



# EL COLEGIO DE MÉXICO

## CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

### **MAESTRÍA EN ECONOMÍA**

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN ECONOMÍA

### **VALUACIÓN Y RIESGO DE MERCADO: PORTAFOLIO DE OPCIONES PUT AMERICANAS**

**HUGO MOISÉS ALONSO CASTRO HERNÁNDEZ**

PROMOCIÓN 2018 - 2020

ASESOR:

DR. ENEAS CALDIÑO GARCIA

JULIO 2020



*A mi abuela y abuelo,  
por su amor perenne y apoyo irrestricto*

# Agradecimientos

Agradezco a la comunidad de el Colegio de México por darme la oportunidad de pertenecer a la institución. A México y Conacyt por el financiamiento que me permitió alcanzar estudios de posgrado. A los profesores del Centro de Estudios Económicos (CEE) por su compromiso con el crecimiento intelectual de los alumnos. Un agradecimiento especial al doctor Eneas Caldiño por dirigir esta tesis.

Este trabajo se nutrió de los tópicos expuestos por dos profesores del CEE. Primero de la clase de Valuación de Activos del Maestro Jorge Humberto Del Castillo y de su Seminario Avanzado de Derivados en Ciencias-UNAM. Segundo, y no menos importante: de la clase de Riesgos Bancarios del Doctor Mathias Schneider. Gracias a ellos por su compromiso con la excelencia.

# Resume

*In this dissertation, an algorithm based in the lattice method is developed using R with the aim to value American put options with collateral. The algorithm shows to converge to the Black-Scholes model's solution. Also, the analytical Liquidity Value Adjustment formula is derived for the case of European options in the context of multi-period trees. For American options, the algorithm proves to be sufficient in this work. The volatilities of the underlying assets (stocks) are estimated using GARCH models with the Maximum Likelihood method over returns which in some cases, follow a standardized t-student distribution. Finally, in order to measure the market risk, uncorrelated and correlated Monte Carlo methods are used to estimate the Value at Risk and Expected Shortfall of a portfolio of American put options under the Full Valuation approach. (Digital resources: [GitHub-Repository](#))*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Revisión de literatura</b>	<b>4</b>
1.1. El problema de valorar opciones Americanas	4
1.2. Default, Colateral y <i>Liquidity Value Adjustment</i>	5
<b>2. Árboles binomiales y opciones Europeas</b>	<b>7</b>
2.1. Árboles binomiales: sin colateral	7
2.2. Árboles binomiales: con colateral	11
2.3. Árboles binomial multi-periodo	15
2.3.1. Opción Europea - Sin colateral	16
2.3.2. Opción Europea - Con colateral	16
2.3.3. Opción Europea - Liquidity Value Adjustment	17
2.4. Ejemplo: árbol de tres periodos	18
2.4.1. Caso sin colateral	18
2.4.2. Caso totalmente colateralizado	26
2.4.3. Liquidity Value Adjustment opciones Europeas	31
<b>3. Opciones americanas</b>	<b>32</b>
3.1. Opción put Americana en árbol de 3 pasos	32
3.2. Algoritmo de valuación para opción Americana genérica en árbol de 6 pasos	33
3.3. Liquidity Value Adjustment opciones americanas	34
3.4. Portafolio de opciones put Americanas sobre acciones Mexicanas	34
<b>4. Estimación de la volatilidad del subyacente</b>	<b>36</b>
4.1. Volatilidad	36
4.1.1. Hechos estilizados de los retornos - $R_i$	36
4.2. Datos de acciones	38

4.3. Estructura de los rendimientos logarítmicos . . . . .	38
4.4. Time-varying Volatility - GARCH(p,q) . . . . .	41
4.5. Resultados de la estimación de la volatilidad . . . . .	42
<b>5. Resultados</b>	<b>44</b>
5.1. Capacidad del algoritmo de valuación . . . . .	44
5.2. Valuación de las put americanas . . . . .	47
5.3. Full Revaluation . . . . .	48
5.3.1. Rendimientos sin correlación . . . . .	49
5.3.2. Rendimientos con correlación . . . . .	49
<b>Conclusión</b>	<b>52</b>
<b>A. Árbol binomial multiperiodo - Europeas</b>	<b>53</b>
A.1. Sin colateral . . . . .	54
A.2. Con colateral . . . . .	59
A.3. Liquidity Value Adjustmen - Europeas . . . . .	60
<b>B. Árbol binomial multiperiodo - Americanas</b>	<b>63</b>
B.1. Sin colateral . . . . .	63
B.1.1. Escalamiento de la fórmula de valuación americana . . . . .	68
B.2. Con colateral . . . . .	71
B.3. Liquidity Value Adjustment . . . . .	72
<b>C. Máxima Verosimilitud - Quasi-Máxima Verosimilitud - GARCH(p,q)</b>	<b>73</b>
C.1. Máxima Verosimilitud - Normal . . . . .	73
C.2. Quasi-Máxima Verosimilitud . . . . .	74
C.3. Máxima Verosimilitud para $\tilde{t}(d)$ . . . . .	74
C.4. Propiedades del modelo GARCH(p,q) . . . . .	75
C.4.1. Volatilidad de largo plazo . . . . .	75
C.4.2. Volatilidad futura . . . . .	76
C.4.3. Volatilidad futura acumulada . . . . .	77
C.5. Resultados Eviews . . . . .	78

# Índice de cuadros

1. Tipos de opciones sobre activos sin dividendo . . . . .	1
2.1. Dinámica del subyacente/acción . . . . .	19
2.2. Dinámica del subyacente/acción . . . . .	20
2.3. Payoff opción call europea . . . . .	21
2.4. Valor del derivado . . . . .	23
2.5. Izquierda : Alpha ( $\alpha_i$ ) - Derecha: Costo de alpha ( $\alpha_i \cdot S_i$ ) . . . . .	24
2.6. Izquierda : Beta ( $\beta_i$ ) - Derecha: Portafolio replica ( $\alpha_i \cdot S_i + \beta$ ) . . . . .	24
2.7. Gestión del derivado en $t = 0$ . . . . .	25
2.8. Gestión del derivado en $t = 1$ . . . . .	25
2.9. Gestión del derivado en $t = 2$ . . . . .	25
2.10. Gestión del derivado en $t = 3$ . . . . .	26
2.11. Valor del derivado totalmente colateralizado . . . . .	27
2.12. Izquierda : Alpha ( $\alpha_i$ ) - Derecha: Costo de alpha ( $\alpha_i \cdot S_i$ ) . . . . .	28
2.13. Izquierda : Beta ( $\beta_i$ ) - Derecha: Portafolio replica ( $\alpha_i \cdot S_i + \beta$ ) . . . . .	29
2.14. Gestión del derivado con colateral en $t = 0$ . . . . .	29
2.15. Gestión del derivado en $t = 1$ . . . . .	30
2.16. Gestión del derivado en $t = 2$ . . . . .	30
2.17. Gestión del derivado en $t = 3$ . . . . .	31
3.1. Acciones subyacente a las opciones put Americanas . . . . .	35
4.1. Hechos estilizados de los retornos . . . . .	37
4.2. Muestra para estimar la volatilidad . . . . .	38
4.3. Test Jarque Bera de normalidad . . . . .	39
4.4. Test Kolmogorov–Smirnov similitud de dos muestras . . . . .	41
4.5. Resultados estimación volatilidad I . . . . .	42
4.6. Resultados estimación volatilidad II . . . . .	43

5.1. Parámetros para la valuación	47
5.2. Valor de la put Americana 02/01/2020	47
5.3. Liquidity Value Adjustment	47
5.4. Riesgo de Mercado Portafolio opciones Put Americanas	49
5.5. Matriz de correlaciones de los rendimientos últimos 100 días	50
5.6. Matriz de correlaciones de los rendimientos Monte Carlo no correlacionados	50
5.7. Matriz de correlaciones de los rendimientos Monte Carlo Correlacionados	50
5.8. Riesgo de Mercado Portafolio opciones Put Americanas - Rendimientos correlacionados	51
A.1. Árbol binomial multiperiodo del subyacente	53
A.2. Árbol binomial multiperiodo del subyacente (parte I)	54
A.3. Árbol binomial multiperiodo del subyacente (parte II)	56
A.4. Árbol binomial multiperiodo del derivado como esperanza condicional	58
A.5. Árbol binomial multiperiodo del derivado (parte I)	59
B.1. Árbol binomial multiperiodo de opción Americana del tipo put, I	65
B.2. Árbol binomial multiperiodo de opción Americana del tipo put, II	65

# Índice de figuras

4.1. QQ N(0,1) - Rendimientos logarítmicos estándar . . . . .	39
4.2. QQ t-Student estandar (d) - Rendimientos logarítmicos estándar . . . . .	40
4.3. Funciones de distribución acumulada . . . . .	41
5.1. Convergencia del algoritmo de valuación para una call americana . . . . .	45
5.2. Tiempo de computación y error para una call americana . . . . .	45
5.3. Tiempos de computación - 100 iteraciones . . . . .	46
5.4. Desviación Estandar Valuación Call Americana . . . . .	46
C.1. Resultados GARCH serie alfaa . . . . .	78
C.2. Resultados GARCH serie amxl . . . . .	79
C.3. Resultados GARCH serie bimboa . . . . .	79
C.4. Resultados GARCH serie cemexcpo . . . . .	80
C.5. Resultados GARCH serie femsaubd . . . . .	80
C.6. Resultados GARCH serie walmex . . . . .	81

# Introducción

Las opciones son instrumentos financieros que establecen los términos de transacciones que serán ejecutadas en una fecha futura. Como mínimo, en el contrato de la opción se declara el subyacente, que es el activo sobre el que se está acordando una transacción futura, el tipo de opción, las fechas en las que se puede ejercer el acuerdo y el precio de transferencia. El *payoff* o pago al momento de ejercer también está declarado, al menos de forma implícita. Las opciones más comunes son dos: *call* y *put*. Estas pueden estar pactadas bajo dos tipos de esquemas temporales: Europea y Americana.

**Cuadro 1. Tipos de opciones sobre activos sin dividendo**

Esquema	Call	Put
Europea	Black-Scholes	Black-Scholes
Americana	Black-Scholes	?

- La *call* es una opción de compra: el tenedor o comprador de la opción tiene el derecho, más no la obligación de **comprar** cierta cantidad de un activo a un precio pactado con anterioridad.
- La *put* es una opción de venta: el tenedor o comprador de la opción tiene el derecho, más no la obligación de **vender** cierta cantidad de un activo a un precio pactado con anterioridad.

La estructura *Europea* establece que el contrato (*put* o *call*) puede ser ejercido exclusivamente en una fecha futura específica, por ejemplo en un par de días, semanas o meses. La estructura *Americana* es más flexible que la Europea: permite ejercer la opción durante un periodo de tiempo. En general, éste es desde el inicio del contrato hasta una fecha final establecida previamente.

A las opciones Europeas ya sean *put* o *call* se les conoce como opciones *vainilla* pues son las más comunes en los mercados de opciones sobre activos como acciones (existen otros:

tasas, índices, etc.). Para estas opciones, las vainilla, existe un modelo aceptado en la literatura para su valuación. Este es conocido como el modelo Black-Scholes-Merton [BS73] y les valió el Premio Nobel de Economía a Robert C. Merton y Myron Scholes en 1997. Black-Scholes-Merton es un modelo que valúa opciones donde el *payoff* únicamente depende del estado (precio) del subyacente (acciones por ejemplo) en el momento de la madurez del contrato. Es decir: el modelo no sirve cuando el *payoff* depende de más variables. Por ejemplo si el *payoff* depende de la trayectoria del subyacente, como en una *double-knockout* y otras opciones exóticas, el modelo no puede entregar una valuación. Dado lo anterior tampoco sirve para valorar opciones Americanas, pues estas se pueden ejercer en muchos momentos y por tanto tienen dependencia de la trayectoria de los precios del subyacente y del tiempo.

Para este trabajo consideraremos opciones sobre activos que no pagan dividendos. En la tabla [1] se pueden ver los tipos de opciones más básicas. Vemos que en la opción Americana del tipo call dice Black-Scholes. Esto se debe a que *un inversor racional nunca ejercerá una opción call antes de su madurez, y por tanto el valor de una opción call Americana es el mismo que el valor de la opción call Europea*, [Mer73].

Por tanto, el modelo de Black-Scholes-Merton nos entrega una fórmula de valuación para estas tres tipos de opciones. Sin embargo para la put Americana el problema queda irresuelto pues *a veces hay ventajas de ejercer una opción put antes de su madurez.[...] hasta aquí nadie ha sido capaz de obtener una fórmula de valuación de una opción put Americana*, [BS73].

Han existido varios intentos para encontrar una fórmula cerrada de valuación de esta opción, pero en 2020, casi 50 años después del trabajo original de Fischer Black y Myron Scholes el problema continúa sin ser resuelto.

A pesar del no descubrimiento de una fórmula cerrada se han desarrollado métodos numéricos que entregan un acercamiento a la solución [BS78]. En las últimas décadas, de la mano, del aumento de la capacidad de procesamiento y la programación computacional se ha avanzado en algoritmos que utilizan integración numérica y métodos Monte Carlo para la valuación, [BS77]. Dado que hay casos multi-factoriales en los que los *métodos de diferencias finitas y técnicas binomiales se vuelven impracticables* se han desarrollado otros métodos como *Least-Squares Monte Carlo*, [LS01].

En 1979 John C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein presentan una forma simplificada del problema de valuación que se vale de la discretización del tiempo, [CRR79]. Estos métodos son conocidos como los métodos binomiales o de red. El método binomial es sencillo para pocos periodos (2-6) pero su complejidad aumenta conforme se requiere una aproximación más exacta y con esto también los requerimientos de cómputo. Su utilidad radica en su flexibilidad para modelar opciones complejas en las cuales la valuación depende de muchos factores y son dependientes de la trayectoria del subyacente,

como las opciones americanas. El método se vuelve poderoso y útil conforme se aumente el número de pasos en los que se divide el tiempo. Por eso su programación computacional es clave. Este es el método utilizado en esta tesis.

En este trabajo se expone una metodología para la valuación de un portafolio de opciones Americanas del tipo put sobre acciones cotizadas en la Bolsa Mexicana de Valores. Se considera el caso sin colateral y con colateral. Para este propósito se utilizan árboles binomiales por su flexibilidad a la hora de valuar opciones Americanas y *payoff path dependent*. Luego se evalúa el riesgo de mercado del portafolio.

En el capítulo uno se realiza una revisión de la literatura. Primero se expondrá el problema de la valuación de opciones del tipo americano y cómo este problema se puede sortear usando árboles binomiales. Luego, se argumenta la razón de considerar el caso con colateral de donde nace el concepto de *Liquidity Value Adjustment*.

En el segundo capítulo se expondrá la teoría de valuación centrándonos principalmente en opciones call Europeas. Esto último para simplificar la exposición e ir gradualmente a casos más complejos. Primero estudiaremos el caso de árboles de un periodo, con y sin colateral. Luego pasaremos al árbol multiperiodo. Finalmente expondremos dos ejemplos y detallaremos la gestión del derivado por parte de quien replica su *payoff*.

Las opciones Americanas las dejaremos para el capítulo 3. Este detalla y extiende lo planteado en el capítulo anterior para opciones que pueden ser ejercidas en cualquier momento del tiempo. Por su naturaleza se consideran árboles multiperiodo. Finalmente se entregan ejemplos de árboles de 3 y 6 pasos. La metodología expuesta aquí es implementada en el lenguaje R con el objetivo de llevar el número de pasos del árbol a un nivel imposible de realizar de forma manual (1000 pasos) a fin de tener una valuación precisa. Finalmente se presenta el portafolio de opciones put Americanas a valuar.

En el capítulo cuarto se estima la volatilidad de las acciones subyacentes, este paso es clave para tener una valuación adecuada. Primero se presentan los datos a utilizar. Luego se expone el modelo de estimación de volatilidad dinámica GARCH y sus supuestos. Se evalúan estos últimos y se ajustan los modelos. Se exponen las bondades del modelo GARCH y finalmente se presentan los resultados.

En el capítulo cinco se muestran los resultados de la valuación y la capacidad del algoritmo escrito en R. Se muestra su desempeño al acercarse a la solución de *Black-Scholes* para una call Europea. También son expuestos los requerimientos en tiempo y computo. Una vez obtenida la valuación del portafolio se expone la metodología de *Full Valuation* para estimar el *Value at Risk* (VaR) y el *Expected Shortfall* (ES) de este.

En el último capítulo se exponen las bondades del método, se plantean recomendaciones para futuras mejoras y ampliaciones, así se concluye el trabajo.

# Capítulo 1

## Revisión de literatura

### 1.1. El problema de valorar opciones Americanas

Fischer Black y Myron Scholes señalan en 1973 que *hasta aquí nadie ha sido capaz de obtener una fórmula de valuación de una opción put Americana*, [BS73]. Unos años después, en 1977 Michael Parkinson llega a una fórmula de valuación no cerrada para una opción put Americana, [Par77]. Sin embargo esta fórmula está anidada: se debe resolver iterativamente tomando el tiempo de forma discreta. El autor la resuelve utilizando integración numérica.

Para el próximo año, los autores declararon *aun no existe solución con forma cerrada para la put Americana la cual permita el ejercicio antes de madurez*, [BS77]. En este artículo los autores utilizan argumentos de dominancia estocástica de primer orden entre portafolios de opciones para plantear una ecuación diferencial parcial que finalmente es solucionada por el método de diferencias finitas. En [BS78] los mismos autores extienden las diferencias finitas para otro tipo de opciones.

Para 1983 los trabajos de [BS78], [CRR79] y [Par77] no habían decantado aun en una fórmula analítica cerrada y las únicas soluciones seguían siendo numéricas. [Joh83] señala que *naturalmente, una solución analítica es muy preferida, desafortunadamente, valorar la put Americana requiere resolver formidables y presumiblemente intratables problemas de condición frontera*. Basándose en un trabajo previo que encuentra límites superiores e inferiores para el valor de la put Americana H. E. Johnson deriva una fórmula de valuación *quasi-analítica*, el problema de esta expresión es que presenta objetos que deben ser estimados que no tienen una interpretación clara y dependen enteramente de las condiciones de mercado locales.

*Las soluciones numéricas son costosas y no ofrecen la intuición de la estática*

comparativa que ofrece una solución analítica [...] Una aproximación analítica ha sido desarrollada por Johnson pero [...] no hay forma de hacer su aproximación arbitrariamente más precisa, [GJ84]. En este artículo los autores ofrecen una fórmula analítica que satisface la ecuación diferencial parcial y las condiciones que caracterizan la valuación de la put Americana. Esta forma de solución permite obtener algo de intuición de estática comparativa, sin embargo dado que la fórmula es equivalente a una secuencia infinita de *opciones de opciones* la valuación exacta sigue sin ser posible.

Al día de hoy no existe una solución analítica, una fórmula cerrada útil, para la valuación de la put Americana. El enfoque más sencillo de solución sigue siendo el modelo binomial planteado en [CRR79] el problema es que su dependencia de calculo es alta: para tener una buena aproximación se requiere un árbol de al menos 100 pasos. En este trabajo llegamos a los 1000 pasos.

## 1.2. Default, Colateral y *Liquidity Value Adjustment*

Como se comentó en la introducción en este trabajo consideraremos el caso donde el derivado está colateralizado. El colateral *es un activo que respalda un riesgo de manera legalmente exigible*, [Gre12]. El ejemplo más sencillo de esto son las hipotecas: dado que el tenedor de una hipoteca puede fallar en el pago a su banco, este último toma como garantía el inmueble al que hace referencia dicha hipoteca. A este riesgo de no pago se le conoce como riesgo de crédito y en el mercado de los derivados se le señala como riesgo de contra-parte. El documento antes citado define el riesgo de crédito como *el riesgo de que el deudor sea incapaz o no quiera hacer un pago o cumplir con una obligación contractual*.

El colateral en general es un activo liquido y estable, se suele usar dinero denominado en monedas fuertes como el Dolar Americano o el Euro (81.9% en 2010 [Gre12]). En un mundo donde no hay incumplimiento el riesgo de crédito no existiría. Sin embargo luego de la Gran Recesión incluso las instituciones conocidas como "too big to fall" son consideradas sujetas a riesgo.

La quiebra de Lehman Brothers en 2008, un banco de inversión mundial y el cuarto más grande Estados Unidos mandó la señal al mercado de que todos pueden entrar en quiebra e incumplir sus contratos. *Era difícil que las cosas pudieran ir peor. Pero fueron peores para AIG*, [Eic14]. La quiebra de Lehman, absolutamente impensada días antes, puso en jaque a la aseguradora más grande del mundo que había *vendido cantidades copiosas de seguros contra los incumplimientos de Lehman*, American Internatioal Group (AIG). Esta última terminó por ser rescatada por la Reserva Federal el 16 de Septiembre del 2008 con un costo aproximado del 10% del PIB de USA para 2008. El rescate más grande realizado en la

historia de los Estados Unidos.

Lo importante de esta lección es notar que todas las grandes empresas financieras que entraron en quiebra en Estados Unidos tenían una evaluación de deuda y de fortaleza crediticia en niveles de inversión (AAA, AA, A, BBB) a la hora de incumplir.

Dado lo anterior, el estándar hoy por hoy para los derivados *over the counter* (OTC), son los contratos colateralizados. Es decir, además del contrato del derivado se genera un *credit support annex* que establece la dinámica del colateral: activo, periodicidades, flujos, etc. Tal es así que para 2009 ya el 90 % de la exposición a riesgo de crédito estaba neteada con posteo de colateral en los derivados OTC. Es importante señalar que el mercado OTC en 2010 era 10 veces más grande que el mercado *exchange-traded* de contratos más estandarizados, [Gre12].

Los esfuerzos teóricos para modelar derivados con colateral llegaron hasta el año 2010 donde Piterbarg, [Pit10], deriva una fórmula en tiempo continuo para la valuación de derivados colateralizados donde el *payoff* no depende más que del precio del subyacente a madurez. El artículo muestra que el valor del derivado con el colateral es igual al valor del derivado sin colateral más un objeto denominado *Liquidity Value Adjustment* (LVA). Este último se deriva del costo en el que se incurre por estar gestionando la entrega de colateral.

