EL COLEGIO DE MEXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y DEMOGRAFICOS

UN METODO PARA EVALUAR, EN FORMA INDIRECTA, LAS VARIACIONES DE LOS COEFICIENTES ELASTICIDAD PRODUCTO EN UNA FUNCION AGREGADA DE PRODUCCION.

(EL CASO DE LA COBB-DOUGLAS)

T E S I S

QUE PARA OBTENER LA

MAESTRIA EN ECONOMIA

P R E S E N T A

JOSE TOMAS VIVES URBINA

GUADALAJARA, JAL. 1974

I N D I C E   G E N E R A L

	Página
INDICE GENERAL	3
DEDICATORIAS	6
PRESENTACION	9
INTRODUCCION	11
CAPITULO I	14
A. LOS OBJETIVOS	15
B. LAS LIMITACIONES	17
CAPITULO II. RESUMEN DE LA FORMA EN QUE SE EMPLEA EL MARCO TEORICO	19
CAPITULO III. LA FUNCION PRODUCCION COBB-DOUGLAS	22
CAPITULO IV. ANALISIS DEL COEFICIENTE ELASTICIDAD PRODUCTO	27
CAPITULO V. LA EVALUACION INDIRECTA DE LAS VARIACIONES DE LOS COEFICIENTES ELASTICIDAD PRODUCTO	32
GRAFICA I	34
GRAFICA II	37
GRAFICA III	38
GRAFICA IV	39
GRAFICA V	40
GRAFICA VI	41
CAPITULO VI. LA UTILIZACION DEL METODO	44
GRAFICA VII	46
GRAFICA VIII	48
CONCLUSIONES	49

Página

ANEXO 1 51

PRUEBA I 52

PRUEBA II 52

PRUEBA III 53

PRUEBA IV 53

PRUEBA V 54

PRUEBA VI 55

PRUEBA VII 58

PRUEBA VIII 61

PRUEBA IX 65

BIBLIOGRAFIA 66

D E D I C A T O R I A S

A mis padres y hermano.

A Dn. José O. Urbina.

Une fourmille de dix-huit métres,
Avec un chapeau sur la tete;
Ca n'existe pas, Ca n'existe pas...
...et pourquoi? pourquoi pas?

Vieja canción popular francesa.

P R E S E N T A C I O N

El presente trabajo fué iniciado estando próxima la primavera de 1971- en la biblioteca del Colegio de México, en México, D.F. la primera intención era probar una hipótesis relacionada con una falla en el mercado de trabajo con efectos en la distribución de la producción, y que era originada por un retardo en la respuesta de los centros productores de los diferentes tipos- de trabajador, con respecto de las señales de precios (sueldos y salarios)- surgidas dentro de la misma organización para la producción. A estas fechas el asesor fué el licenciado Francisco Javier Alejo L.

En el transcurso del último bimestre de la maestría, el segundo ase - sor, Dr. David Barkin, hizo ver que el trabajo que se estaba intentado rea- lizar requería de la elaboración de un modelo de equilibrio general para el mercado del trabajo que, dada la poca experiencia del autor lo limitado - del tiempo (se suponía se debía utilizar el último semestre de la maestría- para realizar esta investigación), era prácticamente imposible de llevar a- cabo.

Para aprovechar el material leído y lo que se había avanzado, se refor - muló el proyecto de investigación hacia "un método para evaluar, en forma - indirecta las modificaciones de los coeficientes elasticidad producto en - una función agregada de producción: el caso de la Cobb-Douglas".

En esta etapa fueron estimulantes las críticas del Dr. Saúl Trejo Re - yes y del tercer asesor el profesor Guillermo Vitteli, por parte de los pro - fesores de El Colegio de México y, asimismo de un estimado amigo, miembro - de la primera generación de maestros en Economía Industrial del I.P.N. (y - el último de los asesores) el Lic. Jorge Ramírez Cruz, actual director de - la Escuela de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Debe hacerse un reconocimiento a todos ellos, y en forma muy especial- y por separado al Actuario Miguel Cervera, cuya colaboración en los aspec - tos matemáticos fue definitivo.

Antes de dar por terminadas estas primeras líneas, se debe dejar cons- tancia de que los errores contenidos en la investigación son de la entera - responsabilidad del autor.

Guadalajara, Jal., 1973

J. T. Vives Urbina.

I N T R O D U C C I O N

En los últimos años, en México, ha sido creciente el interés en diseñar políticas orientadas a resolver los problemas que plantea una inequitativa distribución del Ingreso (tanto poblacional factorial como geográficamente) sin embargo, para diseñar tales políticas es necesario contar con estudios que ayuden a definir y dimensionar la magnitud de tal problemática en el tiempo; es decir, que la toma continua de decisiones acerca de los problemas citados arriba requiere de una revisión continua, de estos fenómenos que son dinámicos; tal como lo es, en lo particular, la explotación relativa entre los factores productivos trabajo y capital.

Así mismo en otras ocasiones es interesante indagar sobre la explotación relativa entre las diversas "calidades" de fuerza de trabajo.

Ahora bien para la realización oportuna del flujo de estudios mencionados en el párrafo anterior, dadas las "herramientas" de investigación de que, nos proveen algunos de los estudios econométricos más conocidos, 1/ generalmente se requiere de la existencia de una cierta cantidad de información Estadística, que, en países como el nuestro no existe o es difícil de obtener. Además de la relativa estaticidad de los resultados obtenidos mediante estos métodos.

El propósito de este trabajo es diseñar un instrumento alternativo de análisis, para observar el comportamiento de fenómenos del tipo de los descritos en los primeros párrafos; el cual presente el mínimo de problemas en cuanto a requerimientos de información estadística y además, permita, oportunamente, tener una idea de la dinámica de tales fenómenos.

Por supuesto, lo que se pretende, tal vez, implica sacrificar un cierto grado de precisión y algo de la integralidad que ofrecen los métodos más completos y sofisticados, sin embargo, como afirma Ricardo Carrillo 2/ refiriéndose a lás técnicas y objetivos de la planificación en un país determinado "cae dentro del terreno de la responsabilidad de sus respectivos economistas, que deberán adaptar, modificar, sustituir o diseñar, de acuerdo a las condiciones particulares a que se enfrenten, las técnicas adecuadas de la planificación, ya sean de aportación original u obtenidas del acervo tecnológico internacional que habiendo sido edificado sobre el supuesto general de simplificaciones universales, necesariamente deberán de ser rediseñadas de acuerdo a lo que de ellas se demande en cada caso particular".

Con base en el último párrafo se debe aclarar que con el presente trabajo no se pretende dar a luz algo nuevo o completamente diferente a lo que

1/ Ver, por ejemplo, Segura j. "Función de Producción, Macrodistribución y Desarrollo" Ed. Tecnos. Madrid (1969) Pags. 37 y 38.

También ver, Brown M. "A measure of the change in relative Explotation of the capital and labour".- Review of Economics and Statistics. (1966)

2/ Ricardo Carrillo Arronte. Ensayo Analítico Metodológico de Planificación Interrigional en México. Fondo de Cultura Económica (1973) ya existe, sobre el tema; sino que se trata de un esfuerzo por resolver el problema metodológico apuntado en los párrafos anteriores, utilizando algunos conceptos e instrumentos econométricos lo mas adecuadamente posible.

Ahora bien, según lo que aquí se propone cabe hacerse una pregunta, ¿qué tan válidas son las aplicaciones de los análisis de origen teórico a los fenómenos reales? Muchas de las veces, su valor es casi nulo 1/, pero por supuesto, ello no implica que no se deban seguir haciendo intentos por acercarse, a esa zona formada por los puntos en donde la teoría y la realidad "deberían" coincidir.

Se está, pues, consciente de las dificultades que el tratamiento del tema presenta, y de la limitada capacidad de que se dispone para resolverlas.

En la primera parte del trabajo se intentará precisar los objetivos exponiéndolos en una forma explicativa. Así también, se precisarán las limitaciones, inherentes a los supuestos teóricos que aquí se manejan; todo ello se hará con el objeto de informar al lector en cuanto al alcance real de lo que aquí se discutirá.

Posteriormente se hará un resumen sobre la forma como se emplearán los conceptos teóricos que servirán como base formal de apoyo del método de análisis que se propondrá.

Antes de entrar en el análisis, que propiamente constituye el esfuerzo del autor, se presentará la función producción Cobb-Douglas y se señalarán las características que de esta función se aprovecharán para fundamentar algunos puntos proposicionales del esquema que se expondrá en el capítulo tercero.

Una vez que se haya desarrollado la parte medular de la tesis se someterá el análisis propuesto a un caso que simule un fenómeno real para obtener de ahí algunas conclusiones con las que se dará por terminado el trabajo.

1/ En este aspecto, Julio Segura en su libro "Función de Producción, Macrodistribución y Desarrollo" (1959) dice en la página 174: "...el cuidadoso estudio de los errores, de las hipótesis falsas y de las incorrectas utilizaciones en el análisis económico a lo largo del tiempo es el único medio de que dispone el economista para conocer el proceso de desarrollo de la ciencia económica, que no se basa sino en la sucesiva proposición de hipótesis explicativas, instrumentos de análisis y teoremas significativos que poco a poco, van depurándose por medio de la experiencia y del análisis empírico, eliminándose unos, modificándose otros y dando como consecuencia un cuerpo de conocimientos cada vez más perfecto".

C A P I T U L O   I

A. LOS OBJETIVOS.

De las dos facetas, que sobre la explotación relativa factorial, fueron mencionadas, se seleccionó la segunda (sobre las diferentes calidades de trabajo) como el término de referencia para desarrollar el método que aquí se propondrá: ya que, como se verá mas adelante, el instrumental para analizar este aspecto esta incluido en el que se necesita para analizar el referente a la explotación relativa entre trabajo y capital.

A continuación se propone la idea sobre la posibilidad de que los coeficientes elasticidad producto de los diferentes tipos de trabajo (según su calificación) manifiestan alguna variación significativa a través del tiempo; así, se puede suponer que, cuando se trata a estos diferentes tipos de trabajo como un factor homogéneo, las variaciones de los coeficientes elasticidad producto de los diversos tipos de trabajo no pueden ser observados; pero que dichas variaciones pueden ser percibidas si el comportamiento de cada coeficiente puede ser aislado.

Todo lo anterior puede expresarse de la siguiente manera:

Si suponemos la existencia de una función producción de la forma:

$$q = AK^{\alpha} L_1^{\beta 1} \; L_2^{\beta 2} \; L_3^{\beta 3} \; . \; . \; . \; . \; L_n^{\beta n}$$

en la cual denominamos L_1 trabajo altamente calificado, L_2 trabajo de calificación media y así hasta L_n que expresa el volumen de trabajo no calificado empleado. Entonces β_1, β_2,... β_n representarán sus correspondientes coeficientes elasticidad producto. Ahora bien, si no se puede observar la primer función propuesta por no existir los datos necesarios para ello[2], entonces el analista se ve obligado a considerar a L_1, L_2...L_n como un solo tipo de trabajo "L" con lo cual la función inicial queda como $q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ y por ello, aunque existan cambios de valor entre los βi, éstos, no pueden ser percibidos porque se han globalizado tales coeficientes elasticidad producto en una sola β.

Así pues, impulsado por un deseo de aproximarse al conocimiento de lo que suceda con los coeficientes mencionados, el autor propone el esquema de análisis que en los capítulos siguientes será desarrollado.

1/ Julio Segura. Función de producción, macrodistribución y desarrollo. Ed. Tecnos, 1969, págs. 37-38. En el anexo 1 se amplía esta discusión.

2/ Existen algunos datos aislados (de calidad estadística dudosa) pero en ningún caso son suficientes como para calcular regresiones; además es precisamente sujetos a esta restricción que queremos desarrollar nuestro esquema analítico.

Antes de seguir adelante debemos aclarar que el método que se propondrá no pretende encontrar valores absolutos de los cambios en los coeficientes,- sino conocer sus tendencias 1/ y tal vez, alguna aproximación acerca de la intensidad de dichas tendencias 2/. Por otra parte, se debe dejar asentado que - la aplicación misma del método y su interpretatividad son simples, (puesto - que simple es la información con que se cuenta) lo que seguramente sí resulta un poco complejo, es el mecanismo para formalizar el sentido económico inherente a la metodología; el cual, a su vez, nos dará las herramientas de interpretación a ser empleadas en el mismo método; es decir, gran parte de la- utilidad de este trabajo es la posibilidad que brinda para elaborar, eliminar y corregir hipótesis; por medio de su material para la interpretación.

1/ Siguiendo lo concluido en el estudio de Julio Segura (1969) op. cit. pág. 176 en donde utiliza la función producción, enfocada el problema macrodistributivo, y en donde afirma que sólo pueden hacerse enunciaciones como:- "La tendencia de la participación relativa del trabajo en la renta nacional es de una determinada clase".

2/ Debido a la definición misma de "función de producción, donde está implícito lo estático del estado de las artes; existe una aparente contradicción con la pretensión dinámica de conocer la tendencia de cambio de los- valores de los parámetros de la función misma. Anteriormente se consideraba que el valor de estos parámetros era relativamente estable; en la actualidad no". Véase Enrique Cosío Pascal (1967) Funciones de Producción y Medición del Cambio Tecnológico (tesis) pág. 7.

B. LAS LIMITACIONES.

Muchas veces y por algunos de los mejores economistas han sido tratadas las limitaciones que surgen ante la aplicación de la teoría neoclásica para el análisis del mundo económico, real, actual, por lo tanto aquí solo se señalan las principales críticas referidas a los supuestos teóricos centrales incluidos en el planteamiento de este método; y así, sin pretender rebatir tales señalamientos críticos, se intentará justificar en lo posible este trabajo.

Al proponer un método para observar el comportamiento de ciertos parámetros estrictamente asociados con el sistema de distribución basado en la teoría de la productividad marginal de los factores; debe hacerse implícitos los supuestos de:

a) Competencia perfecta 1/ los cuales ya han sido criticados ampliamente por J. Robinson (en sus trabajos sobre competencia imperfecta) y J. Chamberlin (en sus estudios sobre competencia monopolística).

b) De entre los supuestos 2/ implícitos, en el supuesto general sobre la existencia de competencia perfecta; destaca el de "perfecta movilidad de los factores"; el cual ha sido fuertemente atacado, debido a que (en cuanto a la adaptabilidad del factor capital) ello implica que la economía que se analiza se encuentra en un "estado estacionario" o sea que la relación capital/trabajo se mantiene constante. En el mundo real ninguna de estas cosas es cierta.

c) No obstante la crítica más relacionada con el método que aquí se estudiará proviene de Kaldor 3/..!"resulta arbitraria y artificial cualquier distinción tajante entre un movimiento a lo largo de una función de producción, con una situación dada de conocimientos, y un desplazamiento en la función causado por un cambio en la situación de conocimientos", pero, de este hecho, como afirma Segura, ya estaban conscientes quienes han utilizado la función de producción en el campo de la dinámica (aunque en nuestro caso particular se trate de estática comparativa); el mismo Kennedy 4/ destacó cómo una innovación ahorradora de mano de obra podía resultar estimulada por una disminución del precio relativo de este tipo de máquinas, por lo que es difícil distinguir entre desplazamientos de la función debidos a la innovación y el movimiento sustitutivo de un factor por otro debido a la variación relativa de los precios. Sin embargo estas limitaciones no lo llevaron a rechazar la utilización de la función neoclásica.

