EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

Tesina:

Formación de redes estables y eficientes con agentes heterogéneos.

Alumno: Jaime Isidro Olivares Ramírez

Asesor: David Cantala

2008

Agradecimientos

Gracias a mis padres y hermanos por el apoyo y los ánimos que me brindaron durante los dos años de la maestría para llegar hasta el final, pero sobre todo a mis padres por sufrir conmigo cada final de semestre la espera de cada resultado.

Gracias a cada uno de mis 22 compañeros con los que empecé la ilusión de hacer una maestría en el Colegio de México, ya que a pesar de que no terminó todo el grupo, todos aportaron algo como compañeros para poder terminar la maestría.

A mis amigos y compañeros de vivienda Dan Galaviz, Martha Vázquez, Yessica Ramos y Jorge López por su apoyo y confianza. Y a todos mis amigos del Colegio de México por hacer más agradable este tiempo.

Finalmente gracias al Doctor David Cantala por su ayuda y paciencia en la realización de esta tesina.

Resumen

Muchas formas de relaciones económicas o sociales son modeladas por redes que representan las interacciones entre individuos. Existen estudios que definen estabilidad y eficiencia y encuentran condiciones para ciertas formas de redes bajo un modelo de agentes homogéneos (simétrico), donde todos los individuos en la red tienen beneficio igual a 1 y costo igual para todos por formar un vinculo con otro individuo, afirmando que bajo una cierto factor de distancia δ y un cierto costo existe una red en forma de estrella (con un individuo como centro y los demás solo vinculados solo al centro) que es estable y además es eficiente. En la presente tesina rompo con el supuesto de simetría para modelar las redes con agentes heterogéneos (con distintos costos y beneficios por vincularse) de dos tipos, los que tienen mayores beneficios por vincularse llamados tipo alto y a los que les resulta mas costoso mantener un vinculo que les llamo tipo bajo. Encuentro condiciones de estabilidad para las redes en forma de estrella pero estas no son eficientes, contrario al caso simétrico. Pero encuentro otra forma de red que la nombro concéntrica de núcleo denso, donde los de tipo alto están vinculados entre ellos y con individuos de tipo bajo mientras que los de tipo bajo solo están vinculados con un individuo de tipo alto. Y encuentro condiciones de estabilidad para estas redes que además son estables. Finalmente a diferencia de los otros trabajos este modelo de agentes heterogéneos permite hacer un análisis de estática comparativa para δ's dados y dar una interpretación en un ejemplo de exalumnos en busca de empleo y el factor de distancia se interpreta como información de empleos publica si es cercano a 0 (los vínculos no son importantes) e información privada si es cercano a 1 (los vínculos son importantes), y el resultado es que si la información es publica el modelo de agentes heterogéneos se acerca al modelo simétrico y no importa si estos tienen beneficios costos mas bajos o altos.

Índice

I. Introducción

La presente investigación analiza las condiciones de estabilidad y eficiencia en la formación de redes con agentes heterogéneos y la compatibilidad de estas condiciones. Las redes representan la interacción económica o social entre individuos, quienes eligen si forman nuevos vínculos bilateralmente o rompen unilateralmente los vínculos existentes. Una red puede ser estable, sin embargo existe la disyuntiva de que estas redes no sean eficientes.

Myerson(1977) caracterizó una variación del valor de Shapley que fue un concepto de solución para juegos cooperativos donde la restricciones sobre las coaliciones fueron impuestas por la estructura del grafo; este análisis dio herramientas para la asignación del valor social entre un conjunto de jugadores. Estudios previos analizaron estas condiciones de estabilidad y eficiencia Jackson y Wolinsky (1996) y Bala y Goyal (2000). Ambos estudios se centran en el análisis de una red en forma de estrella con un individuo en el centro y los demás vinculados solo a este individuo. Jackson y Wolinsky (1996) encuentran que hay redes estables en forma de estrella que son eficientes para un rango de valores encontrando cierta tensión entre eficiencia y estabilidad bajo un modelo simétrico donde los individuos en la red tienen los mismos costos por vincularse directamente con alguien y los mismo beneficios por los vínculos directos e indirectos. Su principal contribución es la modelación y análisis de estabilidad en una estructura de formación de vínculos cooperativos. La aportación de Bala y Goyal (2000) a este análisis es considerar un juego no cooperativo, bajo el modelo simétrico, en la que los costos por formar un vinculo son incurridos solo por la persona quien inicia el vinculo lo que le permite introducir la noción de equilibrio de Nash para la estabilidad en las redes. Ellos encuentran que la estrella es la única red eficiente que también es una red estable[1].