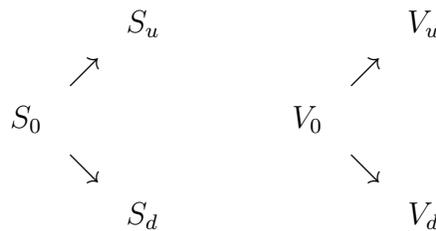
El caso discreto para derivados con colateral llega en el artículo de Castarga, en 2013, [Cas13]. En este el autor deriva el caso discreto de un periodo. Luego expone un ejemplo de 3 periodos sin escalar el modelo binomial al caso multiperiodo, ni su fórmula, tampoco del LVA multiperiodo. En el ejemplo hace una explicación rigurosa de la gestión del derivado por parte de la contraparte que vende (o está *corto*) en el derivado. Todo lo anterior considerando solo opciones europeas.

En este trabajo se derivará la fórmula del derivado con multiperiodos para las opciones europeas con *payoff* dependiente del valor del subyacente a madurez. Además se entregará una fórmula para el cálculo del LVA en este caso. Luego de esto se estudiará el caso para opciones Americanas, sin embargo no será posible llegar a una fórmula cerrada, pero sí a un procedimiento para que mediante su programación se llegue a un valor asintóticamente correcto.

# Capítulo 2

## Árboles binomiales y opciones Europeas

### 2.1. Árboles binomiales: sin colateral



Consideremos un activo riesgoso, por ejemplo la acción de una empresa que se transa en la bolsa local. Pensemos en un mundo de dos tiempos, el tiempo inicial,  $t = 0$ , la acción tiene el precio  $S_0$ , conocido en  $t = 0$ . Luego, en el siguiente periodo,  $t = 1$ , el activo puede tomar dos valores, uno de subida (*up*) y uno de bajada (*down*),  $S_u$  y  $S_d$  respectivamente.

Pensemos en un opción sobre este activo riesgoso. Es intuitivo pensar que el valor a madurez (momento en que: se ejecuta, cobra, rinde cuenta, honra el contrato) de alguna opción dependerá del valor que tome la acción, ya sea  $S_u$  o  $S_d$ .

Así, por ejemplo, si tenemos un call (opción de comprar en  $T$  a un precio  $K$  una unidad de la acción) su favor final será  $\max(S_u - K, 0)$  o  $\max(S_d - K, 0)$ , donde la función máximo modela el hecho de que el tenedor de la opción (el que tiene la opción de comprar) no ejercerá su derecho (opción de comprar) si esta le genera un flujo negativo.

Nuestro objetivo es poder evaluar esta opción, primero de manera abstracta, es decir; no asumiremos aun ninguna naturaleza para la opción, no diremos si hablamos de una call, put, forward, etc. Para esto nombramos a  $V_0$  como el valor que queremos encontrar, el valor de

la opción, del contrato, en el momento  $t = 0$ .  $V_u$  y  $V_d$  son los valores de la opción/contrato respectivos a un aumento,  $S_u$  o a una caída del precio de la opción,  $S_d$ .

Una forma de valuar este contrato/opción es pensar en un **portafolio de replica**. Este portafolio, como su nombre lo dice es una colección de activos, no riesgosos y riesgosos que **replican** el valor de la opción a madurez,  $V_d, V_u$ . Si encontramos un portafolio que sea capaz de replicar el valor de derivado a madurez, entonces tiene que ser el caso que en  $t = 0$  tengan el mismo del valor. De no cumplirse lo anterior existirían oportunidades de rentabilidad segura (sin riesgo) derivadas de la compra-venta (arbitraje) de activos dado el esquema de precios distorsionados.

Vamos a considerar que en nuestra economía existen dos activos, el riesgoso que ya definimos ( $S$ ) y el sin riesgo. Para efectos de nuestro desarrollo consideraremos que el activo sin riesgo es el dinero. Que el dinero sea el activo libre de riesgo quiere decir que crece a una cuantía conocida con antelación. Por ejemplo entre  $t = 0$  y  $t = 1$  crece a una cuantía constante. Llamaremos a ésta  $B^{-1}(0, 1)$ . Dado que es una cuantía constante (en este modelo) el proceso será siempre el mismo, por eso lo denotaremos  $B^{-1}(0, 1)$  incluso en los casos que estemos más allá del primer paso en los arboles binomiales que veremos más adelante. Así, que si tenemos  $\beta$  unidades de dinero en el periodo  $t = 0$  al siguiente periodo tendremos  $\beta B^{-1}(0, 1)$ . Luego, el porfolio de replica del que hablamos puede tener dos activos: el activo riesgoso y el activo sin riesgo, el dinero. Llamemos a este porfolio con la letra P:

$$P_0 = \alpha S_0 + \beta$$

$P_0$  es el valor de porfolio en  $t = 0$  que tiene  $\alpha$  unidades de activo riesgoso y  $\beta$  unidades de dinero. Aun no sabemos cómo cuantificar  $\alpha$  y  $\beta$ , ahora lo averiguaremos. Es bueno aclarar que estas cuantías de activos pueden ser positivas o negativas, son positivas cuando las posee, y negativas si las debe. Si tenemos el portafolio por un periodo el precio del activo riesgoso, digamos la acción, cambiará, será  $S_u$  o  $S_d$ . El dinero crecerá  $B^{-1}(0, 1)$  veces como señalamos antes. El siguiente árbol grafica esto:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P_u = \alpha S_u + \beta B^{-1}(0, 1) = V_u \\
 & \nearrow & \\
 P_0 = \alpha S_0 + \beta & & \\
 & \searrow & \\
 & & P_d = \alpha S_d + \beta B^{-1}(0, 1) = V_d
 \end{array}$$

La últimas igualdades se derivan del hecho que le imponemos al portafolio que replique el valor de la opción/contrato a madurez. De ahí tenemos que:

$$V_u = \alpha S_u + \beta B^{-1}(0, 1)$$

$$V_d = \alpha S_d + \beta B^{-1}(0, 1)$$

El sistema anterior se puede resolver para  $\alpha$  y  $\beta$  siempre y cuando conozcamos  $S_u$ ,  $S_d$ ,  $V_u$ ,  $V_d$ . Para que esto se cumpla tenemos que conocer dos cosas:

1. Tener alguna estimación de la volatilidad del activo de riesgo, con la idea de estimar  $S_u$ ,  $S_d$ . Supuesto que no es demasiado fuerte si tenemos acceso a información histórica sobre el activo, lo cual es factible si hablamos, por ejemplo, de una acción.
2. Conocer el valor de la opción a madurez. Lo cual no es un supuesto demasiado fuerte pues para opciones *call*, *put* y *forward* esto es conocido. Es conocido siempre que el *payoff* (flujo final) dependa solo de valores terminales, mas no de de la trayectoria del subyacente/activo de riesgo.

Cumpléndose lo anterior el sistema tiene una solución y es única (sistema lineal con determinante diferente de 0)

$$\alpha = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}$$

$$\beta = B(0, 1) \left( V_u - \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_u \right)$$

Así, el valor del portafolio en  $t = 0$  es

$$P_0 = \alpha S_0 + \beta$$

$$= \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_0 + B(0, 1) \left( V_u - \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_u \right) = V_0$$

Podemos ver el valor del derivado depende de los movimientos futuros de la opción, del activo subyacente y del **proceso valor** del dinero ( $B^{-1}(0, 1)$ ), todos, valores conocidos en  $t = 0$ , por tanto  $V_0$  puede ser conocido en  $t = 0$ . Lo mismo ocurre con  $\alpha$  y  $\beta$ , lo cual permite al emisor/vendedor de la opción/contrato/derivado un mecanismo de replicación para poder honrar/cumplir con el contrato una vez llegada la madurez de éste.

Observemos que si definimos

$$q := \frac{S_0 B^{-1}(0, 1) - S_d}{S_u - S_d}$$

Podemos escribir  $V_0$  de la siguiente forma

$$V_0 = B(0, 1) [qV_u + (1 - q)V_d] \quad (2.1)$$

Lo último puede ser interpretado de la siguiente manera: el valor del derivado es igual al valor presente ( $B(0, 1)$ ) de la esperanza del *payoff* bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{Q} = \{q, (1 - q)\}$ . Podemos ver, de la definición de  $q$ , que esta medida de probabilidad no depende de la naturaleza de la opción, sino solo del comportamiento del subyacente y del proceso valor del dinero.

$$V_0 = B(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{\{u,d\}}]$$

Si pensamos en el proceso valor del dinero como

$$B^{-1}(0, 1) = e^r \longrightarrow B(0, 1) = e^{-r}$$

reemplazando

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{\{u,d\}}] \\ e^r &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_{\{u,d\}}}{V_0}\right] \end{aligned}$$

Si definimos  $V_{\{u,d\}} = V_0 + \Delta V_{\{u,d\}}$  donde  $\Delta V_{\{u,d\}}$  es una variable aleatoria desconocida en  $t = 0$  con realización en  $t = 1$  que refleja el cambio en valor del derivado. Reemplazamos

$$e^r = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_0 + \Delta V_{\{u,d\}}}{V_0}\right] = 1 + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Delta V_{\{u,d\}}}{V_0}\right] \longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Delta V_{\{u,d\}}}{V_0}\right] = e^r - 1$$

De la última ecuación podemos interpretar que la esperanza del cambio en valor del derivado, como razón de su valor inicial, no es sino la tasa de crecimiento derivada del proceso de valor del dinero. Eso quiere decir que bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  se espera que el cambio en valor del derivado sea la tasa de crecimiento del valor de dinero, que es conocida. Por esta última razón a la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  se le llama medida de probabilidad de **riesgo neutral**.

## 2.2. Árboles binomiales: con colateral

Para entender el concepto de colateral vamos a pensar en un caso puntual. Consideremos dos entidades, A y B. La entidad A le compró a la entidad B una opción del tipo call (europea) por una acción ( $S$ ) con un strike de \$100 con madurez de un mes. Pensemos que la acción tiene un precio de mercado inicial de \$95 y que a medida que comienzan a pasar los días aumenta. En la primera semana cierra en \$110 y a la siguiente cierra en \$120, en la jerga financiera se dice que la opción esta *in the money*.

Se dice que está *in the money* pues tenemos que la opción tiene un *valor presente neto positivo* (NPV por sus siglas en ingles), es decir que dado el precio de subyacente observado en el mercado el valor presente de lo que se espera de *payoff* es positivo: **se espera que el poseedor de la opción tenga un flujo positivo**, dado el precio al alza (call) que se esta observando para el subyacente. Por eso el *in the money*.

Si imaginamos que el valor de la opción sigue aumentando la opción entonces estará *deep in the money*, esto último no es un problema si tenemos absoluta seguridad de que la institución B honrará el contrato una vez llegada su madurez. Esto, seria plausible de creer si la entidad B es una gran institución financiera con una alta calificación crediticia. Sin embargo, la Gran Recesión del 2008 nos enseñó que incluso las grandes empresas financieras internacionales pueden entrar en impago sin que sean emitidas suficientes señales al mercado para incorporar el **riesgo de crédito**, denominado **riesgo de contraparte** en el mundo de los derivados.

Dado lo anterior, entre más *in the money* esté un contrato, mayor es el tamaño de la pérdida si la contraparte no honra el contrato, lo cual es un mayor riesgo. Dado este riesgo de incumplimiento es que existe el **colateral**, como una suerte de garantía que contribuye a mitigar el denominado **riesgo de contraparte**.

El caso inverso, para este caso de una call, es que la opción esté *out-of-the-money*. Esto ocurre cuando el precio de mercado del subyacente está por abajo del *Strike*: al tenedor de la call le conviene, si lo necesita, comprar el subyacente en el mercado abierto pues este precio es menor que el precio que tendría que pagar por ejercer su derecho. Si nos enfrentamos a una serie de caídas en el precio del subyacente a medida que se acerca la fecha de madurez el NPV será cada vez menor para el tenedor de la opción pues la probabilidad de que ejerza será cada vez menor. Así, si tenemos una serie de caídas en el precio del subyacente el riesgo de contraparte se irá reduciendo y por tanto de retirará colateral en lugar de entregarlo.

En general, el colateral es un activo que se entrega a la contraparte con el NPV positivo en forma de garantía. Suele ser un activo líquido como los Dólares Americanos o alguna otra moneda fuerte.



$$V_u^c - CB_c^{-1}(0, 1) = \alpha S_u + \beta B^{-1}(0, 1)$$

$$V_d^c - CB_c^{-1}(0, 1) = \alpha S_d + \beta B^{-1}(0, 1)$$

$$\alpha = \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} \quad (2.2)$$

$$\beta = B(0, 1) \left( V_u^c - CB_c^{-1}(0, 1) - \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_u \right) \quad (2.3)$$

Por no arbitraje tenemos que

$$V_0^c - C = \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_0 + B(0, 1) \left( V_u^c - CB_c^{-1}(0, 1) - \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_u \right)$$

$$V_0^c - C + CB_c^{-1}(0, 1)B(0, 1) = \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_0 + B(0, 1) \left( V_u^c - \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_u \right)$$

Recordemos la definición de  $q$

$$q = \frac{S_0 B^{-1}(0, 1) - S_d}{S_u - S_d}$$

$$V_0^c - C + CB_c^{-1}(0, 1)B(0, 1) = B(0, 1) [qV_u^c + (1 - q)V_d^c]$$

$$V_0^c - \gamma V_0^c + \gamma V_0^c B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1) = B(0, 1) [qV_u^c + (1 - q)V_d^c]$$

$$V_0^c [1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)] = B(0, 1) [qV_u^c + (1 - q)V_d^c]$$

$$V_0^{\gamma c} = \frac{B(0, 1) [qV_u^{\gamma c} + (1 - q)V_d^{\gamma c}]}{1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)} \leftarrow \text{Parcialmente colateralizado} \quad (2.4)$$

$$\text{Sin colateral} \quad \gamma = 0 \longrightarrow V_0^{nc} = B(0, 1) [qV_u^{nc} + (1 - q)V_d^{nc}] \quad (2.5)$$

$$100\% \text{ colateralizado} \quad \gamma = 1 \longrightarrow V_0^c = B_c(0, 1) [qV_u^c + (1 - q)V_d^c] \quad (2.6)$$

Podemos ver que cuando hacemos  $\gamma = 0$  recuperamos el caso que vimos en el apartado anterior:

$$V_0^{nc} = B(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{\{u,d\}}^{nc}]$$

cuando hacemos que  $\gamma = 1$  tenemos una expresión casi idéntica. La diferencia es que ahora sacamos el valor presente con el proceso valor del colateral, más ya no con la del dinero corriente:

$$V_0^c = B_c(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{\{u,d\}}^c]$$

Otra cosa interesante de notar es que seguimos pensando en la medida de probabilidad  $\mathbb{Q} = \{q, (1 - q)\}$  de riesgo neutral donde

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{\Delta V_{\{u,d\}}^c}{V_0^c} \right] = B^{-1}(0, 1) - 1 = e^r - 1$$

es decir, seguimos considerando que el contingente/derivado/contrato/opción cambia gobernado por el mismo proceso valor que sufre el dinero corriente. Volvamos a la expresión del derivado **Parcialmente Colateralizado**

$$V_0^c[1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)] = B(0, 1)[qV_u^c + (1 - q)V_d^c]$$

Quedémonos con la parte izquierda de la ecuación anterior

$$V_0^c[1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)] = V_0^c - V_0^c[\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]$$

Igualando la parte derecha de la últimas dos ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} B(0, 1)[qV_u^c + (1 - q)V_d^c] &= V_0^c - V_0^c[\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)] \\ &= V_0^c - V_0^c[1 - B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]\gamma \\ &= V_0^c - V_0^c \left[ \frac{B(0, 1)}{B(0, 1)} - \frac{B(0, 1)}{B_c(0, 1)} \right] \gamma \\ &= V_0^c - V_0^c B(0, 1) \left[ \frac{1}{B(0, 1)} - \frac{1}{B_c(0, 1)} \right] \gamma \end{aligned}$$

Es claro notar que la parte izquierda de la expresión anterior es idéntica al valor del derivado sin colateral

$$\begin{aligned}
V_0^{nc} &= V_0^c - \gamma V_0^c B(0, 1) [B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)] \\
&= V_0^c - CB(0, 1) [B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)]
\end{aligned}$$

$B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)$  es la diferencia de los procesos valor del dinero corriente y el colateral. Llamemos a esta diferencia  $\Delta_{m-c}^{-1}$  y reordenemos la expresión anterior

$$V_0^{nc} = V_0^c - B(0, 1)\{\Delta_{m-c}^{-1}C\}$$

Notemos que

1.  $\Delta_{m-c}^{-1}C$  es el **valor futuro del colateral** bajo el proceso valor que se obtiene de la *diferencia entre los procesos valor* del dinero corriente y el activo utilizado como colateral.
2.  $B(0, 1)$  es el inverso del proceso valor del dinero corriente. Es decir, en un *factor* que convierte flujos futuros a **valor presente**.
3.  $B(0, 1)\{\Delta_{m-c}^{-1}C\}$  es el valor presente (proceso valor del dinero corriente) del valor futuro (diferencia entre procesos valor dinero corriente - colateral) del colateral.
4. A este objeto se le denomina *Ajuste de Valuación por Liquidez* (**AVL**).

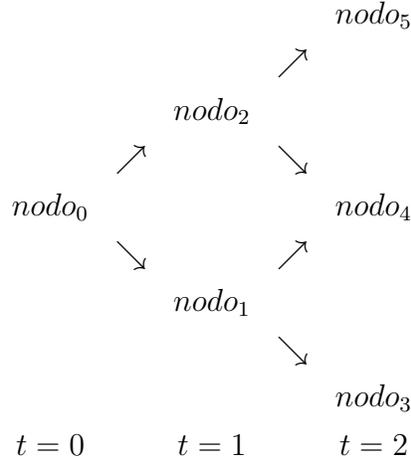
De la última ecuación podemos decir que:

*El valor del derivado no colateralizado es igual al del derivado perfectamente (100 %) colateralizado menos el Ajuste de Valuación por Liquidez.*

## 2.3. Árboles binomial multi-periodo

Nuestro objetivo es utilizar el árbol binomial multi-periodo pues este permite aumentar de forma arbitraria la calidad de la valuación. [CRR79] muestra que en el límite, cuando el número de pasos del árbol tiende a infinito, la solución entregada por este método contiene al modelo de Black-Scholes como un caso particular. De ahí la potencia de este simple modelo.

Primero declararemos cómo se enumeran los nodos en un árbol. Esto se hace de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. En un árbol de tres periodos esto se hace así



El proceso matemático para encontrar las fórmulas de un árbol binomial de  $N$  periodos es tedioso y largo, pero también excitante y entretenido, por eso las derivaciones están en el apéndice [A](#). En este apéndice se derivan las fórmulas de la valuación del derivado sin y con colateral. Además de deriva la fórmula de valuación del *Liquidity Value Adjustment*. La valuación multi-periodo del derivado con colateral parcial y el LVA son innovaciones de este trabajo al modelo expuesto en [CRR79](#), por tanto nuevas en la literatura. Son parte importante de esta tesis.

### 2.3.1. Opción Europea - Sin colateral

La fórmula de valuación para opciones europeas sin colateral es la siguiente [\(A.1\)](#)

$$V_0 = B^N(0, 1) \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} q^i (1-q)^{N-i} V_{\{\frac{N \cdot (N+1)}{2} + i\}} \right]$$

### 2.3.2. Opción Europea - Con colateral

La fórmula de valuación para opciones europeas con perfecto colateral es la siguiente [\(A.3\)](#)

$$V_0^c = B_c^N(0, 1) \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} q^i (1-q)^{N-i} V_{\{\frac{N \cdot (N+1)}{2} + i\}} \right]$$

La fórmula de valuación para opciones europeas con colateral parcial es la siguiente [\(A.2\)](#)

$$V_0^c = \frac{B^N(0, 1)}{[1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1) B(0, 1)]^N} \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} q^i (1-q)^{N-i} V_{\{\frac{N \cdot (N+1)}{2} + i\}} \right]$$

### 2.3.3. Opción Europea - Liquidity Value Adjustment

La fórmula del LVA para opciones europeas con colateral parcial es la siguiente (A.4)

$$LVA = V_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} B(0, 1)^i [B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)]^i$$

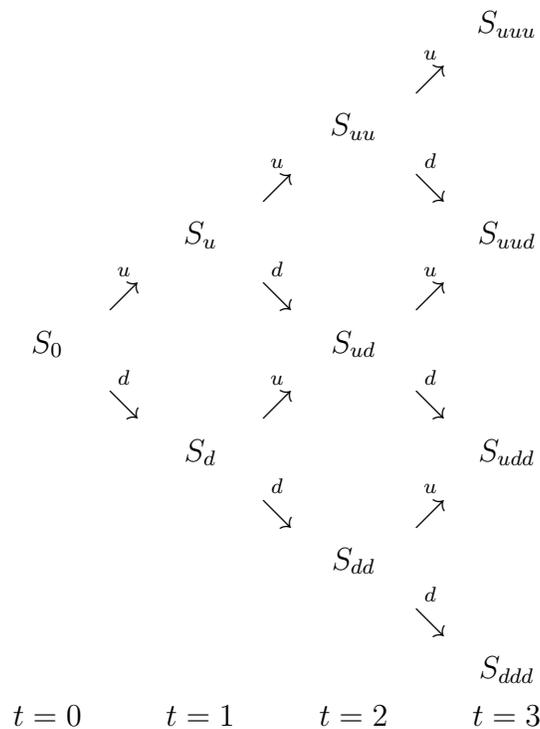
## 2.4. Ejemplo: árbol de tres periodos

### 2.4.1. Caso sin colateral

Opción europea del tipo call sobre *equity* (acción) con 3 periodos. La siguiente tabla muestra los datos de mercado.