1/ Esto es necesario para poder concluir que a los factores se les retribuye de acuerdo a su productividad marginal.

2/ Esta crítica está relacionada con la intención de aplicar un instrumento de análisis para fenómenos estáticos al campo de la dinámica.

3/ Mencionado por Julio Segura (1969) op.cit. pág. 153; pie de página # 128.

4/ Kennedy: The Character of Improvements and of Techinical Progress en "Economic Journal" 1962, págs. 907 y ss; citado por Segura (1969) op. cit. pág. 154.

Con respecto a esta última limitante, debe decirse que gran parte del esfuerzo realizado en la elaboración del presente esquema, lleva implícito el intento de eliminar, en cierta medida, "la arbitrariedad" en la interpretación de lo que acontece con los parámetros de la función Cobb-Douglas cuando ocurren movimientos sobre la función y los desplazamientos de la misma.

Por último, deben mencionarse dos limitaciones importantes adicionales al uso de la función de producción; d) La dificultad de medir teóricamente el capital; la cual se ve agravada cuando se trata de un análisis a largo plazo ya que el simple paso cuatitativo del uso de una cantidad cualquiera de capital a un monto mayor implica necesariamente una reorganización del proceso productivo, es decir, que ambas cantidades son cualitativamente distintas.

e) El supuesto de que la oferta de factores productivos es infinitamente elástica; el cual tal vez pudiera tener cierta validez si el período a ser analizado, mediante el instrumental propuesto, es extremadamente corto. Con este supuesto al mismo tiempo se está pretendiendo que la demanda de factores (implícita en la función) es la única determinante de los precios y cantidades que rigen en los mercados de factores. A este respecto, apunta Julio Segura, como uno de los importantes campos abiertos para continuar los estudios de la función de producción: "El análisis del comportamiento de la oferta de factores productivos que nos permita dotar de contenido empírico a sus limitaciones y analizar la influencia de éstas en los modelos de desarrollo". En el "entretanto" aquí se ofrecerá un alternativo método de análisis que, aunque lleva implícitos todos los inconvenientes apuntados, se propone en el apoyo de las palabras de un gran conocedor de esta materia. . . "Nunca he pensado en las funciones de producción macroeconómicas como un concepto rigurosamente justificable. A mi modo de ver, son, o bien una parábola ilustrativa, o, de lo contrario, un simple instrumento para manejar datos, para utilizarlo en tando dé buenos resultados empíricos y abandonarlo tan pronto como ocurra lo contrario o como aparezca algo mejor".[1]

1/ Palabras de Robert M. Solow en su crítica a la obra de J.R. Hicks "Capital and Growth".
Citado por Julio Segura (1969) op. cit.pág. 178.

CAPITULO II

RESUMEN DE LA FORMA EN QUE SE EMPLEA EL MARCO TEORICO

El conjunto de los puntos en el plano PAGO AL FACTOR - CANTIDAD DE FACTOR UTILIZADA debe estar relacionado con el conjunto de posibles alteraciones en el valor de los parámetros de la función producción1/ (lo anterior implica que la forma explícita de la función no cambia, sino sólo el valor de sus parámetros).

La ruta pretende encontrar la colección de normas o reglas que sistemáticamente relacionan ambos conjuntos (el primero sería el definido por la función producción; el segundo por la función de productividad marginal de cada factor). De esta manera al observar un par de puntos en el plano del segundo conjunto (correspondientes, cada uno, a fechas diferentes) podamos, más o menor organizadamente, inferir, lo que tuvo que suceder dentro de la función de producción misma; para que tal cambio de valor ocurriera.

Por supuesto los cambios que nos interesará, preferentemente, identificar; serán los de los valores de los coeficientes de elasticidad producto2/

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1) Definir alguna forma de función producción agregada3/ después (aplicando la teoría de la distribución)4/

2) Seccionar la función de tal manera que se pueda analizar cada factor por separado, pero sin perder de vista lo que ocurre en simultaneidad con los demás5/

3) Observar el comportamiento de la función de productividad marginal de cada factor, bajo las siguientes condiciones6/

1/ Ver Ferguson: Microeconomic Theory (1969) figura 6.2.2. pág. 150.

2/ Ferguson (1969) Op. Cit. sección 5.4.c pág. 140.

3/ Tomando en cuenta lo discutido en Lester B. Lave Technological Change - its Conception and Measurament (1966) pág. 13-15 supondremos una función Cobb-Douglas. Ver Ferguson (1969) Op.Cit. apdo. 5.4 pág. 137-143; Yamane T. Matemáticas para Economistas pág. 98; Enrique C. Pascal (1967) Op.Cit. pág. 3-8

5/ Aunque aquí se le observa como una función micro-económica, la idea es similar, Ferguson Op. Cit. (1969) cuadro 6.1.1. pág. 147, figura 6.2.1.- pág. 149 y figura 6.2.2 pág. 147, la forma de agregar esta función puede verse en Julio Segura (1969) Op. Cit. pág. 27-28.

6/ Viéndolas por separado y combinando dichas condiciones.

a. Ante un incremento del volumen de todos los insumos utilizados, sin modificar las elasticidades-producto.

b. Ante una modificación de la elasticidad producto del factor analizado.

c. Ante un cambio en todos los valores de las elasticidades-producto y en las cantidades de insumos.

4) Traducir estas curvas de productividad marginal de manera que representen curvas de valor de la productividad marginal (V.P.M.)1/

5) Considerar que los empresarios son maximizadores de beneficios 2/ y por tanto, que el V.P.M. es igual al pago al factor empleado 3/

6) Considerar que de la función-producción agregada propuesta, se ha generado la curva de la demanda total del sector por cada factor analizado.

7) Aplicando lo encontrado en el punto tres, tratar de definir algunos puntos sobre las curvas de demanda potenciales (de cada factor por separado) y ver si es válido hacer comparaciones (dados los supuestos) entre dichos puntos, suponiendo que la oferta se situará en donde las condiciones de la demanda lo determinan. Estas comparaciones nos indicarán la dirección de un posible cambio en el valor de los coeficientes elasticidad producto - y tal vez algunas otras características de dicho cambio.

A continuación se hará un paréntesis para presentar la función producción Cobb-Douglas, para descender, en el capítulo subsecuente, el análisis del C.E.P. as personas que ya están familiarizadas con esta función pueden, sin perder la hilación del tema central, omitir la lectura del capítulo siguiente, sin embargo es recomendable leer lo referente al análisis del coeficiente elasticidad producto.

1/ Ferguson figura 13.21 Op. Cit. pág. 362.

2/ Una crítica fuerte a este supuesto la constituye el libro de Alfred Lautherback: Men, Motives and Money; (1954).

3/ Ferguson Op. Cit. pie de página 10 en la página 364.

Teniendo una curva de demanda para un insumo; si hay otros sectores que compitan por los insumos con el sector analizado, y los precios relativos entre ellos (los insumos) se modifican, entonces se podría considerar hecho el ajuste que es necesario cuando varios insumos variables son considerados, es decir, tomar en cuenta el efecto producto, el efecto substitución y el efecto maximización. Ver Ferguson Op. Cit. págs. 364-368.

Los supuestos en los puntos (4) y (5) equivalen al supuesto de Solow - (1957) Technical change and the Agregate Production Function. Review of Economies and Statistics. Pág. (320); también para una función agregada.

CAPITULO III

LA FUNCION PRODUCCION COBB-DOUGLAS

La forma explícita de la función es: 1/

$$q = K^{\alpha} L^{\beta} \quad \ldots \quad (1)$$

en donde q es el valor agregado; K representa el capital y L el insumo de mano de obra. Los coeficientes α y β son los coeficientes elasticidad producto de los insumos capital y mano de obra respectivamente.

Cuando $\alpha + \beta = 1$ entonces la función es homogénea de primer grado 2/; lo cual también implica que existen rendimientos constantes a escala. Esta característica de la función es clave para el procedimiento a proponer, como se verá más adelante.

Ahora bien; si $(\alpha + \beta) > 1$, existen economías de escala, y si $(\alpha + \beta) < 1$, entonces, habrá desconomías de escala.

Los rendimientos medios de los factores son:

$$q/K = K^{\alpha - 1} L^{\beta}$$

$$q/L = K^{\alpha} L^{\beta - 1}$$

los cuales en el caso de homogeneidad de primer grado (que es el que nos interesa) pueden escribirse:

$$\frac{q}{K} = K^{\alpha - 1} L^{1 - \alpha} = \left(\frac{L}{K}\right)^{1 - \alpha} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{q}{L} = K^{\alpha} L^{-\alpha} = \left(\frac{L}{K}\right)^{-\alpha} \quad \ldots \quad (3)$$

Los rendimientos marginales son:

$$\frac{\partial q}{\partial K} = \alpha \frac{q}{K} \quad \ldots \quad (4)$$

$$\frac{\partial q}{\partial L} = (1-\alpha) \frac{q}{L} = \beta \frac{q}{L} \quad \ldots \quad (5)$$

por lo tanto las elasticidades producto con respecto a los factores pueden expresarse:

$$\left(\frac{K}{q}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial K}\right) = \alpha \quad \ldots \quad (6)$$

1/ La presentación de la función debería ser $q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ en donde A es un parámetro de escala cuyo valor depende de las "unidades" en que sean medidas las variables; para simplificar, nosotros, lo supondremos igual a la unidad.

2/ Ver Ferguson (1969) Op. Cit. págs. 137 a 139.

$$\left(\frac{L}{q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right) = (1-\alpha) = \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

tomando (2) y (4) tendremos:

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial K}}{\frac{q}{K}} = \alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

y tomando (3) y (5) tendremos:

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial L}}{\frac{q}{L}} = \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

para las isocuantas se tiene en forma genérica:

$$\frac{\partial q}{\partial K}\, dK + \frac{\partial q}{\partial L}\, d\,L = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

la tasa marginal de sustitución de capital por mano de obra $(TMS)_{LK}$ 1/ se puede obtener a partir de (10).

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial K}}{\frac{\partial q}{\partial L}} = \frac{d\,L}{d\,K} = (TMS)_{LK}$$

tomando (4) y (5) tenemos:

$$(TMS)_{LK} = \frac{\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\left(\frac{L}{K}\right)^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\left(\frac{L}{K}\right) \ldots (11)$$

Como se puede observar en (2), (3), (4), (5) y (11), las productividades media, marginal y la $(TMS)_{LK}$ están en función de las cantidades relativas de L y K (o sea $\frac{L}{K}$); por lo tanto, es de sumo interés conocer cómo sería un cambio de $\frac{L}{K}$ como consecuencia de un cambio en $(TMS)_{LK}$. Al coeficiente que mide tal relación se le llama (σ) elasticidad de sustitución.

1/ La cantidad de mano de obra que es necesario agregar a la ya existente, cuando el capital se reduce en dK, para mantener q constante.

$$\sigma = \frac{\dfrac{\partial(\frac{L}{K})}{\frac{L}{K}}}{\dfrac{\partial\,(\frac{dL}{dK})}{\frac{dL}{dK}}} \quad \text{. . . . .} \quad (12)$$

σ representa la definición general de la elasticidad de substitución. Para el caso Cobb-Douglas; partiendo de (11) diferenciando totalmente:

$$d\,(TMS)_{LK} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d\,(\frac{L}{K})$$

dividiendo ambos lados de la ecuación por expresiones equivalentes, tenemos:

$$\frac{d\,(TMS)_{LK}}{(TMS)_{LK}} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\, d\,(\frac{L}{K})}{\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{L}{K})}$$

lo cual implica que:

$$\frac{\partial(TMS)_{LK}}{(TMS)_{LK}} = \frac{d(\frac{L}{K})}{(\frac{L}{K})}$$

de donde:

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\,(\frac{L}{K})}{\frac{L}{K}}}{\dfrac{d\,(TMS)_{LK}}{(TMS)_{LK}}} = 1 \quad \text{. . . . .} \quad (13)$$

En condiciones de equilibrio la productividad marginal de cada factor determina el valor de venta por unidad de factor; si r ès el valor de renta del capital y w es el monto del salario, entonces:

de la definición general de $(TMS)_{LK}$ en la ecuación (10); tenemos que:

$$(TMS)_{LK} = \frac{\frac{\partial q}{\partial K}}{\frac{\partial q}{\partial L}} = \frac{r}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

y sustituyendo (14) en (11) vemos que

$$\frac{r}{w} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{L}{K}\right) = \text{por lo tanto}$$

$$\frac{rK}{wL} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

La cual indica que un cambio proporcional en los precios relativos de los factores implica un cambio compensatorio en la relación de insumos; lo cual significa que si la elasticidad producto del capital es mayor que la del trabajo, la participación del factor capital en el valor agregado será proporcionalmente mayor que la que va al trabajo y viceversa.

CAPITULO IV.

ANALISIS DEL COEFICIENTE ELASTICIDAD PRODUCTO

Recordando que el C.E.P. = $\frac{\text{Prod. marginal}}{\text{Prod. medio}}$; analizaremos el numerador.

$\frac{\partial q}{\partial L}$ y $\frac{\partial q}{\partial K}$: observan el comportamiento del factor, con relación al producto, desde el punto de vista de cada una de las unidades de factor que se están empleando; es decir, que este cociente describe el efecto, que reflejado en el producto, produce el aspecto "calidad" del factor respectivo.

Por otra parte, q/L y q/K observan el comportamiento del factor de que se trate, con respecto al producto, tomando en cuenta a todas las unidades de factor que se utilizan; es decir, que están considerando el efecto que el factor correspondiente tiene en el producto desde el punto de vista cuantitativo del factor analizado.

Por lo tanto los cocientes: $\frac{\frac{\partial q}{\partial K}}{\frac{q}{K}}$ y $\frac{\frac{\partial q}{\partial L}}{\frac{q}{L}}$

que son los coeficientes elasticidad producto, están evaluando la importancia comparativa que tienen ambos aspectos, el cualitativo y el cuantitativo, en términos de sus respectivos efectos sobre la producción.