Otros autores han también analizado la compatibilidad entre eficiencia y estabilidad. Johnson y Gilles (2000) estudian una variación donde los jugadores son localizados a lo largo de una línea y el costo de formar un vínculo entre individuos depende de la distancia

[1] Bala y Goyal se refieren a red estable como una red Nash estricto.

entre ellos y muestran que el conflicto entre eficiencia y estabilidad aparece en la versión geográfica del modelo de redes. Dutta y Mutuswami (1997) adoptan un diseño de mecanismo para reconciliar el conflicto entre eficiencia y estabilidad, su aportación es que su regla de asignación es análoga a un mecanismo pues la compatibilidad es un objetivo que puede ser diseñado por un planeador. Jackson (2001) también hace una revisión de la tensión entre eficiencia y estabilidad, pero ahora considera diferentes definiciones de eficiencia considerando el grado en el cual se permiten las transferencias entre los individuos; la definición de eficiencia de Jackson y Wolinsky (1996) es apropiada cuando las transferencias son libres entre individuos. Watts (2001) bajo la misma estructura de Jackson y Wolinsky considera un modelo donde las parejas de individuos se van encontrando en el tiempo y deciden si se vinculan o no, el proceso de formación es los que llaman un estado estable si ningún vinculo adicional es formado o roto en subsecuentes periodos.

Sin embargo el supuesto de simetría entre los agentes es muy fuerte. En la formación de redes en realidad es muy común encontrar individuos o jugadores con distintas características, por ejemplo en el caso de la organización al interior de las empresas la formación de la red estable y eficiente se vuelve relevante si tomamos en cuenta que cada trabajador tiene distinta productividad o diferentes habilidades que hagan que sea mas costoso vincularse con otro trabajador o pueda tener un mayor beneficio. También podemos verlo en un caso de relaciones sociales y económicas de una red de exalumnos en busca de empleo, donde existen diferentes tipos de individuos: aquellos que son exitosos y los no exitosos, y cuyo beneficio es la información que se puede obtener y los costos el tiempo invertido en relacionarse con los agentes.

Además los resultados de estabilidad y eficiencia permiten hacer un análisis de estática comparativa en la red. En el modelo planteado el trabajo es referido a dos tipos de individuos, en primer lugar podemos hacer un análisis de los costos y beneficios de los dos tipos de individuos y hacer un comparativos de que valores los individuos son permitidos tomar para que exista una red eficiente y estable, y en segundo lugar en este modelo existe un factor de distancia δ que también puede ser interpretado como el valor de los vínculos de la red, esta interpretación me permite analizar que es lo que ocurre para distintos valores de δ, retomando el ejemplo de redes de exalumnos el valor de δ es importante para la búsqueda de empleo un δ tiende a 0 significa que la información sobre empleo es pública y por lo tanto tiene poco valor la formación de vínculos mientras que si δ tiende a 1 la información es privada y se vuelve más importante formar vínculos para poder tener información y encontrar empleo.

Mis resultados muestran que no hay compatibilidad entre eficiencia y estabilidad para las redes en forma de estrella, pero encuentro una red concéntrica de núcleo denso, en la cual existe un rango de valores para los cuales hay compatibilidad. Esta red muestra como, para valores pequeños de δ, el modelo se acerca a las características de un modelo con individuos homogéneos, mientras que para δ grandes los individuos se van diferenciando, implicando que los menos productivos tengan mayores costos para que exista la compatibilidad entre eficiencia y estabilidad.

En la siguiente sección del trabajo presento el modelo y los conceptos de estabilidad y eficiencia para redes con agentes heterogéneos, donde defino una nueva red que le llamo concéntrica de núcleo denso e introduzco nueva notación para formalizar las condiciones de estabilidad y eficiencia. En la tercera sección presento resultados de estabilidad y eficiencia para redes en forma de estrella, y en la sección IV para redes concéntricas de núcleo denso (en el apéndice se incluye las pruebas de estos resultados). En la sección V presento el análisis grafico de estática comparativa y finalmente se presenta las conclusiones.