Elemento	Símbolo	Valor
Proceso valor dinero corriente (anual)	$B^{-1}(0, 1)$	$e^{0,07}$
Proceso valor activo colateral (anual)	$B_c^{-1}(0, 1)$	$e^{0,05}$
Valor inicial de la acción	$S_0$	\$1000
Volatilidad anual de la acción	$\sigma$	60 %
Precio de entrega pactado ( <i>Strike</i> )	$K$	\$1100
Tiempo para la madurez de la opción	$\sigma$	medio año (260)

En nuestro objetivo de construir un árbol para los movimientos del precio de la acción necesitamos calcular los movimientos hacia arriba (up) y abajo (down) dado el número de periodos en el que dividiremos nuestro horizonte a madurez. Sabemos  $S_0$ , pero necesitamos calcular  $S_u$  y  $S_d$  y luego  $S_{uu}$ ,  $S_{ud}$  y  $S_{dd}$



A este tipo de árbol se le conoce como árbol multiplicativo que recombina valores. Podemos encontrar unos valores  $u$  y  $d$  que nos permiten construir el árbol que describe los

movimientos del subyacente en base a su valor inicial y su volatilidad, CRR79.

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}} \quad (2.7)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} = \frac{1}{u} \quad (2.8)$$

$$\text{Donde } dt = \frac{\text{Tiempo para la madurez}}{\text{número de periodos de árbol}}$$

Por convención y orden, expresamos todo el términos anuales. En nuestro caso el tiempo para la madurez es medio año, 1/2 años, y nuestro árbol tiene 3 periodos. La volatilidad anual es de 60 % o 0.6

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}} = e^{0,6 \cdot \sqrt{\frac{0,5}{3}}} = 1,2777556123$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} = e^{-0,6 \cdot \sqrt{\frac{0,5}{3}}} = 0,7827444773$$

Con estos valores de  $u$  y  $d$  podemos construir el árbol del subyacente

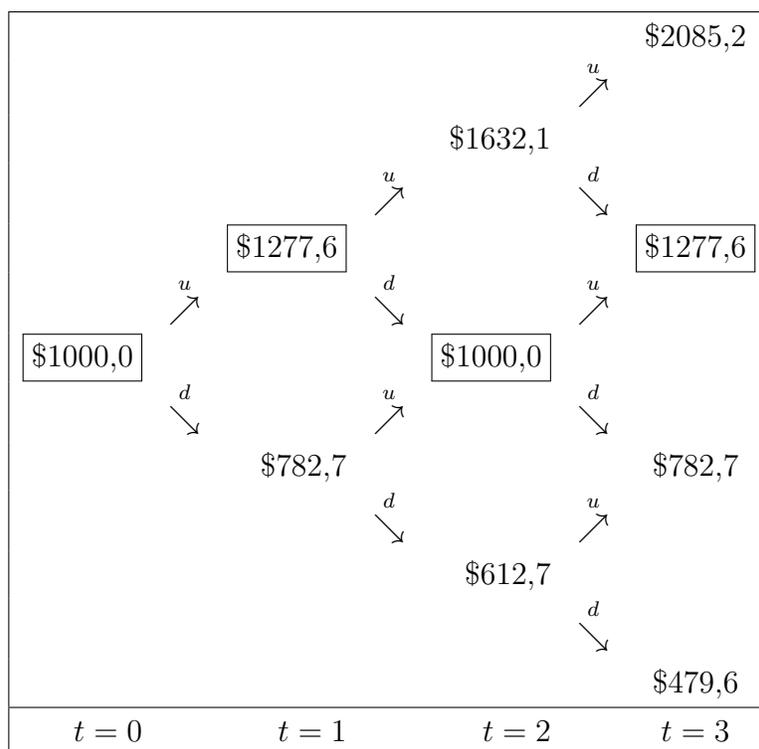
**Cuadro 2.1. Dinámica del subyacente/acción**

Nodo	Cálculo	Valor
$S_0$	$S_0$	\$1000,0
$S_u$	$uS_0$	\$1277,6
$S_d$	$dS_0$	\$782,7
$S_{uu}$	$u^2S_0$	\$1632,1
$S_{ud}$	$udS_0$	\$1000,0
$S_{dd}$	$d^2S_0$	\$612,7
$S_{uuu}$	$u^3S_0$	\$2085,2
$S_{udd}$	$u^2dS_0$	\$1277,6
$S_{udd}$	$ud^2S_0$	\$782,7
$S_{ddd}$	$d^3S_0$	\$479,6

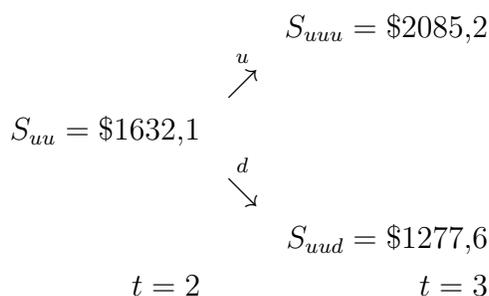
Ahora que tenemos la dinámica del subyacente, procederemos a calcular los valores de la opción call europea. Para esto necesitamos calcular la medida  $\mathbb{Q} = \{q, (1 - q)\}$

$$q = \frac{S_0 B^{-1}(0, 1) - S_d}{S_u - S_d}$$

**Cuadro 2.2. Dinámica del subyacente/acción**



A primera vista puede parecer que tenemos que calcular una medida  $\mathbb{Q} = \{q, (1 - q)\}$  para cada nodo, sin embargo, dada la forma en la que construimos el árbol, todos los nodos son factores de  $S_0$  por tanto la medida  $\mathbb{Q}$  será igual en cada nodo. Por ejemplo elijamos el nodo 5



Podemos recordar la forma en que calculamos los valores anteriores

$$q = \frac{S_{uu}B^{-1}(0,1) - S_{uud}}{S_{uuu} - S_{uud}} = \frac{u^2S_0B^{-1}(0,1) - u^2dS_0}{u^3S_0 - u^2dS_0} = \frac{B^{-1}(0,1) - d}{u - d}$$

donde la última igualdad se sigue factorizando y eliminando términos. Si hacemos el cálculo para cada nodo, llegaremos al mismo valor de  $\mathbb{Q}$ , pues nuestro árbol es multiplicativo

y recombina valores. Estamos casi listos para calcular  $q$ . Sólo nos falta comprender  $B^{-1}(0, 1)$ .

Por nuestra tabla sabemos que el proceso valor del dinero corriente es  $B^{-1}(0, 1) = e^{0,07}$ , pero dice que esta es anual. Sin embargo, el tiempo de madurez de nuestra opción es  $\frac{1}{2}$  fracciones de año, y esta fracción la hemos dividido en 3 periodos, o pasos, en nuestro árbol. Por tanto, dado que el proceso valor del dinero corriente es continuo en nuestro caso podemos encontrar que

$$B^{-1}(0, 1) = e^{0,07 \cdot \frac{1/2}{3}} = e^{0,07 \cdot \frac{1}{6}}$$

Esto quiere decir que en nuestro árbol, cada vez que pasa un periodo, una unidad de dinero corriente (\$1) pasa a ser  $\$e^{0,07 \cdot \frac{1}{6}}$  unidades de dinero corriente. Calculemos  $q$

$$q = \frac{B^{-1}(0, 1) - d}{u - d} = \frac{e^{0,07 \cdot \frac{1}{6}} - 0,783}{1,278 - 0,783} = 0,46278$$

$$\mathbb{Q} = \{0,46278, 0,53722\}$$

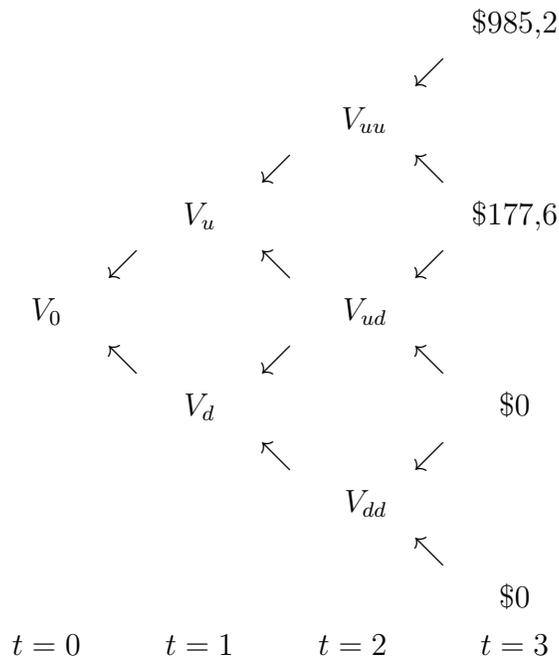
Ahora que tenemos  $q$  podemos calcular el árbol del derivado haciendo uso de un proceso **backward**, pues conocemos el valor del derivado en el momento de su madurez, condicionado a que el subyacente, la acción en este caso, tome cierto precio.

En nuestro árbol nuestra acción puede tomar cuatro precios diferentes a la madurez del contrato, ¿en qué caso el tenedor de la opción irá a reclamar esta a su vendedor? reclamará siempre y cuando esta reclamación no le resulte perjudicial. En nuestro caso, un call, una opción de compra, el tenedor del contrato ejercerá su opción siempre que pueda pagar menos por la acción que el precio que se está observando en el mercado. Es decir, siempre que el *strike* sea menor que  $S_T$ ,  $K < S_T$ .

**Cuadro 2.3. Payoff opción call europea**

Precio	Strike	Acción	Payoff
\$2085.2	\$1100	Ejerce	\$985.2
\$1277.6	\$1100	Ejerce	\$177.6
\$782.7	\$1100	No ejerce	\$0.0
\$479.6	\$1100	No ejerce	\$0.0

Ahora, con la ecuación [2.1](#) podemos calcular el valor del derivado en los nodos de  $t = 2$



$$V_{uu} = B(0, 1) [qV_{uuu} + (1 - q)V_{uud}] = e^{-0,07 \cdot \frac{1}{6}} \cdot [0,46 \cdot \$985,2 + 0,54 \cdot \$177,6] = \$544,9$$

$$V_{ud} = B(0, 1) [qV_{uud} + (1 - q)V_{udd}] = e^{-0,07 \cdot \frac{1}{6}} \cdot [0,46 \cdot \$177,6 + 0,54 \cdot \$0] = \$81,2$$

$$V_{dd} = B(0, 1) [qV_{udd} + (1 - q)V_{ddd}] = e^{-0,07 \cdot \frac{1}{6}} \cdot [0,46 \cdot \$0 + 0,54 \cdot \$0] = \$0$$

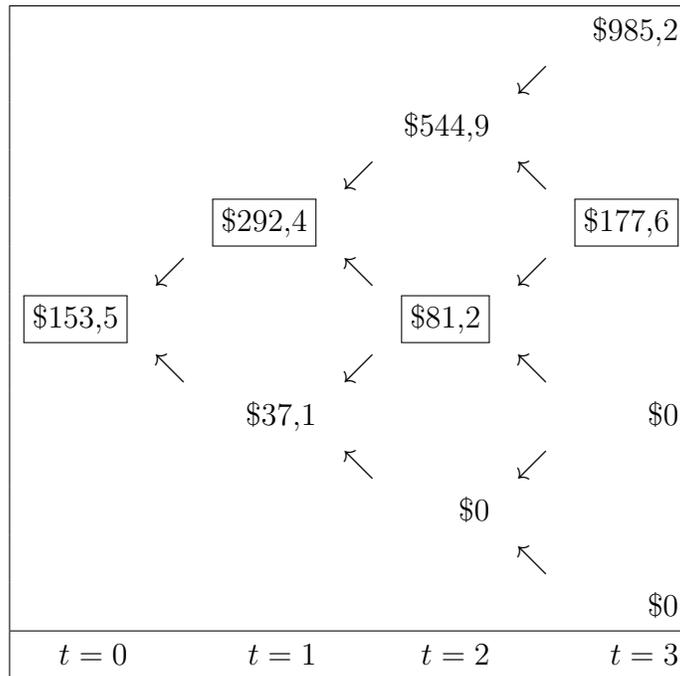
Ya que tenemos los valores del derivado en  $t = 2$  podemos obtener los de  $t = 1$  y entonces el valor  $V_0$ . El árbol queda como en la tabla [2.4](#).

Con el árbol de valores del derivado (y subyacente) podemos construir los siguientes árboles de alpha ( $\alpha$ ), costo de alpha ( $\alpha \cdot S_i$ ), Beta ( $\beta$ ), Portafolio de réplica ( $\alpha \cdot S_i + \beta$ ).

Para comprender qué es cada elemento de las tablas [2.5](#) y [2.6](#) analizaremos un ejemplo. Pensemos en que somos nosotros los vendedores de la call europea sobre la acción. En la tabla [2.4](#) vimos que el valor de la opción en  $t = 0$  es de \$153,5. Vamos a pensar en que el precio de la acción toma un camino específico, este camino está marcado en todos los árboles. En específico podemos observar en la tabla [2.2](#) que el precio parte en \$1000,0, luego sube a \$1277,6, luego baja a \$1000,0 y finaliza en \$1277,6, momento en que el tenedor de la opción (quien nos compró) ejercerá su derecho, pues con un *strike* de \$1100 tiene un flujo asegurado de \$177,6.

Vamos a describir paso por paso la gestión de portafolio que debemos llevar a cabo para poder responder con exactitud a los movimientos del mercado (de la acción) con tal de poder

**Cuadro 2.4. Valor del derivado**



responder por si nuestro comprador, llegada la madurez de la opción, ejerza su call, es decir, su derecho de compra.

Antes de seguir vamos a declarar lo que como gestores debemos hacer cada vez que la acción cambia de precio

1. Cada mañana abrimos nuestra computadora y vemos el valor de nuestro portafolio
  - a) Valor en subyacente: es el valor que tenemos de la tenencia de subyacente, decir, cantidad de subyacente, acción en este caso, por su precio. Esto se calcula con el alpha que tenemos del periodo anterior por el precio del mercado actual,  $(\alpha_{t-1} \cdot S_t)$ .
  - b) Valor en deuda: es el valor actual de la deuda que tenemos del periodo anterior. Si el periodo anterior contrajimos \$1 de deuda, hoy, un periodo después, tenemos una deuda de  $\$1 \cdot B^{-1}(0, 1)$ .
  - c) Valor del portafolio: Valor en subyacente + Valor en deuda,  $\alpha_{t-1} \cdot S_t + \beta \cdot B^{-1}(0, 1)$ .
2. Luego de calcular el valor de nuestro portafolio, debemos re-estructurarlo. Esto es porque el precio del subyacente cambió y por tanto tendremos un nuevo alpha. El costo de la reestructuración será la diferencia de alphas por el precio actual, es decir:  $-(\alpha_t - \alpha_{t-1}) \cdot S_t$ .

**Cuadro 2.5. Izquierda : Alpha ( $\alpha_i$ ) - Derecha: Costo de alpha ( $\alpha_i \cdot S_i$ )**

				1
			1 ↙	1
	0,734 ↙	0,359 ↙		0
0,516 ↙	0,210 ↙			0
		0 ↙		0
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

				\$2085,2
			\$1632,1 ↙	\$1277,6
	\$937,1 ↙	\$358,8 ↙		\$0
\$515,8 ↙	\$164,1 ↙			\$0
		\$0 ↙		\$0
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

**Cuadro 2.6. Izquierda : Beta ( $\beta_i$ ) - Derecha: Portafolio replica ( $\alpha_i \cdot S_i + \beta$ )**

				\$0
			-\$1087,2 ↙	\$0
	-\$644,7 ↙	-\$277,6 ↙		\$0
-\$362,3 ↙	-\$127,0 ↙			\$0
		\$0 ↙		\$0
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

				\$2085,2
			\$544,9 ↙	\$1277,6
	\$292,4 ↙	\$81,2 ↙		\$0
\$153,5 ↙	\$37,1 ↙			\$0
		\$0 ↙		\$0
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

3. Verificar el valor de nuestro portafolio luego de la reestructuración. Dado que nuestro modelo debe ser auto-gestionado, es decir, que no requiere más inversión que el valor inicial de derivado, debemos asegurarnos que al cerrar nuestra reestructuración nuestro portafolio tenga el mismo valor que al iniciar la mañana. Para esto sumaremos a la deuda el costo de la reestructuración y valoraremos nuestro nuevo valor en subyacente.

Haremos lo anterior paso por paso.

En  $t = 0$  recibimos \$153,5 de la venta del call. Lo primero que debemos hacer es comprar  $\alpha_0 = 0,516$  unidades de subyacente al precio  $S_0 = \$1000,0$ , lo que tiene un costo de  $\alpha_0 \cdot S_0 = \$515,8$ . De esos \$515,8, ya tenemos \$153,5 por tanto solo nos faltan \$362,3 que los obtenemos contratando deuda. Resumamos la información en la tabla [2.7](#).

Luego, en  $t = 1$  el precio de la acción cambia. Pasa de \$1000,0 a \$1277,6, por tanto el valor que tenemos en subyacente ha cambiado, ahora vale más. Pero la deuda también ha

Recibo	$V_0$	\$153,5
Compro Subyacente	$\alpha_0 S_0$	\$515,8
Contrato deuda	$V_0 - \alpha_0 S_0 = \beta_0$	-\$362,3
Valor portafolio	$\alpha_0 S_0 + \beta_0$	\$153,5

**Cuadro 2.7. Gestión del derivado en  $t = 0$**

crecido, se han acumulado los *intereses* derivados del proceso valor del dinero, por tanto al abrir la mañana debemos re-valorar el portafolio con el que cerramos en  $t = 0$ . Luego volver a reestructura y finalmente verificar su valor.

Valor en subyacente	$\alpha_0 S_1$	\$659,0
Valor en deuda	$\beta_0 B^{-1}(0, 1)$	-\$366,6
Valor portafolio	$\alpha_0 S_1 + \beta_0 B^{-1}(0, 1)$	\$292,4
Costo reestructuración	$(\alpha_1 - \alpha_0) S_1$	-\$278,1
Valor en subyacente	$\alpha_1 S_1$	\$937,1
Valor en deuda	$\beta_0 B^{-1}(0, 1) + (\alpha_1 - \alpha_0) S_1 = \beta_1$	-\$644,7
Valor portafolio	$\alpha_1 S_1 + \beta_1$	\$292,4

**Cuadro 2.8. Gestión del derivado en  $t = 1$**

Valor en subyacente	$\alpha_1 S_2$	\$733,5
Valor en deuda	$\beta_1 B^{-1}(0, 1)$	-\$652,3
Valor portafolio	$\alpha_1 S_2 + \beta_1 B^{-1}(0, 1)$	\$81,2
Costo reestructuración	$(\alpha_2 - \alpha_1) S_2$	-\$374,7
Valor en subyacente	$\alpha_2 S_2$	\$358,8
Valor en deuda	$\beta_1 B^{-1}(0, 1) + (\alpha_2 - \alpha_1) S_2 = \beta_2$	-\$277,6
Valor portafolio	$\alpha_2 S_2 + \beta_2$	\$81,2

**Cuadro 2.9. Gestión del derivado en  $t = 2$**

En la tabla [2.10](#) podemos ver que el valor en subyacente es \$1277,6, esto es porque tenemos en nuestro poder exactamente 1 acción para poder honrar nuestro contrato. Esto se debe a que en la trayectoria que tomamos para el ejemplo el precio de mercado del subyacente es mayor que el *strike* ( $\$1277,6 > \$1100,0$ ). Dado lo anterior al tenedor de la opción le conviene ejercer para obtener una unidad de subyacente a un valor inferior al de mercado. Así, el tenedor la opción nos entregará \$1.100 que es exactamente el valor positivo de la deuda que nosotros como gestores debemos pagar.



$$V_{uu}^c = B_c(0,1) [qV_{uuu}^c + (1-q)V_{uud}^c] = e^{-0,05 \cdot \frac{1}{6}} \cdot [0,46 \cdot \$985,2 + 0,54 \cdot \$177,6] = \$546,7$$

$$V_{ud}^c = B_c(0,1) [qV_{uud}^c + (1-q)V_{udd}^c] = e^{-0,05 \cdot \frac{1}{6}} \cdot [0,46 \cdot \$177,6 + 0,54 \cdot \$0] = \$81,5$$

$$V_{dd}^c = B_c(0,1) [qV_{udd}^c + (1-q)V_{ddd}^c] = e^{-0,05 \cdot \frac{1}{6}} \cdot [0,46 \cdot \$0 + 0,54 \cdot \$0] = \$0$$

Con los valores de  $t = 2$  podemos obtener los de  $t = 1$  y con estos el valor del derivado en  $t = 0$ . Esto muestra la tabla [2.11](#)

**Cuadro 2.11. Valor del derivado totalmente colateralizado**

				\$985,2
			\$546,7	
	\$294,3			\$177,6
\$155,0		\$81,5		
	\$37,4			\$0,0
		\$0,0		
				\$0,0
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

Como se ve en la ecuación [2.2](#) el calculo de alpha es el mismo que en el caso sin colateral. La forma de calcular  $\beta$  cambia. Veamos la ecuación [2.3](#)

$$\beta = B(0,1) \left( V_u^c - C_0 B_c^{-1}(0,1) - \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_u \right)$$

$$= B(0,1) \left( V_u^c - \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_u \right) - B(0,1) B_c^{-1}(0,1) C_0$$

**Cuadro 2.12. Izquierda : Alpha ( $\alpha_i$ ) - Derecha: Costo de alpha ( $\alpha_i \cdot S_i$ )**

			1,0 ↙	1,0
		0,736 ↙		1,0
0,519 ↙			0,359 ↙	
	0,210 ↙			0,0
		0,0 ↙		0,0
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

			\$1632,1 ↙	\$2085,2
		\$940,2 ↙		\$1277,6
\$519,3 ↙			\$358,8 ↙	
	\$164,7 ↙			\$0,0
		\$0,0 ↙		\$0,0
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		$t = 3$

De la última ecuación podemos observar que la beta con colateral esta compuesta por dos objetos. El primero tiene una forma idéntica a de beta sin colateral. El segundo objeto es la actualización bajo el proceso del dinero corriente del valor futuro del colateral bajo el proceso valor de el mismo. Es decir

1. Tomo el colateral,  $C_0$ , y lo llevo un periodo al futuro bajo su proceso valor,  $B_c^{-1}(0, 1)$ :  
 $B_c^{-1}(0, 1)C_0$
2. Tomo ese valor y lo actualizo, es decir, lo llevo un periodo atrás (valor presente) pero bajo el proceso valor del dinero corriente:  $B(0, 1)\{B_c^{-1}(0, 1)C_0\}$

Ahora, dado que  $\gamma = 1$  y que  $\gamma V_0 = C_0$  tenemos que  $V_0 = C_0$ . Esto implica

$$\beta = B(0, 1) \left( V_u^c - \frac{V_u^c - V_d^c}{S_u - S_d} S_u \right) - B(0, 1) B_c^{-1}(0, 1) V_0$$

La tabla [2.12](#) muestra el calculo de alpha y su costo.

