación óptima, ¿será mejor enfocarse en producir un bien para un solo segmento, un bien para cada segmento o un bien que pueda apuntar a múltiples segmentos?, en este trabajo abordaré esta problemática considerando competencia duopolística.

Antecedentes

La investigación sobre diferenciación de productos comienza con Hotelling (1929) y su "principio de mínima diferenciación", que muestra que dos empresas con tecnologías de transporte lineal tienden a ubicarse en el centro de un mercado lineal. Después, d'Aspremont et al. (1979) hacen una crítica al trabajo de Hotelling y considerando una función cuadrática de costos de transporte, muestran que las firmas se ubican por separado en los extremos de un mercado lineal, diferenciándose al máximo.

Por su parte Frank, Massy y Wind (1972) consideran la segmentación del mercado y proponen un modelo de discriminación de precios de tercer grado que supone que los segmentos del mercado están aislados y que los consumidores de un segmento no pueden comprar bienes de otro segmento. Moorthy (1984) investiga sobre la autoselección del consumidor y propone estrategias de diseño de líneas de productos basadas en la discriminación de precios de segundo grado. Al utilizar la autoselección del consumidor, los precios de los productos diseñados para diferentes segmentos del mercado están relacionados entre sí y se produce canibalización entre los diferentes segmentos del mercado.

La investigación sobre diferenciación de productos y segmentación de mercados se ha abordado en diferentes contextos. Bing Jing (2003) considera externalidades de red en un modelo simple de diferenciación vertical, muestra que la externalidad de red es un factor crítico para el control de versiones de bienes de información, porque al ofrecer una versión de gama baja amplía el tamaño de la red y, por lo tanto, mejora el valor (de red) de la versión de gama alta, lo que permite a la empresa cobrar un precio más alto por la versión de gama alta.

Hans Jarle Kind y Lars Sørgard (2013) analizan la segmentación del mercado en un mercado bilateral que consta de consumidores de medios y anunciantes. Estos autores comparan la segmentación completa del mercado con una situación en la que los consumidores pueden comprar en el extranjero y encuentran que los espectadores podrían verse perjudicados, además de que la bilateralidad del mercado puede romperse en el país que atrae a espectadores extranjeros.

También se puede mencionar a Hemant K. Bhargava (2023) que estudia los efectos del empaquetamiento, proporciona directrices sobre el diseño y fijación de precios de líneas de productos multidispositivo. Muestra que inducir ventas duales a través de descuentos en paquetes puede ser rentable incluso cuando la intención de consumir varias veces es bastante débil, porque en este caso las ventas duales no se producirían de forma orgánica.

Una característica de los trabajos mencionados y de casi todos los trabajos en la literatura es que se centran en a la diferenciación vertical. La única excepción, es el trabajo de Wei y Nault (2005). En su modelo, tratan la diferenciación vertical como un caso especial de diferenciación horizontal y modelan la interacción entre diferentes segmentos de mercado, mostrando las diferencias en las estrategias de diferenciación de productos cuando se pasa de la diferenciación horizontal a la vertical. Encuentran que siempre es subóptimo diferenciar los bienes de información si el mercado no está completamente diferenciado o si las características de los bienes de información no están diseñadas específicamente para ciertos segmentos del mercado.

Aunque coincidimos en lo que respecta a tomar en cuenta la diferenciación horizontal, nuestros modelos tienen marcadas diferencias. La primera es que su artículo considera un monopolio, mientras que en este contemplo competencia duopolística. La segunda es que consideran costos marginales cero, mientras que aquí permito costos diferentes de cero. La tercera es que sus resultados de diferenciación horizontal se limitan al caso de segmentación perfecta y mí análisis se expande a otros casos.

Contribución

En este trabajo presento un modelo de competencia duopolística en el que, dada una segmentación de mercado horizontal, las firmas escogen sus estrategias de diferenciación, definiendo los segmentos de mercado en los que competirán, así como la cantidad de bienes diferentes que producirán. Muestro que existe un *trade off* entre tener múltiples productos diseñados para segmentos específicos y un solo producto diseñado para múltiples segmentos, además encuentro que la estrategia de diferenciación óptima puede variar por la estructura de la segmentación y la consideración de compras múltiples.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 estudio el caso en el que la segmentación del mercado es perfecta cuando hay dos firmas y dos segmentos; en la sección 3 analizo el caso del mercado con segmentación imperfecta, cuando hay dos firmas y dos segmentos y cuando hay dos firmas y tres segmentos; en la sección 4 considero el caso con compras múltiples. Finalmente, en la sección 5 presento las conclusiones.

3.2. Segmentación Perfecta

Empecemos suponiendo que existe una segmentación perfecta del mercado, es decir, los consumidores en dicho mercado pueden clasificarse en uno y solo uno de los dos segmentos.

3.2.1. Dos firmas y dos segmentos

Consideremos el caso de dos firmas que compiten en un mercado cuyos consumidores están clasificados en uno de dos segmentos según sus preferencias.

Consideremos los siguientes supuestos:

I) Cada consumidor puede comprar solo un bien y no tiene incentivos para comprar un bien que esté diseñado para un segmento de mercado al que no pertenece.

II) Todos los bienes tienen un conjunto de características comunes y un conjunto de características diferenciadoras. Los consumidores de cada segmento tienen preferencia por un conjunto específico de características. Para simplificar el análisis pensaremos que cada segmento está asociado con una sola característica diferenciadora.

III) Las firmas pueden diseñar un producto para un segmento específico o bien, diseñar un producto para ambos segmentos.

IV) Los costos fijos son cero, el costo de las características comunes es c_0 y el costo de la característica diferenciadora asociada con el segmento j es c_j.

V) Las firmas escogen su estrategia de diferenciación y después eligen sus precios, llamaremos a esto el **juego de dos etapas**. Después, las firmas repiten el juego de dos etapas indefinidamente, llamaremos a esto el **juego repetido**.

La función de demanda que propongo para analizar la segmentación de mercado es una extensión natural de la función de demanda del modelo de Hotelling con una modificación. Esta función tiene las siguientes propiedades que la hacen deseable:

- **Demanda total decreciente en el precio promedio**: una de las desventajas de la función de demanda del modelo de Hotelling es que la demanda total es insensible al precio. Esto sería un problema en el modelo a la hora de comparar estrategias que tienen un solo bien dirigido a múltiples segmentos contra varios bienes diseñados específicamente para cada segmento, pues la primera es más costosa que la segunda y por lo tanto afecta al precio lo cual no se vería reflejado si la demanda fuera insensible a él.

- **Distribución de la demanda proporcional al precio en el segmento:** la lógica detrás de esto es que pensamos que una vez que dos firmas se encuentran participando en un mismo segmento escogen una "ubicación óptima" dentro del segmento, es decir, se diferencian lo máximo posible (de tal forma que a un mismo precio tendrán la misma demanda). Esto es equivalente a lo que ocurre en el modelo de Hotelling cuando las firmas se ubican en los extremos, en el cual las firmas se reparten la demanda proporcional a sus precios.

La función de demanda de la firma i en el segmento j es:

$$D_i^j = s_j \left(\frac{1}{n_j} - \frac{n_j p_i^j - P_{-i}^j}{n_j t} \right)$$

donde,

- s_j es la proporción de consumidores en el segmento j.

- n_j es la cantidad de firmas participando en el segmento j.

- p_i^j es el precio del bien producido por la firma i y diseñado para el segmento j.

- P^j_{-i} es la suma sobre los precios de los productos diseñados para el segmento j excepto el de la firma i.

- t es un parámetro que refleja el impacto de los precios sobre la demanda, se puede interpretar como el poder de mercado.

La función de beneficios de la firma i es la suma sobre la demanda en cada segmento multiplicado por el precio menos el costo del bien asociado a dicho segmento:

$$\pi_i = \sum_j D_i^j (p_i^j - c_i^j)$$

Obtengo los beneficios de equilibrio de las firmas para cada posible estrategia de diferenciación y sustituyo en el juego de la primera etapa como se muestra en el cuadro 3.1. La M indica que la firma es monopolista en el segmento y la D que es duopolista. La estrategia de tener un solo producto para los dos segmentos se representa con 12 y la de tener un producto para cada segmento con $1-2$. Los índicies y superíndices se usan para diferenciar asignaciones iguales de los segmentos que tienen pagos distintos debido al tipo de estrategia, mono o multi-producto.

	1	**2**	**12**	**1-2**
1	D^1, D^1	M^1, M^2	$\mathrm{D}_1, D_1 M_2$	$\mathrm{D}^1, M^2 D^1$
2	M^2, M^1	D^2, D^2	$\mathrm{D}_2, M_1 D_2$	$\mathrm{D}^2, M^1 D^2$
12	$\mathrm{D}_1 M_2, D_1$	$\mathrm{M}_1 D_2, D_2$	D^{12}, D^{12}	D_{12}, D_{1-2}
1-2	$\mathrm{D}^1 M^2, D^1$	$\mathrm{M}^1 D^2, D^2$	D_{1-2}, D_{12}	$\mathrm{D}^{1-2}, D^{1-2}$

Cuadro 3.1: Juego de la primera etapa.

Antes de proceder con los resultados del juego definamos algunos tipos de estrategias de diferenciación que serán relevantes.

Tipos de estrategias de diferenciación:

- *Máxima diferenciación multi-producto*: las firmas producen uno o más bienes con una sola característica diferenciadora para diferentes segmentos cada una.

- *Máxima diferenciación mono-producto*: cada firma produce un único bien con múltiples características distintas a las de la otra firma.

- *Mínima diferenciación multi-producto*: las firmas producen exactamente los mismos bienes con una sola característica.

- *Mínima diferenciación mono-producto*: cada firma produce un único bien con exactamente las mismas características.

De ahora en adelante utilizaré $s = \{j, -j\}$ para designar el conjunto de estrategias $s = \{1, 2\}$ y $s = \{2, 1\}$. Además la expresión **estrategia de diferenciación óptima del juego repetido** hará referencia a la estrategia de la primera etapa del juego de dos etapas que forma parte de la estrategia óptima del juego repetido. La **estrategia óptima del juego repetido** será aquella que maximice los beneficios conjuntos, usando una estrategia de gatillo (con una tasa de descuento δ), para todas aquellas estrategias no alternantes.

Las estrategias alternantes en los juegos repetidos son aquellas que cambian lo que se juega en cada iteración, con el propósito de beneficiar a un jugador diferente en cada ronda, para maximizar la utilidad promedio. Estas requieren que las firmas cambien sus estrategias de diferenciación constantemente. En la realidad se observa que las firmas suelen mantener sus estrategias de diferenciación a lo largo del tiempo, por lo que parece poco realista utilizar estrategias alternantes, razón por la cual quedarán excluidas de este análisis.

La demostración de la proposición 1 se encuentra en la sección A.3.1 del apéndice.

Proposición 3.1 *Considere un mercado con un duopolio, dos segmentos y segmentación perfecta, donde se cumplen los supuestos I-V, entonces*

- *En el juego de dos etapas, la estrategia de diferenciación de equilibrio es la mínima diferenciación multi-producto* $s = \{1-2, 1-2\}$.

- *En el juego repetido (existe δ tal que), si $\epsilon_1 \leq s_1 \leq 1-\epsilon_2$ o $\epsilon_2 \leq s_1 \leq 1-\epsilon_1$ la estrategia de diferenciación óptima será la máxima diferenciación mono-producto $s = \{j, -j\}$, de lo contrario será la mínima diferenciación multi-producto $s = \{1-2, 1-2\}$. Donde*

$$\epsilon_1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{t-c_1}\right]^2 \quad y \quad \epsilon_2 = \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{t-c_2}\right]^2.$$

Cuando la diferencia en los costos es pequeña y el tamaño de los segmentos es parecido, las firmas preferirán no competir y ser monopolistas cada una en un segmento, $\{j, -j\}$, si la diferencia entre los segmentos es grande, las firmas se diferenciarán al mínimo produciendo un bien para cada segmento, $\{1-2, 1-2\}$, pues para una firma será más rentable tener acceso al segmento mayor aunque tenga que competir, ya que el aumento considerable de la demanda compensará la reducción potencial de precios.