II. Formación de redes estables y eficientes con agentes heterogéneos.

Sea R el número finito de jugadores. La red completa, donde todos los individuos tienen vínculos con todos los demás, esta denotada por g^R. El conjunto de todos los posibles grafos sobre R es entonces $\{g | g \subset g^R\}$. La notación *ij* es referido al vinculo entre i y j, si $ij \in g$, entonces los nodos i y j son directamente conectados, y si $ij \notin g$ entonces los individuos i y j no están directamente conectados. Además g + ij denota el grafo obtenido por agregar el vinculo ij al grafo g y g – ij representa el grafo obtenido por borrar el vinculo ij del grafo g.

El valor de la red esta representada por $v:\{g|g \subset g^R\} \to \Re$.En este modelo el valor de la red es un agregado de las utilidades o producciones individuales. Una regla de asignación $Y:\{g|g \subset g^R\} xV \to \Re^R$ describe como el valor asociado con cada red es distribuido a los jugadores individuales. $Y_i(g,v)$ es el pago al jugador i de la red g bajo la función de valor v.

La red g es *estable*, como lo presentan Jackson y Wolinsky (1996) respecto a v y Y si

(i) $\forall \quad ij \in g, \quad Y_i(g,v) \geq Y_i(g-ij,v)$ y $\quad Y_j(g,v) \geq Y_j(g-ij,v)$

y

(ii) $\forall \quad ij \notin g,$ si $Y_i(g,v) < Y_i(g+ij,v)$ entonces $Y_j(g,v) > Y_j(g+ij,v)$.

La primera condición se refiere a que si existe un vinculo entre dos jugadores en la red g el pago de estos jugadores en g debe ser mayor al pago en la misma red g sin el vinculo entre estos dos jugadores. Mientras la segunda condición nos dice que si no existe la relación ij en la red g entonces basta con que el pago de alguno de los dos jugadores sea mayor en la red g que en la red g + ij. Esta noción de estabilidad no depende de algún proceso de formación de la red en particular.

Los R individuos están divididos en 2 grupos: M individuos de tipo 1 (T_1) y N individuos de tipo 2 (T_2), y m y n representan un jugador de M y N respectivamente.

Los individuos T_1 incurren en un costo $c^1_{ij} \neq 0$ por vincularse directamente con algún individuo j y de igual forma los individuos de tipo 2 tienen un costo $c^2_{ij} \neq 0$ por sus relaciones directas. Pero ambos individuos obtienen beneficios $w^1_{ij} > 0$ y $w^2_{ij} > 0$ por sus vínculos directos e indirectos, estos beneficios se van descontando con un factor $\delta \in [0,1]$, que se va elevando a una potencia dependiendo del número de vínculos que relacionan al individuo i con j. Donde $w^1_{ij} > c^1_{ij}$ y $w^2_{ij} > c^2_{ij}$.

Para distinguir entre individuos de tipo 1 y tipo 2 los beneficios y costos deben tener las siguientes relaciones: $w_1 > w_2$ y $c_1 \leq c_2$, esto es para jerarquizar a los individuos y distinguir entre los mas productivos por relacionarse con alguien y capturar así las características de los agentes.

La utilidad de cada jugador i de tipo s en la red g es:

$$u_i^s(g) = w_{ii}^s + \sum_{j \neq i} \delta^{t_{ij}} w_{ij}^s - \sum_{j:ij \in g} c_{ij}^s$$

Donde t_{ij} es el número de vínculos en la ruta más corta entre i y j, s=T_1, T_2 y $0 < \delta < 1$ que captura la idea de que el valor de i de ser conectado a j es proporcional a la proximidad de j a i. En este modelo se toma como supuesto que $w_{ii}^s = 0$.

De la definición de estabilidad del modelo se derivan las siguientes condiciones para verificar que una red sea estable:

1) $u^{ij} = u_i(g + ij) - u_i(g) \leq 0$ si $ij \notin g$, esta condición debe ser negativa en estabilidad ya que nos indicaría que la red g es estable pues los agentes no querrían hacer nuevos vínculos.
2) $u^{ij} = u_i(g) - u_i(g - ij) \geq 0$ y $u^{ji} = u_j(g) - u_j(g - ij) \geq 0$ si $ij \in g$, estas condiciones deben ser positiva para que sea estable ya que es mayor la utilidad de la red actual g que la red donde no existe dicho vinculo para i y j.