La siguiente tabla, la [2.13](#) muestra beta y el portafolio de replica. En el cuadro de la derecha vemos ceros en los nodos previos a la madurez. Esto se debe a que, como vimos antes, el portafolio replica el derivado menos su colateral. Dado que estamos colateralizando todo el NPV (que es igual al valor del derivado) tenemos ceros. El valor del derivado menos el colateral deja al portafolio de replica con valor nulo.

Al igual que el caso sin colateral estudiaremos la gestión del derivado por parte de quien lo replica. A las transacciones del ejemplo anterior debemos agregarle las que se derivan de la gestión del colateral: la entrega del colateral al tenedor de la opción y el devengo de intereses por parte de la contraparte que recibe el colateral.

**Cuadro 2.13. Izquierda : Beta ( $\beta_i$ ) - Derecha: Portafolio replica ( $\alpha_i \cdot S_i + \beta$ )**

-\$981,9			
-\$1632,1 ↘			
-\$177,0			
-\$519,3 ↘	-\$940,2 ↘	-\$358,8 ↘	\$0,0 ↘
	-\$164,7 ↘	\$0,0 ↘	\$0,0 ↘
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$

\$1103,3			
\$0,0 ↘			
\$1100,6			
\$0,0 ↘	\$0,0 ↘	\$0,0 ↘	\$0,0 ↘
	\$0,0 ↘	\$0,0 ↘	\$0,0 ↘
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$

Al inicio del contrato recibo \$155,0 por la venta del derivado. Dado que la colateralización es por el total del NPV entrego esa misma cantidad \$155,0 en forma de colateral. Como lo dicta  $\alpha$  debo adquirir 0,519 unidades de subyacente, esto tiene un costo de \$519,3 que se financia enteramente con deuda. Por eso en el primer nodo el costo de alpha es igual a beta,  $\alpha_0 \cdot S_0 = \beta_0$ . Esto se resume en la tabla [2.14](#).

Recibo	$V_0$	\$155,0
Posteo de Colateral	$V_0 \gamma = C_0$	\$ - 155,0
Compra Subyacente	$\alpha_0 S_0$	\$519,3
Contrato deuda	$V_0 - \alpha_0 S_0 = \beta_0$	-\$519,3
Valor portafolio	$\alpha_0 S_0 + \beta_0$	\$155,0

**Cuadro 2.14. Gestión del derivad con colateral en  $t = 0$**

En  $t = 1$  el precio del subyacente aumenta, por tanto tenemos más valor en subyacente, además nuestra deuda a crecido por los intereses. Aunado a lo anterior la contraparte que tiene el colateral nos devenga los intereses generados por este durante el periodo recién pasado.

Ahora debemos gestionar nuestro portafolio. Ajustar la cantidad de subyacente y postear (o retirar) colateral según sea el caso. En  $t = 1$  debemos aumentar ambas cantidades. Esto nos genera un aumento de la deuda de \$416. Así nuestra deuda total es la deuda que tenemos del periodo anterior \$525, 3 más los \$416 menos los \$1, 3 que nos pagó el tenedor del colateral, esto es \$940, 2 como valor en deuda después de re-balancear nuestro portafolio.

En los siguientes periodos se ejecuta la misma dinámica. Como se ve en la tabla [2.17](#) en  $t = 3$  tenemos exactamente una unidad de subyacente, retiramos todo el colateral y nuestro

valor en deuda es exactamente lo que recibiremos de *Strike*, es decir \$1100. Podemos ver que la gestión del derivado colateralizado también es auto-financiada.

Valor en subyacente	$\alpha_0 S_1$	\$663,4
Valor en deuda	$\beta_0 B^{-1}(0, 1)$	-\$525,3
Valor en colateral	$C_0$	\$155,0
Intereses del colateral	$C_0 \cdot (B_c^{-1}(0, 1) - 1)$	\$1,3
Valor portafolio		\$294,3
Costo ajuste alpha	$(\alpha_1 - \alpha_0) S_1$	-\$276,9
Costo ajuste colateral	$C_0 - C_1$	-\$139,3
Costo total ajuste		-\$416,2
Valor en subyacente	$\alpha_1 S_1$	\$940,2
Valor en colateral	$C_1$	\$294,3
Valor en deuda		-\$940,2
Valor portafolio		\$294,3

**Cuadro 2.15. Gestión del derivado en  $t = 1$**

Valor en subyacente	$\alpha_1 S_2$	\$736,0
Valor en deuda	$\beta_1 B^{-1}(0, 1)$	-\$951,3
Valor en colateral	$C_1$	\$294,3
Intereses del colateral	$C_1 \cdot (B_c^{-1}(0, 1) - 1)$	\$2,5
Valor portafolio		\$81,5
Costo ajuste alpha	$(\alpha_2 - \alpha_1) S_2$	\$377,1
Costo ajuste colateral	$C_1 - C_2$	\$212,8
Costo total ajuste		\$590,0
Valor en subyacente	$\alpha_2 S_2$	\$358,8
Valor en colateral	$C_2$	\$81,5
Valor en deuda		-\$358,8
Valor portafolio		\$81,5

**Cuadro 2.16. Gestión del derivado en  $t = 2$**

Valor en subyacente	$\alpha_2 S_3$	\$458,4
Valor en deuda	$\beta_2 B^{-1}(0, 1)$	-\$363,0
Valor en colateral	$C_2$	\$81,5
Intereses del colateral	$C_2 \cdot (B_c^{-1}(0, 1) - 1)$	\$0,7
Valor portafolio		\$177,6
Costo ajuste alpha	$(\alpha_3 - \alpha_2) S_3$	-\$819,1
Costo ajuste colateral	$C_3$	\$81,5
Costo total ajuste		-\$737,6
Valor en subyacente	$\alpha_3 S_3$	\$1277,6
Valor en colateral	$C_3$	\$0,0
Valor en deuda		-\$1100,0
Valor portafolio		\$177,6

**Cuadro 2.17.** Gestión del derivado en  $t = 3$

### 2.4.3. Liquidity Value Adjustment opciones Europeas

En el apéndice se deriva una fórmula de valuación del *LVA* para opciones Europeas. Este es un resultado novedoso en la literatura. La ecuación [A.5](#) es la siguiente.

$$LVA = C_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} B(0, 1)^i [B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)]^i$$

Aplicaremos este resultado a nuestro ejemplo de árbol de 3 pasos.

$$LVA = 155 \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} \binom{3}{i} e^{-0,07\frac{1}{6}i} [e^{0,07\frac{1}{6}} - e^{0,05\frac{1}{6}}]^i$$

$$LVA = 1,5423$$

Si comparamos las tablas [2.4](#) y [2.11](#) notaremos que el *LVA* antes calculado es exactamente la diferencia entre los valores del derivado con y sin colateral en  $t = 0$ . La formula derivada aquí rescata con exactitud el *LVA*

# Capítulo 3

## Opciones americanas

### 3.1. Opción put Americana en árbol de 3 pasos

No existe una forma cerrada para la valuación de opciones americanas. Sin embargo en el apéndice [B](#) se explica el procedimiento de valuación. Este procedimiento se puede hacer arbitrariamente exacto. A más pasos en el árbol, más precisión en la valuación.

Como primer ejercicio se muestra la fórmula de valuación para un árbol de 3 periodos. Primero sin colateral [B.1](#), luego con colateral [B.3](#). Los resultados son los siguientes

$$V_0 = \max \left\{ (K - S_0)_+, B \left[ q (1 - q) \right] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_2)_+, B \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \left. \max \left\{ (K - S_1)_+, B \left[ q (1 - q) \right] \right. \right. \end{array} \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_5)_+, B \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \max \left\{ (K - S_3)_+, B \left[ q (1 - q) \right] \right. \end{array} \left[ \begin{array}{l} \left[ (K - S_9)_+ \right] \\ \left[ (K - S_8)_+ \right] \\ \left[ (K - S_8)_+ \right] \\ \left[ (K - S_7)_+ \right] \\ \left[ (K - S_8)_+ \right] \\ \left[ (K - S_7)_+ \right] \\ \left[ (K - S_7)_+ \right] \\ \left[ (K - S_6)_+ \right] \end{array} \right] \right] \right] \right]$$

$$V_0^c = \max \left\{ (K - S_0)_+, B_c^\gamma \left[ q (1 - q) \right] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_2)_+, B_c^\gamma \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \left. \max \left\{ (K - S_1)_+, B_c^\gamma \left[ q (1 - q) \right] \right. \right. \end{array} \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_5)_+, B_c^\gamma \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B_c^\gamma \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B_c^\gamma \left[ q (1 - q) \right] \right. \\ \max \left\{ (K - S_3)_+, B_c^\gamma \left[ q (1 - q) \right] \right. \end{array} \left[ \begin{array}{l} \left[ (K - S_9)_+ \right] \\ \left[ (K - S_8)_+ \right] \\ \left[ (K - S_8)_+ \right] \\ \left[ (K - S_7)_+ \right] \\ \left[ (K - S_8)_+ \right] \\ \left[ (K - S_7)_+ \right] \\ \left[ (K - S_7)_+ \right] \\ \left[ (K - S_6)_+ \right] \end{array} \right] \right] \right] \right]$$

## 3.2. Algoritmo de valuación para opción Americana genérica en árbol de 6 pasos

Viendo las fórmulas anteriores se puede conjeturar que la fórmula de valuación para 6 pasos es enorme. Para que el lector se haga una idea: la fórmula de 6 pasos tendría 32 términos interiores, la de 3 pasos tiene sólo 8. Si quisiéramos tener una valuación muy precisa, es decir con más de 100 pasos en el árbol tendríamos una formula con  $1,26765 \cdot 10^{30}$  términos en el centro<sup>1</sup>. Este trabajo calcula valuaciones de 1.000 pasos.

Dado lo anterior en el anexo B se desarrolla un algoritmo iterativo (por pasos) para la valuación se le sugiere al lector ir ahí para ver los detalles. Los resultados para un árbol de 6 pasos de muestran a continuación.

Sin colateral	Con colateral
Paso 1	Paso 1
$V_{20} = \text{máx}\{V_{20}^A, BE_q\{V_{27}^f, V_{26}^f\}\}$	$V_{20}^c = \text{máx}\{V_{20}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{27}^f, V_{26}^f\}\}$
$V_{19} = \text{máx}\{V_{19}^A, BE_q\{V_{26}^f, V_{25}^f\}\}$	$V_{19}^c = \text{máx}\{V_{19}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{26}^f, V_{25}^f\}\}$
$V_{18} = \text{máx}\{V_{18}^A, BE_q\{V_{25}^f, V_{24}^f\}\}$	$V_{18}^c = \text{máx}\{V_{18}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{25}^f, V_{24}^f\}\}$
$V_{17} = \text{máx}\{V_{17}^A, BE_q\{V_{24}^f, V_{23}^f\}\}$	$V_{17}^c = \text{máx}\{V_{17}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{24}^f, V_{23}^f\}\}$
$V_{16} = \text{máx}\{V_{16}^A, BE_q\{V_{23}^f, V_{22}^f\}\}$	$V_{16}^c = \text{máx}\{V_{16}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{23}^f, V_{22}^f\}\}$
$V_{15} = \text{máx}\{V_{15}^A, BE_q\{V_{22}^f, V_{21}^f\}\}$	$V_{15}^c = \text{máx}\{V_{15}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{22}^f, V_{21}^f\}\}$
Paso 2	Paso 2
$V_{14} = \text{máx}\{V_{14}^A, BE_q\{V_{20}, V_{19}\}\}$	$V_{14}^c = \text{máx}\{V_{14}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{20}, V_{19}\}\}$
$V_{13} = \text{máx}\{V_{13}^A, BE_q\{V_{19}, V_{18}\}\}$	$V_{13}^c = \text{máx}\{V_{13}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{19}, V_{18}\}\}$
$V_{12} = \text{máx}\{V_{12}^A, BE_q\{V_{18}, V_{17}\}\}$	$V_{12}^c = \text{máx}\{V_{12}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{18}, V_{17}\}\}$
$V_{11} = \text{máx}\{V_{11}^A, BE_q\{V_{17}, V_{16}\}\}$	$V_{11}^c = \text{máx}\{V_{11}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{17}, V_{16}\}\}$
$V_{10} = \text{máx}\{V_{10}^A, BE_q\{V_{16}, V_{15}\}\}$	$V_{10}^c = \text{máx}\{V_{10}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{16}, V_{15}\}\}$
Paso 3	Paso 3
$V_9 = \text{máx}\{V_9^A, BE_q\{V_{14}, V_{13}\}\}$	$V_9^c = \text{máx}\{V_9^A, B_c^\gamma E_q\{V_{14}, V_{13}\}\}$
$V_8 = \text{máx}\{V_8^A, BE_q\{V_{13}, V_{12}\}\}$	$V_8^c = \text{máx}\{V_8^A, B_c^\gamma E_q\{V_{13}, V_{12}\}\}$
$V_7 = \text{máx}\{V_7^A, BE_q\{V_{12}, V_{11}\}\}$	$V_7^c = \text{máx}\{V_7^A, B_c^\gamma E_q\{V_{12}, V_{11}\}\}$
$V_6 = \text{máx}\{V_6^A, BE_q\{V_{11}, V_{10}\}\}$	$V_6^c = \text{máx}\{V_6^A, B_c^\gamma E_q\{V_{11}, V_{10}\}\}$
Paso 4	Paso 4

<sup>1</sup>Este calculo resulta de  $\sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i}$

Sin colateral	Con colateral
Paso 4	Paso 4
$V_5 = \text{máx}\{V_5^A, BE_q\{V_9, V_8\}\}$	$V_5^c = \text{máx}\{V_5^A, B_c^\gamma E_q\{V_9, V_8\}\}$
$V_4 = \text{máx}\{V_4^A, BE_q\{V_8, V_7\}\}$	$V_4^c = \text{máx}\{V_4^A, B_c^\gamma E_q\{V_8, V_7\}\}$
$V_3 = \text{máx}\{V_3^A, BE_q\{V_7, V_6\}\}$	$V_3^c = \text{máx}\{V_3^A, B_c^\gamma E_q\{V_7, V_6\}\}$
Paso 5	Paso 5
$V_2 = \text{máx}\{V_2^A, BE_q\{V_6, V_5\}\}$	$V_2^c = \text{máx}\{V_2^A, B_c^\gamma E_q\{V_6, V_5\}\}$
$V_1 = \text{máx}\{V_1^A, BE_q\{V_5, V_4\}\}$	$V_1^c = \text{máx}\{V_1^A, B_c^\gamma E_q\{V_5, V_4\}\}$
Paso 6	Paso 6
$V_0 = \text{máx}\{V_1^A, BE_q\{V_3, V_2\}\}$	$V_0^c = \text{máx}\{V_1^A, B_c^\gamma E_q\{V_3, V_2\}\}$

Esta metodología se puede escalar. Se desarrolló un algoritmo en R que permite señalar el número de pasos que se quieren ejecutar. Con 1.000 pasos el algoritmo demora menos de 3 segundos en hacer la valuación.

### 3.3. Liquidity Value Adjustment opciones americanas

Dado que no existe una forma cerrada de valuación tampoco podemos obtener una fórmula para el *LVA*. Sin embargo, si podemos hacer la valuación de las americanas podemos entonces calcular el *LVA* con la fórmula (B.4), del apéndice B

$$LVA = V_0^c - V_0$$

### 3.4. Portafolio de opciones put Americanas sobre acciones Mexicanas

Mexder, la Bolsa de Derivados de México ofrece contratos de futuros, opciones y swaps. Esta entidad cuenta con una cámara de compensación llamada *Asigna, Compensación y Liquidación*. Esta última tiene el rol de asumir y administrar el riesgo de contraparte en caso de incumplimiento de alguna de las partes que convergen en un contrato. A continuación se resume la información que Mexder entrega en su página web.

1. Contratos de opciones call y put para 20 acciones mexicanas.
2. Periodo trimestral. Los vencimientos son en Marzo, Junio, Septiembre, Diciembre.

3. El tamaño del contrato es de 100 acciones.

Lo anterior será tomado como un proxy de un contrato real. En este trabajo nosotros valuaremos opciones del tipo americana put OTC. Esto quiere decir que no participa ninguna entidad como administradora de riesgo de contraparte. Si la posición que tiene el valor presente negativo entra en incumplimiento no existirá una entidad que proteja a la otra parte del contrato. Es por eso que nuestra valuación considera la entrega de colateral para neutralizar (en parte, para ser precisos) el riesgo de incumplimiento. Un contrato OTC es un acuerdo descentralizado que involucra a dos entidades y este se hace a la medida. Nuestro portafolio de opciones put Americanas tendrá como subyacente las acciones mexicanas listadas abajo. Consistirá de 100 opciones put Americanas de cada una de estas acciones.

**Cuadro 3.1. Acciones subyacente a las opciones put Americanas**

ALFAA	Alfa (serie A)
AMXL	América Móvil (serie L)
BIMBOA	Grupo Bimbo (serie A)
CEMEXCPO	Cementos Mexicanos (serie CPO)
FEMSAUBD	Fomento Económico Mexicano (serie UBD)
WALMEX	Wal-Mart de México

Vamos a considerar el siguiente periodo para las opciones Americanas:

- Inicia: Jueves 2 de Enero del 2020
- Finaliza: Viernes 27 de Marzo del 2020

# Capítulo 4

## Estimación de la volatilidad del subyacente

### 4.1. Volatilidad

Para realizar la valuación necesitamos la volatilidad esperada del subyacente durante el tiempo que durará nuestro contrato. Claramente la volatilidad esperada es desconocida, sin embargo la podemos estimar. Así, de nuestra capacidad de proyección dependerá la precisión de las ecuaciones (2.7) y (2.8) que alimentan nuestro árbol del subyacente y por tanto toda nuestra valuación. En el caso de las acciones podemos conocer su la volatilidad histórica y de ahí **proyectar**, siempre con algún grado de error (desconocido *ex ante*), su volatilidad futura.

Para estimar la volatilidad utilizaremos los retornos logarítmicos *porque tienen propiedades estadísticas considerablemente mejores que los niveles de precio [...]*, [Chr11]. Los retornos logarítmicos ( $R_i$ ) se definen como sigue

$$R_{t+1} = \ln S_{t+1} - \ln S_t = \ln \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) \approx r_{t+1} = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = \frac{S_{t+1}}{S_t} - 1$$

#### 4.1.1. Hechos estilizados de los retornos - $R_i$

En [Con01] el autor *presenta una serie de hechos que emergen del análisis de la variaciones de precios en varios tipos de mercados financieros*. Estos hechos nos servirán para nuestro modelo de estimación de volatilidad:

1. Ausencia de autocorrelación: la autocorrelación de los retornos es insignificante.
2. No es posible rechazar estadísticamente una media diferente de cero para los retornos.

3. Colas pesadas: la distribución de los retornos parece mostrar una ley de potencias o una cola parecida a la distribución de Pareto.
4. Lento decaimiento de la autocorrelación de los retornos absolutos: la función de autocorrelación de los retornos absolutos decae lentamente en función de los rezagos<sup>1</sup>.

**Cuadro 4.1. Hechos estilizados de los retornos**

Hecho	Expresión
1.	$Corr(R_{t+1}, R_{t+1-\tau}) \approx 0$ para $\tau = 1, 2, 3, \dots, 100$
2.	$\mathbb{E}[R_{t+1}] \approx 0$
3.	Colas pesadas
4.	$Corr(R_{t+1}^2, R_{t+1-\tau}^2) > 0$ para $\tau$ pequeña

Dado lo anterior podemos escribir que

$$\text{Var}[R_{t+1}] = \mathbb{E}[(R_{t+1} - \mathbb{E}[R_{t+1}])^2] = E[R_{t+1}^2]$$

Basado en lo anterior podemos modelar los retornos como

$$R_{t+1} = \sigma_{t+1}z_{t+1} \text{ donde } z_{t+1} \sim \text{i.i.d } D(0, 1)$$

por tanto los retornos estandarizados serán

$$\frac{R_{t+1}}{\sigma_{t+1}} \sim \text{i.i.d } D(0, 1) \tag{4.1}$$

Donde  $D$  es una distribución general con media 0 y desviación 1. Dado lo anterior podemos pronosticar la varianza en  $t + 1$  con un Modelo Generalizado Autorregresivo con Heterocedasticidad Condicional (GARCH(1,1)):

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

o uno más general como el GARCH(p,q)

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2$$

Si reforzamos el supuesto de la ecuación (4.1) tendremos que

---

<sup>1</sup> $Corr(|R_{t+1}|, |R_{t+1-\tau}|) > 0 \Rightarrow Corr(R_{t+1}^2, R_{t+1-\tau}^2) > 0$

$$\frac{R_{t+1}}{\sigma_{t+1}} \sim \text{i.i.d } N(0, 1) \quad (4.2)$$

Con este último supuesto podemos estimar los parámetros de los modelos anteriores por el método de Máxima Verosimilitud maximizando la siguiente expresión (para detalles ir al apéndice [C](#))

$$\text{argmax}_{\{\hat{\psi} \in \Psi\}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(\hat{\sigma}_t^2) + \frac{R_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} \right] \right\}$$

Donde elegimos los parámetros  $\hat{\psi}$  que definen a  $\hat{\sigma}_t^2$ .  $\Psi$  es el espacio de parámetros.

## 4.2. Datos de acciones

Para la volatilidad usaremos 936 días para estimar los modelos GARCH y realizaremos un *out-of-sample validation* con los 234 días posteriores. Con esto tenemos un 80 % de datos para entrenar el modelo y un 20 % para evaluarlo.