Conforme sea mayor la contribución al producto, del aspecto cualitativo de un factor, si hay sustituibilidad entre los factores, (tal como se ha supuesto) entonces se preferirá la utilización de una cantidad mayor de tal factor, con lo cual, el coeficiente elasticidad producto crece por los dos movimientos complementarios de su numerador (que crece) y su denominador (que disminuye o que crece más lentamente que si no se incrementara el número de unidades de factor utilizadas).

Una vez observado el coeficiente en términos estáticos lo haremos en términos dinámicos.

En el transcurso del tiempo la productividad marginal de un factor se modifica, ello lo podemos representar como:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)}{\partial t}$$

donde t representa la variable tiempo.

Asimismo debido a esta modificación interna de cada elemento del factor empleado, se genera una alteración de la productividad media en el transcurso del mismo período de tiempo la cual se representaría:

$$\frac{\partial\left(\frac{q}{K}\right)}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\left(\frac{q}{L}\right)}{\partial t}$$

por lo cual el cociente:

$$\frac{\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)}{\partial t}}{\frac{\partial\left(\frac{q}{K}\right)}{\partial t}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)}{\partial\left(\frac{q}{K}\right)} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)}{\partial\left(\frac{q}{L}\right)}$$

que sería un índice de la intensidad con que se modifique el valor del coeficiente elasticidad producto, nos dice que, depende de la rapidez comparativa con que se modifiquen los aspectos cualitativo y cuantitativo de un factor para que le corresponda una mayor o menor participación en la producción a dicho factor.

Lo anterior nos indica que conforme las facilidades de sustitución interfactoriales sean mayores (existiendo diferencia en la rapidez con que se modifiquen cualitativamente los factores de la producción) la distribución del producto será más inequitativa.

Discutiendo todo esto en términos de estática comparativa podemos observar lo siguiente:

Supongamos un incremento de α, es decir, $\alpha_1 > \alpha_o$, o sea:

que $\dfrac{\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_1}{\left(\frac{q}{K}\right)_1} > \dfrac{\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_o}{\left(\frac{q}{K}\right)_o}$; ahora bien, si $\partial\left(\frac{q}{K}\right)_n > o$ esto implica que $\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_1$ es mayor que $\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_o$ en tal magnitud que ni aún la ponderación de la productividad media del tiempo t_1 puede contrarrestar el fuerte cambio de $\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)$; esto se puede ver así:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_1 > \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_o \left(\frac{q}{K}\right)_1}{\left(\frac{q}{K}\right)_o}$$

por supuesto que debe existir un factor de igualación (λ) tal que haga que:

$$\lambda \left(\frac{\partial q}{\partial K}\right) = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_o \left(\frac{q}{K}\right)_1}{\left(\frac{q}{K}\right)_o}$$

cuyo valor sería:

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_o \left(\frac{q}{K}\right)_1}{\left(\frac{q}{K}\right)_o \left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_1} = \frac{\alpha_o}{\alpha_1} < 1$$

(esta λ nos recuerda un índice de deflactación), por lo cual podemos decir que $\lambda = 1 - \omega$ donde $0 < \omega < 1$ por lo cual se deduce que $(\partial q/\partial K)$ se incrementó en un porcentaje ω, de tal manera que hizo que $\alpha_1 > \alpha_o$. El valor de dicho porcentaje es:

$$\omega = 1 - \frac{\alpha_o}{\alpha_1}$$

Por otra parte, si está operando en condiciones de rendimientos constante a escala, entonces el paso de α_o a α_1 implicó un cambio en β de tal manera que $\beta_o > \beta_1$, es decir, disminuye en un porcentaje ϕ cuyo valor es

$$\phi = \frac{\beta_o}{\beta_1} - 1 \quad ; \text{ donde obviamente } \phi > o$$

De lo expuesto hasta aquí, se deduce que ambas productividades (de K y L) pueden crecer, pero si hay una diferencia en la rapidez relativa con que dichas productividades se incrementan, entonces continuará haciéndose más inequitativa la distribución de lo producido.

A partir de lo anterior se puede decir que un sistema económico sujeto a una función de producción de rendimientos constantes podría operar con crecimiento de los niveles absolutos de bienestar de los contribuyentes a la producción; y sin embargo, continuar con una creciente e inequitativa distribución del ingreso.

Asimismo se puede afirmar que las inversiones en R & D 1/ y la aceleración de la tasa de ahorro tendrán el efecto de hacer variar la rapidez relativa de cambio de las productividades marginales de los factores, en favor del capital; por lo cual las políticas tradicionales de fomento del desarrollo económico, conducen a un deterioro de la distribución del producto generado.

Con base en el párrafo anterior se podrá afirmar que un crecimiento[2] sin problemas (o por lo menos con menos probabilidades de no tenerlas) de tipo distributivo del producto, sólo puede darse cuando se consiga que la función agregada de producción de un país pase a ser de rendimientos crecientes; con lo cual el R & D y la tasa de ahorro podrán incrementarse haciendo crecer el coeficiente elasticidad producto del capital; sin necesariamente afectar el del factor trabajo.

Tal vez, aquí mismo se podría asentar que un país tendrá características de "sub desarrollado" mientras la función agregada de producción bajo la que opere sea de rendimientos constantes; todo ello independientemente de los niveles absolutos de bienestar de que gocen sus pobladores; pues el clima socio-político-económico de injusticia sólo es generado por las diferencias en los NIVELES RELATIVOS de bienestar.

---

1 Research and Development.

2 Como el instrumento de análisis supone una economía en equilibrio, el crecimiento del que aquí se habla se puede traducir como una comparación de dos estados de equilibrio de una misma economía (en dos momentos diferentes) en los que, en uno, el nivel de ingreso es mayor que en el otro.

Cabe concluir este apartado con una pregunta :

¿Qué condiciones particulares sociales políticas y económicas deberán darse para que la función agregada de producción de un país pase a ser una de rendimientos crecientes a escala?

CAPITULO V

LA EVALUACION INDIRECTA DE LAS-VARIACIONES DE LOS COEFICIENTES ELASTICIDAD PRODUCTO

Como se dijo antes, la idea principal del presente trabajo, es tratar de encontrar un procedimiento o un método más o menos razonable, que nos permita, al observar algunos puntos en el plano (pago al factor- cantidad de factor usada) inferir qué ha estado sucediendo con el coeficiente elasticidad producto del factor analizado; suponiendo que son las condiciones de demanda (en el mercado de cada factor) las únicas determinantes de la situación que guarden los puntos en el plano correspondiente.

Para comparar los puntos observados entre sí, debemos tener noción de las posiciones que deberían guardar en el caso de que se cumplieran algunas condiciones especificadas de antemano; por tanto debemos ver algunas posiciones alternativas (determinando el punto o el "área" donde deberá situarse el punto observado) para inferir de esa manera que se pueden estar cumpliendo aquellas condiciones supuestas con anterioridad.

De esta manera teniendo sólo 2 ó 3 datos en el plano mencionado podríamos inferir cuál es la tendencia (aunque no el valor) que ha seguido el coeficiente de elasticidad producto que pretendemos analizar.

A continuación expondremos los resultados de la investigación así planteada, tratando de ser lo más explícitos posible; y para ello daremos sólo los resultados netos con la explicación que creamos pertinente y no incluiremos las pruebas matemáticas de lo que se vaya proponiendo, sino que remitiremos al lector a un apéndice con dichas pruebas, es decir, el anexo[1].

Primeramente trataremos de localizar un punto teórico (To) que nos sirva de referencia; para ello, necesitamos que esté bien determinado sobre una potencial curva de demanda que previamente hayamos generado, y que además sea comparativa con la curva en la cual suponemos está el punto observado (los puntos teóricos para cada insumo serían Tok y Tol según se trate del capital o del trabajo; los puntos observados serán ObK y ObL respectivamente).

Para simplificar el análisis supondremos que al trabajar con la curva de productividad marginal para cada insumo, estamos trabajando con su respectiva curva de demanda, ya que hemos supuesto que $\bar{p}\ (\frac{\partial q}{\partial L}) = w$ y que $\bar{p}\ (\frac{\partial q}{\partial K}) = r$ 1/
Una vez hecha esta aclaración, detallaremos los pasos a seguir.

1). A la superficie continua de producción que hemos supuesto; haremos 2 cortes perpendiculares al plano (L, K) quedando, por lo tanto, las 2 curvas de rendimientos decrecientes de ambos factores.

2). Derivando cada una de estas curvas generaremos las de productividad marginal correspondiente a cada una de ellas.

1/ Donde $\bar{p}$ es un índice de precios, w representa salario y la r el pago al capital, es decir, la tasa de interés. Todo lo anterior implica, por lo menos, una tendencia hacia el equilibrio en ambos mercados.

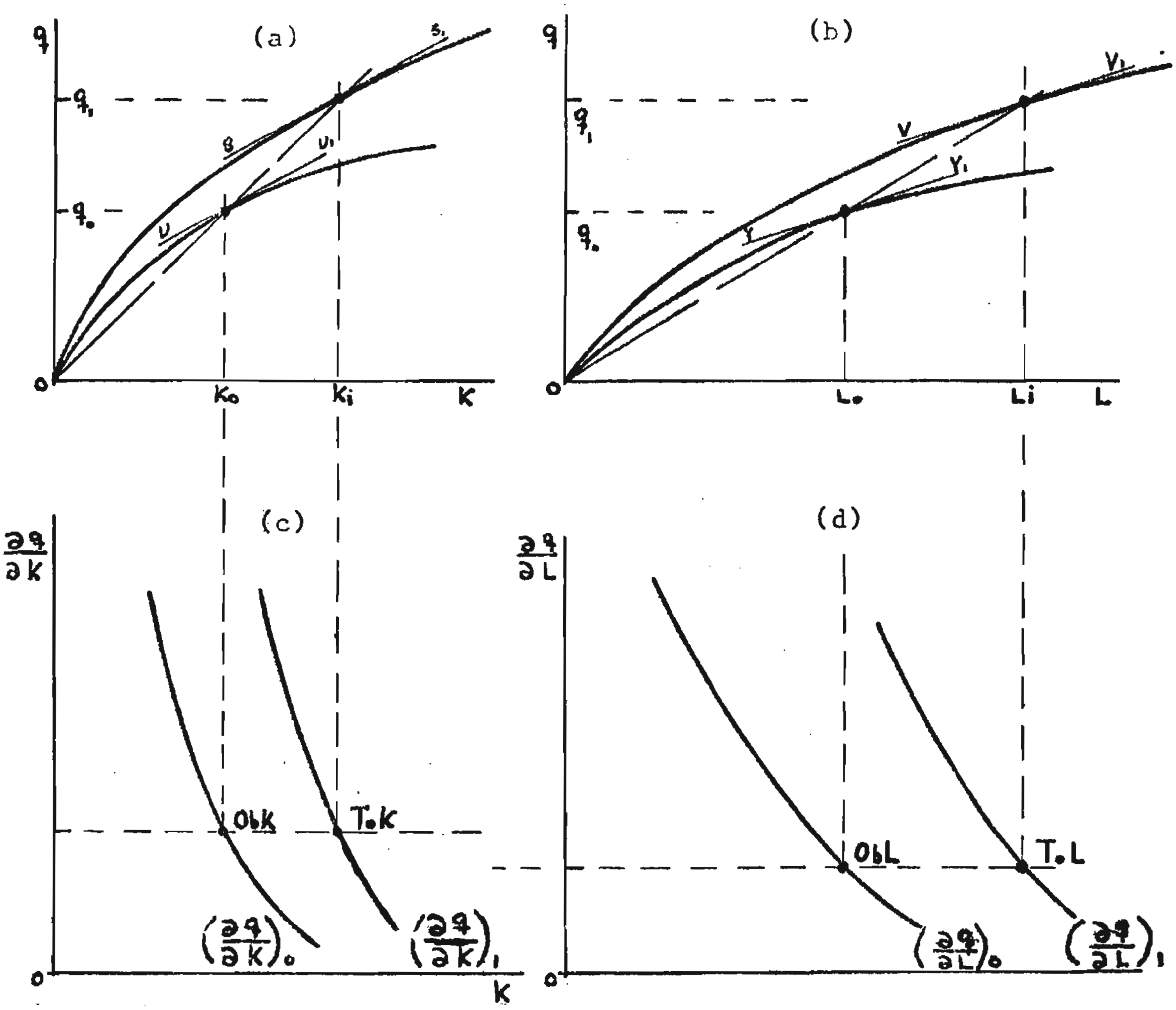
3). Observaremos un tipo de desplazamiento de cada una de ellas (aumento del uso de insumos) de tal manera que no se modifiquen las productividades medias y por tanto tampoco las productividades marginales 1/; pero estando asociadas (dichas productividades) con volúmenes de producción diferentes.

4). Veremos que para la curva $(\partial q/\partial L)_1$, lo mismo que para $(\partial q/\partial K)_1$ cada uno de sus puntos se genera agregando, a $(\partial q/\partial L)_0$ y $(\partial q/\partial K)_0$ respectivamente; un porcentaje fijo; es decir que:

$$(\partial q/\partial L)_1 = \left[(\partial q/\partial L)_0 + x\,(\partial q/\partial L)_0\right]$$

donde x es ese porcentaje mencionado. En las gráficas (a) y (c) se considera al factor trabajo (L) como el factor fijo; en las gráficas (b) y (d) se supone que el capital (K) es el factor fijo.

GRAFICA I



1/ Ver demostración I en el apéndice matemático, Anexo[1].

2/ Ver demostración II en el anexo señalado.

Recalcando lo dicho (expresado en la prueba matemática 1) la productividad media es igual en el punto (K_0, q_0) que en (K_1, q_1) consecuentemente las rectas SS' y UU' son paralelas; y con una pendiente mayor que las paralelas VV' y YY' puesto que el trabajo se usa en un volumen proporcionalmente mayor. Hemos generado, pues, los puntos teóricos Tok y Tol a partir del conocimiento del punto observado (K_0, q_0) y del volumen, observado también q_1; por tanto el volumen de insumo usado L_1 (o K_1 en su caso) sería el volumen que se habría empleado si se dieran las condiciones supuestas. Pero, como veremos más adelante, las coordenadas $(K_1, \frac{\partial q}{\partial K_1})$ observadas Y asociadas con el volumen de producción q_1, pueden estar en situaciones muy distintas, según las condiciones prevalecientes.

A continuación presentaremos las situaciones (colección de supuestos) alternativas a que nos referimos en la primera página.