Se especifica la siguiente notación en la medida de utilidad del jugador i de tipo s: $m^{t \to i^s}$ y $n^{t \to i^s}$ es el número de individuos m y n respectivamente que están conectados a t vínculos de distancia del jugador i de tipo s (individuo al que estamos midiendo la utilidad en el grafo g), y $m^{t \to j^s}$ y $n^{t \to j^s}$ es el numero de individuos m y n respectivamente que están vinculados a t vínculos de distancia con el jugador i pero que estén vinculados solo con el individuo j de tipo s con el que este vinculado i, y j^s es denotado como m^1 o n^1.

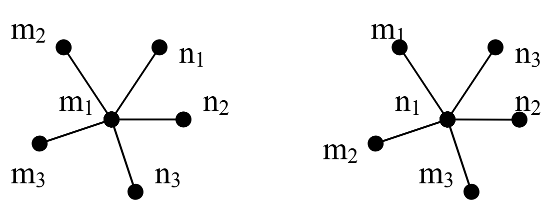
Un grafo $g \subset g^R$ es *fuertemente eficiente* si $v(g) \geq v(g')$ para todo $g' \subset g^R$. El término eficiencia fuerte indica valor máximo total, más que a una noción de Pareto. Donde $v(g) = \sum_{i \in \mathrm{N}} u_i(g)$, el valor de la red es igual a la sumatoria de la utilidad de todos los individuos.

III. Red en forma de estrella.

Una estrella es una red donde alguno de los individuos, m o n, este vinculado con todos los otros individuos directamente, siendo el centro de la red, y todos los demás solo están vinculados con el centro. De esta manera la distancia más lejana entre individuos es de dos individuos. En la gráfica 2 se muestran ejemplos de este tipo de estrellas con M=3 y N=3.

Gráfica 2

Ejemplos de una estrella con un m o n en el centro.



Proposición 1. De las implicaciones de estabilidad en una estrella con un agente tipo alto como centro es estable si $\delta - \delta^2 \leq c_1/w_1 \leq \delta$, $\delta - \delta^2 \leq c_2/w_2 \leq \delta + (R-2)\delta^2$ y $c_1/w_1 < c_2/w_2$ para cualquier valor de δ (ver prueba en el apéndice).

Las 3 desigualdades anteriores son las condiciones para verificar que los agentes no rompan vínculos y no tengan incentivos a formarlos. Las desigualdades $\delta - \delta^2 \leq c_1/w_1$ para los tipo alto y $\delta - \delta^2 \leq c_2/w_2$ para los de tipo bajo satisfacen la condición 1 de estabilidad mientras que $c_1/w_1 \leq \delta$ y $c_2/w_2 \leq \delta + (R-2)\delta^2$ para individuos de tipo alto y bajo respectivamente satisfacen la condición 2.

Proposición 2. De las condiciones de estabilidad se tiene que para todo $\delta - \delta^2 \leq c_1/w_1 < c_2/w_2 \leq \delta$ cualquier estrella con un individuo de tipo bajo en el centro es estable para cualquier δ (ver prueba en el apéndice).

De igual forma que las red anterior, $\delta - \delta^2 \leq c_1/w_1$ para individuos de tipo alto y $\delta - \delta^2 \leq c_2/w_2$ para los de tipo bajo vienen de la condición 1 de estabilidad donde no hay incentivos de formar vínculos directos con alguien mas que este a dos vínculos de distancia tanto para un m o un n. Y $c_1/w_1 \leq c_2/w_2 \leq \delta$ viene de la condición 2 de estabilidad para que un individuo tipo alto no quiera romper su vinculo con el centro y el centro que es de tipo bajo no rompa alguno de sus vínculos directos.