Lo anterior tiene el fin de elegir el modelo que mejor se ajuste a los datos. Luego de seleccionar el mejor modelo usaremos el 100 % de los datos para estimar la volatilidad diaria esperada para el 2 de Enero del 2020. El modelo estima la varianza del activo. Con el fin de obtener la volatilidad (desviación estándar) anual necesitamos multiplicar la varianza estimada por 260 (*trading days*) y obtener su raíz cuadrada.

**Cuadro 4.2. Muestra para estimar la volatilidad**

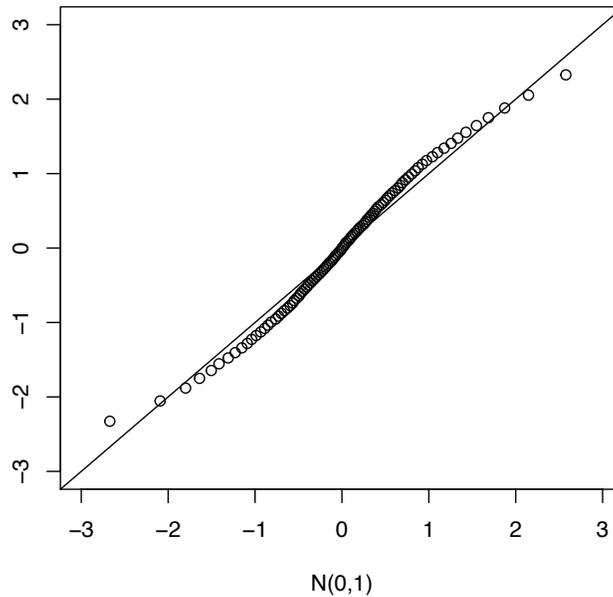
Tipo datos	Fecha inicial	Fecha Final	Observaciones	% del la muestra
Entrenamiento	11-05-2015	24-01-2019	936	80 %
Evaluación	25-01-2019	30-12-2019	233	20 %

Luego de seleccionar el mejor modelo se utiliza el 100 % de los datos, es decir 1.170 datos.

## 4.3. Estructura de los rendimientos logarítmicos

El supuesto clave de GARCH es la normalidad de los rendimientos logarítmicos estandarizados. Como vimos este supuesto nos permite generar una estimación por Máxima Verosimilitud. Sin embargo al analizar los datos estos no muestran una estructura normal. En el gráfico QQ [4.1](#) muestra que los rendimientos estandarizados parecen no comportarse de forma normal. Para verificarlo realizamos un test *Jarque-Bera* de normalidad para cada

Figura 4.1. QQ N(0,1) - Rendimientos logarítmicos estándar



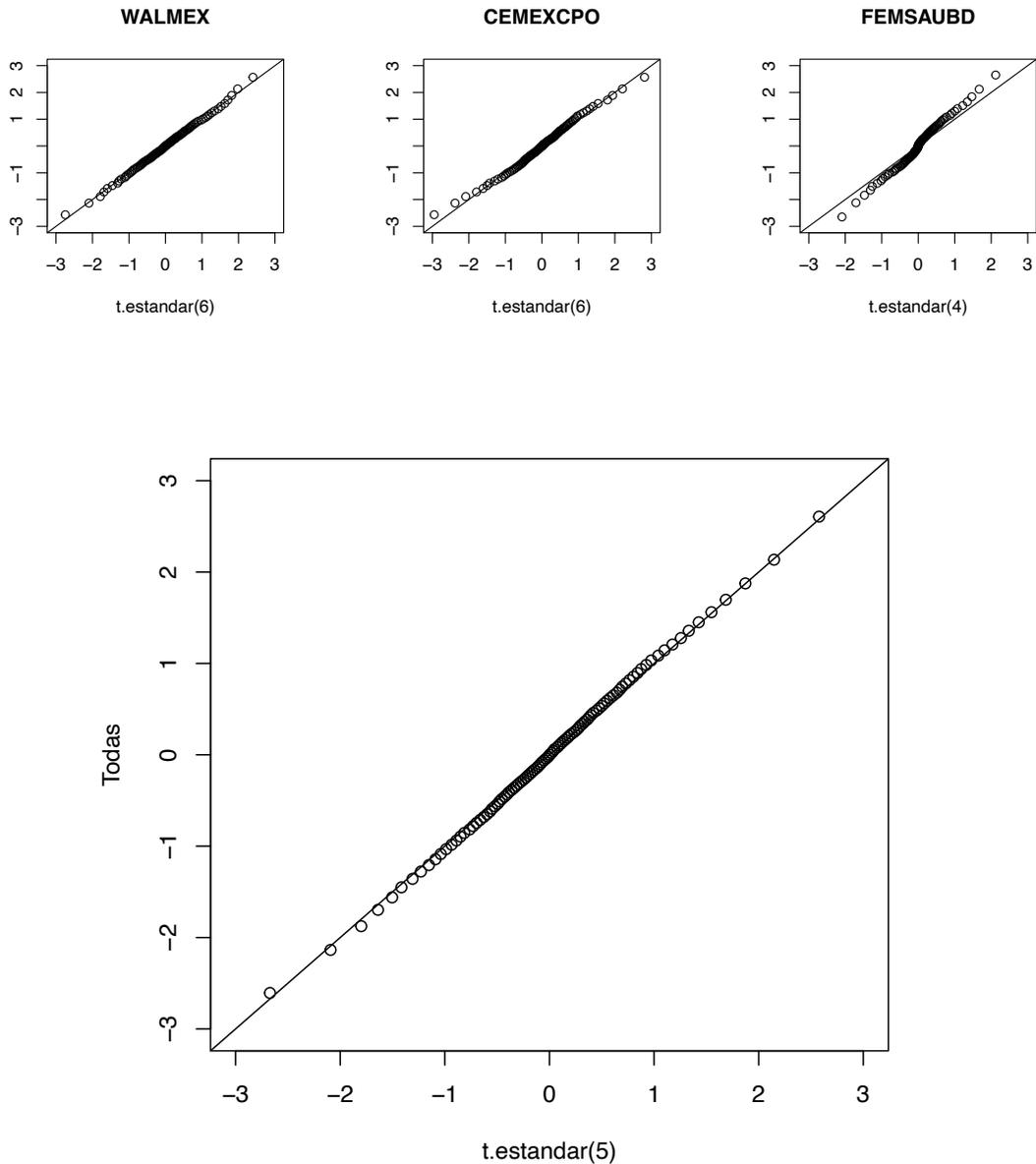
una de las acciones. La hipótesis nula para este test es que los datos presentan una estructura normal. Los resultados se muestran en la tabla [4.3](#)

**Cuadro 4.3. Test Jarque Bera de normalidad**

Acción	$\chi^2_{(2)}$	p-value <	$H_0$
ALFAA	13639.00	0.00	Rechazada
AMXL	1548.20	0.00	Rechazada
BIMBOA	1550.00	0.00	Rechazada
CEMEXCPO	472.83	0.00	Rechazada
FEMSAUBD	195968.00	0.00	Rechazada
WALMEX	441.51	0.00	Rechazada

Dados los resultados anteriores usamos la distribución t-student(d) estandarizada ( $\tilde{t}(d)$ ) para evaluar su similitud con los datos. Para evaluar la similitud entre la  $\tilde{t}(d)$  y la serie de rendimientos logarítmicos realizamos el test no paramétrico *Kolmogorov-Smirnov*. En este test  $H_0$  es que las dos muestras son tomadas desde la misma distribución. Se genera una muestra teórica  $\tilde{t}(d)$  y se compara con los datos de rendimientos para cada acción. La hipótesis nula del test *Kolmogorov-Smirnov* es que las dos muestras son tomadas desde la misma distribución.

Figura 4.2. QQ t-Student estandar (d) - Rendimientos logarítmicos estándar

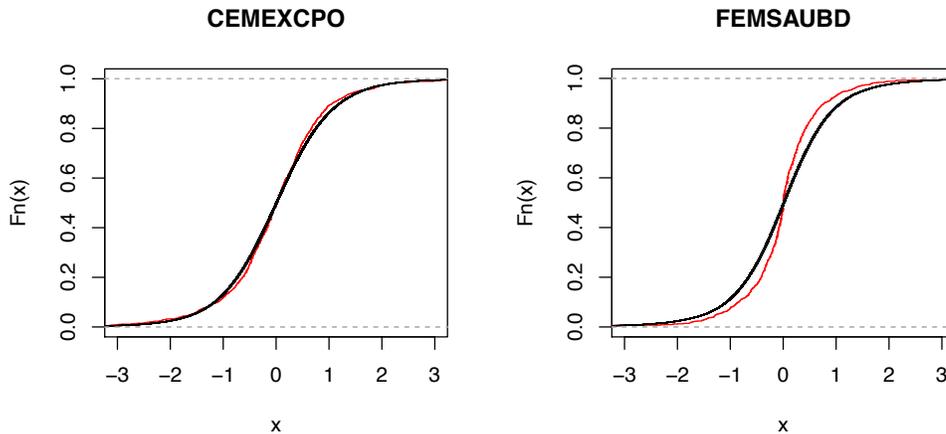


La tabla [4.4](#) muestra que la serie de CEMEXCPO y FEMSAUBD presentan una distribución diferente a la estimada. Esto se ve también en los gráficos de la figura [4.3](#). Si bien esto es un problema en este trabajo no nos enfocaremos en subsanarlo. Para estas series, CEMEXCPO y FEMSAUBD, usaremos Quasi-Máxima Verosimilitud, es decir violaremos el supuesto de normalidad considerando que nuestros datos son suficientes para obtener los beneficios de la teoría asintótica. Para más detalles revisar el apéndice de Quasi-Máxima Verosimilitud en [C.2](#).

Cuadro 4.4. Test Kolmogorov–Smirnov similitud de dos muestras

Acción	D	p-value	$H_0$
ALFAA	0.036338	0.45420	No rechazada
AMXL	0.030834	0.66500	No rechazada
BIMBOA	0.033834	0.54690	No rechazada
CEMEXCPO	0.036081	0.07914	No rechazada
FEMSAUBD	0.094150	0.00000	Rechazada
WALMEX	0.017017	0.86520	No rechazada

Figura 4.3. Funciones de distribución acumulada



Cabe señalar que el parámetro  $d$  de las diferentes  $\tilde{t}(d)$  fueron encontrados por el método de *matching moments*. Este método se desprende del hecho que existe una estrecha relación entre el exceso de kurtosis ( $\zeta_2$ ) y el parámetro  $d$ . [Chr11] lo presenta así

$$\zeta_2 = \frac{6}{d-4} \implies d = \frac{6}{\zeta_2} + 4$$

#### 4.4. Time-varying Volatility - GARCH(p,q)

Nuestro supuesto sobre algunos de los rendimientos logarítmicos estándar cambió. Ahora asumimos que siguen una distribución  $\tilde{t}(d)$ . Para estimar bajo este nuevo supuesto necesitamos maximizar la ecuación (C.2). Para más detalles se invita al lector a ir al apéndice de Máxima Verosimilitud para  $\tilde{t}(d)$ , en C.3. Ecuación es la siguiente

$$\operatorname{argmax}_{\{\hat{\psi} \in \Psi\}} \left[ \begin{array}{c} T \left\{ \ln \left( \Gamma \left( \frac{d+1}{d} \right) \right) - \ln \left( \Gamma \left( \frac{d}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \ln (d-2) \right\} \\ - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (d+1) \ln \left( 1 + \frac{\left( \frac{R_t}{\sigma_t} \right)^2}{d-2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \sigma_t^2 \end{array} \right]$$

Para estimar la volatilidad utilizaremos un modelo GARCH(p,q). Necesitamos evaluar la cantidad de rezagos a utilizar. Para esto usaremos el *Likelihood-ratio test* e iremos incorporando rezagos conforme los modelos ampliados sean significativamente mejores.

## 4.5. Resultados de la estimación de la volatilidad

Lo señalado en los apartados anteriores se implementó en Eviews. Los siguientes son los resultados

**Cuadro 4.5. Resultados estimación volatilidad I**

Parámetro	ALFAA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	FEMSAUBD	WALMEX
$\omega$	0.000021	0.000007	0.000024	0.000009	0.000017	0.000011
$\alpha_1$	0.159329	0.039520	0.060655	0.135436	0.082771	0.160012
$\alpha_2$	-0.109791		-0.022287	-0.150493		0.006425
$\alpha_3$			0.058454	-0.009300		-0.147602
$\alpha_4$				0.055965		
$\beta_1$	1.035968	0.932318	0.803549	1.603199	0.791517	-0.165026
$\beta_2$	-0.150313		-0.870057	-0.270607		0.847346
$\beta_3$			0.866951	-1.086093		0.250845
$\beta_4$				0.682409		
Volatilidad	0.290258	0.247033	0.2505262	0.244253	0.187509	0.2384848

La tabla [4.5](#) muestra los parámetros de los diferentes modelos GARCH(p,q). En la última fila se muestra la volatilidad anual de largo plazo. Esta última se calculó con la fórmula derivada en el apéndice [\(C.3\)](#).

Nuestras opciones Americanas tienen validez desde el Jueves 2 de Enero del 2020 al Viernes 27 de Marzo del 2020. Nuestras opciones estarán activas durante 61 días: lunes a viernes (*trading days*), restando 3 feriados mexicanos que hay en el periodo. Por tanto necesitamos saber la volatilidad acumulada en este periodo. En el apéndice se deriva la fórmula para la estimación de la volatilidad acumulada, [\(C.8\)](#), que también se presenta aquí

$$\sigma_{t+1:t+K} = \sqrt{K\sigma^2 + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i)(\sigma_{t+1-i}^2 - \sigma^2)}$$

$\sigma_{t+1:t+K}$  es la volatilidad acumulada pronosticada entre  $t + 1$  y  $t + K$ . En nuestro caso  $K$  es 61.

**Cuadro 4.6. Resultados estimación volatilidad II**

Parámetro	ALFAA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	FEMSAUBD	WALMEX
Volatilidad I	0.138464	0.111455	0.119051	0.114485	0.089591	0.112623
Volatilidad II	0.016569	0.013136	0.014542	0.012961	0.010111	0.016792

En la tabla [4.6](#) *Volatilidad I* es la volatilidad pronosticada para los 61 días que estará activo nuestra opción put Americana. *Volatilidad II* es la volatilidad diaria esperar para el 2 de enero del 2020. Con esta volatilidad estimaremos el VaR y ES con *Full Valuation*.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1. Capacidad del algoritmo de valuación

La fórmula de *Black – Scholes* no existe para opciones *put* Americanas. Pero sí para las opciones del tipo *call*. Dado lo anterior, para evaluar nuestro programa desarrollado en R verificamos que el algoritmo converja a la valuación de *Black – Scholes* para una *call*.

$$\text{Valuación Call Europea} = \text{Valuación Call Americana}$$

Dado lo anterior debería cumplirse que

$$\text{Black-Scholes Call Europea} = \text{Nuestro algoritmo Call Americana}$$

En el gráfico [5.1](#) el eje vertical de la izquierda es la valuación de la opción. El de la derecha es el error respecto a *Black – Scholes*. Ambos en unidades monetarias. Podemos ver cómo el algoritmo converge rápidamente a la solución de *Black – Scholes* a medida que se aumentan los pasos dentro del árbol; es decir: se acortan las distancias temporales entre cada  $t$ , el tiempo se vuelve más denso. El error es menor a \$1 cuando el árbol tiene más de 50 pasos, esto nos da un error menor al 0,5%. La valuación con 50 pasos toma en torno a 1/4 de segundo.

En cuanto a los tiempos de computación la figura [5.2](#) muestra que el requerimiento computacional va aumentando a medida que se solicita al algoritmo valuar considerando más pasos. Se ven algunos saltos en esta gráfica. Para analizar este comportamiento se efectúan 100 valuaciones para investigar cómo se distribuyen los tiempos de procesamiento. Se puede ver que el tiempo de computación aumenta de forma lineal a medida que se valúa con más pasos, es decir: con mayor precisión. Una valuación con extrema precisión, con 500 pasos en el árbol binomial, toma en torno a 1.7 segundos. También se puede ver que la

Figura 5.1. Convergencia del algoritmo de valuación para una call americana

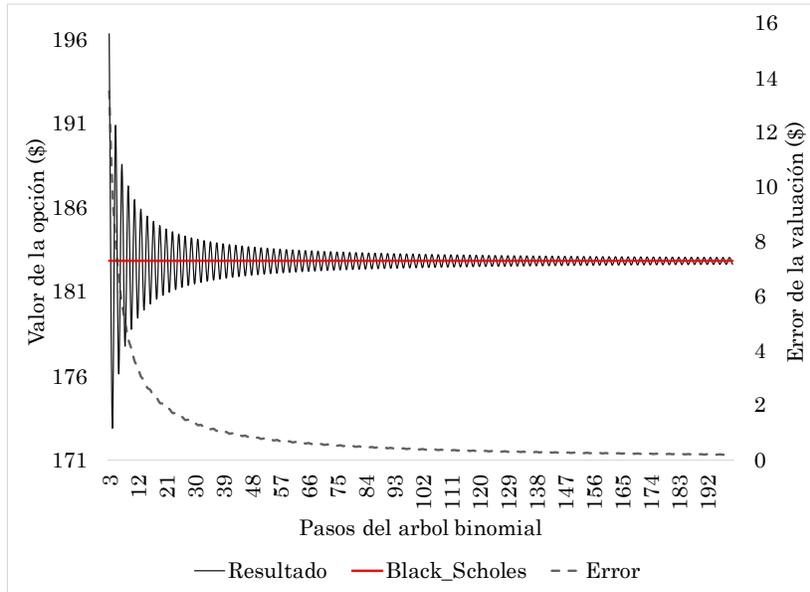


Figura 5.2. Tiempo de computación y error para una call americana

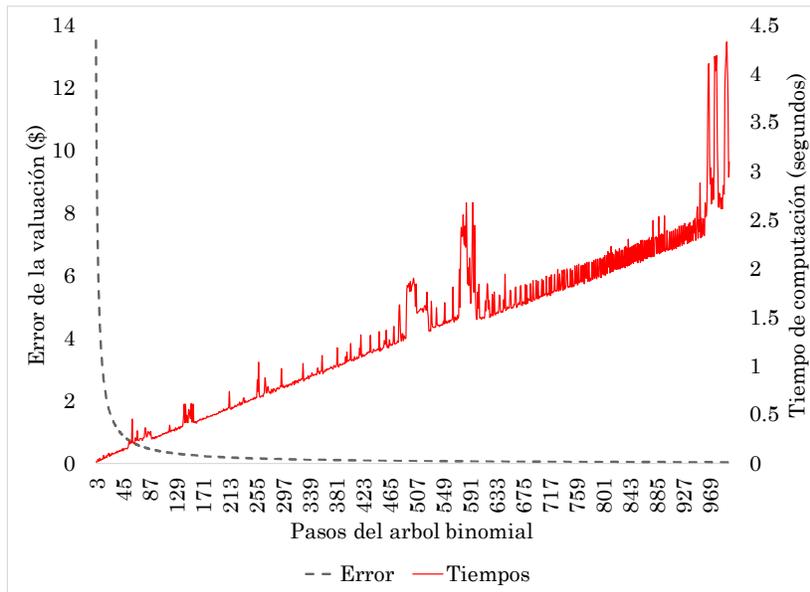
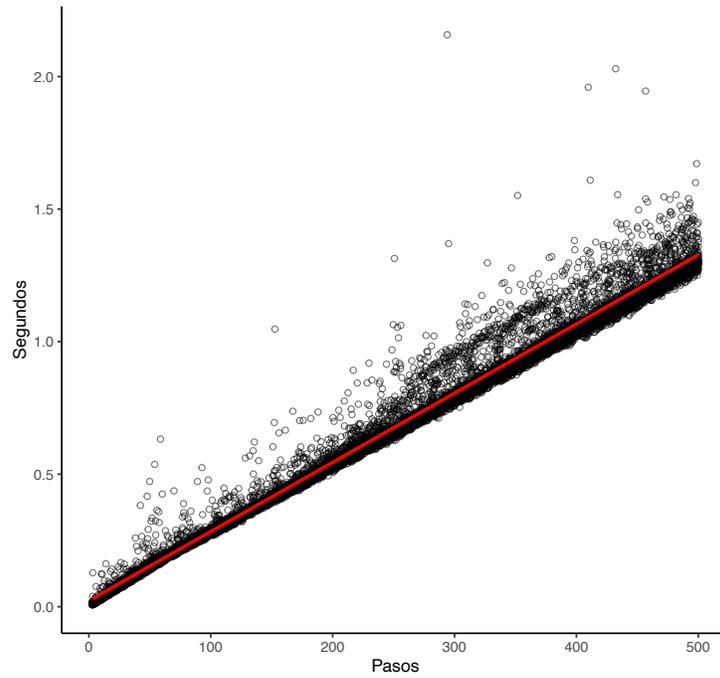
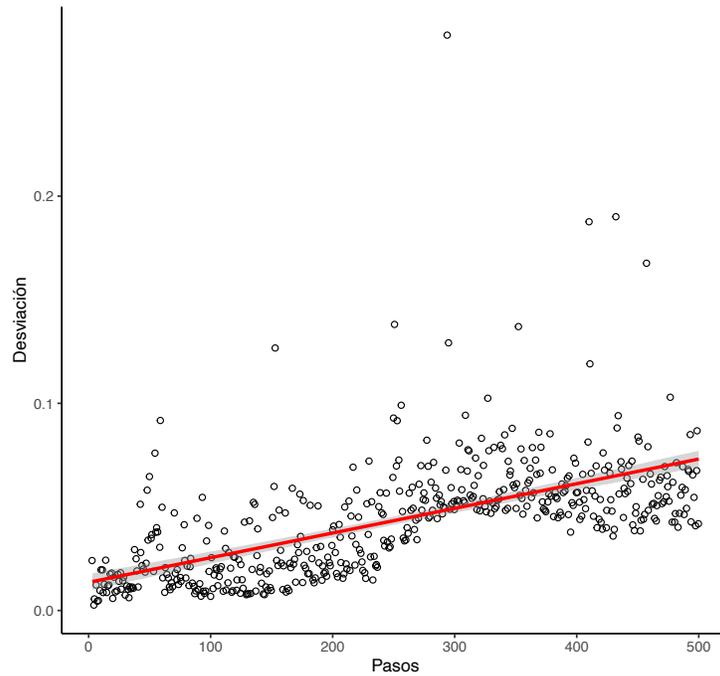


Figura 5.3. Tiempos de computación - 100 iteraciones



varianza entre los tiempos va aumentando a medida que aumentan los pasos. Esto se verifica en el siguiente gráfico.