Cuando la diferencia en los costos es grande y el tamaño de los segmentos parecido la firma que es más eficiente preferirá competir en ambos segmentos, $\{1-2, 1-2\}$, pues se llevará la mayor parte de la demanda. Cuando la diferencia en el tamaño de los segmentos es grande, a la firma más eficiente le compensa sacrificar el segmento más pequeño perdiendo esa parte de la demanda para aumentar sus precios siendo monopolista en el segmento más grande $\{j, -j\}$, la lógica de la firma menos eficiente es análoga. Estos equilibrios se puede observar en la figura 3.1

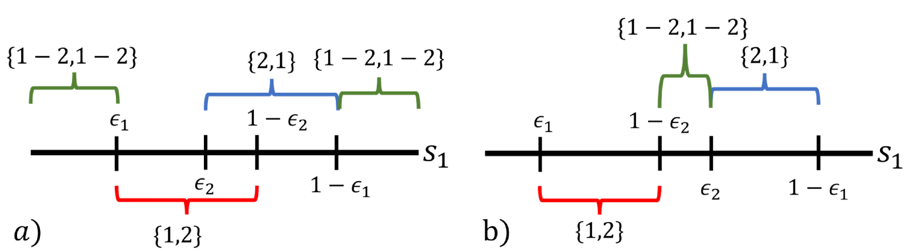

Figura 3.1: Equilibrios según diferencia en el tamaño de los segmentos con diferencia de costos a) pequeña y b) grande.

Una observación interesante de estos resultados es que cuando la diferencia en el tamaño de los segmentos es suficientemente pequeña, una estrategia óptima del juego repetido es que la firma menos eficiente se quede con el segmento más grande y la firma más eficiente con el segmento más pequeño, esto ocurre porque la diferencia es tan pequeña que la firma más eficiente prefiere ser monopolista en el segmento más pequeño antes que competir en ambos segmentos.

La mínima diferenciación esta asociada con el juego estático y la máxima diferenciación con el juego repetido.

3.3. Segmentación Imperfecta

En el mundo real es improbable que pueda segmentarse un mercado perfectamente, por lo general habrá algún conjunto de consumidores que pueda clasificarse en más de un segmento. En estos casos diremos que la segmentación es imperfecta.

3.3.1. Dos firmas y dos segmentos

Ahora supongamos que hay dos firmas que compiten en un mercado cuyos consumidores están clasificados en uno de dos segmentos o en ambos según sus preferencias. Los supuestos I al V se mantienen igual.

Diremos que un mercado es **simétrico** si todos los segmentos tienen la mismas proporciones y los costos de las características diferenciadoras son iguales entre si e iguales para todas las firmas.

Los consumidores que pueden clasificarse en cualquiera de los dos segmentos los clasificaremos en el segmento cero, en este segmento competirán los productos diseñados para cualquier segmento. Por tanto, la función de demanda del bien producido por i para el segmento j ahora se compone de dos partes, la demanda en el segmento j y la demanda en el segmento cero.

La función de demanda del bien producido por la firma i dirigido al segmento j es:

$$D_i^j = s_j \left(\frac{1}{n_j} - \frac{n_j p_i^j - P_{-i}^j}{n_j t} \right) + s_0 \left(\frac{1}{N} - \frac{N p_i^j - P_{-i} - P_i^{-j}}{Nt} \right)$$

donde,

- s_j es la proporción de consumidores solo en el segmento j.
- n_j es la cantidad de firmas participando en el segmento j
- p_i^j es el precio del bien producido por la firma i para el segmento j.
- P_{-i}^j es la suma de los precios de los productos diseñados para el segmento j excepto el de i.
- t es un parámetro que refleja el impacto de los precios sobre la demanda, se puede interpretar como el poder de mercado.
- s_0 es la proporción de consumidores que comparten ambos segmentos.

- N es la cantidad total de productos en el mercado.
- P_{-i} es la suma de los precios de todos los productos excepto los de i.
- P_i^{-j} es la suma de los precios de los bienes producidos por i excepto los diseñados para el segmento j.

La demostración de la proposición 3.2 se puede encontrar en la sección A.3.2 del apéndice.

Proposición 3.2 *Considere un mercado simétrico con un duopolio, dos segmentos y segmentación imperfecta, donde se cumplen los supuestos I-V, entonces*

- *En el juego de dos etapas, la estrategia de diferenciación de equilibrio es la mínima diferenciación multi-producto* $s = \{1-2, 1-2\}$.
- *En el juego repetido (existe δ tal que), la estrategia de diferenciación óptima es la máxima diferenciación mono-producto* $s = \{j, -j\}$.
- *Si la razón de intercambio entre segmentos y t (el poder de mercado) son suficientemente grandes respecto al costo de diferenciación tal que*

$$\left[1 - \frac{c_1}{t - c_1 - c_0}\right]^2 > \frac{9(3 - 2s_1)}{8(2 - s_1)^2}$$

  entonces, los beneficios de seguir la estrategia de mínima diferenciación mono-producto, $s = \{12, 12\}$, *son mayores que los de la estrategia de mínima diferenciación multi-producto* $s = \{1-2, 1-2\}$.

En el mercado con segmentación perfecta el pago de la estrategia de mínima diferenciación mono-producto $(12, 12)$ es siempre menor que el de la estrategia de mínima diferenciación multi-producto $(1-2, 1-2)$ mientras que en el mercado con segmentación imperfecta cualquier pago puede ser mayor que el otro.

Esta diferencia se debe a que en el mercado con segmentación imperfecta existe un *trade-off* entre tener un solo producto con múltiples características y tener múltiples productos con una sola característica. Tener un solo producto con varias características aumenta los costos de producción pero tener varios productos aumenta la competencia en el segmento compartido, lo que reduce los precios en general.

3.3.2. Dos firmas y tres segmentos

En este caso supongamos que hay dos firmas que compiten en un mercado cuyos consumidores están clasificados en uno de tres segmentos o en todos según sus preferencias. Los supuestos I al V se mantienen igual.

Al igual que en el caso anterior, los consumidores que pueden clasificarse en cualquiera de los tres segmentos los clasificaremos en el segmento cero. La función de demanda no cambia.

La demostración de la proposición 3 se puede encontrar en la sección A.3.3 del apéndice.

Proposición 3.3 *Considere un mercado simétrico con un duopolio, tres segmentos y segmentación imperfecta, donde se cumplen los supuestos I-V, entonces*

- *En el juego de dos etapas, las firmas eligen diferenciarse al mínimo produciendo un producto para cada segmento del mercado* $s = \{1-2-3, 1-2-3\}$.
- *En el juego repetido (para* δ *suficientemente grande), si la razón de intercambio entre segmentos y* t *(el poder de mercado) son suficientemente grandes respecto al costo de diferenciación, entonces la estrategia de diferenciación óptima será la diferenciación intermedia mono-producto* $s = \{13, 23\}$*, de lo contrario las firmas tendrán una diferenciación intermedia multi-producto* $s = \{1-3, 2-3\}$.

Si los costos son cero, entonces la mejor estrategia de diferenciación en el juego repetido siempre será la diferenciación intermedia mono-producto.

Si la segmentación es perfecta, entonces la mejor estrategia de diferenciación en el juego repetido será la diferenciación intermedia multi-producto excepto cuando los costos sean muy cercanos a cero.

En los casos abordados hasta ahora, resalta que la estrategia de mínima diferenciación multi-producto siempre ha sido la única estrategia de diferenciación de equilibrio en el juego estático con lo cual surge la pregunta de si será posible que exista alguna otra estrategia de diferenciación de equilibrio en el juego estático bajo simetría. La respuesta a esta pregunta se responde en la siguiente sección.

3.4. Compras Múltiples

En mercados con productos diferenciados no es raro que los consumidores compren más de un bien, por lo que ahora consideraremos que los consumidores clasificados en más de un segmento pueden comprar varios bienes.

3.4.1. Dos firmas y dos segmentos

Consideremos nuevamente un mercado con dos firmas y dos segmentos en el que cada consumidor está clasificado en uno de los dos segmentos o en ambos. Mantenemos los supuestos II-V (el I se sustituye por el VI) y además supondremos que:

VI) Los consumidores que están en ambos segmentos pueden adquirir "cestas" que contengan un bien asociado con cada característica o un solo bien que contenga ambas características.

VII) Todos los costos marginales son cero.

Nuevamente los consumidores que se puedan clasificar en ambos segmentos los agruparemos en el segmento cero. Para simplificar los cálculos supondremos que todos los consumidores asignados a este segmento comprarán ambos bienes.

La función de demanda del bien producido por la firma i dirigido al segmento j es:

$$D_i^j = s_j \left(\frac{1}{n_j} - \frac{n_j p_i^j - P_{-i}^j}{n_j t} \right) + s_0 \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{Nt} \sum_k (N p_{ik}^{mh} - P_{-ik}^{mh}) \right]$$

donde,

- N es la cantidad de cestas que se pueden formar escogiendo un producto de cada segmento.
- p_{ik}^{mh} es la suma de los precios del bien diseñado para el segmento 1 por la firma i y el bien diseñado para el segmento 2 por la firma k.

- P^{mh}_{-ik} es la suma de los precios de todos los posibles pares de bienes integrados por un bien diseñado para el segmento 1 y uno para el segmento 2 excepto el par integrado por el bien diseñado por i para el segmento 1 y k para el segmento 2.

- s_0 es la proporción de consumidores que comparten ambos segmentos.

La demostración de la proposición 3.4 se puede encontrar en la sección A.3.4 del apéndice.

Proposición 3.4 *Considere un mercado simétrico con un duopolio, dos segmentos y segmentación imperfecta, donde se cumplen los supuestos II-VII, entonces*

- *En el juego de dos etapas, la estrategia de diferenciación de equilibrio es la estrategia de mínima diferenciación mono-producto,* $s = \{12, 12\}$*, siempre. Además cuando* $s_0 \geq 0.68$ *la estrategia de mínima diferenciación multi-producto,* $s = \{1-2, 1-2\}$*, también es estrategia de equilibrio.*

- *En el juego repetido (existe* δ *tal que), la estrategia de diferenciación óptima es:*
  - *La máxima diferenciación multi-producto,* $s = \{j, -j\}$*, si* $s_0 \leq 0.18$.
  - *La mínima diferenciación mono-producto,* $s = \{12, 12\}$*, si* $0.18 \leq s_0 \leq 0.84$.
  - *La mínima diferenciación multi-producto,* $s = \{1-2, 1-2\}$*, si* $0.84 \leq s_0$.

A diferencia de los casos anteriores, con compras múltiples la estrategia de tener un único producto con todas las características ahora es equilibrio del juego estático.

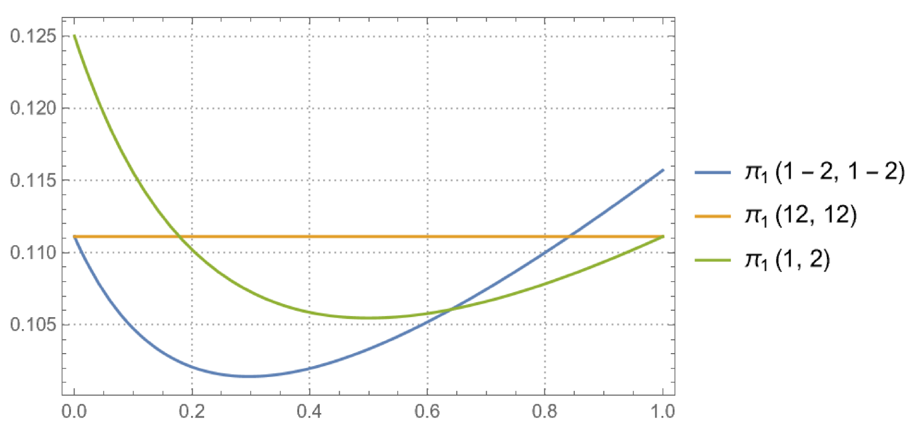

Figura 3.2: Comparación de beneficios de las estrategias de diferenciación (eje y) con respecto a la cantidad de consumidores que hacen compras múltiples (eje x).

Como se puede observar en la figura 3.2, hasta tres estrategias de diferenciación pueden ser equilibrio en el juego repetido dependiendo de la proporción de consumidores que hacen compras múltiples.