Como sabemos, para el caso de la función Cobb-Douglas la $\partial q/\partial L$ y $\partial q/\partial K$ son o están en función de la relación K/L y lo mismo q/L y q/K; por otra parte sabemos que:

$$\beta = \frac{\partial q/\partial L}{q/L} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{\partial q/\partial K}{q/K}$$

de esta manera, al analizar el caso en el que β se modifique (y por tanto también α) ello se debe complementar analizando el caso en que se modifique la relación K/L.[1]

Por lo cual la siguiente pregunta a contestar es: ¿qué sucede con la función q cuando β y α se modifican? Esto lo veremos analizado gráficamente en 2 cortes a la superficie de producción: uno perpendicular y otro transversal al plano (L, K) (aunque en realidad el que más nos interesa es el análisis del corte perpendicular, ya que de ahí observaremos lo sucedido con las funciones; $(\partial q/\partial L)$ y $(\partial q/\partial K)$ De cualquier manera, el segundo corroborará al primero).

En el corte perpendicular se pueden observar los siguientes hechos:

1). Si se aumenta el coeficiente de elasticidad producto de un factor, su correspondiente "curva de rendimientos decrecientes" tiende a abrirse haciéndose más plana, y en el límite (cuando el coeficiente sea igual a la unidad) se transformará en una recta. (Ver prueba matemática III Anexo 2) que pasa por el origen con pendiente positiva.

2). Si se disminuye el valor del coeficiente de elasticidad producto 2/ de la curva de rendimientos decrecientes del factor correspondiente, ésta tenderá a hacerse más cerrada, o mejor dicho, tenderá a tener una curvatura más pronunciada.

---

1 Como se verá mas adelante, tiene cierta influencia el hecho de que el coeficiente elasticidad producto que se incremente sea el del factor intensivo, o el del no intensivo, por lo cual cuando se habla de cambio en la relación K/L se refiere a la situación comparativa de dos economías en las que la intensidad del uso de los factores en una, es totalmente contraria en la otra.

2 En este punto hay que hacer notar que, como $\beta + \alpha = 1$, entonces al crecer uno de los coeficientes el otro disminuye.

3). Al mismo tiempo que ocurre lo dicho en los puntos 1), y 2) (arriba - mencionados) las nuevas curvas (o sea después de cambiar el valor de- los coeficientes), gráficamente cortarán a las curvas iniciales en un punto determinado. Este punto queda definido conociendo el Stock o - monto de factor que se ha considerado "fijo" para generar la curva de rendimientos decrecientes del factor complementario correspondiente.- (Ver prueba matemática IV) en el Anexo1.. Lo anterior queda más claro en la exposición gráfica.

4). Al crecer el coeficiente de elasticidad producto, la función $(^{\partial q}/\partial L)$- ó $(^{\partial q}/\partial K)$ tiende a moverse hasta hacerse paralela al eje del dominio- de la función o sea tiende hacia un valor constante (que es la pen - diente de la recta hacia la cual tiende la curva de rendimientos de - crecientes, según lo explicado en el punto 1), es decir, la elastici- dad de la demanda por este factor aumenta hasta hacerse perfectamente elástica.

5). Por otra parte, la nueva función de 1/ productividad marginal [llamé - mosla $(^{\partial q}/\partial L)_1$] se cortará, también, con la anterior $(^{\partial q}/\partial L)_0$ en un punto del cual podemos decir lo siguiente: (Ver prueba V en el Anexo- 2).

a). Dependerá del valor o la magnitud del monto del factor que hemos- considerado fijo 2/, pero también de la magnitud de la variación- en el valor del coeficiente elasticidad producto respectivo.

b). Por lo anteriormente dicho, el punto donde se cortarían $(^{\partial q}/\partial L)_0$ y $(^{\partial q}/\partial L)_1$ será variable dependiendo de la magnitud de la varia - ción del coeficiente mencionado.

c). Por último podemos asegurar que el valor que se adquiera en el do minio de la función del punto donde se cortarían las curvas, es - un porciento del valor que tenga el monto del mismo factor que he mos considerado fijo, y que dicho porciento será mayor conforme - sea más fuerte la variación con el coeficiente respectivo.(Para - aclarar los puntos b) y c), ver gráfica III).

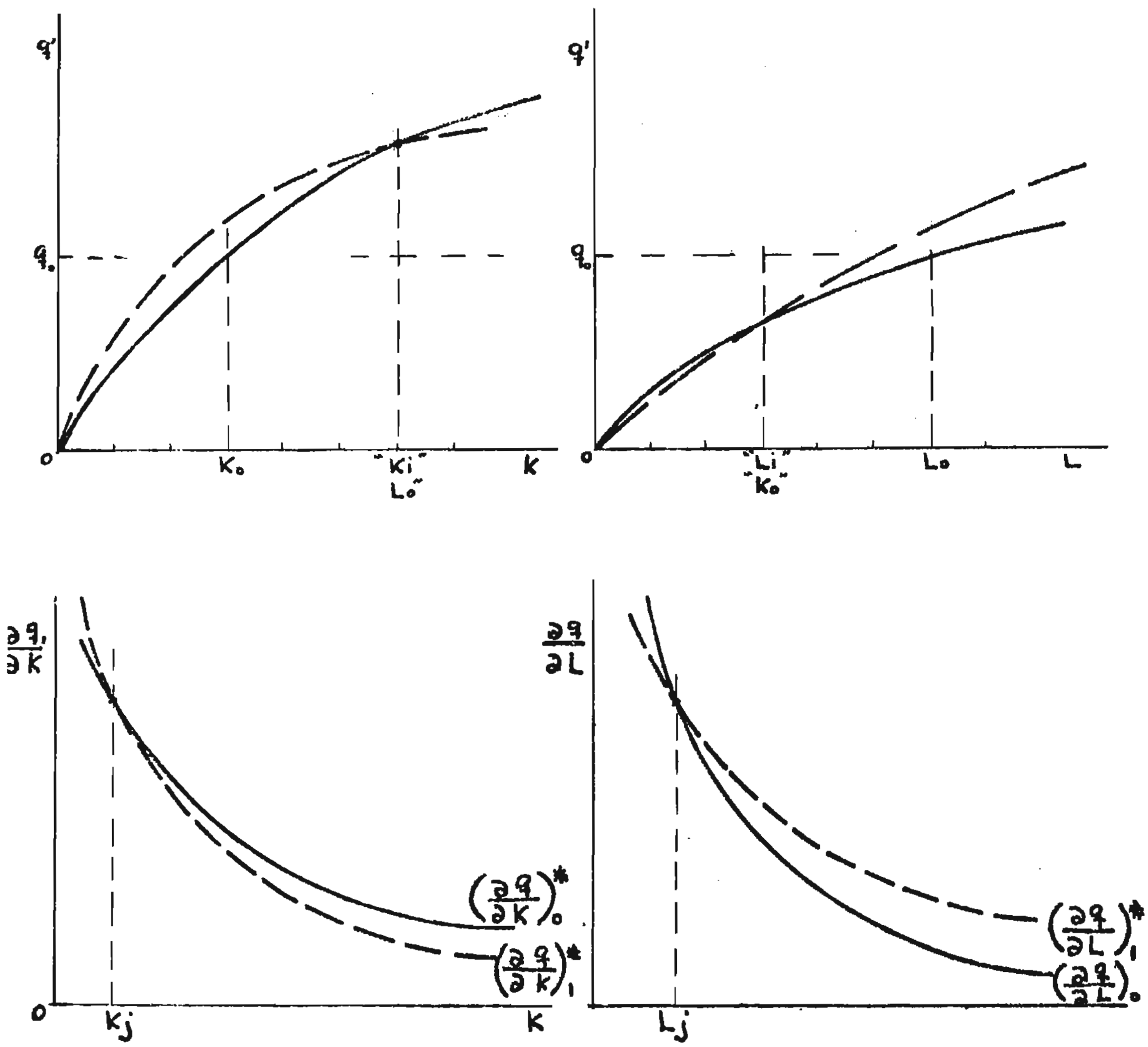
Todo lo antes expuesto quedará resumido gráficamente de la siguiente manera:

1/ Para el caso del factor trabajo (L).

2/ Tal como sucedió para una variación del mismo coeficiente, al analizar la- función cortada perpendicularmente al plano (L, K).

Teniendo una economía intensiva en trabajo supondremos un aumento en el valor de β(y por tanto una disminución en el valor de α).

GRAFICA II



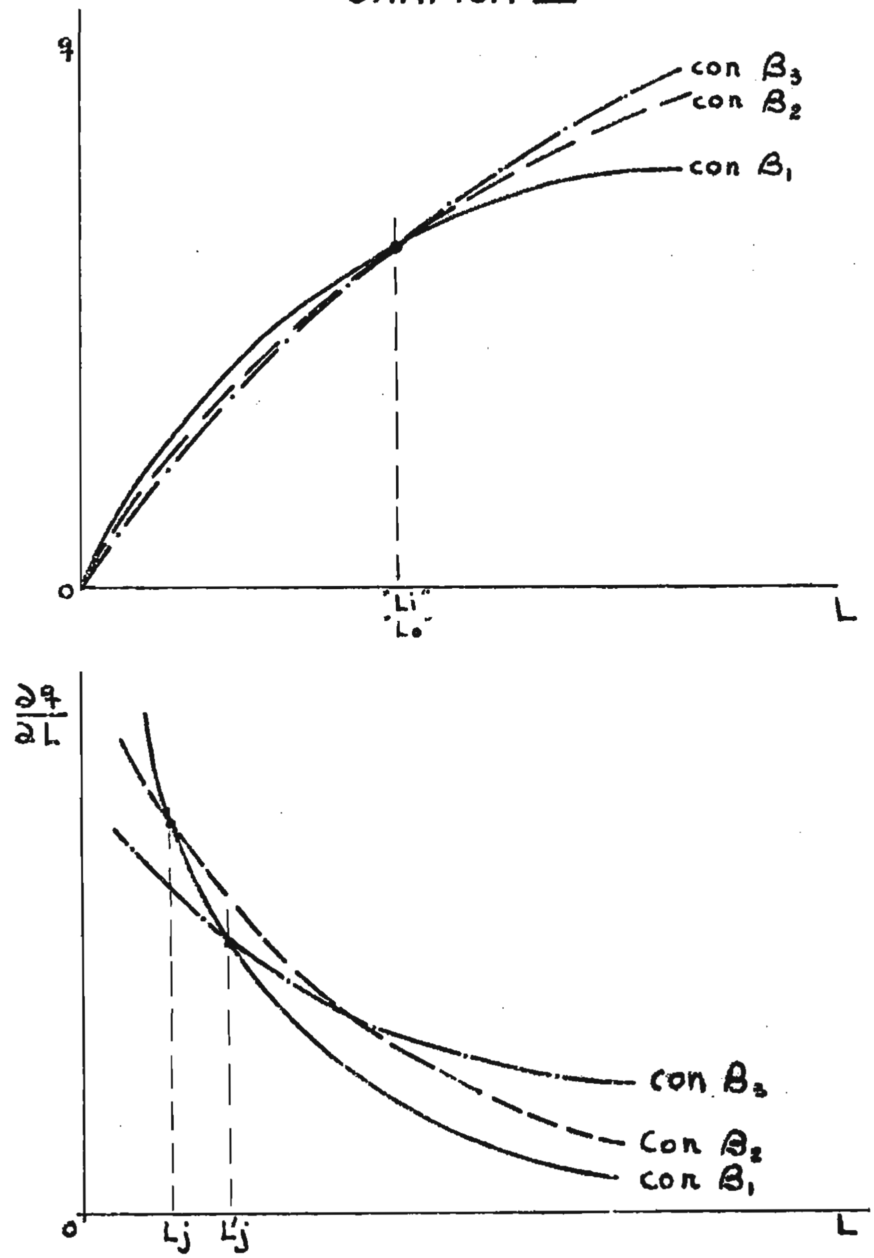
Notas: donde $K_j = L_o$; $L_j = K_o$; $K_n = aL_o$; $L_n = bK_o$ para $o < a,\ b < 1$

El valor de "b" en términos de alfas sería $b = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$

El valor de "a" en términos de betas puede verse en la prueba matemática V en el Anexo[1].

Teniendo una economía intensiva en trabajo aumentaremos sucesivamente β - de tal manera que partiendo de un valor β_1 alcanzaremos un $\beta_2 > \beta_1$ y después- un $\beta_3 > \beta_2$ y por ende $\beta_3 > \beta_1$

GRAFICA III



donde: $L_j = ak_o$ para $o < a < 1$

$L'_j = a'K_o$ para $o < a' < 1$

donde $a = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta_2 - \beta_1}}$

y $a' = \left(\frac{\beta_1}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{\beta_3 - \beta_1}}$

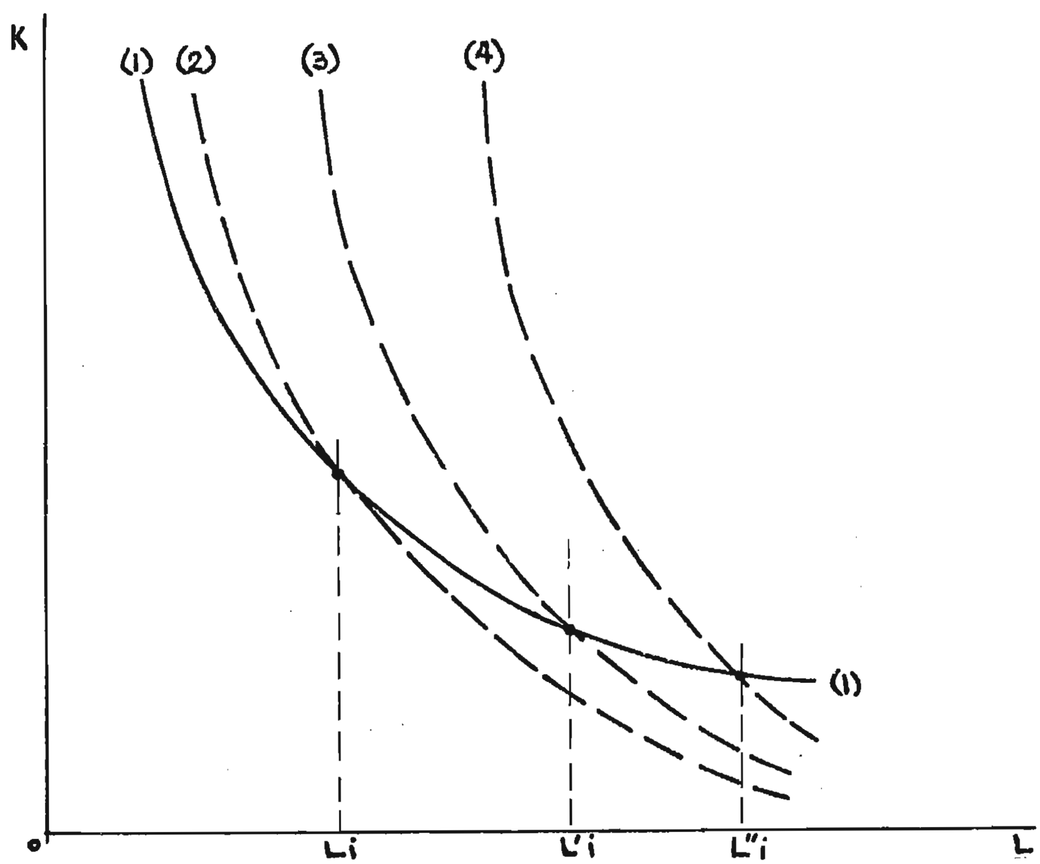
Nota: Se puede demostrar que a, a' y b tienen valor mayor que cero y menor que uno. (Ver prueba matemática VI en el Anexo [1]).