Figura 5.4. Desviación Estandar Valuación Call Americana



Con el algoritmo de valuación validado se procede a valorar las opciones. Además, gracias a su velocidad es posible realizar las estimaciones del VaR y ES con *Full Valuation*.

## 5.2. Valuación de las put americanas

Para la valuación de nuestras put Americanas consideremos los siguientes supuestos

1. Se considera una colateralización del 100 % ( $\gamma = 1$ ).
2. El proceso valor del dinero igual al 7 % anual compuesto continuo.
3. El proceso valor del colateral igual al 5 % anual compuesto continuo.
4. El *strike* será igual al precio de apertura del día que inicia el contrato.

El proceso valor del dinero es mayor al proceso valor del colateral, siguiendo a [Pit10](#).

**Cuadro 5.1. Parámetros para la valuación**

Parámetro	ALFAA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	FEMSAUBD	WALMEX
$\sigma^2_{61(A)}$	0,285865	0,230104	0,245785	0,236360	0,184965	0,232515
Precio (MXP)	16,16	15,33	35,36	7,16	181,49	55,12
Strike (MXP)	16,16	15,33	35,36	7,16	181,49	55,12

Los resultados de la valuación con 1.000 pasos son los siguientes.

**Cuadro 5.2. Valor de la put Americana 02/01/2020**

ALFAA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	FEMSAUBD	WALMEX
\$1,790	\$1,373	\$3,377	\$0,658	\$13,136	\$4,984

Como el contrato mínimo es de 100 opciones sobre cada acción nuestro portafolio tiene un valor de \$2.531,92.

Se calcula el *Liquidity Value Adjustment*. El resultado es el siguiente

**Cuadro 5.3. Liquidity Value Adjustment**

Serie	ALFAA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	FEMSAUBD	WALMEX
\$LVA	0,0084	0,0064	0,0158	0,0031	0,0615	0,0233
%LVA	0,4668	0,4667	0,4675	0,4663	0,4678	0,4676

El portafolio sin colateral tiene un valor de \$2.520, es decir el LVA del portafolio colateralizado es de \$11,838 (%0,47).

### 5.3. Full Revaluation

Nuestro objetivo es estimar el riesgo del portafolio a 10 días. Para esto queremos estimar lo siguiente:

- 10-días VaR 5 %
- 10-días ES 5 %

*VaR*, *Value at Risk* es una medida de riesgo que busca identificar cuál es la pérdida a la que se está expuesto. Responde a la siguiente pregunta

- ¿Cuál es la menor pérdida que un portafolio puede sufrir en el  $p$  % peor de los escenarios en  $d$  días.

Si tenemos un 10-días 5 % VaR de 2.4 % lo entenderíamos así

- El portafolio tiene 5 % de probabilidad de tener una pérdida mayor al 2.4 % en 10 días.

Esto no quiere decir que el portafolio vaya a perder un 2.4 % de su valor sino que se espera que si tuviéramos 100 escenarios en tan solo 5 de estos, la pérdida sería mayor a 2.4 %. Para calcular lo anterior debemos tener la capacidad de estimar los posibles escenarios para los diferentes activos en  $d$  días.

El enfoque *Full Revaluation* consiste en crear una serie de escenarios futuros para los diferentes activos que constituyen un portafolio. Con estos escenarios identificar las diferentes probabilidades de pérdida. El VaR también puede estar expresado en unidades monetarias, este se conoce como el  $\$VaR$

En este trabajo hemos investigado el comportamiento de los retornos de una serie de acciones que son subyacentes a opciones Put Americanas. Sabemos que el valor de estas put Americanas depende del precio del subyacente. Para calcular el VaR usaremos simulaciones de Monte Carlo para el precio de los subyacentes, y con estos precios valuaremos la put Americana. El procedimiento será el siguiente

1. Tenemos los precios de apertura para el 2 de enero de 2020 ( $S_0$ ), además la volatilidad estimada para ese día con los modelos GARCH ( $\hat{\sigma}^2$ ). Además, estudiamos la estructura de los rendimientos de cada acción, es decir: conocemos cómo se portan los rendimientos estandarizados,  $N(0,1)$  o  $\tilde{t}(d)$ .
2. Con lo anterior podemos crear una serie de posibles rendimientos de 10 días para las acciones con Monte Carlo:  $\{R_i^{10}\}_{i=1}^n$ . Y por tanto una serie de precios de acciones  $\{S_i^{10}\}_{i=1}^n$

3. Dado que creamos una serie de precios de acciones podemos calcular, para cada una, el valor de la put Americanas,  $\{putAm_i^{10}\}_{i=1}^n$
4. Con estas valuaciones podemos calcular una serie de valores de portafolios  $\{ptflio_i^{10}\}_{i=1}^n$  y con el precio inicial que tenemos del portafolio calcular su ganancia o pérdida.
5. Con esta última serie,  $\{LP_i^{10}\}_{i=1}^n$ , podemos tomar el percentil 5%, ese es nuestro 10-días VaR 5%. El 10-días ES 5% no es más que el promedio de las pérdidas mayores al VaR antes mencionado. Esta metodología es tomada de [Chr11](#), el lector puede revisar el capítulo 11 para más detalles.

La ventaja de este método es que permite una valuación no-parámetrica de los posibles rendimientos del portafolio. Esto es necesario cuando estimamos el riesgo de derivados pues sus rendimientos son asimétricos y se alejan de la normalidad.

### 5.3.1. Rendimientos sin correlación

Para las estimaciones utilizamos 10.000 simulaciones Monte Carlo por cada acción. Esto nos da 60.000 simulaciones en total para construir el VaR y el ES. El tiempo de computación de las 60.000 simulaciones estuvo en torno a las 5 horas. Estos son los resultados

**Cuadro 5.4. Riesgo de Mercado Portafolio opciones Put Americanas**

Medida	\$	%
10-días VaR 5 %	223.89	8.84 %
10-días ES 5 %	237.45	9.38 %
10-días VaR 1 %	246.53	9.74 %
10-días ES 1 %	252.99	9.99 %

Además de la tabla anterior se debe mencionar que el portafolio exhibe rendimientos positivos en el 32% de los casos.

### 5.3.2. Rendimientos con correlación

En el ejercicio anterior se considera que los rendimientos de las acciones que componen el portafolio tienen correlación cero. Esta hipótesis, si bien es útil, no es realista. La tabla [5.5](#) muestra que existen correlaciones positivas en los últimos 100 *trading-days* del 2019. Incluso vemos correlaciones muy fuertes, por ejemplo entre MXL y FEMS (0.50).

La tabla [5.6](#) muestra las correlaciones de los rendimientos Monte Carlo creados en el apartado anterior. Podemos ver que a dos decimales no presentan correlación, ni positiva ni negativa.

**Cuadro 5.5. Matriz de correlaciones de los rendimientos últimos 100 días**

Mercado	ALFA	AMXL	BIMB	CEME	FEMS	WALM
ALFA	1,00	0,48	0,41	0,41	0,29	0,24
AMXL	0,48	1,00	0,26	0,46	0,50	0,24
BIMB	0,41	0,26	1,00	0,32	0,13	0,15
CEME	0,41	0,46	0,32	1,00	0,17	0,07
FEMS	0,29	0,50	0,13	0,17	1,00	0,09
WALM	0,24	0,24	0,15	0,07	0,09	1,00

**Cuadro 5.6. Matriz de correlaciones de los rendimientos Monte Carlo no correlacionados**

Mercado	ALFA	AMXL	BIMB	CEME	FEMS	WALM
ALFA	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AMXL	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BIMB	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
CEME	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
FEMS	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
WALM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

Dado lo anterior se procedió a generar rendimientos correlacionados. Para esto se utilizó el método conocido como descomposición de Cholesky. Para detalles ir a [Chr11] Cap. 8 y [PS09]. El resultado es que tenemos rendimientos correlacionados como se muestra a continuación.

**Cuadro 5.7. Matriz de correlaciones de los rendimientos Monte Carlo Correlacionados**

Mercado	ALFA	AMXL	BIMB	CEME	FEMS	WALM
ALFA	1,00	0,55	0,34	0,25	0,21	0,17
AMXL	0,55	1,00	0,10	0,24	0,39	0,13
BIMB	0,34	0,10	1,00	0,13	-0,03	0,04
CEME	0,25	0,24	0,13	1,00	-0,10	-0,10
FEMS	0,21	0,39	-0,03	-0,10	1,00	-0,05
WALM	0,17	0,13	0,04	-0,10	-0,05	1,00

Con los rendimientos correlacionados, el portafolio exhibe rendimientos positivos en el 29 % (menor a 32 %) de los casos. Los resultados de riesgo se presentan en la tabla [5.8]. En esta

se observa que todas las medidas de riesgo son mayores a las de la tabla 5.4.

**Cuadro 5.8. Riesgo de Mercado Portafolio opciones Put Americanas - Rendimientos correlacionados**

Medida	\$	%
10-días VaR 5 %	230,30	9,10 %
10-días ES 5 %	242,77	9,59 %
10-días VaR 1 %	250,82	9,91 %
10-días ES 1 %	256,77	10,14 %

En la tabla 5.8 se muestra que cuando usamos rendimientos correlacionados, el riesgo del portafolio es mayor en todas las medidas de riesgo calculadas. Esto tiene sentido pues el caso correlacionado es más realista y como se ve en la tabla 5.5, las acciones mexicanas subyacentes presentan correlaciones positivas. Lo anterior implica que estas tienden a caer o subir de precio en forma conjunta y esto genera un mayor riesgo. El caso no correlacionado es similar a un portafolio diversificado y por tanto menos riesgoso.

# Conclusión

Los portafolios de derivados, como el que valuamos, presentan una alta volatilidad pues suelen estar indexados a activos que operan en mercados muy líquidos. Dado lo anterior, sería útil evaluar el uso de precios *intra-day* para la estimación de la volatilidad futura de corto plazo. Se podría utilizar, por ejemplo el *Sparce Estimator*. Esto podría aprovechar el hecho de que el logaritmo de los rendimientos *intra-day* se acercan a la normalidad, [\[Con01\]](#).

Para estar en conocimiento de si nuestras técnicas tienden a ser o no conservadoras, se aconseja utilizar la técnica de *k-fold cross-validation*, la que permitiría ampliar los modelos GARCH, por ejemplo a un Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH. Incluso permitiría utilizar técnicas no paramétricas de estimación.

Otro elemento en el que se sugiere profundizar es el ajuste de la estructura de los retornos de ciertas acciones. En esta tesis se observó que por ejemplo, la acción de FEMSA muestra rendimientos que se comportan muy alejados tanto de una normal estándar como de una distribución t-estandarizada. Estimar bajo estas distribuciones atípicas continúa siendo un campo de investigación abierto.

En los resultados se vio que el uso de rendimientos correlacionados influyó en las medidas de riesgo de forma considerable. Este trabajo estima las correlaciones futuras simplemente con las correlaciones de los últimos 100 días, sin embargo, es importante estimar la correlación de forma dinámica. Para futuras investigaciones o aplicaciones se recomienda utilizar un modelo dinámico de correlación condicional. Además se sugiere utilizar una descomposición espectral en vez de la descomposición de Cholesky estándar en la construcción de las simulaciones de Monte Carlo, [\[PS09\]](#).

Sobre el código en R sería de gran utilidad ampliar su capacidad para que pueda valorar opciones asiáticas o exóticas diferentes a las vistas en este trabajo. Para esto se disponen todos los códigos y bases de datos en [GitHub](#). En relación a la programación también se deben buscar formas de optimizar el cálculo. Cuando se valúa una serie menor de opciones el algoritmo responde extremadamente rápido. El problema surge cuando se quiere utilizar para técnicas Monte Carlo. En esta investigación se ejecutaron series de 60.000 simulaciones y el tiempo de computación estuvo en torno a las 5 horas.

# Apéndice A

## Árbol binomial multiperiodo - Europeas

En este anexo se desarrollan las fórmulas generales de valuación considerando un árbol multiperiodo lo que nos permitirá, a medida que aumentamos el número de pasos del árbol, tener una aproximación cada vez más exacta. Primero se ve el caso sin colateral y luego con colateral. Consideremos que el subyacente también es modelado en una árbol-multiperiodo como se muestra en la tabla [A.1](#). Este árbol es el modelo considerado en todos los casos siguientes.

**Cuadro A.1. Árbol binomial multiperiodo del subyacente**

				$S_0 u^N$
				$S_0 u^{(N-1)} d$
		...		
	$S_0 u$	$\begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$		
		...	$\dashrightarrow$	$\vdots$
	$S_0 d$	$\begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$		
		...		
				$S_0 u d^{(N-1)}$
				$S_0 d^N$
$t = 0$	$t = 1$	...		$t = N$

## A.1. Sin colateral

Estudiamos el caso con tres pasos. Consideremos el caso vainilla donde conocemos el valor del derivado a madurez, es decir: conocemos el *payoff*. Con tres pasos, tenemos 4 nodos finales, estos son el 6, 7, 8 y el 9. La tabla [A.2](#) muestra la aplicación del proceso *backward* de la ecuación [\(2.5\)](#).

**Cuadro A.2. Árbol binomial multiperiodo del subyacente (parte I)**

		$V_5 = B(0, 1)[qV_9 + (1 - q)V_8] \llcorner$	$V_9$
$V_2 = B^2(0, 1)[q^2V_9 + 2q(1 - q)V_8 + (1 - q)^2V_7] \llcorner$		$V_4 = B(0, 1)[qV_8 + (1 - q)V_7] \llcorner$	$V_8$
$V_0 \leftarrow$		$V_3 = B(0, 1)[qV_7 + (1 - q)V_6] \llcorner$	$V_7$
$V_1 = B^2(0, 1)[q^2V_8 + 2q(1 - q)V_7 + (1 - q)^2V_6] \llcorner$			$V_6$
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$

54

$$V_2 = \mathbf{B}(0, 1) \{ \mathbf{q}B(0, 1)[qV_9 + (1 - q)V_8] + (\mathbf{1} - \mathbf{q})B(0, 1)[qV_8 + (1 - q)V_7] \} \leftarrow$$

$$V_2 = B^2(0, 1) \left[ \boxed{\mathbf{q}^2} V_9 + \boxed{\mathbf{q}(1 - \mathbf{q})} V_8 + \boxed{(1 - \mathbf{q})\mathbf{q}} V_8 + \boxed{(1 - \mathbf{q})^2} V_7 \right]$$

Podemos ver que los objetos encerrados señalan las diferentes formas de llegar a los diferentes *payoff* desde el nodo 2. La siguiente tabla muestra los caminos. Como  $q$  es una probabilidad, los objetos encerrados nos están dando la probabilidad de llegar a tal o cual *payoff* dado que esté en el nodo 2. Ese es el valor de  $V_2$ .

$q^2$	$\rightarrow$	<i>arriba, arriba</i>	$\rightarrow$	$V_9$
$q(1-q)$	$\rightarrow$	<i>arriba, abajo</i>	$\rightarrow$	$V_8$
$(1-q)q$	$\rightarrow$	<i>abajo, arriba</i>	$\rightarrow$	$V_8$
$(1-q)^2$	$\rightarrow$	<i>abajo, abajo</i>	$\rightarrow$	$V_7$

Finalmente podemos expresar la última ecuación como sigue

$$V_2 = B^2(0, 1)[q^2V_9 + 2q(1-q)V_8 + (1-q)^2V_7]$$

Haciendo lo mismo con  $V_1$  podemos encontrar el valor del derivado en  $t = 0$  aplicando una vez más la ecuación (2.5).

55

$$V_0 = B(0, 1) \{qB^2(0, 1)[q^2V_9 + 2q(1-q)V_8 + (1-q)^2V_7] + (1-q)B^2(0, 1)[q^2V_8 + 2q(1-q)V_7 + (1-q)^2V_6]\}$$

$$V_0 = B^3(0, 1) [q^3V_9 + 2q^2(1-q)V_8 + q(1-q)^2V_7 + (1-q)q^2V_8 + 2q(1-q)^2V_7 + (1-q)^3V_6]$$

$$V_0 = B^3(0, 1) [q^3V_9 + 3q^2(1-q)V_8 + 3q(1-q)^2V_7 + (1-q)^3V_6]$$

Cuadro A.3. Árbol binomial multiperiodo del subyacente (parte II)

			...	$V_9$
		$V_2 = B^2(0, 1)[q^2V_9 + 2q(1 - q)V_8 + (1 - q)^2V_7] \lesssim$	...	$V_8$
$V_0 = B^3(0, 1)[q^3V_9 + 3q^2(1 - q)V_8 + 3q(1 - q)^2V_7 + (1 - q)^3V_6]$		$V_1 = B^2(0, 1)[q^2V_8 + 2q(1 - q)V_7 + (1 - q)^2V_6] \lesssim$	...	$V_7$
			...	$V_6$
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 4$

Volvamos a interpretar la fórmula de valuación de  $V_0$ . La tabla siguiente muestra los caminos y por tanto las probabilidades ( $\mathbb{Q}$ ) de llegar a cada uno de los nodos finales.

$q^3$	<i>arriba, arriba, arriba</i>	$\{uuu\}$	$V_9$
$q^2(1-q)$	<i>arriba, arriba, abajo</i>	$\{uud\}$	$V_8$
$q(1-q)q$	<i>arriba, abajo, arriba</i>	$\{udu\}$	$V_8$
$(1-q)q^2$	<i>abajo, arriba, arriba</i>	$\{duu\}$	$V_8$
$q(1-q)^2$	<i>arriba, abajo, abajo</i>	$\{udd\}$	$V_7$
$(1-q)^2q$	<i>abajo, abajo, arriba</i>	$\{ddu\}$	$V_7$
$(1-q)q(1-q)$	<i>abajo, arriba, abajo</i>	$\{dud\}$	$V_7$
$(1-q)^3$	<i>abajo, abajo, abajo</i>	$\{ddd\}$	$V_6$

Vemos que existen diferentes caminos de llegar a un mismo nodo final. La cantidad de formas de llegar a un nodo final responde a la siguiente pregunta y se puede modelar con la operación de combinatoria.

$$\begin{aligned}
\text{en tres pasos ¿cómo se pueden organizar tres subidas?} & \quad \binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!} = 1 \\
\text{en tres pasos ¿cómo se pueden organizar dos subidas?} & \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3 \\
\text{en tres pasos ¿cómo se puede organizar una subida?} & \quad \binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3 \\
\text{en tres pasos ¿cómo se puede organizar ninguna subida?} & \quad \binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!0!} = 1
\end{aligned}$$

Aplicando lo expuesto antes podemos usar la combinatoria para reducir la fórmula de valuación

$$\begin{aligned}
V_0 &= B^3(0, 1) [q^3V_9 + 3q^2(1-q)V_8 + 3q(1-q)^2V_7 + (1-q)^3V_6] \\
V_0 &= B^3(0, 1) \left[ \binom{3}{3}q^3V_9 + \binom{3}{2}q^2(1-q)V_8 + \binom{3}{1}q(1-q)^2V_7 + \binom{3}{0}(1-q)^3V_6 \right] \\
V_0 &= B^3(0, 1) \left[ \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i}q^i(1-q)^{3-i}V_{\{\frac{3 \cdot 4}{2} + i\}} \right] \\
V_0 &= B^3(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V|\mathcal{F}_0] \quad \text{donde } V \sim \text{bin}(3, q)
\end{aligned}$$

Utilizando inducción podemos llegar a la fórmula de valuación para un número de pasos igual a  $N$ . Es decir: podemos hacer la valuación arbitrariamente exacta.

$$V_0 = B^N(0, 1) \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i}q^i(1-q)^{N-i}V_{\{\frac{N \cdot (N+1)}{2} + i\}} \right] = B^N(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V|\mathcal{F}_0] \quad (\text{A.1})$$

donde  $V \sim \text{bin}(N, q)$

La ecuación (A.1) es una versión más general de la expuesta en CRR79. En este artículo se muestra que el método binomial multi-periodo llevado al límite contiene el modelo Black-Scholes expuesto en el artículo de 1973, BS73. Es fácil notar la utilidad de considerar  $V$ , el *payoff* que se realiza a maduración, como una variable aleatoria que sigue una distribución binomial indexada a una sigma-álgebra que no es sino el precio del subyacente, pues este último nos dice en qué parte del árbol estamos y por tanto modela la esperanza condicional.

**Cuadro A.4. Árbol binomial multiperiodo del derivado como esperanza condicional**

			$V_9$
		$V_5 = B(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_5] \llcorner$	
	$V_2 = B^2(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_2] \llcorner$		$V_8$
$V_0 = B^3(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_0] \llcorner$		$V_4 = B(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_4] \llcorner$	
	$V_1 = B^2(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_1] \llcorner$		$V_7$
		$V_3 = B(0, 1)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_3] \llcorner$	$V_6$
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$

La tabla A.4 muestra que el valor del derivado en cada nodo no es más que la esperanza condicional del *payoff* bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$ .

## A.2. Con colateral

El caso con colateral es el mismo en forma que el caso sin colateral. Lo único que aquí cambia es que la formula de valuación esta vez será la de la colateralización parcial, la ecuación (2.4).