Una explicación de estos equilibrios es la siguiente. Cuando los compradores múltiples son pocos, la dependencia entre los segmentos es baja aproximándose al caso de segmentación perfecta, por lo que las firmas ganan más actuando como monopolistas en un solo segmento que compitiendo en ambos. Si hay una cantidad moderada de compradores múltiples, vender un solo producto para ambos segmentos es equivalente a una estrategia de empaquetamiento que obliga a los consumidores de un solo producto a adquirir el paquete con ambos bienes, el incremento en la demanda derivado, compensa a las firmas la reducción de precios debido a la competencia. Finalmente, cuando la cantidad de compradores múltiples es muy alta, ya no tiene sentido vender un producto dirigido a ambos segmentos pues la mayoría de los consumidores ya estarán interesados en comprar ambos productos y en este caso vender los productos de forma independiente representa una ventaja competitiva.

3.5. Conclusiones

En este capítulo analizo el comportamiento estratégico intertemporal de la diferenciación horizontal de productos en mercados segmentados, tomando en cuenta la posibilidad de que cada firma produzca múltiples bienes.

Recupero el principio de mínima diferenciación de Hotelling y lo asocio con las estrategias del juego que ocurre una sola vez mientras que el principio de máxima diferenciación se asocia con las del juego repetido.

Muestro que existe un *trade off* entre las estrategias de vender múltiples productos y la de vender un solo producto, aumentar los costos o aumentar la competencia, que no se había mencionado en trabajos anteriores.

Encuentro que incluso si las firmas quieren diferenciarse al máximo en el juego repetido, la estructura del mercado podría impedírselo, conduciendo a una diferenciación intermedia. Asimismo, vemos que permitir las compras múltiples cambia radicalmente las estrategias de diferenciación, permitiendo que sea óptimo tener un único producto con todas las características.

Estos resultados están sujetos a los supuestos simplificadores como la linealidad sobre las funciones de demanda, la aditividad de los costos de las características, el no considerar eficiencias relacionadas con la producción de menos bienes, la coincidencia en la forma en que las firmas segmentan el mercado, etc.

Algunas extensiones interesantes podrían usar otras funciones de demanda, generalizar los resultados para cualquier número de firmas y segmentos o considerar la asimetría en la forma en que las firmas segmentan el mercado.

Conclusiones

Cada capítulo de esta tesis es un artículo independiente que contribuye al estudio de los mercados con productos diferenciados y compras múltiples en distintos contextos: fusiones con empaquetamiento, mercados de dos lados y mercados segmentados.

Si bien las compras múltiples reducen o eliminan los incentivos a fusionarse en mercados con bienes diferenciados, la posibilidad de empaquetamiento introduce nuevos incentivos para la fusión, generando beneficios adicionales para las firmas a expensas de los consumidores.

En los mercados de dos lados, las compras múltiples también desempeñan un papel crucial. En este contexto, favorecen estrategias de diferenciación intermedia y trasladan el efecto del poder de mercado sobre los precios del lado con compras múltiples al lado sin compras múltiples. Asimismo, extienden los efectos cruzados de red, del lado sin compras múltiples, reduciendo los precios en el lado con compras múltiples.

Finalmente, en mercados segmentados, identifico una relación entre la estrategia de mínima diferenciación de Hotelling en interacciones únicas y la estrategia de máxima diferenciación en escenarios de competencia repetida. Además, demuestro la existencia de un trade-off entre vender múltiples productos y enfocarse en un solo producto. También observo que la posibilidad de compras múltiples puede modificar las estrategias de diferenciación óptimas.

Apéndices

Apéndice A: Capítulo 1

A.1.1 Verificando supuestos en el equilibrio de Hotelling sin empaquetamiento

Veamos que en el precio de equilibrio los supuestos se cumplan:

1. $0 \leq p_i \iff$

$$0 \leq \frac{v\theta}{2}$$
$$0 \leq v\theta$$

2. $x_{ji} \geq \frac{d}{2} \iff$

$$\frac{v\theta - p_i}{t} \geq \frac{d}{2}$$
$$\frac{v\theta}{2t} \geq \frac{d}{2}$$
$$\frac{v\theta}{dt} \geq 1$$

3. $x_{ji} \leq d \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{v\theta - p_i}{t} &\leq d \\ \frac{v\theta}{2t} &\leq d \\ \frac{v\theta}{dt} &\leq 2\end{aligned}$$

Por tanto el equilibrio cumple los supuestos para todos los parámetros no negativos que satisfacen:

$$\frac{v\theta}{dt} \in [1, 2] \tag{A.1}$$

A.1.2. Prueba de la proposición 1.1

En la figura A.3 se muestran cuatro situaciones que no pueden ser equilibrio. Las rectas negras representan la función de utilidad de consumir un bien al precio individual, u_i, u_j, las rectas azules representan la función de utilidad de consumir un bien con el descuento del paquete, u_{ji}, u_{ij}, y la linea roja representa la utilidad de consumir el paquete, u_{i+j}:

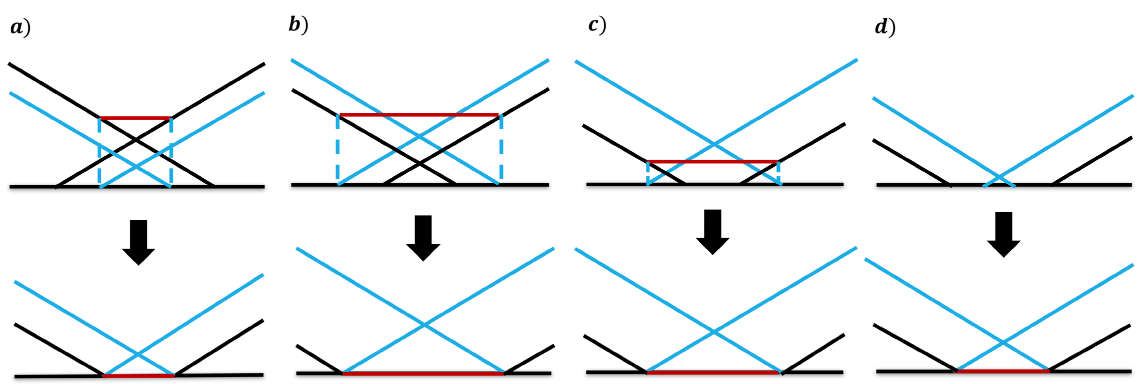

Figura A.3: Situaciones de no equilibrio

Los casos a, b y c no son equilibrios, pues se podría aumentar p_s para desplazar las rectas negras hacia abajo y mantener las curvas azules en su lugar aumentando p_b en la misma cantidad hasta que las rectas negras intersequen a las azules en el nivel de beneficios cero (situación que se muestra en la parte de abajo) donde la demanda de consumidores multi-hogar y exclusivos sigue siendo la misma, pero los precios ahora son mayores aumentando sus beneficios.

El caso d tampoco es equilibrio pues se pueden desplazar las rectas azules hacia arriba disminuyendo p_b hasta que intersequen a las negras en el nivel de beneficio cero (situación que se muestra en la parte de abajo) manteniendo las mismas demandas de exclusivos, pero pasando de no tener consumidores multi-hogar a tenerlos y por tanto aumentando sus beneficios.

Nótese que en el caso d podría ocurrir que la disminución necesaria fuera tal que $p_b < 0$, en ese caso sería posible un equilibrio sin multi-hogar, esto significa que los bienes de las firmas podrían estar tan diferenciados que ningún paquete haría que los consumidores de uno compraran el otro. Nos centraremos en los casos en que el equilibrio involucre multi-hogar.

Del análisis anterior concluimos que todo equilibrio (con multi-hogar) debe ser tal que las rectas azules se crucen con las negras en el nivel de beneficio cero, es decir que la utilidad de consumir el paquete (línea roja) sea cero

$$v(1+\theta) - td - p_b = 0,$$

entonces, el precio de equilibrio del paquete debe ser

$$p_b^* = v(1+\theta) - td, \tag{A.2}$$

lo que deja la función de beneficios como

$$\Pi^b = \begin{cases} 2p_s\left(\dfrac{v-p_s}{t}\right) + [v(1+\theta)-td]\left(d - 2\dfrac{v-p_s}{t}\right) & \text{si} \quad v \geq p_s \\ [v(1+\theta)-td]d & \text{si} \quad v < p_s \end{cases}. \tag{A.3}$$

La segmentación de la función de beneficios se hace porque si el precio del bien individual es más alto que su valoración, entonces todos los individuos comprarán el paquete.

Resolvemos:

$$\max_{p_s} \Pi^b. \tag{A.4}$$

<u>Si $v \geq p_s$</u>:

$$\text{CPO: } \frac{\partial \Pi^b}{\partial p_s} = 0, \tag{A.5}$$

$$\implies p_s^* = \frac{v(2+\theta) - td}{2} \tag{A.6}$$

En la sección A.1.3 del apéndice demuestro que el equilibrio cumple con todos los supuestos para el conjunto de parámetros no negativos que satisfacen

$$\frac{v\theta}{td} = 1. \tag{A.7}$$

Si $v < p_s$:

En la sección A.1.3 del apéndice demuestro que p_s satisface los supuestos si se cumple

$$p_s \leq v(1+\theta) - td.$$

Por lo tanto los precios de equilibrio son:

$$(p_b^*, p_s^*) = \begin{cases} \left(v(1+\theta) - td, \dfrac{v(2+\theta) - td}{2}\right) & \text{si} \quad p_s^* \leq v \\ (v(1+\theta) - td, p_s \in (v, v(1+\theta) - td]) & \text{si} \quad p_s^* > v \end{cases} \tag{A.8}$$

Sustituyendo el valor de los parámetros que hace que se cumplan los supuestos obtenemos

$$(p_b^*, p_s^*) = \begin{cases} (v, v) & \text{si} \quad p_s^* \leq v \\ (v(1+\theta) - td, p_s \in (v, v(1+\theta) - td]) & \text{si} \quad p_s^* > v \end{cases} \tag{A.9}$$

A.1.3. Verificación de supuestos en Hotelling con empaquetamiento

Si $v \geq p_s$:

Veamos que en los precios de equilibrio los supuestos se cumplan:

1. $p_s \leq p_b \iff$

$$\begin{aligned} \frac{v(2+\theta)-td}{2} &\leq v(1+\theta)-td \\ 1 &\leq \frac{v\theta}{dt} \end{aligned}$$

2. $0 \leq p_s \iff$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{v(2+\theta)-td}{2} \\ 1 &\leq \frac{v(2+\theta)}{dt} \end{aligned}$$

3. $\frac{d}{2} \leq x_{ji} \iff$

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} &\leq \frac{v\theta - p_b + p_s}{t} \\ p_b - p_s &\leq v\theta - \frac{dt}{2} \\ v(1+\theta) - dt - \left(\frac{v(2+\theta)-dt}{2}\right) &\leq v\theta - \frac{dt}{2} \\ \frac{v\theta - dt}{2} &\leq v\theta - \frac{dt}{2} \\ 0 &\leq \frac{v\theta}{2} \end{aligned}$$

4. $x_{ji} \leq d \iff$

$$\begin{aligned} \frac{v\theta - p_b + p_s}{t} &\leq d \\ p_s - p_b &\leq dt - v\theta \\ \frac{v(2+\theta)-dt}{2} - (v(1+\theta)-dt) &\leq dt - v\theta \\ \frac{dt - v\theta}{2} &\leq dt - v\theta \\ \frac{v\theta}{dt} &\leq 1 \end{aligned}$$

Observemos que la condición encontrada para 1 satisface la de 2 también, y que la condición para 3 siempre se cumple. Entonces basta con que se cumpla 1 y 4 simultáneamente:

$$\frac{v\theta}{dt} \leq 1 \leq \frac{v\theta}{dt}$$

Por tanto el conjunto de parámetros que hacen que el equilibrio satisfaga todos los supuestos son los que cumplen:

$$\frac{v\theta}{dt} = 1 \tag{A.10}$$

Si $v \leq p_s$:

Veamos que en los precios de equilibrio los supuestos se cumplan:

1. $p_s \leq p_b \iff$

$$p_s \leq v(1+\theta) - td$$

2. $0 \leq p_s \Longleftarrow$

$$0 \leq v$$

3. Esta condición garantiza que habrá consumidores multi-hogar. En este caso se cumple al considerar, en la función de beneficios, que la demanda del paquete es d (el total de consumidores).