A continuación confirmaremos lo sucedido en los cortes perpendiculares - (al plano L, K) de la función; a través de una investigación de lo que ocu - rre con las isocuantas de producción.

Corroborando lo que sucede con los cortes perpendiculares al plano (K,L); en las isocuantas pasa lo siguiente:

1). La nueva isocuanta (cuando hacemos crecer el exponente o coeficiente elasticidad producto correspondiente al factor medido en el dominio- de la función) tiende a hacerse más inelástica respecto al eje horizon tal (o más perpendicular a dicho eje) al mismo tiempo que va cortando a la isocuanta anterior en diferentes puntos, dependiendo de la inten sidad en el cambio de los coeficientes; por lo tanto la tasa marginal de sustitución de L por K ($\frac{\partial K}{\partial L}$)se va incrementando conforme se pasa a una β cada vez mayor. (Ver prueba VII). Lo anterior quedará aclara- do con la gráfica IV.

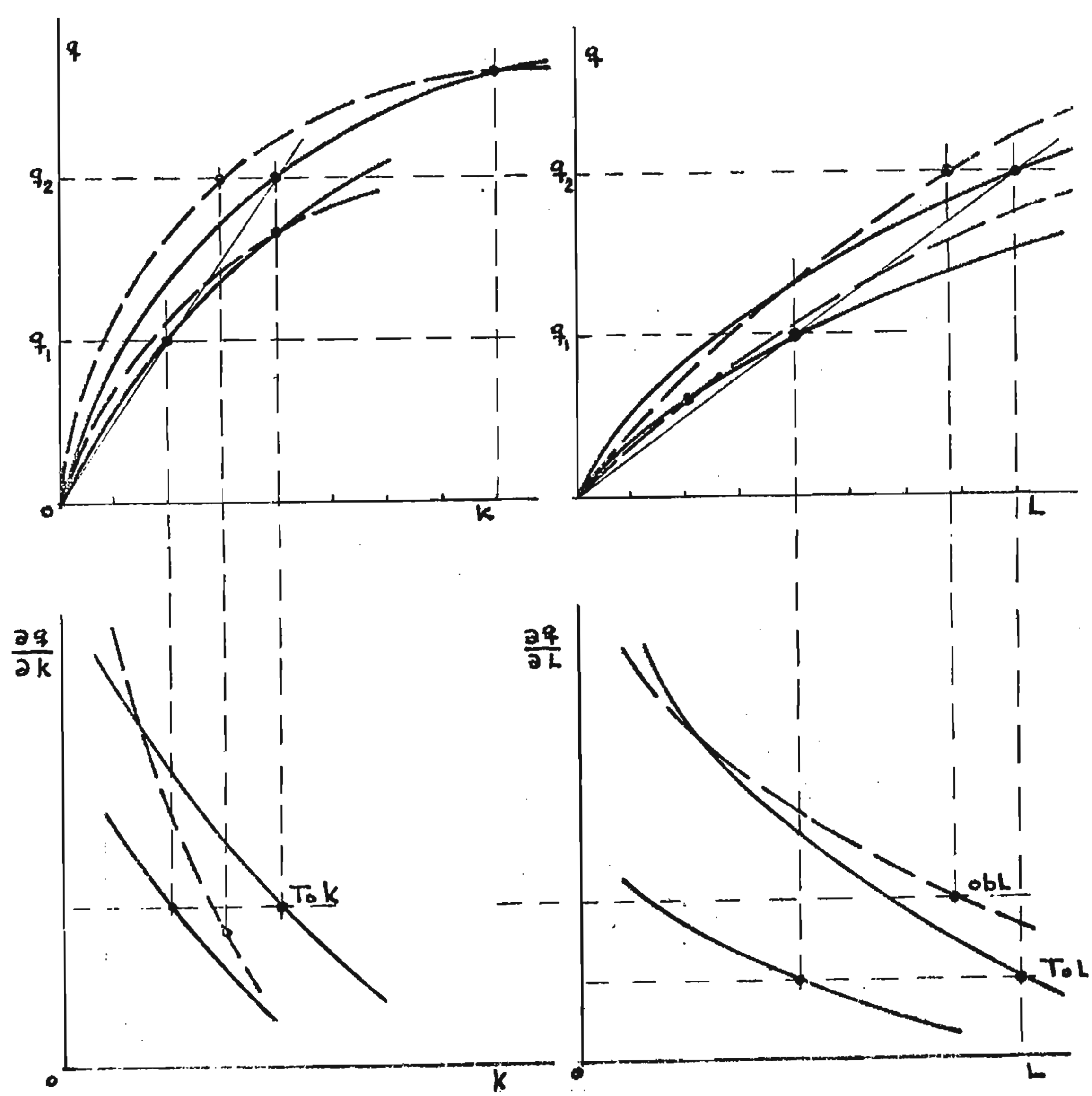
GRAFICA IV



Haremos el análisis de localización de áreas comparativas a los respectivos puntos teóricos 1/ (en el plano $\partial q/\partial L$ como variable en contradominio de la función y L en el dominio) suponiendo una economía intensiva en trabajo. 2/

El primer caso será el de una modificación en los coeficientes, tal, que se aumente el correspondiente al factor intensivo (y por tanto, que disminuya el otro); al mismo tiempo que se aumenta el uso de insumos y se pasa a un estado en el que el aparato productivo sigue siendo intensivo en el uso del factor trabajo. Este caso puede ser concretizado gráficamente de la siguiente manera:

GRAFICA V



1/ En el plano (K_1; $\partial q/\partial K$) para el factor respectivo.

2/ Al intercambiar los nombres en los ejes, el análisis servirá para una economía intensiva en capital.

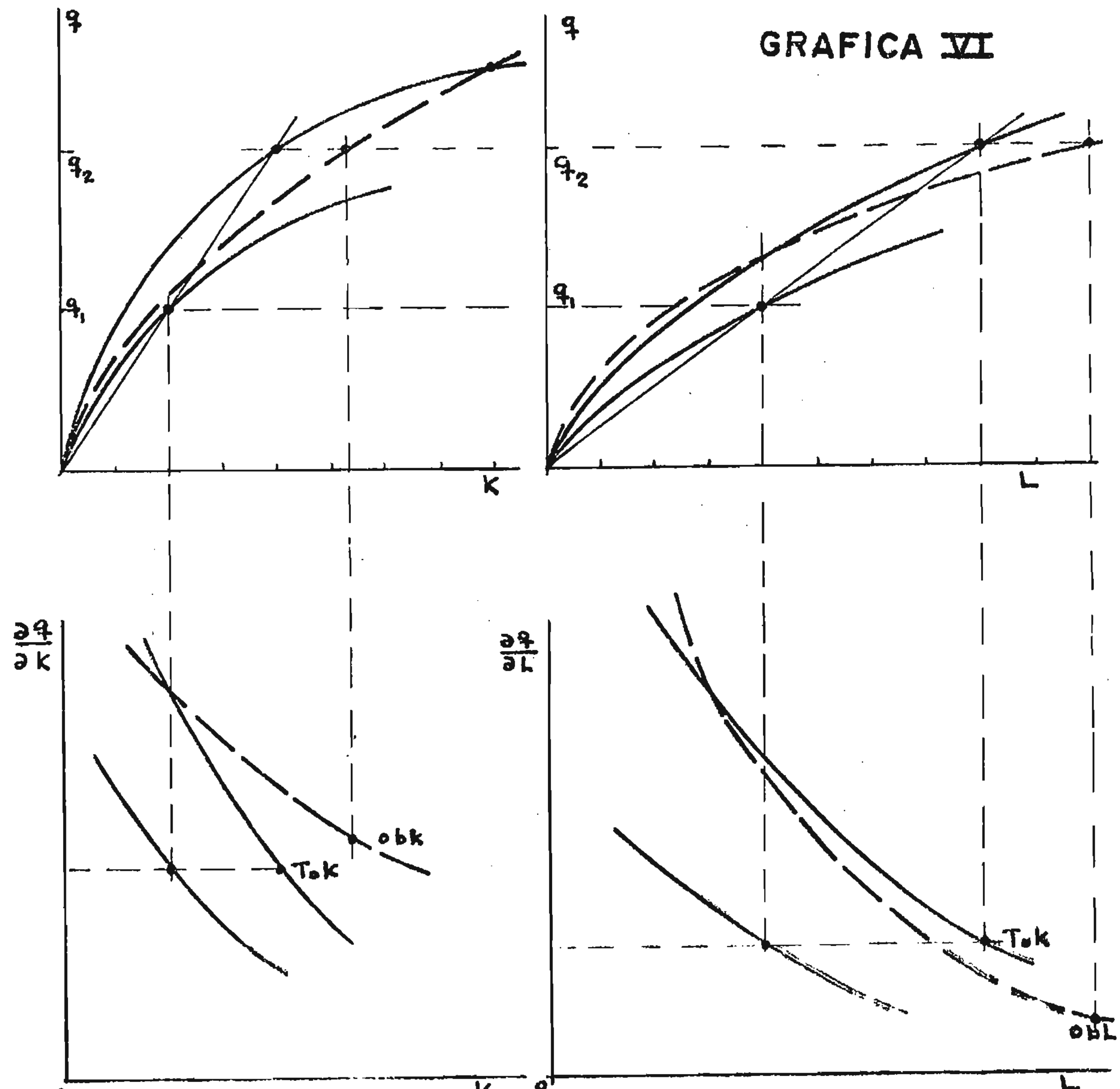
En las pruebas matemáticas VIII y IX puede verse la comprobación de que los puntos observados (en el caso de cumplirse las condiciones supuestas) deben estar: abajo y a la izquierda, en el caso del factor no intensivo, y arriba y a la izquierda (para el otro factor) respecto de los puntos teóricos de comparación. (Tok y Tol respectivamente).

Las observaciones, resultado del análisis del primer caso, las daremos - una vez que hayamos analizado el caso 2.

El segundo caso consistirá en una modificación en los coeficientes, tal, que se aumente el valor del C.E.P. 1/ correspondiente al factor no intensi - vo; al mismo tiempo que se aumenta el Stock total de insumos utilizados, y la economía continúa siendo intensiva en el mismo factor. (Trabajo).

El plantamiento de este caso también lo haremos gráficamente y después sistematizaremos lo encontrado y lo expondremos conjuntamente con las observaciones encontradas en el caso uno.

GRAFICA VI



1/ C.E.P. = Coeficiente Elasticidad Producto.

Como se puede ver, las pruebas matemáticas VIII y IX también confirman - las posiciones de los puntos Obk y Obl respecto de Tok y Tol, respectivamente.

Debe mencionarse que, aparte de los dos casos analizados, existen otros- 2 casos posibles (aunque seguramente más difíciles de ser observados en la rea lidad) que son:

3er. caso. Aumento en el Stock de ambos factores con aumento en el C.E.P. del factor intensivo (inicial) y con cambio en la relación de insumos empleados es decir, considerar el paso de una econo - mía intensiva en uno de los factores, a ser intensiva en el - otro.

4to. caso. En esta situación se supondrían las mismas circunstancias que para el 3er. caso sólo que, el C.E.P. que aumentaría su valor sería el del factor no intensivo.

Estos dos últimos casos no los analizaremos pues el cambio de intensidad en el factor utilizado en una economía es paulativo, (a largo o mediano - plazo) y seguramente no podría aplicarse esta metodología 1/.

A continuación expondremos las observaciones hechas a los casos uno y - dos:,

1). Cuando se aumente el valor del C.E.P. correspondiente al factor inten sivo (y por tanto que se disminuya el valor del otro C.E.P.) se aho- rrarán ambos factores (respecto de lo que se hubiera utilizado sin - cambiar los valores de los coeficientes). Es decir la productividad- media de ambos factores es mayor, por otra parte, si el pago a los - factores se aproxima (o es) el pago a su productividad marginal físi- ca, las diferencias entre los pagos a los factores tiende a reducir - se.

2). En cambio si se aumenta el valor del C.E.P. del factor no intensivo,- por una parte, la productividad media es menor de lo que hubiera sido sin modificar el valor de los coeficientes y por otra parte, la dife- rencia entre el pago al factor trabajo y el pago al capital tiende a- crecer.

3). En ambos casos aumenta la productividad marginal 2/ del factor cuyo - C.E.P. aumentó y con el otro factor sucede lo contrario.

Si observamos la segunda conclusión (concentrada en la gráfica VI) nos da mos cuenta que podemos utilizarla para formular las siguientes hipótesis:

Primera. Si el aparato productivo de una economía está regido por cier - tas condiciones de producción que pueden ser representadas por una fun - ción del tipo Cobb-Douglas (en todas las implicaciones inherentes a este- hecho) y si el factor que se usa intensamente (comparativamente en-

---

1/ Debido a la necesidad estadística de darle un área de holgura a los puntos Tok y Tol.

2/ No se refiere a la función de productividad marginal sino a un punto sobre la función, correspondiente al Stock de insumo necesario para obtener el - volumen de producto q.

mayor proporción) es el trabajo, el cual experimenta un desarrollo de su productividad marginal comparativamente más lento 1/ que el crecimiento de la productividad marginal del factor capital, (como es el caso de la importación de bienes de capital por parte de países subdesarrollados) entonces se presentará una brecha creciente en la repartición del producto generado en favor del factor no intensivo, debido a que la productividad marginal de este factor (bajo estas condiciones) se desarrolla más rápidamente que su productividad media 2/.