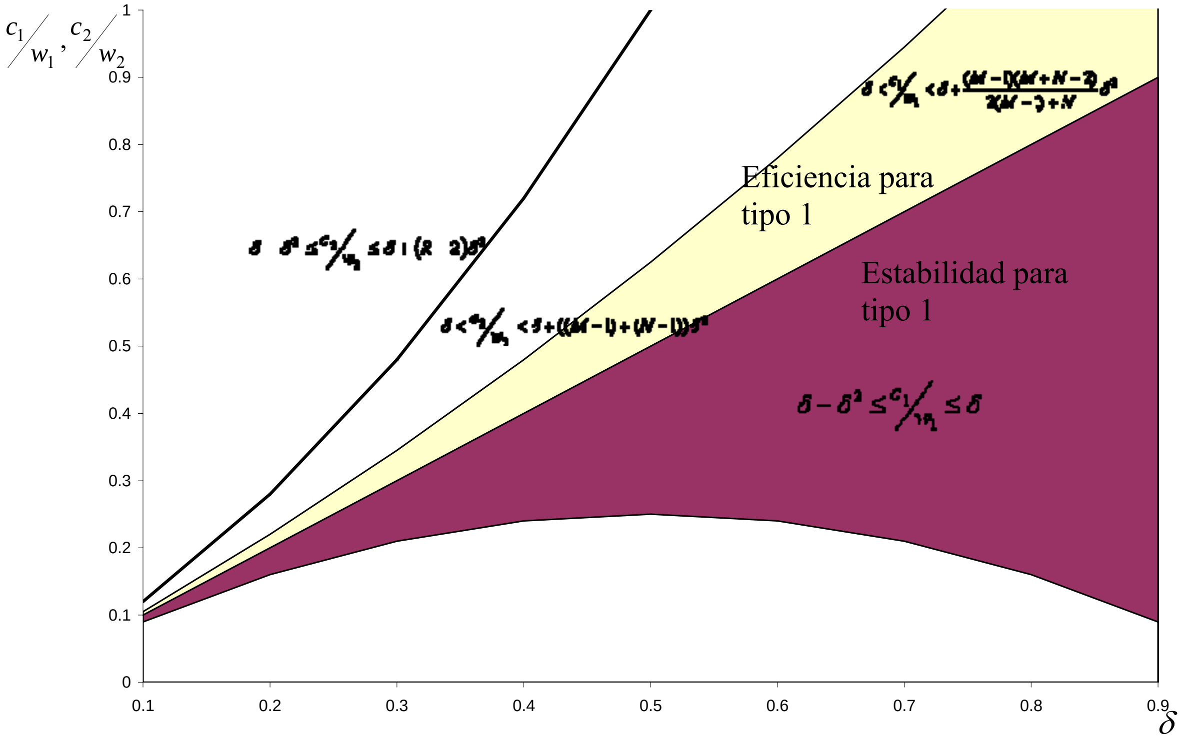
Proposición 3. La red en forma de estrella con un individuo M en el centro es fuertemente eficiente si $\delta < c_1/w_1 < \delta + \frac{(M-1)(M+N-2)}{2(M-1)+N}\delta^2$ y $\delta < c_2/w_2 < \delta + ((M-1)+(N-1))\delta^2$ (ver prueba en el apéndice).

El siguiente teorema nos habla de la compatibilidad de estabilidad y eficiencia de una red en forma de estrella bajo el modelo de agentes heterogéneos.

Teorema 1. Una red estable en forma de estrella con un individuo tipo alto o bajo en el centro no es eficiente.

Gráfica 4.

Condiciones para estabilidad y eficiencia de una red en forma de estrella con un tipo alto en el centro:



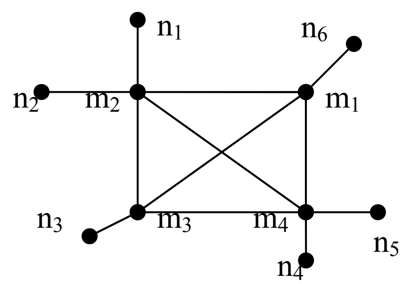
El área roja son los valores para los que c_1/w_1 es estable, pero solo el área amarilla representa los valores para que la red sea eficiente. Podemos ver que no hay valores para los que se crucen. Por lo tanto la red estable en forma de estrella con un tipo alto en el centro no es eficiente. Lo mismo podemos decir para las estrellas con un tipo bajo en el centro, ya que las condiciones son simétricas. La intuición de este resultado es que si c_1/w_1 es menor a δ no es eficiente la estrella ya que si el costo es bajo tiene mayor valor para la red que los tipo 1 formen mas vínculos.

IV. Red concéntrica de núcleo denso.

Una red concéntrica de núcleo denso es una red cuyas características son que todos los agentes de tipo alto (T_1) tienen vínculos entre ellos, mientras que los agentes de tipo bajo (T_2) solo tienen un vínculo y este es con un individuo de tipo alto, en la siguiente gráfica se presenta un ejemplo de este tipo de redes con M= 4 y N= 6. Podemos notar que la distancia mas lejana entre individuos en esta red es de 3 vínculos y se da entre dos agente de tipo bajo. Me centro en el análisis de este tipo de redes por la sencillez de los resultados de estabilidad y eficiencia que permiten la comparación.