4. Esta condición garantiza que la demanda no sobrepase la cantidad de consumidores en el mercado. En este caso se cumple al considerar, en la función de beneficios, que la demanda del paquete es d (el total de consumidores).

5. $p_s \geq v$

Observemos que la condición 2 siempre se cumple pues todos los parámetros son no negativos. La condición en 3 y 4 se cumplen por la forma de la función de beneficios. Entonces solo se necesita satisfacer la condición obtenida para 1.

A.1.4. Prueba de la proposición 1.2

Para que la comparación sea correcta, los parámetros deben ser los mismos y satisfacer las condiciones encontradas previamente para ambos casos por tanto consideraremos:

$$\frac{v\theta}{dt} = 1$$

Precio de un solo bien

$$\begin{aligned} p_i^m &< p_s^b = p_b^b \\ \frac{v\theta}{2} &< V(1+\theta) - dt \\ 1 &< \frac{v}{dt} + \frac{v\theta}{2dt} \end{aligned}$$

La desigualdad siempre se cumple pues $\frac{v}{dt} \geq \frac{v\theta}{dt} = 1$ ya que $0 \leq \theta \leq 1$. Por tanto, el precio de comprar un solo bien es **mayor** cuando se empaqueta.

Precio de los dos bienes

$$\begin{aligned} p_{i+j}^m &\leq p_b^b \\ v\theta &\leq v(1+\theta) - dt \\ 1 &\leq \frac{v}{dt} \end{aligned}$$

La desigualdad siempre se cumple pues $\frac{v}{dt} \geq \frac{v\theta}{dt} = 1$ ya que $0 \leq \theta \leq 1$. El precio de comprar ambos bienes es **mayor igual** cuando se empaqueta.

Demanda

$$
\begin{aligned}
D^m_{i+j} &< D^b \\
\frac{v\theta}{t} &< 2d \\
\frac{v\theta}{td} &< 2
\end{aligned}
$$

La desigualdad siempre se cumple pues $\frac{v}{dt} \geq \frac{v\theta}{dt} = 1$. Por tanto la demanda total de ambos bienes es **mayor** cuando se empaqueta.

Beneficio

$$
\begin{aligned}
\Pi^m_{i+j} &< \Pi^b \\
\frac{v^2\theta^2}{2t} &< [v(1+\theta) - dt]d \\
\frac{v\theta}{2} &\leq v(1+\theta) - dt \\
1 &\leq \frac{v}{dt} + \frac{v\theta}{2dt}
\end{aligned}
$$

La desigualdad siempre se cumple pues $\frac{v}{dt} \geq \frac{v\theta}{dt} = 1$ ya que $0 \leq \theta \leq 1$. Otra forma de verlo es que (p^m_i, p^m_j) está en el conjunto de elección del problema de maximización del empaquetador y no se escogió por tanto el beneficio de empaquetar debe ser mayor. Por tanto, el beneficio es **mayor** cuando se empaqueta.

Consumidores Exclusivos

$$
\begin{aligned}
x_i^e &> x_s^e \\
d - \frac{v\theta}{2t} &> 0 \\
2 &> \frac{v\theta}{dt}
\end{aligned}
$$

La desigualdad siempre se cumple pues $\frac{v\theta}{dt} = 1$. Por tanto, la demanda de consumidores exclusivos es **menor** cuando se empaqueta.

Consumidores Multi-Hogar

$$
\begin{aligned}
x^{mhm} &< x^{mhb} \\
\frac{v\theta}{t} - d &< d \\
\frac{v\theta}{dt} &< 2
\end{aligned}
$$

La desigualdad siempre se cumple pues $\frac{v\theta}{dt} = 1$. Por tanto, la demanda de consumidores multi-hogar es **mayor** cuando se empaqueta.

Excedente del Consumidor

$$
\begin{aligned}
EC^m &\geq EC^b \\
\frac{v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta) &\geq 0
\end{aligned}
$$

El excedente del consumidor es **menor** cuando se empaqueta, en particular solo es igual cuando $\theta = 1$.

Excedente del Productor

$$
\begin{aligned}
EP^m &< EP^b \\
\frac{(v\theta)^2}{2t} &< [V(1+\theta) - dt]d, \text{ Dividimos por } d \text{ y sustituimos } \frac{v\theta}{dt} = 1 \\
\frac{v\theta}{2} &< V(1+\theta) - dt, \text{ Dividimos por } dt \text{ y sustituimos } \frac{v\theta}{dt} = 1 \\
\frac{1}{2} &< \frac{v(1+\theta)}{dt} - 1, \text{ Sustituimos } \frac{v\theta}{dt} = 1 \\
\frac{1}{2} &< \frac{v}{dt}, \text{ Multiplicamos por } \theta \text{ y sustituimos } \frac{v\theta}{dt} = 1 \\
\frac{\theta}{2} &< 1
\end{aligned}
$$

El excedente del productor es **mayor** cuando se empaqueta.

Bienestar Social

$$
\begin{aligned}
BS^m &< BS^b \\
\frac{3v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta) &< [v(1+\theta) - dt]d \\
\frac{3v^2\theta^2}{4td} + v(1-\theta) &< v(1+\theta) - dt, \text{ Sustituimos } \frac{v\theta}{dt} = 1 \\
\frac{3v\theta}{4} &< 2v\theta - dt, \text{ Sustituimos } \frac{v\theta}{dt} = 1 \\
\frac{3}{4} &< 2 - 1 \\
0 &< \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

El Bienestar social es **mayor** cuando se empaqueta.

A.1.5. Verificación de supuestos en Salop con empaquetamiento

Veamos que en los precios de equilibrio los supuestos se cumplan:

1. $\frac{d}{2} < \frac{v\theta - p_b + p_s}{t} \iff$

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} &< \frac{4v\theta + dt - 2v\theta}{4t} \\ 1 &< \frac{2v\theta + dt}{2dt} \\ \frac{1}{2} &< \frac{v\theta}{dt} \end{aligned}$$

2. $\frac{v\theta - p_b + p_s}{t} < d \iff$

$$\begin{aligned} \frac{4v\theta + dt - 2v\theta}{4t} &< d \\ \frac{2v\theta + dt}{2dt} &< 1 \\ \frac{v\theta}{dt} &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3. $0 \leq p_s \iff$

$$0 \leq \frac{2v\theta + dt}{4}$$

4. $p_s \leq p_b \iff$

$$\begin{aligned} \frac{2v\theta + dt}{4} &\leq v\theta \\ dt &\leq 2v\theta \\ \frac{1}{2} &\leq \frac{v\theta}{dt} \end{aligned}$$

5. $p_b \leq v(1+\theta) - dt \iff$

$$\begin{aligned} v\theta &\leq v(1+\theta) - dt \\ 1 &\leq \frac{v}{dt} \\ \theta &\leq \frac{v\theta}{dt} \end{aligned}$$

Observe que la condición obtenida para 3 siempre se cumple y la condición en 4 está contenida en la condición para 2. Por tanto, en el equilibrio se cumplen los supuestos para todos los parámetros no negativos que satisfacen:

$$\frac{1}{2} < \frac{v\theta}{dt} < \frac{3}{2} \text{ y } 1 \leq \frac{v}{dt} \tag{A.11}$$

A.1.6. Prueba de la proposición 1.3

Para que la comparación sea correcta los parámetros deben ser los mismos y satisfacer las condiciones encontradas previamente para ambos casos por tanto consideraremos:

$$\frac{1}{2} < \frac{v\theta}{dt} < \frac{3}{2} \text{ y } 1 \leq \frac{v}{dt}$$

Precio de un solo bien

$$\begin{aligned} p_i^* &\leq p_s^* \\ \frac{v\theta}{2} &\leq \frac{2v\theta + dt}{4} \\ 0 &\leq dt \end{aligned}$$

El precio de comprar un solo bien es **mayor** cuando se empaqueta.

Precio de los dos bienes

$$\begin{aligned} p_i^* + p_j^* &= p_s^* \\ \frac{v\theta}{2} + \frac{v\theta}{2} &= v\theta \\ v\theta &= v\theta \end{aligned}$$

El precio de comprar ambos bienes es **igual** con o sin empaquetar.

Consumidores Exclusivos

$$x_i^{me*} \geq x_i^{be*}$$
$$\frac{2dt - v\theta}{t} \geq \frac{7dt - 4v\theta}{4t}$$
$$8dt - 4v\theta \geq 7dt - 4v\theta$$
$$dt \geq 0$$

La cantidad de consumidores exclusivos es **menor** cuando se empaqueta.

Consumidores multi-hogar exclusivos

$$x_m^{mhe*} \leq x_b^{mhe*}$$
$$\frac{v\theta - dt}{t} \leq \frac{2v\theta - dt}{2t}$$
$$2v\theta - 2dt \leq 2v\theta - dt$$
$$0 \leq dt$$

La cantidad de consumidores multi-hogar exclusivos es **mayor** cuando se empaqueta.

Consumidores multi-hogar rivales

$$x_m^{mhr*} \geq x_b^{mhr*}$$
$$2 \cdot \frac{v\theta - dt}{t} \geq \frac{4v\theta - 5dt}{2t}$$
$$4v\theta - 4dt \geq 4v\theta - 5dt$$
$$dt \geq 0$$

La cantidad de consumidores multi-hogar rivales es **menor** cuando se empaqueta.

Beneficios

$$
\begin{aligned}
\Pi^{m*} &\leq \Pi^{b*} \\
\frac{(v\theta)^2}{t} &\leq \frac{4v^2\theta^2 + d^2t^2}{4t} \\
4v^2\theta^2 &\leq 4v^2\theta^2 + d^2t^2 \\
0 &\leq d^2t^2
\end{aligned}
$$

El beneficio es **mayor** cuando se empaqueta.

Demanda

$$
\begin{aligned}
D^{m*} &= D^{b*} \\
\frac{2v\theta}{t} &= \frac{2v\theta}{t}
\end{aligned}
$$

La demanda es **igual** con o sin empaquetar.

Excedente del consumidor

Dado que el excedente del consumidor cuando se empaqueta solo cambia en el intervalo $h-k$, que constituye 3 segmentos de longitud d, entonces lo comparamos con el excedente del consumidor cuando no se empaqueta del segmento d multiplicado por 3:

$$
\begin{aligned}
EC^m_{h-k} &> EC^b_{h-k} \\
3 \cdot \left(\frac{v^2\theta^2}{4t} + vd(1-\theta) \right) &> \frac{3(2v^2\theta^2 - d^2t^2)}{8t} + 3vd(1-\theta) \\
\frac{td^2}{8} &> 0
\end{aligned}
$$

Por tanto el excedente del consumidor es menor con empaquetamiento.

$$
EC^{m*} > EC^{b*} \tag{A.12}
$$

Excedente del Productor

El excedente del productor es igual a los beneficios de la industria, como los únicos beneficios que cambian son los de las empresa que se fusionan y empaquetan y ya vimos que ganan mas empaquetando que sin empaquetar entonces el excedente del productor es mayor cuando se empaqueta:

$$
EP^{m*} < EP^{b*} \tag{A.13}
$$

Bienestar Social

Tanto el excedente del productor como el excedente de consumidor son mayores cuando se empaqueta, por tanto:

$$
\begin{aligned}
BS^m &\lesseqgtr BS^b \\
n\frac{3v^2\theta^2}{4t} + nvd(1+\theta) &\lesseqgtr (4+3n)\frac{v^2\theta^2}{4t} - \frac{7t^2d^2}{8t} + nvd(1-\theta) \\
\frac{7}{8} &\lesseqgtr \left(\frac{v\theta}{td} \right)^2
\end{aligned}
$$

Como supusimos que $\frac{v\theta}{td}$ pertenece al intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ entonces $\left(\frac{v\theta}{td}\right)^2$ pertenece al intervalo $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$. Vemos que $\frac{7}{8}$ se encuentra dentro de dicho intervalo, entonces el bienestar social será mayor en el empaquetamiento para $\sqrt{\frac{7}{8}} < \left(\frac{v\theta}{td}\right)$ y menor en el empaquetamiento para $\sqrt{\frac{7}{8}} > \left(\frac{v\theta}{td}\right)$.