Segunda. Si la primera hipótesis tuviera alguna validez, entonces se podría afirmar que la "explotación" económica que el factor capital hace del factor trabajo no es resultado de una acción turbia y premeditada de un grupo confabulado para llevar a cabo ese "siniestro objetivo", sino que es un efecto impersonal de las condiciones objetivas bajo las cuales se lleva a cabo la producción: por lo cual, este fenómeno "no equidistributivo" puede presentarse dentro de cualquier forma de organización social para la producción.

Ahora bien; si pasamos del nivel de distribución factorial al de distribución poblacional, encontramos que, debido a la existencia de instituciones como la propiedad ilimitada y la herencia ilimitada de bienes; los propietarios del factor capital son, comparativamente, muy pocos con respecto a los propietarios del factor trabajo y como la mayoría de los artículos generados por la función producción dependen del consumo per-cápita 3/ que se haga de dichos artículos, entonces es factible que se presente la acumulación de inventarios. (Este fenómeno, actualmente, parece haber sido contrarrestado principalmente mediante la expansión del crédito por parte del sistema financiero, un movimiento más intenso de las mercancías en el mercado internacional, la destrucción sistemática de lo producido mediante conflictos bélicos administrados, y los, cada vez más importantes, programas de gasto gubernamental orientados a la generación de una demanda efectiva 4/). En el caso de que se pretendiera "corregir" este efecto impersonal del proceso productivo, podría hacerse sólo, a través de la invalidación de las instituciones propiedad ilimitada y herencia ilimitada de bienes; y después proceder a la distribución de lo producido según lo indicado por alguna "función de bienestar social" que sea generalmente aceptada 5. Al parecer el proceso teórico matemático parcial, para explicar el caso No. 2, conduce, a partir de una colección de supuestos marginalistas y utilizando su propio instrumental, a una conclusión Marxista.

Habiendo hecho este paréntesis, de interpretación preliminar de los resultados, continuaremos con nuestro objetivo planteado en el capítulo I.

1/ Debido a un deficiente sistema educativo, por ejemplo.

2/ Recuérdese la definición de $\alpha = \dfrac{\partial q/\partial K}{q/K}$

3/ La demanda de bienes de capital es una demanda inducida.

4/ Con todas estas acciones, ha sido contrarrestado el "potencial" "efecto desempleo" de los recursos productivos.

5/ Algo que tiene que asegurar esta "función de bienestar social" es que continúe existiendo una proporción adecuada de la producción destinada a la investigación y aplicación de las innovaciones técnicas.

CAPITULO VI

LA UTILIZACION DEL METODO

La aplicación de esta metodología consiste en ver la función producción de tal manera que el factor trabajo lo podemos descomponer en 3 tipos de calificación, por lo que, para el caso de la Cobb-Douglas, la función quedaría:

$$q = K^{\alpha} L_1^{\beta 1} L_2^{\beta 2} L_3^{\beta 3}$$

donde arbitrariamente llamaremos:

L_1 = trabajo directivo (altamente calificado)
L_2 = empleados (calificado)
L_3 = obreros (no calificado)

Posteriormente, se analiza cada tipo de trabajo por separado suponiendo, en cada caso, un "factor compuesto" K_*, tal, que posea un coeficiente elasticidad producto α_* el cual cumpla con la condición $\alpha_* = 1 - \sum_i^3 \beta_i$ donde β_i sería el coeficiente elasticidad producto de alguno de los tipos de trabajo. En otras palabras; si tomamos como ejemplo:

$$K_*^{\alpha *} = K^{\alpha} L_1^{\beta 1} L_3^{\beta 3}$$

(para el caso en el que analicemos las variaciones de $\beta 2$) entonces

$$\alpha_* = \alpha + \beta_1 + \beta_3$$

con lo cual K_* debe estar relacionado con L_1 y L_3 de tal manera que

$$K_*^{\alpha *} = K^{\alpha} L_1^{\beta 1} L_3^{\beta 3}$$

Así la función a analizar sería $q = K_*^{\alpha *} L_2^{\beta 2}$

Como se puede ver el "factor compuesto" K_* no es necesariamente cuantificable: puesto que sólo analizaríamos lo que sucede en el plano:

$$L_2; \quad \frac{\partial q}{\partial L_2}$$

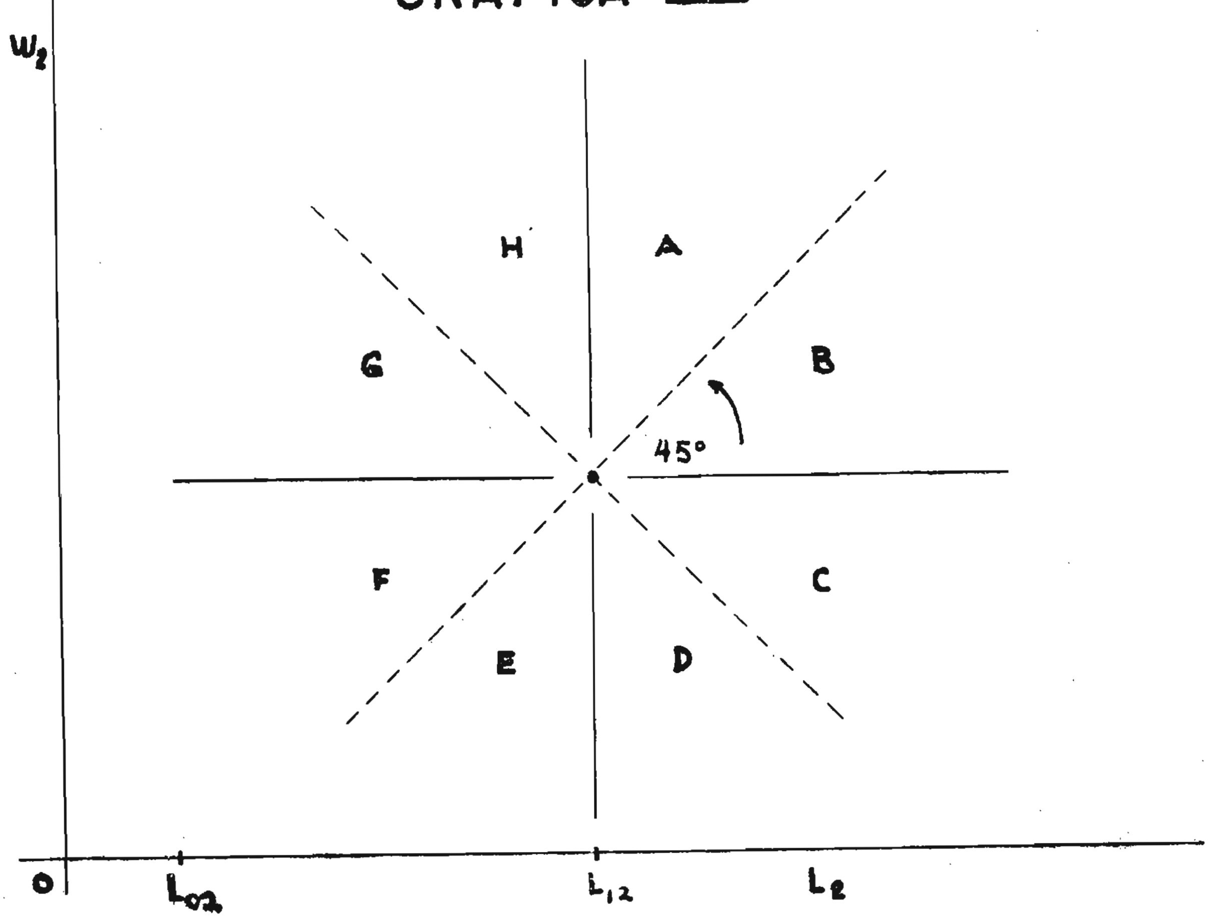
para hacer la comparación de dos volúmenes de L_i asociados con dos montos de producción (digamos L_2 en 1960 asociado con q en 1960, comparado con L_2 en 1965 asociado con q en 1965).

Inicialmente describiremos la primera parte del procedimiento, la cual consiste en la localización del punto teórico (To L_2 en este caso) para compararlo con el punto observado (Ob L_2). La localización del punto teórico se hace calculando el monto de L_2 que sería necesario para obtener el volumen de -

producción en 1965, en el caso de que las productividades media y marginal de- L_2 en 1960 no se modifiquen.

Posteriormente se procede a la comparación de los valores que definen - a los tres puntos Ob L_2 (1960), Ob L_2 (1965) y Tol_2 (1965); para ello utilizamos la identificación de ocho áreas distinguibles entre sí a partir del punto-teórico Tol_2; éstas se pueden ver en la gráfica VII.

GRAFICA VII



Las áreas denominadas con las letras A a la H pueden identificarse - cuantitativamente con la siguiente tabla; (Hoja siguiente).

Nota. Como se podrá ver, la localización de algún punto observado en cuales- quiera de las ocho áreas (en relación con el punto teórico o eje). También - indicaría cierta diferencia en la "intensidad" del cambio en el valor del coe- ficiente elasticidad producto.

TABLA DE VALUACION DE LAS POSIBLES VARIACIONES DE LOS C.E.P.

Area	Identificación Cuantitativa (i=1,2. . .n)	Comparativamente a este 1/ factor se le puede considerar.	Está asociado al caso:2
A	Si $\frac{\Delta wi}{wi} \geq \frac{\Delta Li}{Li}$	No intensivo.	2
B	Si $\frac{\Delta wi}{wi} < \frac{\Delta Li}{Li}$	No intensivo.	2
C	Si $\frac{\nabla wi}{wi} \leq \frac{\Delta Li}{Li}$	Intensivo	2
D	Si $\frac{\nabla wi}{wi} < \frac{\Delta Li}{Li}$	Intensivo	2
E	Si $\frac{\nabla wi}{wi} \geq \frac{\nabla Li}{Li}$	No intensivo	1
F	Si $\frac{\nabla wi}{wi} < \frac{\nabla Li}{Li}$	No intensivo	1
G	Si $\frac{\Delta wi}{wi} \leq \frac{\nabla Li}{Li}$	Intensivo	1
H	Si $\frac{\Delta wi}{wi} > \frac{\nabla Li}{Li}$	Intensivo	1

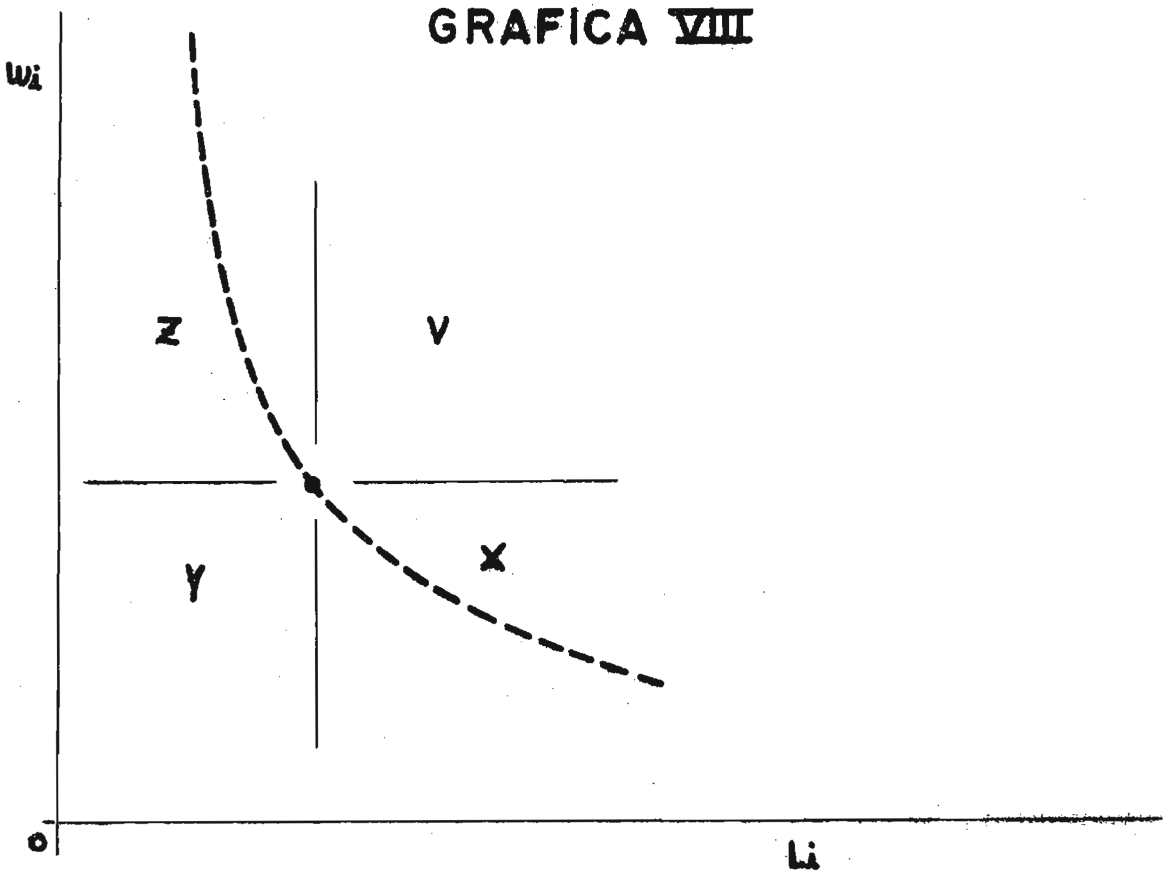
Como se puede ver, a partir de esta tabla se deben asociar las condiciones supuestas en el esquema analítico expuesto en el capítulo III y tener un punto de partida para la formulación de alguna hipótesis.

Existen, además cuatro áreas de referencia adicionales que pueden ser deducidas a partir del supuesto de la forma hiperbólica de la función de productividad marginal (demanda por el factor).

1/ Este aspecto es más preciso, o por lo menos más claro, cuando se trata del factor trabajo homogéneo (L).

2/ En las páginas 34-36 se detallaron los casos 1 y 2 a los que el cuadro hace referencia.

GRAFICA VIII



por la forma supuesta de la función; se puede decir lo siguiente:

a). Si el punto ObL_2 (1965) está en el área Y o V, entonces se puede asegurar que hubo un desplazamiento de la función; pero no se puede decir nada sobre un posible deslizamiento sobre la función.

b). Si el mismo punto está en el área Z o X, entonces se podría afirmar que hubo un desplazamiento sobre la curva pero nada se podrá decir sobre un desplazamiento de la función.

C O N C L U S I O N E S

1o. El método propuesto, tal como se dijo en un principio, es extremadamente simple ya que está sujeto a querer resolver un problema de "estimación", dado el conocimiento de un volumen de información estadística, también, extremadamente sencillo.