Gráfica 1

Ejemplo de red concéntrica de núcleo denso.



Proposición 4. Para todo $\delta - \delta^2 \leq c_1/w_1 \leq \delta + (n^{2\to m^1} - 1)\delta^2 - (n^{2\to m^1})\delta^3$ y

$\delta - \delta^3 \leq c_2/w_2 \leq \delta + (m^{2\to n} + n^{2\to n})\delta^2 + (n^{3\to n})\delta^3$ y además que $c_1/w_1 < c_2/w_2$ cualquier red concéntrica de núcleo denso es estable para cualquier valor de δ (prueba en el apéndice).

Las 3 desigualdades nos dan las condiciones para que cualquier individuo m o n respectivamente mantengan los vínculos existentes o no tengan incentivos a formar un nuevo vinculo que les de una mayor utilidad. Las desigualdades $\delta - \delta^2 \leq c_1/w_1$ para los agentes de tipo alto y $\delta - \delta^3 \leq c_2/w_2$ para los de tipo bajo satisfacen la condición 1 de estabilidad mientras que $\delta + \left(n^{2\to m^1} - 1\right)\delta^2 - n^{2\to m^1}\delta^3 \geq c_1/w_1$ para lo de tipo alto y $c_2/w_2 \leq \delta + (m^{2\to n} + n^{2\to n})\delta^2 + (n^{3\to n})\delta^3$ para los de tipo bajo satisfacen la condición 2.

Donde $n^{2\to m^1}$ es el número de individuos n que están vinculados directamente con m^1 y este ultimo esta vinculado directamente con el individuo m, podemos notar que si $n^{2\to m^1} = 0$ se debe cumplir que $c_1/w_1 = \delta - \delta^2$ para que una red de núcleo denso sea estable. Una característica es que entre mayor sea $n^{2\to m^1}$ mayor será el rango de valores que podrá tomar c_1/w_1 cumpliéndose además $c_1/w_1 < c_2/w_2$. La segunda desigualdad nos dice que si aumentan los individuos con los que no esta vinculado directamente el individuo n aumenta el rango de valores para los que la red es estable.

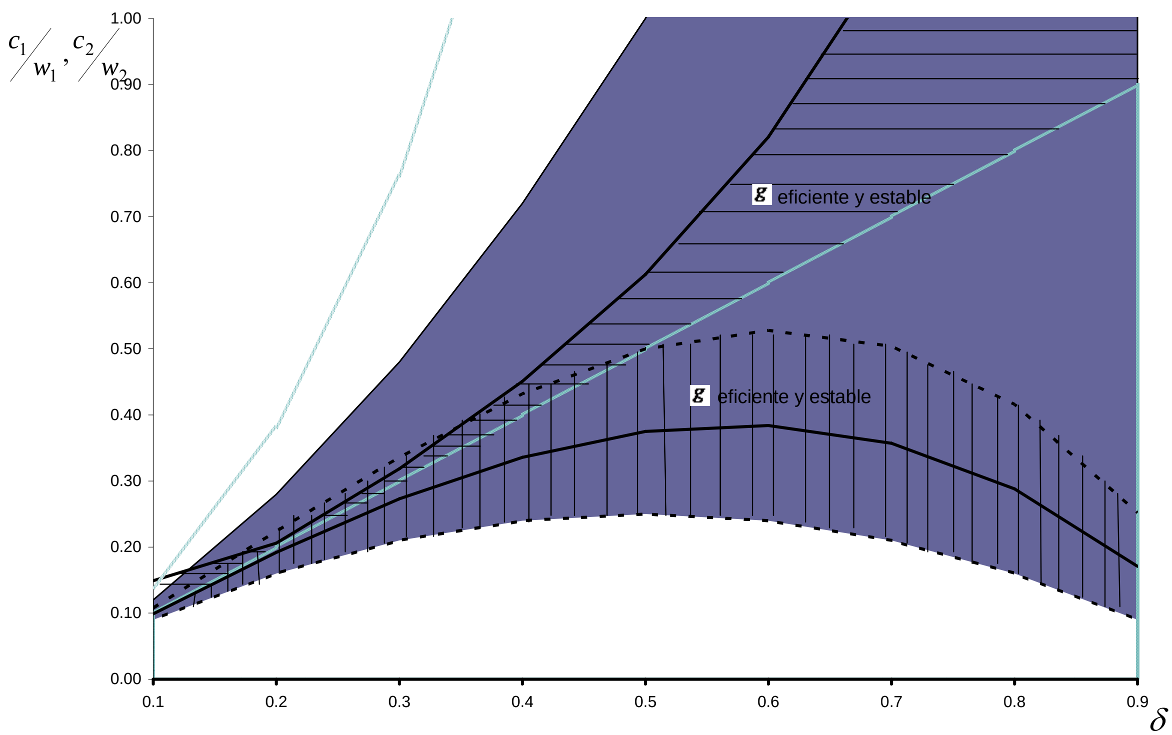
Proposición 5. La red concéntrica de núcleo denso es fuertemente eficiente si