A.1.7. Prueba del cambio en la Inversión con empaquetamiento

Si $\alpha = 2$,

- Condiciones para el caso sin empaquetamiento:

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \frac{v\theta k I^{\alpha}}{dt} \leq 2 \\
1 &\leq \frac{v\theta k}{dt}\left(\frac{2t}{\alpha v^2\theta^2 k^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} \leq 2 \\
1 &\leq \frac{v\theta k}{dt}\left(\frac{2t}{2v^2\theta^2 k^2}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 2 \\
1 &\leq \left(\frac{1}{d^3 t v\theta k}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 2
\end{aligned}
$$

- Condiciones para el caso con empaquetamiento:

$$
\begin{aligned}
\frac{v\theta k I^{\alpha}}{dt} &= 1 \\
\frac{v\theta k}{dt}\left(\frac{2}{\alpha d v(1+\theta)k}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} &= 1 \\
\frac{v\theta k}{dt}\left(\frac{1}{dv(1+\theta)k}\right)^{2} &= 1 \\
\frac{\theta}{d^3 t v(1+\theta)^2 k} &= 1
\end{aligned}
$$

Remplazamos la segunda condición encontrada en la primera para encontrar el conjunto de parámetros compatibles y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
1 \leq \frac{(1+\theta)^2}{\theta^2} &\leq 8 \\
\frac{1}{\sqrt{8}-1} &\leq \theta
\end{aligned}
$$

Ahora comparamos la inversión con y sin empaquetamiento.

$$
\begin{aligned}
I_s^{b*} &< I_i^{m*} \\
\left(\frac{2}{\alpha v d(1+\theta)k}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} &< \left(\frac{2t}{\alpha v^2\theta^2k^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \\
\left(\frac{1}{vd(1+\theta)k}\right)^{1} &< \left(\frac{t}{v^2\theta^2k^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
\left(\frac{1}{vd(1+\theta)k}\right)^{3} &< \frac{t}{v^2\theta^2k^2} \\
1 &< \frac{td^3vk(1+\theta)^3}{\theta^2} \text{ Sustituyendo la segunda condición} \\
1 &< \frac{1+\theta}{\theta} \\
0 &< 1
\end{aligned}
$$

Por tanto para $\alpha = 2$ la inversión disminuye con el empaquetamiento.

Apéndice B: Capítulo 2

B.2.1. Condiciones de primer orden del modelo con compras múltiples en el lado con ubicación endógena

Sustituyendo las ecuaciones. (2.2.6), (2.2.7), y (2.2.8) en la ecuación (2.2.9), las ganancias de cada plataforma se pueden expresar como:

$$\pi^A = \frac{rp_b^A + \beta p_s^A - p_s^A(p_s^A + p_s^B)}{2r} - \frac{1}{2\phi}[(rp_b^A + \beta p_s^A)\Delta p_b + (\alpha p_b^A + tp_s^A)\Delta p_s - (rp_b^A + \beta p_s^A)t\Delta x] \quad \text{(B.14)}$$

y

$$\pi^B = \frac{rp_b^B + \beta p_s^B - p_s^B(p_s^A + p_s^B)}{2r} + \frac{1}{2\phi}[(rp_b^B + \beta p_s^B)\Delta p_b + (\alpha p_b^B + tp_s^B)\Delta p_s - (rp_b^B + \beta p_s^B)t\Delta x], \quad \text{(B.15)}$$

donde $\phi \equiv t \cdot r - \alpha \cdot \beta$. Para obtener los precios de equilibrio, diferenciamos las ecuaciones (B.14) y (B.15) con respecto a $p_b^i, p_s^i, i \in \{A, B\}$. Las cuatro condiciones de primer orden para la maximización de beneficios son:

$$\frac{\partial \pi^A}{\partial p_b^A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\phi}[r\Delta p_b + \alpha \Delta p_s + rp_b^A + \beta p_s^A - tr\Delta x] = 0 \quad \text{(B.16)}$$

$$\frac{\partial \pi^B}{\partial p_b^B} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\phi}[r\Delta p_b + \alpha \Delta p_s - rp_b^B - \beta p_s^B - t\beta \Delta x] = 0 \quad \text{(B.17)}$$

$$\frac{\partial \pi^A}{\partial p_s^A} = \frac{\beta - 2p_s^A - p_s^B}{2r} - \frac{1}{2\phi}[\beta \Delta p_b + t\Delta p_s + \alpha p_b^A + tp_s^A - tr\Delta x] = 0 \quad \text{(B.18)}$$

$$\frac{\partial \pi^B}{\partial p_s^B} = \frac{\beta - p_s^A - 2p_s^B}{2r} + \frac{1}{2\phi}[\beta \Delta p_b + t\Delta p_s - \alpha p_b^B - tp_s^B - t\beta \Delta x] = 0 \quad \text{(B.19)}$$

B.2.2 Prueba de la proposición 2

A continuación examino 5 casos, que cubren todas las posibles ubicaciones de A y B, para encontrar los equilibrios.

Caso 1) $0 \leq x^A < x^B < 1$ o $0 < x^A < x^B \leq 1$

Sea $X = x^A + x^B$

Entonces: $\pi^A = (X - 1 - Y)^2$ y $\pi^B = (X - 1 + Y)^2$

Si $X - 1 - Y \leq 0 \Longrightarrow A$ aumenta su beneficio moviéndose a la izquierda.

Si $X - 1 - Y \geq 0 \Longrightarrow A$ aumenta su beneficio moviéndose a la derecha.

Si $X - 1 + Y \leq 0 \Longrightarrow B$ aumenta su beneficio moviéndose a la izquierda.

Si $X - 1 + Y \geq 0 \Longrightarrow B$ aumenta su beneficio moviéndose a la derecha.

Por lo tanto no existen equilibrios de las formas $0 \leq x^A < x^B < 1$ o $0 < x^A < x^B \leq 1$

Caso 2) $x^A = 0, x^B = 1$

Entonces: $\pi^A = (-Y)^2$ y $\pi^B = Y^2$

Si $Y < \frac{1}{2} \Longrightarrow$ A aumenta su beneficio moviéndose a 1.

Si $Y < \frac{1}{2} \Longrightarrow$ B aumenta su beneficio moviéndose a 0.

Por lo tanto cuando $Y \geq \frac{1}{2}$, $(0, 1)$ es equilibrio.

Caso 3) $0 < X = x^A = x^B < 1$

Entonces: $\pi^A = (2X - 1 - Y)^2$ y $\pi^B = (2X - 1 + Y)^2$

Si $2X - 1 - Y < \frac{X}{2} \Longrightarrow$ A aumenta su beneficio moviéndose a la izquierda.

Si $2X - 1 + Y > -\frac{1-X}{2} \Longrightarrow$ B aumenta su beneficio moviéndose a la derecha.

Para que ninguna de las plataformas tenga incentivos a moverse no deben cumplirse las dos condiciones anteriores.

Por lo tanto cualquier ubicación interior en la que se localicen juntas las plataformas es equilibrio si $\frac{2}{3}(1 + Y) \leq X \leq \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - Y)$.

Notar que para valores de $Y > -\frac{1}{4}$ no existirá ninguna ubicación que satisfaga la condición anterior y por tanto no habrá equilibrios.

Caso 4) $x^A = x^B = 0$

Entonces $\pi^A = (-1-Y)^2$ y $\pi^B = (-1+Y)^2$

Si $Y > \frac{1}{2} \Longrightarrow$ B aumenta su beneficio moviéndose a la derecha.

Por lo tanto si $Y \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow (0,0)$ es equilibrio.

Caso 5) $x^A = x^B = 1$

Entonces $\pi^A = (1-Y)^2$ y $\pi^B = (1+Y)^2$

Si $Y > \frac{1}{2} \Longrightarrow$ A aumenta su beneficio moviéndose a la izquierda.

Por lo tanto, si $Y \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow (1,1)$ es equilibrio.

Condiciones de equilibrio

$\frac{5}{2} \leq Y \leq \frac{7}{2}$

$$Y = \frac{2\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - r(\alpha - \beta)}{2rt}$$

$Y \gtrless \frac{1}{2}$

$$Y = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta - 6rt}{2rt}$$

B.2.3 Condiciones de primer orden del modelo con compras múltiples en el lado con ubicación exógena

Sustituyendo las ecuaciones (2.3.7), (2.3.8) y (2.3.9) en la ecuación (2.3.10), las ganancias de cada plataforma se pueden expresar como:

$$\pi^A = \frac{tp_s^A + [2tx^A + \alpha - (p_b^A + p_b^B)]p_b^A}{2t} - \frac{(rp_b^A + \beta p_s^A)\Delta p_b + (\alpha p_b^A + tp_s^A)\Delta p_s - (rp_b^A + tp_s^A)\beta\Delta x}{2\phi} \quad \text{(B.20)}$$

$$\pi^B = \frac{tp_s^B + [2t(1-x^B) + \alpha - (p_b^A + p_b^B)]p_b^B}{2t} + \frac{(rp_b^B + \beta p_s^B)\Delta p_b + (\alpha p_b^B + tp_s^B)\Delta p_s - (rp_b^B + tp_s^B)\beta\Delta x}{2\phi} \quad \text{(B.21)}$$

donde $\phi \equiv t \cdot r - \alpha \cdot \beta$. Para obtener el programa de precios de equilibrio, diferenciamos las ecuaciones (B.20) y (B.21) con respecto a $p_b^i, p_s^i, i \in \{A, B\}$. Las cuatro condiciones de precio de primer orden para la maximización de beneficios son:

$$\frac{\partial \pi^A}{\partial p_b^A} = \frac{2tx^A + \alpha - 2p_b^A - p_b^B}{2t} - \frac{1}{2\phi}[r\Delta p_b + \alpha\Delta p_s + rp_b^A + \beta p_s^A - \alpha\beta\Delta x] = 0 \quad \text{(B.22)}$$

$$\frac{\partial \pi^B}{\partial p_b^B} = \frac{2t(1-x^B) + \alpha - p_b^A - 2p_b^B)}{2t} + \frac{1}{2\phi}[r\Delta p_b + \alpha\Delta p_s - rp_b^B - \beta p_s^B - \alpha\beta\Delta x] = 0 \quad \text{(B.23)}$$

$$\frac{\partial \pi^A}{\partial p_s^A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\phi}[\beta\Delta p_b + t\Delta p_s + \alpha p_b^A + tp_s^A - t\beta\Delta x] = 0 \quad \text{(B.24)}$$

$$\frac{\partial \pi^B}{\partial p_s^B} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\phi}[\beta\Delta p_b + t\Delta p_s - \alpha p_b^B - tp_s^B - t\beta\Delta x] = 0 \quad \text{(B.25)}$$

Apéndice C: Capítulo 3

C.3.1. Prueba de la proposición 3.1: segmentación perfecta

Equilibrio estático

Primero notemos que la estrategia de tener dos productos con una característica cada uno, domina débilmente (estrictamente cuando el costo es mayor que cero) a la estrategia de tener un solo producto con ambas características. Esto ocurre debido al incremento en el costo del producto, ya que los consumidores clasificados en el segmento asociado con una característica no obtienen ninguna utilidad por tener la otra característica en su producto.

Además, la estrategia de tener un producto en cada segmento domina estrictamente a la estrategia de tener un solo producto para un segmento, pues al tener segmentación perfecta la demanda de un segmento es independiente de la demanda en el otro segmento.

Por tanto, si los costos son mayores que cero entonces la única estrategia de equilibrio en el juego estático es que ambas firmas produzcan bienes para cada segmento del mercado, es decir, mínima diferenciación multi-producto $\{1-2, 1-2\}$. Si los costos son cero, entonces, además de la estrategia de mínima diferenciación multi-producto, también es equilibrio la estrategia de mínima diferenciación mono-producto $\{12, 12\}$.

Equilibrio dinámico

Ahora consideremos que el juego de dos etapas se repite indefinidamente.

Según los teoremas Folk, considerando un factor de descuento δ y como estrategia de castigo la estrategia de equilibrio en el juego estático. Entonces la estrategia de máxima diferenciación mono-producto $\{j, -j\}$ es equilibrio del juego repetido si

$$\pi_i(j, -j) \geq (1-\delta)\pi_i^T + \delta\pi_i(1-2, 1-2) \quad \forall i \tag{C.26}$$

donde π_i^T es la mejor respuesta del jugador i a la acción $-j$. Además, sabemos que existirá algún δ que cumpla la condición anterior siempre que

$$\pi_i(j, -j) > \pi_i(1-2, 1-2) \quad \forall i, \tag{C.27}$$

de lo contrario la estrategia de equilibrio en el juego repetido será la estrategia de equilibrio en el juego estático $\{1-2, 1-2\}$.