2o. Lo que tiene cierto valor (como instrumental de interpretación para la deducción y comprobación de hipótesis) es el proceso teórico matemático en que se apoya el método de estimación de las tendencias de los coeficientes elasticidad producto.

3o. El método tiene mayor valor en la interpretatividad cuando se trata de una función que considera sólo dos factores productivos.

4o. Se puede hacer una complementación de este método si se hace una estimación 1/ del "factor residual" (indicador del cambio tecnológico) usando, por ejemplo, el mecanismo propuesto por Robert M. Solow en su artículo Technical Change and the Agregate Production Function. Review of Economics and Statistics (1957) ya que el punto de intersección (de giro) de las curvas de rendimientos decrecientes al factor, al cambiar el valor de los coeficientes, está sujeto a los valores que adquiera dicho factor residual con el tiempo.

5o. Si fuera posible hacer comparables cifras estadísticas con varias decenas de años de diferencia, sería interesante agregar al procedimiento, aquí propuesto, el caso en el que se modifica la intensidad en el uso de los factores.

6o. De los análisis estrictamente de tipo teórico-matemático se deduce una colección de cuestiones y proposiciones; algunas ya expresadas por diversos autores, entre las cuales se hace necesario destacar la necesidad de prever los efectos distributivos de las políticas de crecimiento basadas en el mejoramiento del factor capital y en el incremento de la tasa de ahorro.

7o. Por último, sería interesante, profundizar en las implicaciones teóricas, deducibles de las pruebas matemáticas asociadas con el caso 2; ya que, aparentemente aportan alguna luz en ciertas discusiones entre las llamadas corrientes de pensamiento "Neo-clásico-Marshalliana" y "la Marxista".

1/ Por supuesto es contradictorio con la restricción, a la que decíamos estar sujetos, de ausencia de información estadística suficiente.

ANEXO 1

APENDICE MATEMATICO.

Prueba 1.

Tenemos las siguientes relaciones 1/

$(q/L)_o - A\ (\frac{K}{L})_o^{\alpha}$ que es la función de productividad media y

$(\frac{\partial q}{\partial L})_o = \beta A\ (\frac{K}{L})_o^{\alpha}$ que es la función de productividad marginal.

Combinando ambas, tenemos que:

$(\frac{\partial q}{\partial L})_o = \beta (q/L)_o$. . . . . (1)

por otra parte si hablamos de las mismas funciones, pero en el siguiente período (es decir el período 1); tendremos:

$(\frac{\partial q}{\partial L})_1 = \beta (q/L)_1$ . . . . (2)

Ahora bien; si suponemos que de un período a otro las productividades medias no varían; es decir que:

$(q/L)_o = (q/L)_1$ entonces, observando (1) y (2), tendremos que:

$(\frac{\partial q}{\partial L})_1 = (\frac{\partial q}{\partial L})_o$ las productividades marginales tampoco varían.

Usando este mismo razonamiento se puede probar para

$(q/K)_i$ y $(\frac{\partial q}{\partial K})_i$

- • - • -

Prueba II.

Por una parte tenemos que:

$(\frac{\partial q}{\partial L})_o = \beta \frac{AK_o^{\alpha}}{L^{1-\beta}}$ . . . .(1) y por otra parte

$(\frac{\partial q}{\partial L})_1 = \beta \frac{AK_1}{L^{1-\beta}}$ . . . .(2); asimismo sucede que

---

1/ Nótese que estamos denominando $(\frac{\partial q}{\partial L})_i$ y $(\frac{q}{L})_i$ a las funciones de productividad marginal y media en el período o tiempo i en cambio q_o/L_o es la productividad media en un punto sobre la función $(q/L)_o$.

$$\left(\frac{K_1^{\alpha}}{K_o^{\alpha}}\right) = \left(\frac{K_1}{K_o}\right)^{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$ si multiplicamos (3) (1)

$$\left(\frac{K_1}{K_o}\right)^{\alpha} \left(\frac{q}{L}\right)_o = \beta \frac{AK_1^{\alpha} K_o^{\alpha}}{K_o^{\alpha} L^{1-\beta}} = \beta \frac{AK_1^{\alpha}}{L^{1-\beta}} = \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_1 \quad \ldots (4)$$

por otra parte $K_1 > K_o$ por lo tanto $\frac{K_1^{\alpha}}{K_o^{\alpha}} > 1$ por lo cual podemos **afirmar** - que $\frac{K_1^{\alpha}}{K_o^{\alpha}} = 1 + x$. Si volvemos a multiplicar (3) (1) entonces:

$$\frac{K_1^{\alpha}}{K_o^{\alpha}} \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_o = (1 + x) \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_o = \left[\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_o + x \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_o\right] = \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_1$$

según lo visto en (4).

Usando este mismo razonamiento se puede probar para $\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_i$

- • - • -

Prueba III.

En la función $q = AK_o^{1-\beta} L^{\beta}$ cuando $\beta \rightarrow 1$ sucede que

$$q = AK_o^{1-1} L^1 = AL$$

la cual es una recta con pendiente A que pasa por el origen.

- • - • -

Prueba IV.

Tomando el corte perpendicular al plano (K,L) de la función, es decir, - $q = AK_o^{1-\beta} L^{\beta}$; y suponiendo 2 valores de β que sean β_1 y β_2 tales que $\beta_2 = \beta_1 + c$ donde $c > o$; veremos qué sucede con la relación:

$$\frac{q \text{ con } (\beta_1)}{q \text{ con } (\beta_2)} = \frac{AK_o^{1-\beta_1} L^{\beta_1}}{AK_o^{1-\beta_2} L^{\beta_2}}$$

$$= \frac{K_o K_o^{-\beta_1} L^{\beta_1}}{K_o K_o^{-\beta_1 - c} L^{\beta_1 + c}}$$

$$= \frac{K_o^{c}}{L^{c}}$$

De lo anterior podemos deducir que los valores que adquirirá la función - q con (β_1) con respecto a q con (β_2) serán los siguientes:

$$q \text{ con } (\beta_1) > q \text{ con } (\beta_2) \text{ cuando } \frac{K_o^c}{L^c} > 1 \text{ o sea cuando } K_o > L$$

$$q \text{ con } (\beta_1) = q \text{ con } (\beta_2) \text{ cuando } \frac{K_o^c}{L^c} = 1 \text{ o sea cuando } K_o = L$$

$$q \text{ con } (\beta_1) < q \text{ con } (\beta_2) \text{ cuando } \frac{K_o^c}{L^c} < 1 \text{ o sea cuando } K_o < L$$

Usando el mismo razonamiento se puede probar para el otro corte de la - función $q = AK^{\alpha} L_o^{\beta}$

- • - • -

<u>Prueba V.</u>

Tenemos la función de productividad marginal para el factor trabajo:

$$\text{en forma general: } \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_o = \beta A\left(\frac{K_o}{L}\right)^{1-\beta}$$

en la cual modificaremos un valor particular de β o sea β_1; y pasaremos a - otro valor $\beta_2 = \beta_1 + c$ donde $c>o$. Así pues tendremos la misma función con los- diferentes valores en sus respectivos coeficientes elasticidad producto

$$\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_o^{\text{con } \beta_1} = \beta_1 A \left(\frac{K_o}{L}\right)^{1-\beta_1} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)_o^{\text{con } \beta_2} = (\beta_1 + c) A \left(\frac{K_o}{L}\right)^{1-\beta_1-c}$$

las igualaremos para saber si hay un punto donde se intersecten.

$$\beta_1 A \left(\frac{K_o}{L}\right)^{1-\beta_1} = (\beta_1 + c) A \left(\frac{K_o}{L}\right)^{1-\beta_1-c}$$

$$\beta_1 A \left(\frac{K_o}{L}\right)^{1-\beta_1} = (\beta_1 + c) A \left(\frac{K_o}{L}\right)^{1-\beta_1} \left(\frac{K_o}{L}\right)^{-c}$$

$$\beta_1 = (\beta_1 + c) \left(\frac{K_o}{L}\right)^{-c} = (\beta_1 + c) \left(\frac{L}{K_o}\right)^{c}$$

$$\beta_1 = (\beta_1 + c)\,\frac{L^c}{K_o^{\,c}}$$

$$L^c = K_o^{\,c}\,\frac{\beta_1}{\beta_1 + c}$$

$$L = \left(K_o^{\,c}\,\frac{\beta_1}{\beta_1+c}\right)^{1/c} = K_o\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+c}\right)^{\frac{1}{\beta_2 - \beta_1}}$$

$$L = K_o\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta_2 - \beta_1}}$$

Usando el mismo razonamiento se puede llegar a determinar **que este punto**, para la función $\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)_o$ es:

$$K = L_o\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}$$

- • - • -

Prueba VI.

La raíz enésima de cualquier número positivo (como $\frac{\beta_1}{\beta_2}$) **es un número positivo** por tanto:

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta_2-\beta_1}} > o$$

Por otra **parte sabemos** que $\beta_2 > \beta_1$ entonces $\frac{\beta_1}{\beta_2} < 1$ y **que** $\frac{1}{\beta_2-\beta_1} > 0$ llamemos $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ **= a y** $\frac{1}{\beta_2-\beta_1}$ = b **por** tanto a <1 y b >0:

Usando las **propiedades** de los logaritmos, tendremos:

$\log a^b = b \log a$; **pero** el logaritmo de un número menor que la unidad es negativo por tanto;

b log a <0 y **entonces** log $a^b < 0$ por lo tanto tomando antilogaritmos $a^b < 1$ que es lo **que queríamos** probar.

Ahora **veremos qué sucede** si β disminuye o sea si $\beta_2 < \beta_1$; entonces $\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) > 1$ y para que $\frac{1}{\beta_2-\beta_1}$ **sea** un **número** positivo usaremos $-\frac{1}{\beta_2-\beta_1}$ por tanto-aquí tenemos que $\frac{\beta_1}{\beta_2} = a > 1$ y $-\frac{1}{\beta_2 - \beta_1} = b < 0$ por lo que;

$\log a^b = b \log a$ y como $b < 0$ entonces; $b \log a < 0$ por lo que $\log a^b < 0$ y por lo tanto $a^b < 1$.

Ahora volviendo a la prueba V podemos asegurar que aunque β aumente o disminuya siempre se cumplirá que;

$$K_o \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta_2 - \beta_1}} < K_o \quad \text{y que} \quad L_o \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} < L_o$$

En relación con la misma expresión $\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta_2 - \beta_1}}$ debemos investigar qué sucede con el valor de dicha expresión si β crece aún más (digamos hasta β_3, donde $\beta_3 = \beta_2 m$ y $1 < m < \frac{1}{\beta_2}$) dicha investigación la haremos utilizando el cociente identificado con el I: (si llamamos $\beta_1 = a$; $\beta_2 = b$ y $\beta_3 = b'$ entonces tendremos):

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-a}}}{\left(\frac{a}{b'}\right)^{\frac{1}{b'-a}}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-a}}}{\left(\frac{a}{bm}\right)^{\frac{1}{bm-a}}} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{b-a}}}{b^{\frac{1}{b-a}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{bm-a}}\, m^{\frac{1}{bm-a}}}{a^{\frac{1}{bm-a}}}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{b-a} - \frac{1}{bm-a}}}{b^{\frac{1}{b-a} - \frac{1}{bm-a}}} \; m^{\frac{1}{bm-a}}$$

$$= m^{\frac{1}{bm-a}} \; \frac{a^{\frac{bm-a-b+a}{(b-a)(bm-a)}}}{b^{\frac{bm-a-b+a}{(b-a)(bm-a)}}}$$

$$= m^{\frac{1}{bm-a}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{bm-b}{(b-a)(bm-a)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Tomando esta última expresión, la supondremos mayor que la unidad ($I > 1$); y además la llevaremos a su forma logarítmica.

$$\frac{1}{bm-a} \log m + \frac{bm-b}{(b-a)(bm-a)} \log \left(\frac{a}{b}\right) \ldots\ldots \text{(III)}$$

por lo tanto $III > 0$

y para que esto suceda es necesario que:

$$\log \left(\frac{a}{b}\right) > 0 \text{ y por lo tanto que } \left(\frac{a}{b}\right) > 1 \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Ahora bien si suponemos que $I < 1$ entonces será necesario que ;

$$\log \left(\frac{a}{b}\right) < 0 \text{ y por lo tanto que } \left(\frac{a}{b}\right) < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

por otra parte; para que IV ocurra es necesario que $a > b$; asimismo para que V suceda, se necesita que $b > a$.

Lo expuesto en V implica exactamente los supuestos que hicimos al elaborar el cociente (I) por lo tanto queda demostrado que: (Ver hoja siguiente).

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b - a}} < \left(\frac{a}{b'}\right)^{\frac{1}{b' - a}}$$

- * - * -

Prueba VII.