**Cuadro A.5. Árbol binomial multiperiodo del derivado (parte I)**

		$V_5 = \frac{B(0,1)[qV_9+(1-q)V_8]}{1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)} \swarrow \nwarrow$	$V_9$
$V_2 = \frac{B^2(0,1)[q^2V_9+2q(1-q)V_8+(1-q)^2V_7]}{[1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)]^2} \swarrow \nwarrow$		$V_4 = \frac{B(0,1)[qV_8+(1-q)V_7]}{1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)} \swarrow \nwarrow$	$V_8$
$V_1 = \frac{B^2(0,1)[q^2V_8+2q(1-q)V_7+(1-q)^2V_6]}{[1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)]^2} \swarrow \nwarrow$		$V_3 = \frac{B(0,1)[qV_7+(1-q)V_6]}{1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)} \swarrow \nwarrow$	$V_7$
			$V_6$
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$

La tabla anterior muestra el árbol del derivado parcialmente colateralizado. La siguiente ecuación muestra cómo se calcula  $V_2$ .

$$V_2 = \frac{B(0,1) \left[ q \frac{B(0,1)[qV_9+(1-q)V_8]}{1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)} + (1-q) \frac{B(0,1)[qV_8+(1-q)V_7]}{1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)} \right]}{1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)}$$

$$V_2 = \frac{B^2(0,1) [q^2V_9 + q(1-q)V_8 + (1-q)qV_8 + (1-q)^2V_7]}{[1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)]^2}$$

Utilizando una vez más la formula de valuación, (2.4), llegamos al valor del derivado en  $t = 0$ .

$$V_0^c = \frac{B(0,1) \left[ q \frac{B^2(0,1)[q^2V_9+2q(1-q)V_8+(1-q)^2V_7]}{[1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)]^2} + (1-q) \frac{B^2(0,1)[q^2V_8+2q(1-q)V_7+(1-q)^2V_6]}{[1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)]^2} \right]}{1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)}$$

$$V_0^c = \frac{B^3(0,1) [q^3V_9 + 3q^2(1-q)V_8 + 3q(1-q)^2V_7 + (1-q)^3V_6]}{[1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)]^3}$$

$$V_0^c = \frac{B^3(0,1)}{[1-\gamma+\gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)]^3} \left[ \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} q^i (1-q)^{3-i} V_{\{\frac{3.4}{2}+i\}} \right]$$

Una vez más, por inducción podemos demostrar que si tomamos un árbol binomial de  $N$  pasos tenemos que el valor del derivado parcialmente colateralizado será el siguiente

$$V_0^c = \frac{B^N(0, 1)}{[1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^N} \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} q^i (1 - q)^{N-i} V_{\{\frac{N \cdot (N+1)}{2} + i\}} \right] \quad (\text{A.2})$$

Al igual que el caso sin colateral podemos modelar el *payoff* como una variable aleatoria binomial,  $V \sim \text{bin}(N, q)$ , así el valor del derivado en  $t = 0$  nos queda

$$V_0^c = \frac{B^N(0, 1)}{[1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V | \mathcal{F}_0]$$

si hacemos que la colateralización sea completa ( $\gamma = 1$ ) las ecuaciones anteriores son

$$V_0^c = B_c^N(0, 1) \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} q^i (1 - q)^{N-i} V_{\{\frac{N \cdot (N+1)}{2} + i\}} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$V_0^c = B_c^N(0, 1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V | \mathcal{F}_0]$$

### A.3. Liquidity Value Adjustmen - Europeans

Si tomamos la ecuación A.2 podemos obtener que

$$V_0^c [1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^N = B^N(0, 1) \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} q^i (1 - q)^{N-i} V_{\{\frac{N \cdot (N+1)}{2} + i\}} \right]$$

la parte derecha de la ecuación anterior es idéntica al valor del derivado sin colateral. Así tenemos que

$$V_0^c [1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^N = V_0$$

Manipulando el Teorema del Binomio podemos encontrar que

$$(1 - H)^N = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} H^k$$

Aplicando lo anterior a la parte izquierda de la ecuación tenemos que

$$\begin{aligned}
V_0^c [1 - (\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1))]^N &= V_0^c \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} [\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i \\
&= V_0^c \left[ 1 + \sum_{i=1}^N (-1)^i \binom{N}{i} [\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i \right]
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que  $\binom{N}{0} = 1$ . Sabemos que la parte izquierda es igual al derivado sin colateral

$$V_0 = V_0^c \left[ 1 + \sum_{i=1}^N (-1)^i \binom{N}{i} [\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i \right]$$

Lo anterior podemos escribirlo de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
V_0 &= V_0^c \left[ 1 - \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} [\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i \right] \\
V_0 &= V_0^c - V_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} [\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i
\end{aligned}$$

Tenemos que el valor del derivado sin colateral es igual al valor del derivado con colateral menos un objeto que denominamos *Liquidity Value Adjustment*.

$$\begin{aligned}
LVA &= V_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} [\gamma - \gamma B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i \\
LVA &= V_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} [1 - B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i \gamma^i \\
LVA &= V_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} [B^{-1}(0, 1)B(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)B(0, 1)]^i \gamma^i \\
LVA &= V_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} B(0, 1)^i [B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)]^i \gamma^i
\end{aligned}$$

si  $\gamma = 1$  finalmente tenemos que

$$LVA = V_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} B(0, 1)^i [B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)]^i \quad (\text{A.4})$$

$$LVA = C_0^c \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \binom{N}{i} B(0, 1)^i [B^{-1}(0, 1) - B_c^{-1}(0, 1)]^i \quad (\text{A.5})$$

# Apéndice B

## Árbol binomial multiperiodo - Americanas

### B.1. Sin colateral

Las opciones americanas tienen la peculiaridad de que pueden ser ejercidas durante un periodo de tiempo. En general este es desde el momento en que se vende la opción hasta su madurez. Es decir desde  $t_0$  a  $T$ . Esto implica que el tenedor de la opción debe estar continuamente evaluando qué le es más conveniente: ejercer hoy o mantener la opción.

Puede que un día la opción esté *in the money*, incluso *deep in the money*, pero sea racional no ejercerla pues el valor de mantenerla por unos días más sea mayor.

$$\text{máx} \{ \text{ejercer hoy} , \text{esperar a mañana} \}$$

Para ponerlo en el contexto teórico que hemos estado revisando podemos decir que el tenedor está constantemente comparando el valor de la opción el día de hoy versus la opción Europea con igual *strike* pero que tiene fecha de vencimiento el siguiente paso en el árbol.

Si la opción es del tipo put y estamos en  $t = i$  tendríamos

$$V_i = \text{máx} \{ (K - S_i)_+, B(0, 1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(K - S_{i+1}) | S_i] \}$$
$$V_i = \text{máx} \{ (K - S_i)_+, B(0, 1) [q(K - S_{i,u})_+ + (1 - q)(K - S_{i,d})_+] \}$$

Donde  $S_{i,u}$  y  $S_{i,d}$  son los precios que se desprenden de  $S_i$ , arriba  $u$  y abajo  $d$ , en el contexto del modelo binomial que estamos trabajando.

Dado que en el contexto binomial que construimos sabemos a priori el valor que tomará el subyacente en cada nodo podemos hacer este cálculo *backward* también en cada nodo a

través de un árbol de  $N$  pasos. Además como el árbol que construimos para el subyacente no varia (por tanto  $u$  y  $d$  tampoco) la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  no cambia entre el caso Europeo y Americano.

Pensemos en un árbol de 3 periodos para analizar la fórmula de valuación de una opción americana del tipo *put*. En el árbol [B.1](#) podemos ver el valor de la opción como funciones máximos que comparan el valor de ejercer versus mantener la opción por un periodo más. En  $t = 3$  vemos los mismos *payoff* de una opción europea call pues en este periodo el tenedor de la opción debe ejercer o simplemente dejar extinguir el contrato. Note que en los árboles, por espacio,  $B(0, 1)$  se ha simplificado por  $B$ .

En el árbol [B.2](#) se explicita el cálculo del derivado para  $t = 2$ .

**Cuadro B.1. Árbol binomial multiperiodo de opción Americana del tipo put, I**

				$(K - S_9)_+$
			$\text{máx} \{(K - S_5)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_5]\} \swarrow$	
		$\text{máx} \{(K - S_2)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_2]\} \swarrow$		$(K - S_8)_+$
	$\text{máx} \{(K - S_0)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_0]\} \swarrow$		$\text{máx} \{(K - S_4)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_4]\} \swarrow$	
		$\text{máx} \{(K - S_1)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_1]\} \swarrow$		$(K - S_7)_+$
			$\text{máx} \{(K - S_3)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_3]\} \swarrow$	$(K - S_6)_+$
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	

**Cuadro B.2. Árbol binomial multiperiodo de opción Americana del tipo put, II**

				$(K - S_9)_+$
			$\text{máx} \{(K - S_5)_+, B[q(S_9 - K)_+ + (1 - q)(S_8 - K)_+]\} \swarrow$	
		$\leftarrow \swarrow$	$\text{máx} \{(K - S_4)_+, B[q(S_8 - K)_+ + (1 - q)(S_7 - K)_+]\} \swarrow$	$(K - S_8)_+$
	$\text{máx} \{(K - S_0)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V S_0]\} \swarrow$	$\leftarrow \swarrow$	$\text{máx} \{(K - S_3)_+, B[q(S_7 - K)_+ + (1 - q)(S_6 - K)_+]\} \swarrow$	$(K - S_7)_+$
				$(K - S_6)_+$
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	

Ahora pasaremos a notación matricial para hacer el ejercicio más práctico. Expresamos el valor de no ejercer la opción en el nodo 2

$$B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|S_2] = B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{máx} \{ (K - S_5)_+, B[q(K - S_9)_+ + (1-q)(K - S_8)_+] \} \\ \text{máx} \{ (K - S_4)_+, B[q(K - S_8)_+ + (1-q)(K - S_7)_+] \} \end{bmatrix}$$

Lo que también podemos escribir

$$B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|S_2] = B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{máx} \left\{ (K - S_5)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K - S_9)_+ \\ (K - S_8)_+ \end{bmatrix} \right\} \\ \text{máx} \left\{ (K - S_4)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix}$$

Así tenemos que

$$V_2 = \text{máx} \{ (K - S_2)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V|S_2] \}$$

$$V_2 = \text{máx} \left\{ (K - S_2)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{máx} \left\{ (K - S_5)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K - S_9)_+ \\ (K - S_8)_+ \end{bmatrix} \right\} \\ \text{máx} \left\{ (K - S_4)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix} \right\}$$

De la misma forma el valor del derivado en el nodo 1 es

$$V_1 = \text{máx} \{ (K - S_1)_+, B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V|S_1] \}$$

$$V_1 = \text{máx} \left\{ (K - S_1)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{máx} \left\{ (K - S_4)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{bmatrix} \right\} \\ \text{máx} \left\{ (K - S_3)_+, B \begin{bmatrix} q & (1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K - S_7)_+ \\ (K - S_6)_+ \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix} \right\}$$

El árbol nos queda de la siguiente forma

$$V_0 = \max \left\{ (K - S_0)_+, B \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V|S_0] \right\} \leq \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_2)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_5)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_9)_+ \\ (K - S_8)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right] \\ \max \left\{ (K - S_1)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_4)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ \max \left\{ (K - S_3)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_7)_+ \\ (K - S_6)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

Ahora expresamos el valor de mantener el derivado en el nodo inicial,obteniendo así el valor del derivado en t=0.

67

$$V_0 = \max \left\{ (K - S_0)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_2)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_5)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_9)_+ \\ (K - S_8)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ \max \left\{ (K - S_1)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_4)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ \max \left\{ (K - S_3)_+, B \left[ \begin{array}{l} q \quad (1-q) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (K - S_7)_+ \\ (K - S_6)_+ \end{array} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right] \end{array} \right\} \right\} \quad (B.1)$$

En la ecuación anterior podemos ver que los primeros nodos que aparecen, mirando de izquierda a derecha, son los nodos finales haciendo pares continuos. En nuestro árbol de 3 periodos tenemos 4 nodos finales ( $N + 1$ ). Estos nodos parten (de abajo para arriba) con el nodo 6 ( $N \cdot (N + 1) / 2$ ) y terminan con el 9, ( $N \cdot (N + 1) / 2 + N$ ). Tenemos los nodos 9, 8, 7 y 6, de estos se forman tres pares continuos, es decir  $\{9,8\}$ ,  $\{8,7\}$ ,  $\{7,6\}$ . En la fórmula vemos que el par  $\{8,7\}$  aparece dos veces (en el centro), esto se debe a que al nodo del que se desprende los nodos 8 y 7, es decir el nodo 4 se puede llegar por dos caminos:  $\{\text{Arriba}, \text{Abajo}\}, \{\text{Abajo}, \text{Arriba}\}$ . En el nodo 4, el *payoff* es  $(K - S_4)$ , dado que a este se puede llegar de dos formas, aparece dos veces. En una se llega de bajada desde el nodo 2, y en otra se llega de subida desde el nodo 1. Si tuviéramos un nodo no final al que pudiéramos acceder por 3 caminos diferentes, entonces el par nodos inmediatamente consecutivos saldrían 3 veces. Si seguimos observando la ecuación de valuación vemos que la operación matricial está calculando el valor presente ( $B$ ) de la esperanza del *payoff* bajo la medida  $\mathbb{Q}$ , por eso la multiplica por  $[q \quad (1 - q)]$ , dado el nodo en el que estamos. Es decir calcula la esperanza condicional dado que estamos, de hecho, observando un precio específico del subyacente. A esta esperanza la compara con el *payoff* que se obtendría si ejercemos la opción en este momento y se queda con el máximo de las dos. Si el máximo es la esperanza, el agente no ejerce la opción, lo contrario ocurre si el *payoff* de ejercer con el precio actual es el máximo; el tenedor ejerce. Luego de seleccionar los máximos vuelve a calcular la esperanza en el subsiguiente nivel, y vuelve a comparar con los *payoff* de los nodos de donde se desprenden tales esperanzas condicionales. Se procede de la misma forma en cada nivel. Para nuestro caso, que tenemos 3 pasos, se hace el proceso *backward* 3 veces. Por eso tenemos 3 niveles de funciones máx y 3 veces calculamos esperanzas y las comparamos con la ejecución en ese momento. Este procedimiento nos entrega dos cosas, primero, el precio de no arbitraje de la opción y también nos señala qué se debe hacer en cada nodo: ejecutar o esperar.

### B.1.1. Escalamiento de la fórmula de valuación americana

Es fácil escalar esta fórmula de evaluación sin tener que construir el árbol. Pensemos en un árbol de 6 pasos por ejemplo. Tendremos entonces 7 nodos finales y 6 nodos inmediatamente anteriores a los no finales. Los nodos finales son 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27. Estos nodos los conocemos aplicando  $(N \cdot (N + 1) / 2 + i)$ , donde  $i$  va de 0 a 6. Podemos formar los siguientes pares continuos con los valores del derivado al vencimiento, el supra índice  $f$  señala que son nodos finales.

<i>Par</i>	<i>NodoPadre</i>	<i>Caminos</i>
$\{V_{27}^f, V_{26}^f\}$	20	$\binom{5}{0} = 1$
$\{V_{26}^f, V_{25}^f\}$	19	$\binom{5}{1} = 5$
$\{V_{25}^f, V_{24}^f\}$	18	$\binom{5}{2} = 10$
$\{V_{24}^f, V_{23}^f\}$	17	$\binom{5}{3} = 10$
$\{V_{23}^f, V_{22}^f\}$	16	$\binom{5}{4} = 5$
$\{V_{22}^f, V_{21}^f\}$	15	$\binom{5}{5} = 1$

Los pares de nodos nacen respectivamente de los nodos 21 al 16. Esto lo sabemos porque el primer nodo de la última capa es el 22, por tanto el nodo 21 debe pertenecer a la capa anterior, y esta capa debe tener 6 nodos: 21, 20, 19, 18, 17, 16. Podemos calcular las formas de llegar a los nodos padres, dado que estamos en la capa 5.

$$\begin{aligned}
V_{20} &= \text{máx}\{V_{20}^A, BE_q\{V_{27}^f, V_{26}^f\}\} \\
V_{19} &= \text{máx}\{V_{19}^A, BE_q\{V_{26}^f, V_{25}^f\}\} \\
V_{18} &= \text{máx}\{V_{18}^A, BE_q\{V_{25}^f, V_{24}^f\}\} \\
V_{17} &= \text{máx}\{V_{17}^A, BE_q\{V_{24}^f, V_{23}^f\}\} \\
V_{16} &= \text{máx}\{V_{16}^A, BE_q\{V_{23}^f, V_{22}^f\}\} \\
V_{15} &= \text{máx}\{V_{15}^A, BE_q\{V_{22}^f, V_{21}^f\}\}
\end{aligned}$$

Como muestran las ecuaciones anteriores tenemos el valor del derivado americano en la capa anterior, es decir la 5.  $V_{21}^A$  es el valor de ejercer en el nodo 21, el superíndice  $A$  es para señalar que se trata del ejercicio que permite la opción Americana.  $BE_q\{V_{27}^f, V_{26}^f\}$  no es más que el valor presente de la esperanza del derivado, sólo que con una notación simplificada. Ahora podemos volver a aplicar los pasos anteriores considerando los nodos del 15 al 29 como los nodos finales del derivado.

$$\begin{aligned}
V_{14} &= \text{máx}\{V_{14}^A, BE_q\{V_{20}, V_{19}\}\} \\
V_{13} &= \text{máx}\{V_{13}^A, BE_q\{V_{19}, V_{18}\}\} \\
V_{12} &= \text{máx}\{V_{12}^A, BE_q\{V_{18}, V_{17}\}\} \\
V_{11} &= \text{máx}\{V_{11}^A, BE_q\{V_{17}, V_{16}\}\} \\
V_{10} &= \text{máx}\{V_{10}^A, BE_q\{V_{16}, V_{15}\}\}
\end{aligned}$$

Continuando de la misma manera

$$\begin{aligned}
V_9 &= \text{máx}\{V_9^A, BE_q\{V_{14}, V_{13}\}\} \\
V_8 &= \text{máx}\{V_8^A, BE_q\{V_{13}, V_{12}\}\} \\
V_7 &= \text{máx}\{V_7^A, BE_q\{V_{12}, V_{11}\}\} \\
V_6 &= \text{máx}\{V_6^A, BE_q\{V_{11}, V_{10}\}\}
\end{aligned}$$

siguiendo el mismo proceso

$$V_5 = \text{máx}\{V_5^A, BE_q\{V_9, V_8\}\}$$

$$V_4 = \text{máx}\{V_4^A, BE_q\{V_8, V_7\}\}$$

$$V_3 = \text{máx}\{V_3^A, BE_q\{V_7, V_6\}\}$$

llegamos al primer paso

$$V_2 = \text{máx}\{V_2^A, BE_q\{V_6, V_5\}\}$$

$$V_1 = \text{máx}\{V_1^A, BE_q\{V_5, V_4\}\}$$

finalmente tenemos el valor del derivado en  $t = 0$

$$V_0 = \text{máx}\{V_1^A, BE_q\{V_3, V_2\}\}$$

Como vemos, el proceso es muy sencillo y a medida que aumentamos un paso en el árbol tenemos que calcular únicamente un nodo final y una capa más, por tanto al aumentar de capas la necesidad de cálculo aumenta de forma lineal. Dada la capacidad del algoritmo, en esta tesis se programó en lenguaje de computadora R, y se verifica que el cálculo para árboles de 1.000 pasos tarda menos de 3 segundos.

## B.2. Con colateral

El caso con colateral es muy parecido al caso sin colateral. La diferencia es que para el primero el valor presente se calcula no con  $B(0,1)$ , sino que con el siguiente objeto que está en la ecuación [2.4](#)

$$B_c^\gamma := \frac{B(0,1)}{1 - \gamma + \gamma B_c^{-1}(0,1)B(0,1)} \leftarrow \text{Factor de descuento} \quad (\text{B.2})$$

Así, para el caso de 3 periodos el valor del derivado colateralizado será el siguiente.

$$V_0^c = \max \left\{ (K - S_0)_+, B_c^\gamma [q \ (1 - q)] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_2)_+, B_c^\gamma [q \ (1 - q)] \left[ \begin{array}{l} \max \left\{ (K - S_5)_+, B_c^\gamma [q \ (1 - q)] \left[ \begin{array}{l} (K - S_9)_+ \\ (K - S_8)_+ \end{array} \right] \right\} \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B_c^\gamma [q \ (1 - q)] \left[ \begin{array}{l} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{array} \right] \right\} \\ \max \left\{ (K - S_4)_+, B_c^\gamma [q \ (1 - q)] \left[ \begin{array}{l} (K - S_8)_+ \\ (K - S_7)_+ \end{array} \right] \right\} \\ \max \left\{ (K - S_3)_+, B_c^\gamma [q \ (1 - q)] \left[ \begin{array}{l} (K - S_7)_+ \\ (K - S_6)_+ \end{array} \right] \right\} \end{array} \right] \right\} \end{array} \right] \right\} \quad (\text{B.3})$$

De la misma forma podemos ampliar el modelo, a 6 pasos como antes.