Ahora veamos bajo qué condiciones de los parámetros se cumple (3.6.2). Considerando $c_1 \geq c_2$,

$$\pi_1(1,2) > \pi_1(1-2,1-2) \tag{C.28}$$

$$\frac{s_1(t-c_1)^2}{4t} > \frac{(s_1+s_2)(7c_1-2c_2-5t)^2}{225t} \tag{C.29}$$

$$s_1 > \left[\left(\frac{2}{15}\right)\frac{5t-7c_1+2c_2}{t-c_1}\right]^2 \tag{C.30}$$

$$s_1 > \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_1)}\right]^2 \tag{C.31}$$

La desigualdad se cumple si s_1 y Δc son suficientemente grandes respecto a t.

Análogamente para el jugador 2

$$\pi_2(1,2) > \pi_2(1-2,1-2) \tag{C.32}$$

$$s_2 = 1 - s_1 > \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_2)}\right]^2 \tag{C.33}$$

La desigualdad se cumple si s_1 y Δc son suficientemente pequeños respecto a t.

Para que se cumplan las dos condiciones simultáneamente

$$\left[\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_1)}\right]^2 < s_1 < 1 - \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_2)}\right]^2 \tag{C.34}$$

Repetimos el procedimiento anterior para $\pi_i(2,1) > \pi_i(1-2,1-2)$.

$$1 - s_1 > \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_1)}\right]^2$$

Se cumple si s_1 es suficientemente pequeño y Δc es suficientemente grande con respecto a t.

$$s_1 > \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_2)}\right]^2$$

Se cumple si s_1 es suficientemente grande y Δc es suficientemente pequeño con respecto a t.

Para que se cumplan las dos condiciones simultáneamente

$$\left[\frac{2}{3} + \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_2)}\right]^2 < s_1 < 1 - \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_1)}\right]^2 \tag{C.35}$$

Haciendo $\epsilon_1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_1)}\right]^2$ y $\epsilon_2 = \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{15}\frac{\Delta c}{(t-c_2)}\right]^2$, la estrategia de equilibrio del juego dinámico es:

- $\{1,2\}$ si $\epsilon_1 < s_1 < 1-\epsilon_2$ para δ suficientemente grande.
- $\{2,1\}$ si $\epsilon_2 < s_1 < 1-\epsilon_1$ para δ suficientemente grande.
- $\{1-2, 1-2\}$ en otro caso.

C.3.2 Prueba de la proposición 3.2: segmentación imperfecta con dos firmas y dos segmentos

Equilibrio estático

Consideraremos simetría en el tamaño de los segmentos $s_1 = s_2$ y en los costos de las características diferenciadoras $c_1 = c_2$ y además normalizaremos el costo de las características comunes a cero $c_0 = 0$.

Para encontrar el equilibrio calcularemos los beneficios de equilibrio del juego de la segunda etapa para cada una de las estrategias de diferenciación del juego de la primera etapa y después los compararemos entre sí para encontrar las estrategias de equilibrio de la primera etapa.

$\underline{\pi_1(1,2) \text{ vs } \pi_1(1-2,2)}$

En la figura C.4 se muestra el beneficio de la firma 1 de seguir cada estrategia respecto de la proporción de consumidores clasificados exclusivamente a un segmento dado.

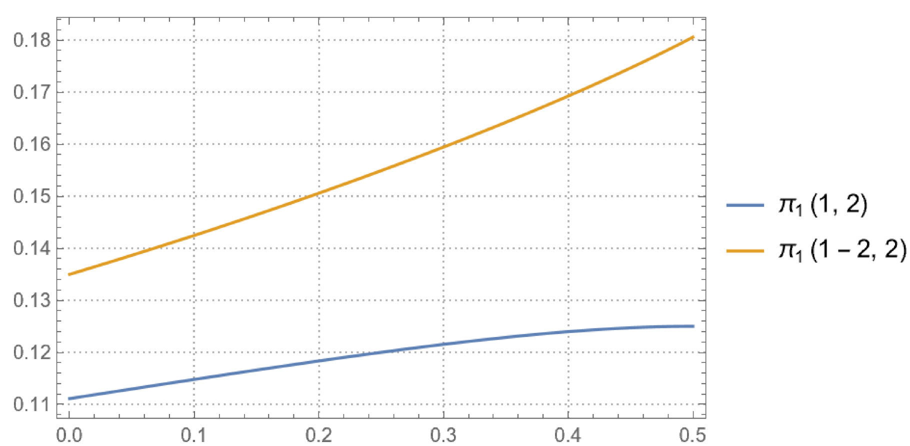

Figura C.4: Variación de los beneficios (eje y) con respecto a la proporción de consumidores exclusivos de un segmento (eje x).

Por tanto $\pi_1(1,2) > \pi_1(1-2,2)$ por lo que {1,2} y por simetría {2,1} no pueden ser equilibrios estáticos.

$\underline{\pi_1(12,2) \text{ vs } \pi_1(1-2,2)}$

En la figura C.5 se muestra que el beneficio de la firma uno de seguir cada estrategia respecto de la proporción de consumidores clasificados exclusivamente a un segmento dado.

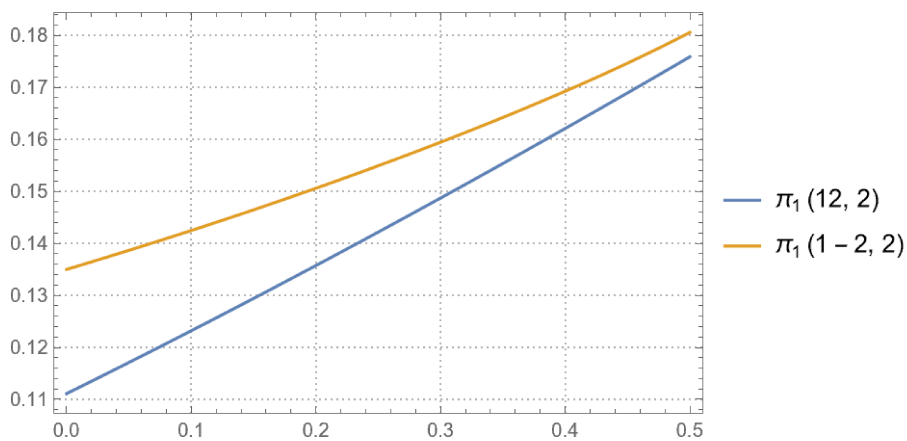

Figura C.5: Variación de los beneficios (eje y) con respecto a la proporción de consumidores exclusivos de un segmento (eje x)

Por tanto $\pi_1(12,2) < \pi_1(1-2,2)$ por lo que {12,2} no puede ser equilibrio del juego estático y por simetría {12,1}, {1,12} y {2,12} tampoco.

$\underline{\pi_2(1-2,2) \text{ vs } \pi_2(1-2,1-2)}$

En la figura C.6 se muestra que el beneficio de la firma dos de seguir cada estrategia respecto de la proporción de consumidores clasificados exclusivamente a un segmento dado.

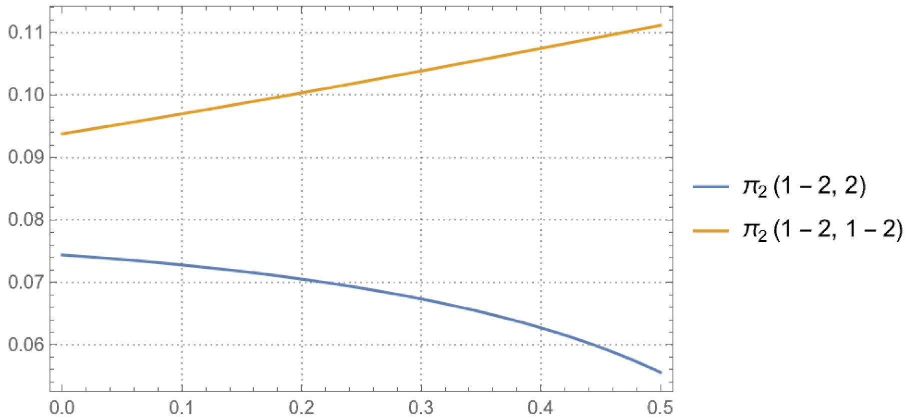

Figura C.6: Variación de los beneficios (eje y) con respecto a la proporción de consumidores exclusivos de un segmento (eje x)

Por tanto $\pi_2(1-2,2) < \pi_2(1-2,1-2)$ por lo que $\{$1-2,2$\}$ no puede ser equilibrio del juego estático y por simetría $\{$1-2,1$\}$, $\{$1,1-2$\}$ y $\{$2,1-2$\}$ tampoco.

$\underline{\pi_2(1-2,12) \text{ vs } \pi_2(1-2,1-2)}$

En la figura C.7 se muestra que el beneficio de la firma dos de seguir cada estrategia respecto de la proporción de consumidores clasificados exclusivamente a un segmento dado. En este caso consideramos el costo de las características diferenciadoras igual a cero.

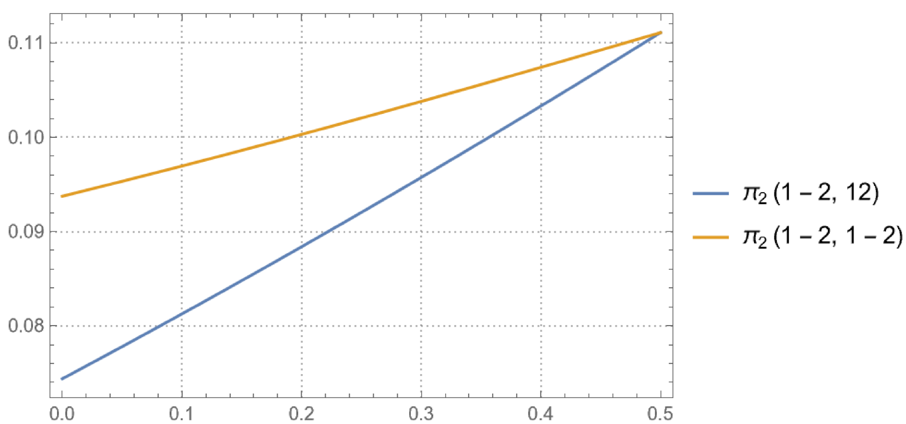

Figura C.7: Variación de los beneficios (eje y) con respecto a la proporción de consumidores exclusivos de un segmento (eje x).

Por tanto $\pi_2(1-2,12) < \pi_2(1-2,1-2)$ por lo que $\{$1-2,12$\}$ no puede ser equilibrio del juego estático y por simetría $\{$12,1-2$\}$ tampoco.

Notemos que la estrategia de tener un solo producto con varias características maximiza los beneficios de la firma 2 cuando el costo es cero, pues los consumidores no tienen que pagar por características que no les dan utilidad. Por tanto si $\pi_2(1-2, 12) < \pi_2(1-2, 1-2)$ cuando $c_i = 0$ entonces también lo es cuando $c_i > 0$.

$\underline{\pi_2(1-2, 12) \text{ vs } \pi_2(12, 12)}$

En la figura C.8 se muestra que el beneficio de la firma 2 de seguir cada estrategia respecto de la proporción de consumidores clasificados exclusivamente a un segmento dado. En este caso consideramos el costo de las características diferenciadoras igual a cero.

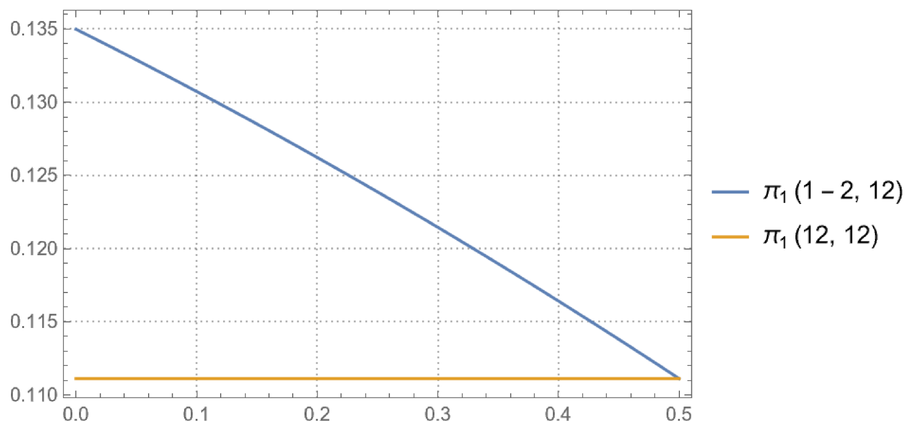

Figura C.8: Variación de los beneficios (eje y) con respecto a la proporción de consumidores exclusivos de un segmento (eje x)

Por tanto $\pi_1(1-2, 12) > \pi_1(12, 12)$ por lo que {12,12} no puede ser equilibrio del juego estático.