$$\delta - \delta^2 < c_1/w_1 < \delta + \frac{\sum_{i=1}^{M} m_i (N - n^{1\to m_i})}{M(M-1)+N}\delta^2 \text{ y } \delta < c_2/w_2 < \delta + \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} m_i (N - n^{1\to m_i})\right) + 2n^{2\to n}}{N}\delta^2 + \frac{2n^{3\to n}}{N}\delta^3 .$$

Teorema 2. Existen redes concéntricas de núcleo denso estables que son eficientes, para ciertos rangos de c_1/w_1 y c_2/w_2.

Gráfica 3.

Condiciones para estabilidad y eficiencia de una red concéntrica de núcleo denso:



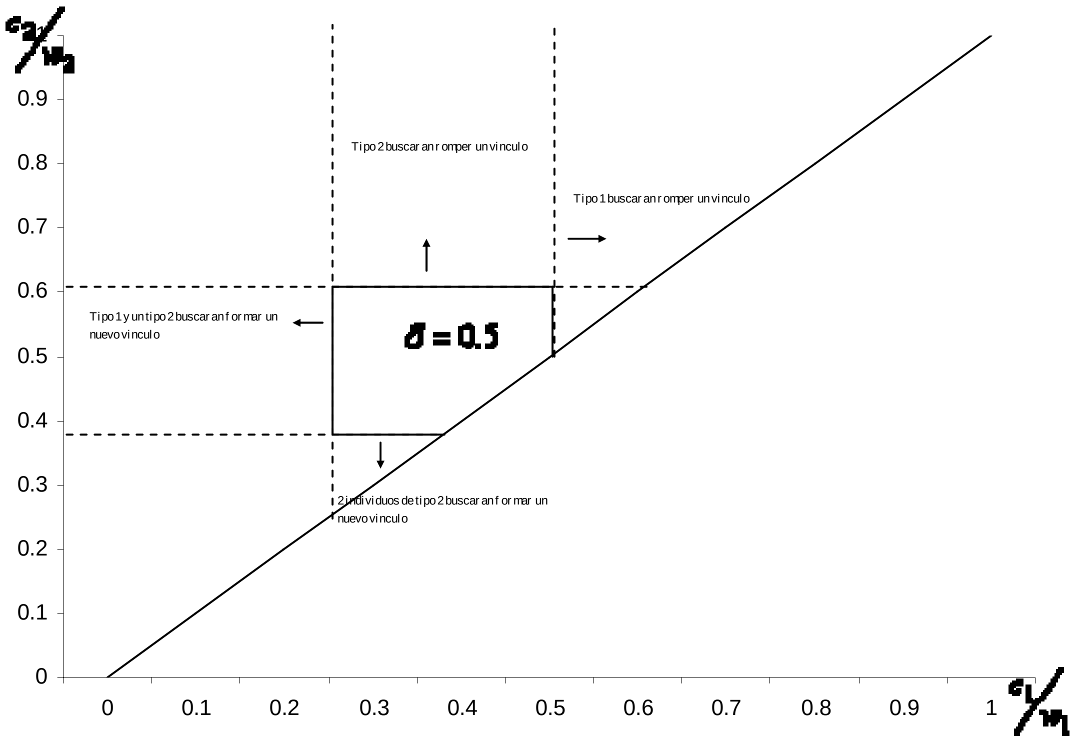
La grafica 3 muestra el comportamiento de las condiciones de eficiencia y estabilidad para una red concéntrica de núcleo denso que nos ilustra el teorema 3, para un $n^{2\to m^1}$ dado. Las líneas punteadas nos dan el área para valores de c_1/w_1 que corresponden a la condición $\delta-\delta^2 \leq c_1/w_1 \leq \delta+(n^{2\to m^1}-1)\delta^2-(n^{2\to m^1})\delta^3$ y el área entre las líneas negras son valores para c_2/w_2 que corresponden a $\delta-\delta^3 \leq c_2/w_2 \leq \delta+(m^{2\to n}+n^{2\to n})\delta^2+(n^{3\to n})\delta^3$ en los cuales la red concéntrica de núcleo denso es estable. Mientras el área azul corresponde a la condición $\delta-\delta^2 < c_1/w_1 < \delta+\frac{\sum_{i=1}^{M} m_i(N-n^{1\to m_i})}{M(M-1)+N}\delta^2$ y el área entre las líneas verdes están dadas por $\delta < c_2/w_2 < \delta+\frac{\left(\sum_{i=1}^{M} m_i(N-n^{1\to m_i})\right)+2n^{2\to n}}{N}\delta^2+\frac{2n^{3\to n}}{N}\delta^3$ para que la red concéntrica de núcleo denso sea eficiente. Así las líneas verticales son los valores correspondientes para los individuos de tipo 1 y las líneas horizontales los valores para los individuos de tipo 2 para que la red concéntrica de núcleo denso sea estable y eficiente.