En la isocuanta q_o $AK^{1-\beta}$ L^{β} haremos variar los exponentes de β_1 a β_2; donde $\beta_2 = \beta_1 + c$ donde $c > 0$ (o sea $\beta_2 > \beta_1$) dicha isocuanta (para el volumen específico de producción q_o) la veremos en el plano (K_1 L), por lo tanto, la variable K estará en el contradominio de la función; despejando la variable K denotaremos como K(1),a la isocuanta con los parámetros exponenciales β_1 y α_1; y como $K_{(2)}$ a la misma isocuanta pero con exponentes β_2 y α_2, después, trabajando con el cociente $\frac{K_{(1)}}{K_{(2)}}$ de las expresiones mencionadas, veremos cuándo dicho cociente es mayor, igual o menor a la unidad; lo que significa saber, cuándo la función (vista como) $K_{(1)}$ pasa por arriba, cuando corta, y cuando pasa por abajo de la función $K_{(2)}$.

$$q_o = AK^{1-\beta} L^{\beta}$$

$$\frac{q_o}{A} L^{-\beta} = K^{1-\beta}$$ por lo tanto en forma general:

$$K = \sqrt[1-\beta]{\frac{q_o}{A} L^{-\beta}} = \left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} L^{\frac{-\beta}{1-\beta}}$$

según nuestros propósitos tendremos:

$$K_{(1)} = \sqrt[1-\beta_1]{\frac{q_o}{A} L^{-\beta_1}} = \left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1}} L^{\frac{-\beta_1}{1-\beta_1}}$$ y

$$K_{(2)} = \sqrt[1-\beta_1-c]{\frac{q_o}{A} L^{-\beta_1-c}} = \left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1-c}} L^{\frac{\beta_1 - c}{1-\beta_1 - c}}$$

por lo tanto:

$$\frac{K_{(1)}}{K_{(2)}} = \frac{\left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1}} L^{-\frac{1}{1-\beta_1}}}{\left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1-c}} L^{\frac{-\beta_1-c}{1-\beta_1}}}$$

descomponiendo $L^{\frac{-\beta_1-c}{1-\beta_1}} = L^{-\frac{\beta_1}{1-\beta_1}} \; L^{-\frac{c}{1-\beta_1}}$

simplificando comparando con el numerador :

$$\frac{K_{(1)}}{K_{(2)}} = \frac{\left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1}}}{\left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1\ \beta_1-c}} L^{\frac{-c}{1-\beta_1}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1}} L^{\frac{c}{1-\beta_1}}}{\left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1-c}}}$$

llamando $\left(\frac{q_o}{A}\right) = T$; tenemos que si $K_{(1)} > K_{(2)}$ entonces $\frac{K_{(1)}}{K_{(2)}} > 1$

por lo tanto $\log \frac{K_{(1)}}{K_{(2)}} > 0$. Por lo cual tomando logaritmo a nuestra expresión arriba tendremos:

$$\left[\frac{1}{1-\beta_1} \log T + \frac{c}{-1-\beta_1} \log L\right] - \left[\frac{1}{1-\beta_1-c} \log T\right] > 0$$

$$\frac{c}{1-\beta_1} \log L + \left(\frac{-1}{1-\beta_1-c} + \frac{1}{1-\beta_1} \right) \log T > 0$$

$$\frac{c}{1-\beta_1} \log L > \left(\frac{1}{1\ \beta_1 - c} - \frac{1}{1-\beta_1} \right) \log T$$

$$\log L > \frac{1-\beta 1}{c} \left(\frac{1}{1-\beta_1-c} - \frac{1}{1-\beta_1} \right) \log T$$

entonces:

$$L < \left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1-\beta_1}{c} \left(\frac{1}{1-\beta_1-c} - \frac{1}{1-\beta_1} \right)}$$

pero el exponente del lado derecho de la última expresión se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\frac{1-\beta_1}{c} \left[\frac{1-\beta_1-1-\beta_1+c}{(1-\beta_1)\ (1-\beta_1-c)} \right] = \left[\frac{c}{(1-\beta_1)\ (1-\beta_1-c)} \right] \frac{1-\beta_1}{c}$$

$$= \frac{1}{1-\beta_1-c}$$

Por lo tanto la función $K_{(1)}$ tiene valores mayores que los de la función $K_{(2)}$ para aquellos valores de L (contra dominio de la función) que son mayores que el valor de la expresión:

$$\left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta_1-c}} = \left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$$

Por otra parte las funciones $K_{(1)}$ y $K_{(2)}$ se cortarán en un valor L_i determinado tal que

$$L_i = \left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$$

y por último $K_{(1)}$ pasará por abajo de la función $K_{(2)}$ para los valores

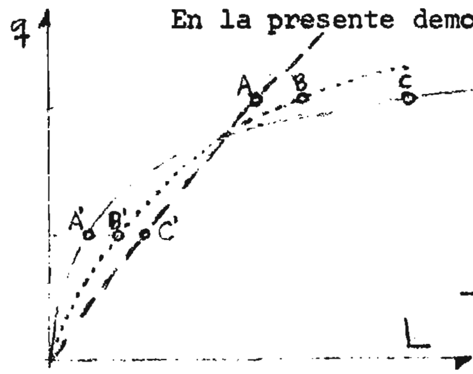
$$L < \left(\frac{q_o}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$$

nótese que conforme β_2 es más grande que β_1 entonces β_2 será crecientemente más chica que α_1; por lo tanto el punto donde se corten las funciones $K_{(1)}$ y $K_{(2)}$ será variable dependiendo de la intensidad en el cambio de los coeficientes elasticidad producto.

- • - • -

Prueba VIII.

En la presente demostración se pretende probar que



$$\frac{\partial q}{\partial L_A} > \frac{\partial q}{\partial L_B} > \frac{\partial q}{\partial L_C} \quad \text{y asimismo que}$$

$$\frac{\partial q}{L_{A'}} < \frac{\partial q}{L_{B'}} < \frac{\partial q}{L_{C'}}$$

a partir de la función $q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ el corte transversal sería $q = AK_o^{\alpha} L^{\beta} = AK_o^{1-\beta} L^{\beta}$ . . . .(I)

fijando un nivel de producción $q_o = AK_o^{1-\beta} L^{\beta}$ y despejando L tendremos

$$\frac{q_o}{AK_o^{1-\beta}} = L^{\beta} \quad \text{por lo tanto} \quad L = \left(\frac{q_o}{AK_o^{1-\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad . . . (II)$$

por otra parte sabemos que $\frac{\partial q}{\partial L} = AK_o^{1-\beta} \beta L^{\beta-1}$ . . . (III)

Sustituyendo en (III) el valor de L (II) tendremos:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right) = \beta A K_o^{\,1-\beta}\left(\frac{q_o}{A K_o^{\,1-\beta}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \quad . . . \text{(IV)}$$

obtenemos así la $\frac{\partial q}{\partial L}$ para algún valor de L con una β dada. Ahora debemos ver cuál será el valor de $\frac{\partial q}{\partial L}$ en el caso que el valor de la β cambiara a β' donde $\beta' > \beta$ es decir $\beta' = \beta d$ donde $1 < d < \frac{1}{\beta}$ (esto es así porque, si $\beta' = \beta d$ $\Rightarrow \frac{\beta'}{\beta} = d$ y si d llega a su máximo valor $\frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{\beta'}{\beta} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta' = 1$)

Así pues escribiremos una función (V) con $\beta' = \beta d > \beta$

$$\frac{\partial q}{\partial L_A} = \beta' A K_o^{\,1-\beta'}\left(\frac{q_o}{A K_o^{\,1-\beta'}}\right)^{\frac{\beta'-1}{\beta'}} \quad . . . . \text{(V)}$$

que podrá ser "comparada" con la función (IV) es decir

$$\frac{\partial q}{\partial L_B} \text{ ó } \frac{\partial q}{\partial L_C}$$

Como se ve la demostración consistirá en comprobar qué requisitos deben reunirse para que

$$\frac{\dfrac{\partial q}{\partial L_B}}{\dfrac{\partial q}{\partial L_A}} < 1$$

y si éstas coinciden con los planteamientos a priori (expuestos en el texto de la tesis) entonces $\frac{\partial q}{\partial L_A} > \frac{\partial q}{\partial L_B}$

Asimismo para $\dfrac{\dfrac{\partial q}{\partial L_{A'}}}{\dfrac{\partial q}{\partial L_{B'}}}$ que tendrá que ser menor que la unidad.

Así pues suponemos que:

$$\frac{\beta A K_o^{1-\beta}\left(\dfrac{q_o}{AK_o^{1-\beta}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{\beta d A K_o^{1-\beta d}\left(\dfrac{q_o}{AK_o^{1-\beta d}}\right)^{\frac{\beta d-1}{\beta d}}} < 1$$

llamando $\dfrac{q_o}{A} = C$ tendremos:

$$\frac{1}{d} K_o^{1-\beta-1+\beta d}\, C^{\frac{\beta-1}{\beta} - \frac{\beta d-1}{\beta d}}\, K_o^{\frac{(\beta-1)(\beta-1)}{\beta} - \frac{(\beta d-1)(\beta d-1)}{\beta d}}$$

buscamos un común denominador para el exponente de C

$$\frac{1}{d} K_o^{\beta d-\beta}\, C^{\frac{\beta^2 d-\beta d-\beta^2 d+\beta}{\beta^2 d}}\, K_o^{\frac{(\beta-1)^2}{\beta}+\frac{(\beta d-1)^2}{\beta d}}$$

$$\frac{1}{d}\, C^{\frac{\beta-\beta d}{\beta^2 d}}\, K_o^{\beta d-\beta}\, K_o^{-\frac{\beta^2 d^2-2\beta d+1}{\beta d}+\frac{\beta^2-2\beta+1}{\beta}}$$

$$\frac{1}{d}\, C^{\frac{\beta(1-d)}{\beta^2 d}}\, K_o^{\beta(d-1)}\, K_o^{-\frac{\beta^3 d^2+2\beta^2 d-\beta+\beta^3 d-2\beta^2 d+\beta d}{\beta^2 d}}$$

trabajando ahora con la última K_o de la expresión tenemos:

$$K_o^{\beta \frac{(-\beta^2 d^2 + \beta^2 d + d - 1)}{\beta^2 d}} = K_o^{\frac{-\beta^2 d^2 + \beta^2 d + d - 1}{\beta d}}$$

tomando ahora la otra variable $K_o^{\beta d - \beta}$ tenemos

$$K_o^{\beta d - \beta \frac{-\beta^2 d^2 + \beta^2 d + d - 1}{\beta d}} = K_o^{\frac{\beta^2 d^2 - \beta^2 d - \beta^2 d^2 + \beta^2 d + d - 1}{\beta d}}$$

por lo tanto toda la expresión nos queda:

$$\frac{1}{d} \; C^{\frac{(1-d)}{\beta d}} \; K_o^{\frac{(d-1)}{\beta d}} = \frac{1}{d} \left(\frac{C}{K_o}\right)^{\frac{1-d}{\beta d}} \quad \text{o también}$$

$$\frac{1}{d} \left(\frac{K_o}{C}\right)^{\frac{d-1}{\beta d}} \quad \text{recordando que } C = \frac{q_o}{A}$$

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial L_B}}{\frac{\partial q}{\partial L_A}} = \frac{1}{d} \left(\frac{A\,K_o}{q_o}\right)^{\frac{d-1}{\beta d}}$$

Por lo tanto demostrando que $\frac{1}{d} \left(\frac{AK_o}{q_o}\right)^{\frac{d-1}{\beta d}} < 1$

demostraremos que $\frac{\partial q}{\partial L_A} > \frac{\partial q}{\partial L_B}$

Como $q_o > AK_o$ entonces $\frac{AK_o}{q_o} < 1$

Por otra parte, como $0<\beta$ y $d > 1$ tenemos que $\frac{d-1}{\beta d} > 0$; lo cual implica que

$$\left(\frac{AK_o}{q_o}\right)^{\frac{d-1}{\beta d}} < 1$$

Asimismo sabemos que $\frac{1}{d} < 1$ por lo cual $\frac{1}{d}\left(\frac{AK_o}{q_o}\right)^{\frac{d-1}{\beta d}} < 1$ que era lo que deseábamos demostrar

En forma análoga se demostraría que $\frac{\partial q}{\partial L_C} < \frac{\partial q}{\partial L_B}$

por lo tanto se tendría que:

$$\frac{\partial q}{\partial L_A} > \frac{\partial q}{\partial L_B} > \frac{\partial q}{\partial L_C}$$

- • - • -

Prueba IX

Ahora bien; si $q_o < AK_o$ (es decir si la recta $q = q_o$ corta las curvas en la parte inferior al punto de intersección común) entonces $\frac{AK_o}{q_o} > 1$.

Por otra parte, como $d > 1$ y $\frac{\beta d}{d-1} > o$ entonces tendremos que $d^{\frac{\beta d}{d-1}} \geq 1$

por lo cual si sabemos que para que $\frac{1}{d}\left(\frac{AK_o}{q_o}\right)^{\frac{d-1}{\beta d}} > 1$ se debe cumplir que $\left(\frac{AK_o}{q_o}\right) > d^{\frac{\beta d}{d-1}}$

y como $d^{\frac{\beta d}{d-1}} \geq 1$ entonces

$$\frac{1}{d}\left(\frac{AK_o}{q_o}\right)^{\frac{d-1}{\beta d}} > 1 \text{ si } \frac{AK_o}{q_o} > 1$$

B I B L I O G R A F I A

LIBROS.

1. Cosío Pascal Enrique.
FUNCIONES DE PRODUCCION Y MEDICION DEL CAMBIO TECNOLOGICO.
Tesis profesional para obtener el título de actuario. (1967).

2. Douglas Paul H.
THE THEORY OF WAGES.
Crower Collier & Mac Millan Co.
New York. (1934)

3. Ferguson Charles E
MICROECONOMIC THEORY.
Irwin. Georgetown, Toronto (1969).

4. Henderson J. y Quandt R.
MICROECONOMIC THEORY A MATEMATICAL APPROACH.
Mc. Craw Hill Book Co. New York E.U.A. (1958).

5. Hicks John R.
VALOR Y CAPITAL.
Fondo de Cultura Económica.
México (1965).

6. Hicks John R.
THE THEORY OF WAGES.
Crower Collier & Mac Millan Co.
New York. (1963).

7. Lave Lester B.
TECHNOLOGICAL CHANGE, ITS CONCEPTION AND MEASURAMENT.
Prentice Hall. Englewood, N. J.

8. Nerlove, Marc.
ESTIMATION AND IDENTIFICATION OF COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTIONS.
Rand Mc Nally Co. Chicago Ill. (1967.

9. Segura Julio.
FUNCION DE PRODUCCION, MACRODISTRIBUCION Y DESARROLLO.
Editorial Tecnos. Madrid España (1960)

10. Tempo. Centro de estudios avanzados de la compañía General Electric.
CRECIMIENTO DE POBLACION Y DESARROLLO ECONOMICO.
Editorial Diana, S. A., México, D. F.
(1972).

REVISTAS.

A. Abramovitz M.
RESOURCE AND OUTPUT TRENDS IN THE UNITED STATES SINCE 1870.
American Economic Review (Artículo). (1956)

B. Denison Eduard F.
THE SOURCES OF ECONOMIC GROWTH IN THE UNITED STATES, AND THE ALTERNATIVES BEFORE US. SUPPLEMENTARY PAPER No. 13.
Comité for Ecomic Developmet. (1962).

C. Denison Eduard F.
HOW TO RAISE THE HIGH EMPLOYMENT GROWTH RATE BY ONE PERCENTAGE POINT.
(Artículo).
American Economic Review. (1962).

D. Reynolds Clark W.
THE MEXICAN ECONOMY TWENTIETH CENTURY STRUCTURE AND GROWTH.
Manuscrito. (Mimeógrafo). (1970).

E. Solow Roberth M.
TECHNICAL CHANGE AND THE AGREGATE PRODUCTION FUNCTION.
Review of Econominics and Statistics (Artículo). (1957).

F. Walters A.
PRODUCTION AND COST FUNCTIONS AN ECONOMETRIC SURVEY.
Econométrica (Art.). (1963).

Este trabajo profesional
fue transcrito e impreso en:
PROMOTORA SUAREZ-MUÑOZ, S. A.
ASESORIA PROFESIONAL Y MAGISTERIAL.
Av. López Mateos Sur 573 - 16 y 17. Tel. 21-47-65
Guadalajara, Jalisco México.