Notemos que la estrategia de tener un solo producto con varias características maximiza sus beneficios cuando el costo es cero, pues los consumidores no tienen que pagar por características que no les dan utilidad. Por tanto si $\pi_2(12, 12) < \pi_2(1-2, 12)$ cuando $c_i = 0$ entonces también lo es cuando $c_i > 0$.

De los análisis anteriores concluimos que la única estrategia de equilibrio en el juego estático es la de mínima diferenciación multi-producto {1-2,1-2}.

Equilibrio dinámico

Ahora consideremos que el juego de dos etapas se repite indefinidamente.

Según los teoremas Folk, considerando un factor de descuento δ y como estrategia de castigo la estrategia de equilibrio en el juego estático. Entonces la estrategia de máxima diferenciación mono-producto $\{j, -j\}$ es equilibrio del juego repetido si

$$\pi_i(j,-j) \geq (1-\delta)\pi_i^T + \delta\pi_i(1-2,1-2) \quad \forall i \tag{C.36}$$

donde π_i^T es la mejor respuesta del jugador i a la acción $-j$. Además, sabemos que existirá algún δ que cumpla la condición anterior siempre que

$$\pi_i(j,-j) > \pi_i(1-2,1-2) \quad \forall i \tag{C.37}$$

En la figura C.9 se observan las funciones de beneficio de ambas estrategias

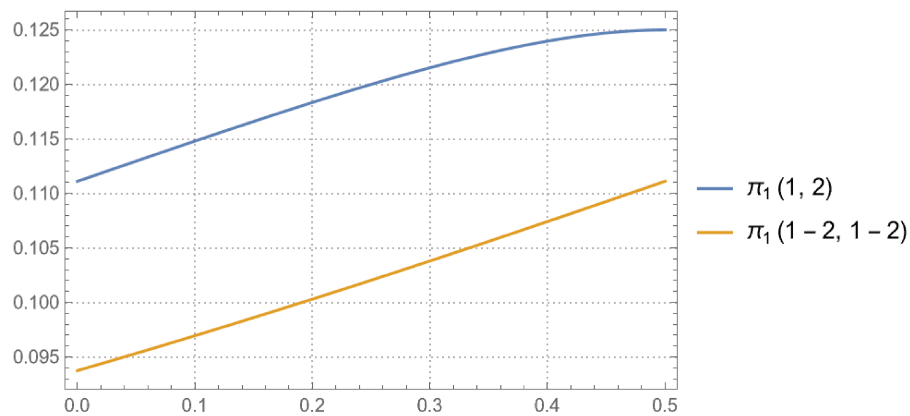

Figura C.9: Variación de los beneficios (eje y) con respecto a la proporción de consumidores exclusivos de un segmento (eje x)

Por lo tanto $\pi_i(j,-j) > \pi_i(1-2,1-2)$ siempre, entonces la estrategia de máxima diferenciación mono-producto es estrategia de equilibrio del juego repetido, aunque no es la única.

La estrategia de mínima diferenciación mono-producto también es un candidato a estrategia de equilibrio. Para asegurarnos de que la estrategia de máxima diferenciación mono-producto es la mejor estrategia en el juego dinámico vamos a comparar los beneficios de las estrategias anteriormente mencionadas.

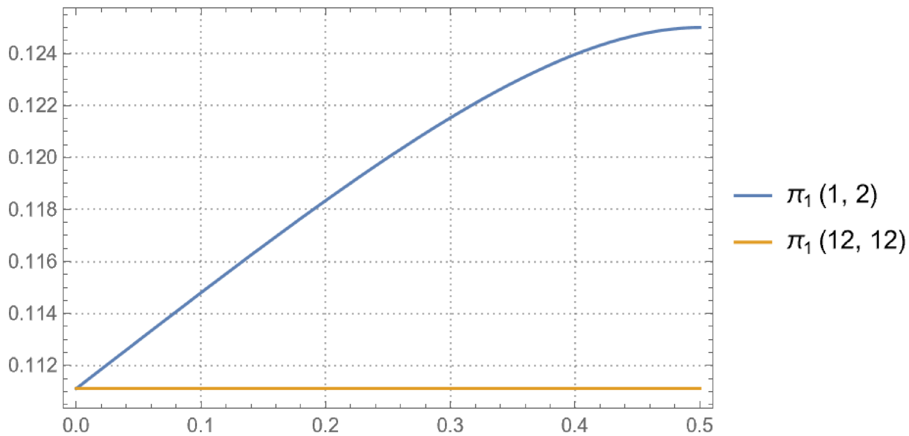

Figura C.10: Variación de los beneficios (eje y) con respecto a la proporción de consumidores exclusivos de un segmento (eje x)

Como se observa en la figura C.10 los beneficios de la estrategia de máxima diferenciación mono-producto siempre son mayores que los de la estrategia de mínima diferenciación mono-producto.

Por lo tanto, la estrategia de diferenciación óptima en el juego repetido es la estrategia de máxima diferenciación mono-producto $\{1{,}2\}$ siempre que δ sea suficientemente grande.

C.3.3 Prueba de la proposición 3.3: segmentación imperfecta con dos firmas y tres segmentos

Equilibrio estático

Consideraremos simetría en el tamaño de los segmentos $s_1 = s_2$ y en los costos de las características diferenciadoras $c_1 = c_2$ y además normalizaremos el costo de las características comunes a cero $c_0 = 0$.

Para encontrar el equilibrio calcularemos los beneficios de equilibrio del juego de la segunda etapa para cada una de las estrategias de diferenciación del juego de la primera etapa y después los compararemos entre si para encontrar las estrategias de equilibrio de la primera etapa.

En la figura C.11 se comparan los beneficios de diversas estrategias, de ellas se deduce que la única estrategia de equilibrio en el juego estático es la mínima diferenciación multi-producto $\{1-2-3, 1-2-3\}$.

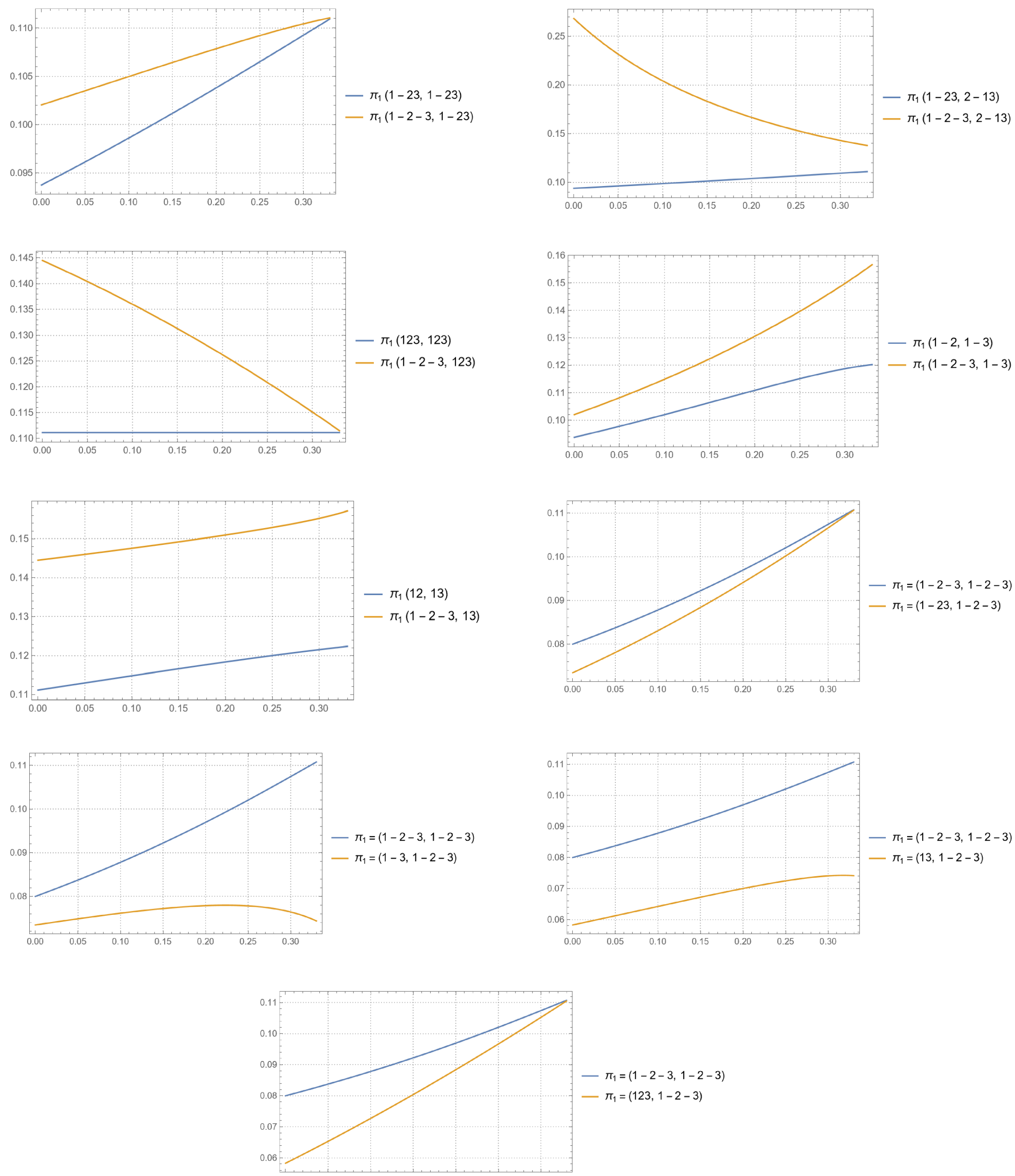

Figura C.11: Comparación de los beneficios de diversas estrategias.

Equilibrio dinámico

Ahora consideremos que el juego de dos etapas se repite indefinidamente.

Según los teoremas Folk, considerando un factor de descuento δ y como estrategia de castigo la estrategia de equilibrio en el juego estático. Entonces la estrategia de diferenciación $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ es equilibrio del juego repetido si

$$\pi_i(\sigma_1, \sigma_2) \geq (1-\delta)\pi_i^T + \delta\pi_i(1-2-3, 1-2-3) \quad \forall i \tag{C.38}$$

donde π_i^T es el beneficio de jugar la mejor respuesta del jugador i a la acción σ_{-i}. Además, sabemos que existirá algún δ que cumpla la condición anterior siempre que

$$\pi_i(\sigma_1, \sigma_2) > \pi_i(1-2-3, 1-2-3) \quad \forall i \tag{C.39}$$

Existen varias estrategias que pueden cumplir esta condición por lo que nos quedaremos con la que de mayores beneficios.

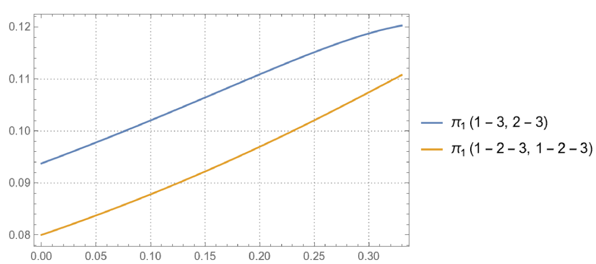

Figura C.12: Comparación de beneficios: diferenciación intermedia multi-producto vs máxima diferenciación multi-producto.