$V_{20}^c = \text{máx}\{V_{20}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{27}^f, V_{26}^f\}\}$
$V_{19}^c = \text{máx}\{V_{19}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{26}^f, V_{25}^f\}\}$
$V_{18}^c = \text{máx}\{V_{18}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{25}^f, V_{24}^f\}\}$
$V_{17}^c = \text{máx}\{V_{17}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{24}^f, V_{23}^f\}\}$
$V_{16}^c = \text{máx}\{V_{16}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{23}^f, V_{22}^f\}\}$
$V_{15}^c = \text{máx}\{V_{15}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{22}^f, V_{21}^f\}\}$
$V_{14}^c = \text{máx}\{V_{14}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{20}, V_{19}\}\}$
$V_{13}^c = \text{máx}\{V_{13}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{19}, V_{18}\}\}$
$V_{12}^c = \text{máx}\{V_{12}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{18}, V_{17}\}\}$
$V_{11}^c = \text{máx}\{V_{11}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{17}, V_{16}\}\}$
$V_{10}^c = \text{máx}\{V_{10}^A, B_c^\gamma E_q\{V_{16}, V_{15}\}\}$
$V_9^c = \text{máx}\{V_9^A, B_c^\gamma E_q\{V_{14}, V_{13}\}\}$
$V_8^c = \text{máx}\{V_8^A, B_c^\gamma E_q\{V_{13}, V_{12}\}\}$
$V_7^c = \text{máx}\{V_7^A, B_c^\gamma E_q\{V_{12}, V_{11}\}\}$
$V_6^c = \text{máx}\{V_6^A, B_c^\gamma E_q\{V_{11}, V_{10}\}\}$
$V_5^c = \text{máx}\{V_5^A, B_c^\gamma E_q\{V_9, V_8\}\}$
$V_4^c = \text{máx}\{V_4^A, B_c^\gamma E_q\{V_8, V_7\}\}$
$V_3^c = \text{máx}\{V_3^A, B_c^\gamma E_q\{V_7, V_6\}\}$
$V_2^c = \text{máx}\{V_2^A, B_c^\gamma E_q\{V_6, V_5\}\}$
$V_1^c = \text{máx}\{V_1^A, B_c^\gamma E_q\{V_5, V_4\}\}$
$V_0^c = \text{máx}\{V_1^A, B_c^\gamma E_q\{V_3, V_2\}\}$

### B.3. Liquidity Value Adjustment

Para el caso americano no podemos derivar una forma cerrada para calcular el LVA. Sin embargo podemos obtener su valor una vez calculado el derivado americano sin colateral y con colateral con la metodología expuesta inmediatamente anterior. Así, el valor del LVA será

$$LVA = V_0^c - V_0 \tag{B.4}$$

# Apéndice C

## Máxima Verosimilitud - Quasi-Máxima Verosimilitud - GARCH(p,q)

### C.1. Máxima Verosimilitud - Normal

Ya sea que estimemos la varianza con GARCH(1,1) o GARCH(p,q)

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^2 &= \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2 \\ \sigma_{t+1}^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2\end{aligned}$$

podemos utilizar la estimación por Máxima Verosimilitud. Tenemos el supuesto siguiente

$$\frac{R_{t+1}}{\sigma_{t+1}} \sim \text{i.i.d } N(0, 1) \quad (\text{C.1})$$

Dado lo anterior la función de densidad, o de verosimilitud en este caso, es la siguiente

$$l\left(\frac{R_t}{\sigma_t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

dado que los rendimientos estandarizados son independientes e idénticamente distribuidos podemos escribir la función de verosimilitud como la multiplicación de todas las funciones univariadas

$$L\left(\frac{R_t}{\sigma_t}, \dots, \frac{R_T}{\sigma_T}\right) = \prod_{t=1}^T \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}} \right]$$

Para nuestra estimación necesitamos encontrar los parámetros  $\psi : \{\omega, \alpha, \beta\}$  del espacio de parámetros,  $\Psi$ , que maximicen la función conjunta de verosimilitud, es decir el modelo poblacional cumple con

$$\mathbf{argmax}_{\{\psi \in \Psi\}} \left\{ \prod_{t=1}^T \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}} \right] \right\}$$

de esta forma los parámetros se estiman mediante la siguiente optimización

$$\mathbf{argmax}_{\{\hat{\psi} \in \Psi\}} \left\{ \prod_{t=1}^T \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_t^2}} e^{-\frac{R_t^2}{2\hat{\sigma}_t^2}} \right] \right\}$$

Dado que la función logaritmica es una operación estrictamente creciente resulta lo mismo estimar el logaritmo de la función conjunta de verosimilitud, es decir

$$\mathbf{argmax}_{\{\hat{\psi} \in \Psi\}} \left\{ \sum_{t=1}^T \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_t^2}} e^{-\frac{R_t^2}{2\hat{\sigma}_t^2}} \right] \right\}$$

$$\mathbf{argmax}_{\{\hat{\psi} \in \Psi\}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(2\pi) + \ln(\hat{\sigma}_t^2) + \frac{R_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} \right] \right\}$$

Dado que la función adición también es una transformación estrictamente creciente podemos escribir el problema de la siguiente forma

$$\mathbf{argmax}_{\{\hat{\psi} \in \Psi\}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(\hat{\sigma}_t^2) + \frac{R_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} \right] \right\}$$

## C.2. Quasi-Máxima Verosimilitud

Siguiendo a [Wed74](#), [BW92](#) y [FZ09](#) podemos utilizar las propiedades asintóticas de la distribución normal para utilizar el método de Máxima Verosimilitud violando este supuesto. En un modelo GARCH donde se viola el supuesto de normalidad los parámetros tenderán a los parámetros reales a pesar de esta violación, a medida que la muestra tienda a ser infinitamente grande. Esto es útil cuando no encontramos una función de distribución que se ajuste a los datos.

## C.3. Máxima Verosimilitud para $\tilde{t}(d)$

Es posible flexibilizar el supuesto de normalidad. Siguiendo a [Con01](#) es un hecho estilizado que las series financieras presentan colas pesadas. Una distribución que tiene

colas más pesadas que la normal es la distribución t-Student( $d$ ). [Bol87] introduce un modelo GARCH para series financieras con colas pesadas que siguen una distribución  $t(d)$  estandarizada, la distribución  $\tilde{t}(d)$ . En este artículo se presenta la función de verosimilitud en este contexto. Esta debe ser maximizada ajustando los parámetros del modelo GARCH y el parámetro  $d$  de la distribución  $\tilde{t}(d)$ .

Tenemos que la distribución t-Student( $d$ ) tiene media 0 y varianza  $\frac{d}{d-2}$ . Si tenemos que

$$x \sim t(d)$$

estandarizando

$$z = \frac{x - 0}{\sqrt{\frac{d}{d-2}}} = x \sqrt{\frac{d-2}{d}}$$

así tenemos que

$$z \sim \tilde{t}(d)$$

[Chr11] muestra que en este caso la función de verosimilitud es la siguiente

$$\operatorname{argmax}_{\{\hat{\psi} \in \Psi\}} \left[ \begin{array}{l} T \left\{ \ln \left( \Gamma \left( \frac{d+1}{d} \right) \right) - \ln \left( \Gamma \left( \frac{d}{d} \right) \right) - \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \ln (d-2) \right\} \\ - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (d+1) \ln \left( 1 + \frac{\left( \frac{R_t}{\sigma_t} \right)^2}{d-2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \sigma_t^2 \end{array} \right] \quad (\text{C.2})$$

## C.4. Propiedades del modelo GARCH( $p, q$ )

### C.4.1. Volatilidad de largo plazo

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \\ \mathbb{E}[\sigma_{t+1}^2] &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{E}[R_{t+1-i}^2] + \sum_{j=1}^q \beta_j \mathbb{E}[\sigma_{t+1-j}^2] \\ \sigma^2 &= \omega + \sigma^2 \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sigma^2 \sum_{j=1}^q \beta_j \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación para  $\sigma^2$  tenemos que

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j} \quad (\text{C.3})$$

Las igualdades anteriores se siguen de que  $\mathbb{E}[R_t] = 0$  y por tanto

$$\text{Var}[R_t] = \mathbb{E}[(R_t - \mathbb{E}[R_t])^2] \rightarrow \mathbb{E}[R_t^2] = \sigma^2$$

Para que la ecuación (C.3) esté bien definida debe cumplirse que

$$1 \neq \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j$$

La ecuación (C.3) muestra que existe una volatilidad de largo plazo y que esta depende de los parámetros  $\omega$ ,  $\alpha_i$  y  $\beta_j$ . Si despejamos  $\omega$  en la ecuación antes citada tenemos

$$\sigma_{t+1}^2 = \left[ 1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j \right] \sigma^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \quad (\text{C.4})$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (R_{t+1-i}^2 - \sigma^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j (\sigma_{t+1-j}^2 - \sigma^2) \quad (\text{C.5})$$

La ecuación (C.5) muestra que la volatilidad de mañana está determinada por la volatilidad de largo plazo más una suma ponderada de las diferencias entre la volatilidad de largo plazo, los rendimientos cuadrados observados los últimos días y también de la volatilidad de los últimos días.

### C.4.2. Volatilidad futura

Ahora pensemos en que queremos estimar la volatilidad en  $k$  días, para eso tomemos la esperanza condicional a la información contenida en  $t$

$$\sigma_{t+k}^2 - \sigma^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i (R_{t+k-i}^2 - \sigma^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j (\sigma_{t+k-j}^2 - \sigma^2) \quad (\text{C.6})$$

Tomando la esperanza condicional a la información hasta  $t$  tenemos

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{E}[R_{t+k-i}^2 - \sigma^2 | \mathcal{F}_t] + \sum_{j=1}^q \beta_j \mathbb{E}[\sigma_{t+k-j}^2 - \sigma^2 | \mathcal{F}_t]$$

Donde  $\mathcal{F}_t$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene la información hasta  $t$ .

Sabemos que  $R_{t+k-i}^2 = \sigma_{t+k-i}^2 z_{t+k-i}^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 z_{t+k-i}^2 - \sigma^2 | \mathcal{F}_t] + \sum_{j=1}^q \beta_j \mathbb{E}[\sigma_{t+k-j}^2 - \sigma^2 | \mathcal{F}_t] \\ \mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 z_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j \mathbb{E}[\sigma_{t+k-j}^2 - \sigma^2 | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

En nuestro modelo de volatilidad hemos asumido que las  $z_{t+1}$  son i.i.d., por tanto  $\sigma_{t+1}$  y  $z_{t+1}$  son independientes. Así tenemos que

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 z_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}[z_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t]$$

La última igualdad se sigue de que  $z$  es una variable estandarizada, luego su media es 0 y su varianza 1. Entonces tenemos

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j (\mathbb{E}[\sigma_{t+k-j}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2)$$

si  $p = q$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2 &= \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) (\mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2) \\ \mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 | \mathcal{F}_t] &= \sigma^2 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) (\mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2) \end{aligned} \tag{C.7}$$

### C.4.3. Volatilidad futura acumulada

Recordemos que queremos estimar la volatilidad de ciertas acciones para evaluar opciones americanas sobre ellas. Para poder evaluarlas necesitamos la volatilidad acumulada por un periodo de tiempo, desde que suscribimos el contrato de la opción hasta su madurez. Es fácil ver que los retornos logarítmicos tienen la siguiente propiedad

$$R_{t+1:t+K} = \sum_{k=1}^K R_{t+k}$$

Asumiendo que los retornos no tienen autocorrelación y su media es cero podemos establecer

$$\sigma_{t+1:t+K}^2 = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^K R_{t+k} | \mathcal{F}_t \right]^2 = \sum_{k=1}^K \mathbb{E}[\sigma_{t+k}^2 | \mathcal{F}_t]$$

Usando la ecuación (C.7) tenemos lo siguiente

$$\sigma_{t+1:t+K}^2 = \sum_{k=1}^K \left( \sigma^2 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) (\mathbb{E}[\sigma_{t+k-i}^2 | \mathcal{F}_t] - \sigma^2) \right)$$

por tanto la volatilidad acumulada será

$$\sigma_{t+1:t+K} = \sqrt{K\sigma^2 + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) (\sigma_{t+1-i}^2 - \sigma^2)} \quad (\text{C.8})$$

## C.5. Resultados Eviews

En este anexo se presentan los resultados econométricos de los diferentes modelos para estimación de volatilidad dinámica.

**Figura C.1. Resultados GARCH serie alfaa**

```

Dependent Variable: ALFAA_R
Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 05/28/20 Time: 19:50
Sample: 5/12/2015 12/30/2019
Included observations: 1168
Convergence achieved after 43 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = 0.000323270498876*(1 - C(2) - C(3) - C(4) - C(5)) + C(2)
*RESID(-1)^2 + C(3)*RESID(-2)^2 + C(4)*GARCH(-1) + C(5)*GARCH(-2)

```

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000427	0.000455	-0.939369	0.3475
Variance Equation				
C	2.10E-05	--	--	--
RESID(-1)^2	0.159329	0.044914	3.547401	0.0004
RESID(-2)^2	-0.109791	0.063811	-1.720568	0.0853
GARCH(-1)	1.035968	0.532337	1.946074	0.0516
GARCH(-2)	-0.150313	0.419846	-0.358019	0.7203
T-DIST. DOF	6.234973	0.790965	7.882743	0.0000
R-squared	-0.000062	Mean dependent var		-0.000570
Adjusted R-squared	-0.000062	S.D. dependent var		0.017987
S.E. of regression	0.017987	Akaike info criterion		-5.387477
Sum squared resid	0.377580	Schwarz criterion		-5.361469
Log likelihood	3152.287	Hannan-Quinn criter.		-5.377667
Durbin-Watson stat	2.105232			

### Figura C.2. Resultados GARCH serie amxl

Dependent Variable: AMXL\_R  
 Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
 Date: 05/28/20 Time: 19:53  
 Sample: 5/12/2015 12/30/2019  
 Included observations: 1168  
 Convergence achieved after 32 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 GARCH = 0.000234655195262\*(1 - C(2) - C(3)) + C(2)\*RESID(-1)^2 + C(3)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000122	0.000388	-0.315218	0.7526
Variance Equation				
C	6.61E-06	--	--	--
RESID(-1)^2	0.039520	0.013217	2.990137	0.0028
GARCH(-1)	0.932318	0.024015	38.82236	0.0000
T-DIST. DOF	5.859432	0.658573	8.897161	0.0000
R-squared	-0.000037	Mean dependent var		-2.88E-05
Adjusted R-squared	-0.000037	S.D. dependent var		0.015325
S.E. of regression	0.015325	Akaike info criterion		-5.634098
Sum squared resid	0.274077	Schwarz criterion		-5.616758
Log likelihood	3294.313	Hannan-Quinn criter.		-5.627557
Durbin-Watson stat	1.899268			

### Figura C.3. Resultados GARCH serie bimboa

Dependent Variable: BIMBOA\_R  
 Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
 Date: 05/28/20 Time: 19:54  
 Sample: 5/12/2015 12/30/2019  
 Included observations: 1168  
 Convergence achieved after 66 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 GARCH = 0.000241047074349\*(1 - C(2) - C(3) - C(4) - C(5) - C(6) - C(7)) + C(2)\*RESID(-1)^2 + C(3)\*RESID(-2)^2 + C(4)\*RESID(-3)^2 + C(5)\*GARCH(-1) + C(6)\*GARCH(-2) + C(7)\*GARCH(-3)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000332	0.000397	-0.835771	0.4033
Variance Equation				
C	2.48E-05	--	--	--
RESID(-1)^2	0.060655	0.019060	3.182363	0.0015
RESID(-2)^2	-0.022287	0.014102	-1.580397	0.1140
RESID(-3)^2	0.058454	0.018460	3.166557	0.0015
GARCH(-1)	0.803549	0.045235	17.76398	0.0000
GARCH(-2)	-0.870057	0.034790	-25.00894	0.0000
GARCH(-3)	0.866951	0.044005	19.70101	0.0000
T-DIST. DOF	6.168955	0.857626	7.193058	0.0000
R-squared	-0.000135	Mean dependent var		-0.000151
Adjusted R-squared	-0.000135	S.D. dependent var		0.015531
S.E. of regression	0.015532	Akaike info criterion		-5.571429
Sum squared resid	0.281543	Schwarz criterion		-5.536750
Log likelihood	3261.714	Hannan-Quinn criter.		-5.558348
Durbin-Watson stat	2.204986			

### Figura C.4. Resultados GARCH serie cemexcpo

Dependent Variable: CEMEXCPO\_R  
 Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)  
 Date: 05/28/20 Time: 19:56  
 Sample: 5/12/2015 12/30/2019  
 Included observations: 1168  
 Failure to improve likelihood (singular hessian) after 72 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 GARCH = 0.000434029737742\*(1 - C(2) - C(3) - C(4) - C(5) - C(6) - C(7) - C(8) - C(9)) + C(2)\*RESID(-1)^2 + C(3)\*RESID(-2)^2 + C(4)\*RESID(-3)^2 + C(5)\*RESID(-4)^2 + C(6)\*GARCH(-1) + C(7)\*GARCH(-2) + C(8)\*GARCH(-3) + C(9)\*GARCH(-4)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000422	0.000538	-0.785307	0.4323

Variance Equation

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	9.06E-06	--	--	--
RESID(-1)^2	0.135436	0.023884	5.670583	0.0000
RESID(-2)^2	-0.150493	0.068133	-2.208802	0.0272
RESID(-3)^2	0.009300	0.080812	0.115079	0.9084
RESID(-4)^2	0.055965	0.038704	1.445979	0.1482
GARCH(-1)	1.603199	0.172777	9.279017	0.0000
GARCH(-2)	-0.270607	0.412079	-0.656687	0.5114
GARCH(-3)	-1.086093	0.386329	-2.811316	0.0049
GARCH(-4)	0.682409	0.138143	4.939856	0.0000

R-squared	-0.000065	Mean dependent var	-0.000591
Adjusted R-squared	-0.000065	S.D. dependent var	0.020842
S.E. of regression	0.020842	Akaike info criterion	-5.012176
Sum squared resid	0.506947	Schwarz criterion	-4.973163
Log likelihood	2936.111	Hannan-Quinn criter.	-4.997460
Durbin-Watson stat	1.862259		

### Figura C.5. Resultados GARCH serie femsaubd

Dependent Variable: FEMSAUBD\_R  
 Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)  
 Date: 05/28/20 Time: 19:58  
 Sample: 5/12/2015 12/30/2019  
 Included observations: 1168  
 Convergence achieved after 32 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 GARCH = 0.000135619612575\*(1 - C(2) - C(3)) + C(2)\*RESID(-1)^2 + C(3)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000363	0.000317	1.144708	0.2523

Variance Equation

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.70E-05	--	--	--
RESID(-1)^2	0.082771	0.023333	3.547378	0.0004
GARCH(-1)	0.791517	0.068884	11.49064	0.0000

R-squared	-0.000253	Mean dependent var	0.000178
Adjusted R-squared	-0.000253	S.D. dependent var	0.011649
S.E. of regression	0.011651	Akaike info criterion	-6.091407
Sum squared resid	0.158404	Schwarz criterion	-6.078402
Log likelihood	3560.382	Hannan-Quinn criter.	-6.086502
Durbin-Watson stat	2.035760		

### Figura C.6. Resultados GARCH serie walmex

Dependent Variable: WALMEX\_R  
 Method: ML ARCH - Student's t distribution (BFGS / Marquardt steps)  
 Date: 05/28/20 Time: 20:00  
 Sample: 5/12/2015 12/30/2019  
 Included observations: 1168  
 Failure to improve likelihood (non-zero gradients) after 44 iterations  
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 GARCH = 0.000217820850346\*(1 - C(2) - C(3) - C(4) - C(5) - C(6) - C(7)) +  
 C(2)\*RESID(-1)^2 + C(3)\*RESID(-2)^2 + C(4)\*RESID(-3)^2 + C(5)  
 \*GARCH(-1) + C(6)\*GARCH(-2) + C(7)\*GARCH(-3)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000422	0.000366	1.154868	0.2481
Variance Equation				
C	1.05E-05	--	--	--
RESID(-1)^2	0.160012	0.046715	3.425262	0.0006
RESID(-2)^2	0.006425	0.006365	1.009500	0.3127
RESID(-3)^2	-0.147602	0.042149	-3.501903	0.0005
GARCH(-1)	-0.165026	0.101803	-1.621032	0.1050
GARCH(-2)	0.847346	0.088347	9.591131	0.0000
GARCH(-3)	0.250845	0.100488	2.496275	0.0126
T-DIST. DOF	5.782947	0.732859	7.890939	0.0000
R-squared	-0.000053	Mean dependent var		0.000314
Adjusted R-squared	-0.000053	S.D. dependent var		0.014765
S.E. of regression	0.014765	Akaike info criterion		-5.690893
Sum squared resid	0.254415	Schwarz criterion		-5.656214
Log likelihood	3331.481	Hannan-Quinn criter.		-5.677812
Durbin-Watson stat	2.157361			

# Bibliografía

- [BS73] Fischer Black y Myron Scholes. “The pricing of options and corporate liabilities”. En: *Journal of political economy* 81.3 (1973), págs. 637-654.
- [Mer73] Robert C Merton. “Theory of rational option pricing”. En: *The Bell Journal of economics and management science* (1973), págs. 141-183.
- [Wed74] Robert WM Wedderburn. “Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss—Newton method”. En: *Biometrika* 61.3 (1974), págs. 439-447.
- [BS77] Michael J Brennan y Eduardo S Schwartz. “The valuation of American put options”. En: *The Journal of Finance* 32.2 (1977), págs. 449-462.
- [Par77] Michael Parkinson. “Option pricing: the American put”. En: *The Journal of Business* 50.1 (1977), págs. 21-36.
- [BS78] Michael J Brennan y Eduardo S Schwartz. “Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis”. En: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13.3 (1978), págs. 461-474.
- [CRR79] John C Cox, Stephen A Ross y Mark Rubinstein. “Option pricing: A simplified approach”. En: *Journal of financial Economics* 7.3 (1979), págs. 229-263.
- [Joh83] Herb E Johnson. “An analytic approximation for the American put price”. En: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18.1 (1983), págs. 141-148.
- [GJ84] Robert Geske y Herb E Johnson. “The American put option valued analytically”. En: *The Journal of Finance* 39.5 (1984), págs. 1511-1524.
- [Bol87] Tim Bollerslev. “A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return”. En: *The review of economics and statistics* (1987), págs. 542-547.
- [BW92] Tim Bollerslev y Jeffrey M Wooldridge. “Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances”. En: *Econometric reviews* 11.2 (1992), págs. 143-172.

- [Con01] Rama Cont. “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”. En: (2001).
- [LS01] Francis A Longstaff y Eduardo S Schwartz. “Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach”. En: *The review of financial studies* 14.1 (2001), págs. 113-147.
- [FZ09] Christian Francq y Jean-Michel Zakoian. “A tour in the asymptotic theory of GARCH estimation”. En: *Handbook of financial time series*. Springer, 2009, págs. 85-111.
- [PS09] Andrew J Patton y Kevin Sheppard. “Evaluating volatility and correlation forecasts”. En: *Handbook of financial time series*. Springer, 2009, págs. 801-838.
- [Pit10] Vladimir Piterbarg. “Funding beyond discounting: collateral agreements and derivatives pricing”. En: *Risk* 23.2 (2010), pág. 97.
- [Chr11] Peter Christoffersen. *Elements of financial risk management*. Academic Press, 2011.
- [Gre12] Jon Gregory. *Counterparty credit risk and credit value adjustment: A continuing challenge for global financial markets*. John Wiley & Sons, 2012.
- [Cas13] Antonio Castagna. “Pricing of derivatives contracts under collateral agreements: Liquidity and funding value adjustments”. En: *Available at SSRN 1974479* (2013).
- [Eic14] Barry Eichengreen. *Hall of mirrors: The great depression, the great recession, and the uses-and misuses-of history*. Oxford University Press, 2014.