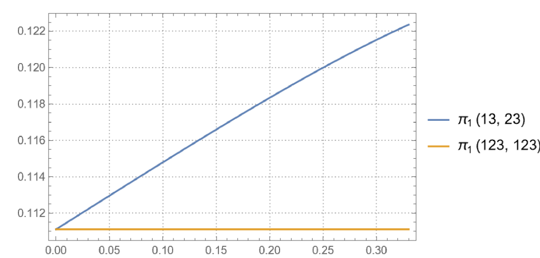

Figura C.13: Comparación de beneficios: diferenciación intermedia mono-producto vs mínima diferenciación mono-producto.

En las figuras C.12 y C.13 se observa que $\pi_1(13, 23) > \pi_1(123, 123)$ y $\pi_1(1-3, 2-3) > \pi_1(1-2-3, 1-2-3)$ y al comparar $\pi_1(13, 23)$ con $\pi_1(1-3, 2-3)$ encontramos que $\pi_1(13, 23) > \pi_1(1-3, 2-3)$ si y solo si

$$\left[1 - \frac{c}{t-c}\right] > \frac{(3-2s_i)^2(75 - 470s_i + 978s_i^2 - 664s_i^3 + 57s_i^4 - 70s_i^5)}{2(1-s_i)(20 - 71s_i + 57s_i^2)^2}$$

Por tanto si se satisface la desigualdad anterior, entonces $(13, 23)$ será la estrategia de diferenciación óptima en el juego dinámico, de lo contrario lo será $(1-3, 2-3)$ siempre que δ sea suficientemente grande.

C.3.4 Prueba de la proposición 3.4: compras múltiples

Equilibrio estático

Consideraremos simetría en el tamaño de los segmentos $s_1 = s_2$ y costos de las características diferenciadoras cero, además normalizaremos el costo de las características comunes a cero $c_0 = 0$.

Para encontrar el equilibrio calcularemos los beneficios de equilibrio del juego de la segunda etapa para cada una de las estrategias de diferenciación del juego de la primera etapa y después los compararemos entre si para encontrar las estrategias de equilibrio de la primera etapa.

La figura C.14 se comparan los beneficios de diversas estrategias, de ellas se deduce que la estrategia de mínima diferenciación mono-producto $\{12, 12\}$ es siempre equilibrio en el juego estático y la estrategia de mínima diferenciación multi-producto $\{1-2, 1-2\}$ es equilibrio del juego estático cuando $s_0 \geq 0.68$.

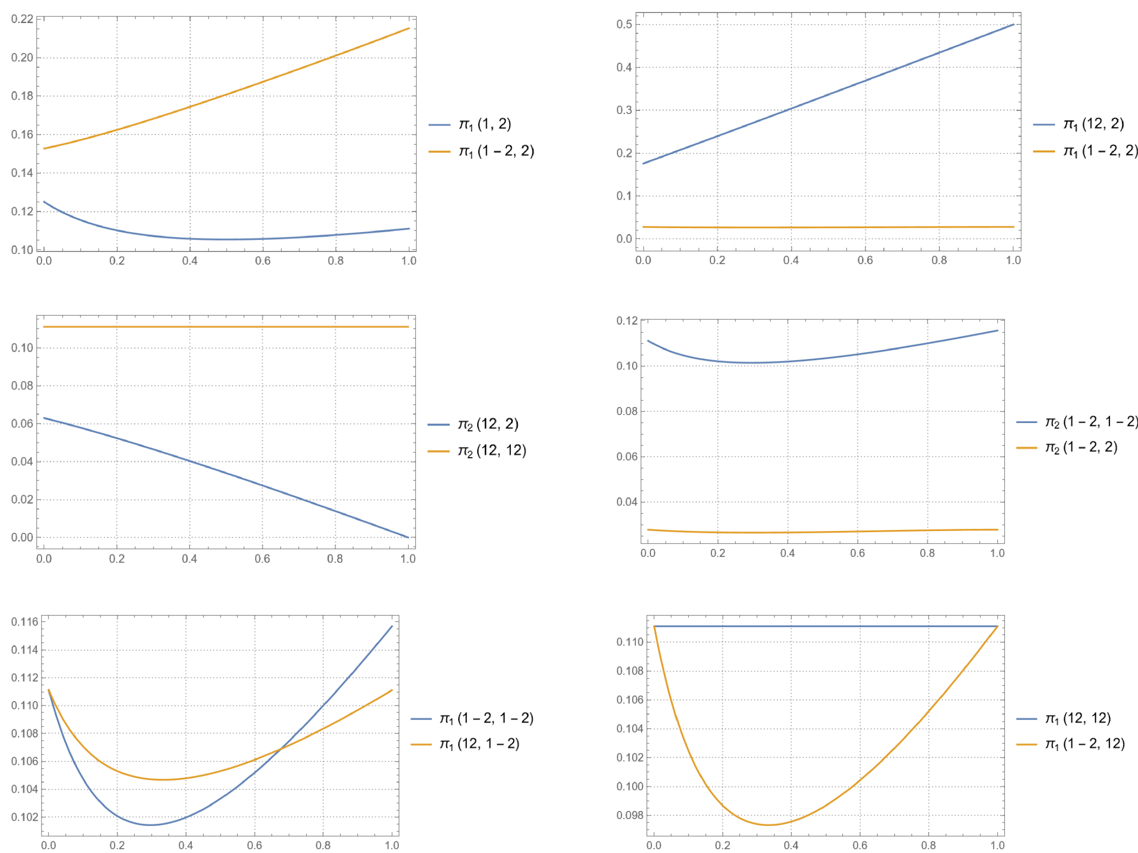

Figura C.14: Comparación de beneficios de varias estrategias

Equilibrio dinámico

Ahora consideremos que el juego de dos etapas se repite indefinidamente.

Según los teoremas Folk, considerando un factor de descuento δ y como estrategia de castigo la estrategia de equilibrio en el juego estático. Entonces la estrategia de diferenciación $\{s_1, s_2\}$ es equilibrio del juego repetido si

$$\pi_i(s_1, s_2) \geq (1-\delta)\pi_i^T + \delta\pi_i(12, 12) \quad \forall i \tag{C.40}$$

donde π_i^T es el beneficio de jugar la mejor respuesta del jugador i a la acción s_{-i}. Además, sabemos que existirá algún δ que cumpla la condición anterior siempre que

$$\pi_i(s_1, s_2) > \pi_i(12, 12) \quad \forall i \tag{C.41}$$

Existen varias estrategias que pueden cumplir esta condición por lo que nos quedaremos con la que de mayores beneficios.

Según la figura 3.2, en el juego dinámico, si δ es suficientemente grande la estrategia de diferenciación óptima será

- La máxima diferenciación multi-producto, $s = \{1, 2\}$, si $s_0 \leq 0.18$.
- La mínima diferenciación mono-producto, $s = \{12, 12\}$, si $0.18 \leq s_0 \leq 0.84$.
- La mínima diferenciación multi-producto, $s = \{1-2, 1-2\}$, si $0.84 \leq s_0$.

Bibliografía

Adams, W. J., & Yellen, J. L. (1976). Commodity Bundling and the Burden of Monopoly. The Quarterly Journal of Economics, 90(3), 475–498.

Anderson, S. P., Foros, Ø., & Kind, H. J. (2017). Product Funtionality, Competition, and Multipurchasing. International Economic Review, 58(1), 183–210.

Anderson, S. P., Foros, Ø., & Kind, H. J. (2019). The importance of consumer multihoming (joint purchases) for market performance: Mergers and entry in media markets. Journal of Economics & Management Strategy, 28(1), 125– 137.

Anderson S. P., Thisse J. (1988), Price discrimination in spatial competitive markets, European Economic Review, 32(2–3), 578-590.

Armstrong, M. (2006). Competition in Two-Sided Markets. The RAND Journal of Economics, 37(3), 668–691.

Armstrong, M. (2013). A more general theory of commodity bundling. Journal of Economic Theory, 148(2), 448-472.

Bakos, Y., & Brynjolfsson, E. (1999) Bundling Information Goods: Pricing, Profits, and Efficiency. Management Science 45(12), 1613-1630.

Bakos, Y., & Brynjolfsson, E. (2000). Bundling and Competition on the Internet. Marketing Science, 19(1), 63–82.

Chang C., Lin Y., Ohta H. (2013), Optimal location in two-sided markets, Economic Modelling, 35, 743-750.

Choi, J. P. (2008). Mergers With Bundling In Complementary Markets. Journal of Industrial Economics, 56(3), 553-577.

Choi, J. P. (2010). Tying in Two-Sided Markets with Multi-Homing. The Journal of Industrial Economics, 58(3), 607–626.

d'Aspremont, C., Gabszewicz, J. J., & J.-F. Thisse. (1979). On Hotelling's "Stability in Competition." Econometrica, 47(5), 1145–1150.

Economides N. (1986), Minimal and maximal product differentiation in Hotelling's duopoly, Economics Letters, 21(1), 67-71.

Economides, N. (1989). Desirability of Compatibility in the Absence of Network Externalities. The American Economic Review, 79(5), 1165–1181.

Economides, N. (1993). Mixed Bundling in Duopoly, Working Papers 93-29, New York University, Leonard N. Stern School of Business, Department of Economics.

Frank, R., Massy, W. and Wind, Y. (1972). Market Segmentation, Prentice, Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Granier, L. & Podesta, M. (2010). Bundling and Mergers in Energy Markets, Energy Economics, 32(6), 1316-1324.

Hans Jarle Kind & Lars Sørgard, (2013). ”Market Segmentation in Two-Sided Markets: TV Rights for Premier League,ÇESifo Working Paper Series 4060, CESifo.

Hemant K. Bhargava (2023). Multi-Device Consumption of Digital Goods: Optimal Product Line Design with Bundling, Journal of Management Information Systems, 40:3.

Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. The Economic Journal, 39(153), 41–57.

Hyunho Kim, & Serfes, K. (2006). A Location Model with Preference for Variety. The Journal of Industrial Economics, 54(4), 569–595.

Jeitschko, T. & Jung, Y. & Kim, J. (2014). Bundling and joint marketing by rival firms. DICE Discussion Papers 144, Heinrich Heine University Düsseldorf, Düsseldorf Institute for Competition Economics (DICE).

Jing, B. (2003). Market Segmentation for Information Goods with Network Externalities. ERN: Externalities; Redistributive Effects; Environmental Taxes & Subsidies (Topic).

Jullien, Bruno & Caillaud, Bernard. (2003). Chicken & Egg: Competition Among Intermediation Service Providers. RAND Journal of Economics. 34. 309-28.

Matutes, C., & Regibeau, P. (1988). “Mix and Match”: Product Compatibility without Network Externalities. The RAND Journal of Economics, 19(2), 221–234.

Matutes, C., & Regibeau, P. (1992). Compatibility and Bundling of Complementary Goods in a Duopoly. The Journal of Industrial Economics, 40(1), 37–54.

McAfee, R. P., McMillan, J., & Whinston, M. D. (1989). Multiproduct Monopoly, Commodity Bundling, and Correlation of Values. The Quarterly Journal of Economics, 104(2), 371–383.

Moorthy, K. S. (1984). Market Segmentation, Self-Selection, and Product Line Design. Marketing Science, 3(4), 288-307.

Nalebuff, B. (2002). Bundling and the GE-Honeywell Merger. Yale School of Management Working Papers ysm303, Yale School of Management.

Nault, Barrie & Wei, Xueqi. (2005). Product Differentiation and Market Segmentation of Information Goods. SSRN Electronic Journal. 10.2139/ssrn.909604. 724-751.

Neven D. (1986), On Hotelling’s competition with non-uniform customer distributions, Economics Letters, 21(2), 121-126.

O’Brien, D. P., & Shaffer, G. (2005). Bargaining, Bundling, and Clout: The Portfolio Effects of Horizontal Mergers. The RAND Journal of Economics, 36(3), 573–595.

Rochet, J.-C., & Tirole, J. (2003). Platform Competition in Two-sided Markets. Journal of the European Economic Association, 1(4), 990–1029.

Salinger, M. A. (1995). A Graphical Analysis of Bundling. The Journal of Business, 68(1), 85–98.

Salop, S. C. (1979). Monopolistic Competition with Outside Goods. The Bell Journal of Economics, 10(1), 141–156.

Schmalensee, R. (1984). Gaussian Demand and Commodity Bundling. The Journal of Business, 57(1), S211–S230.

Zhou, J. (2017). Competitive Bundling. Econometrica, 85(1), 145–172.

Índice de cuadros

Índice de figuras