V. Análisis de estática comparativa.

En la grafica 5 se puede observar que pasa con la red concéntrica de núcleo denso si los valores de costo-beneficio se encuentran fuera del rango de las condiciones de estabilidad para un δ dado. Si los costos respecto al beneficio son muy altos (a la derecha o arriba del área permitida) entonces los individuos encuentran que no es sostenible seguir teniendo el vínculo directo y lo romperán por lo que en esos casos la red no es estable. Mientras que si el valor para el individuo de tipo 1 esta a la izquierda del rango permitido entonces los individuos de tipo 1 y de tipo 2 formaran un vinculo directo. Mientras para los de tipo 2 si el costo es muy bajo buscaran formar vínculos directos entre ellos.

Gráfica 5.

Valores posibles de estabilidad para ${c_i}/{w_i}$ en una red concéntrica de núcleo denso para $\delta = 0.5$



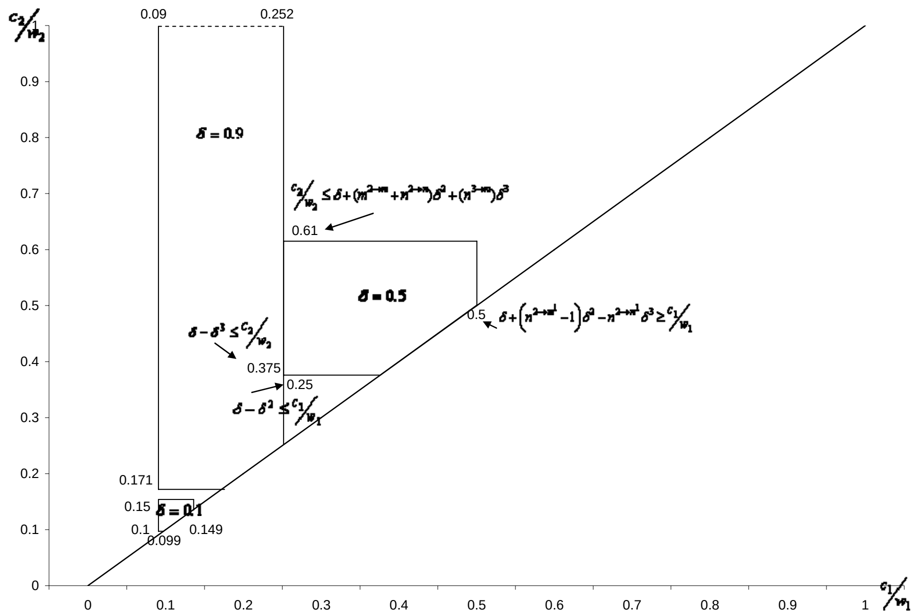
En la gráfica 6, la diagonal representa la condición ${c_1}/{w_1} = {c_2}/{w_2}$ [2], y la parte superior de la diagonal es ${c_1}/{w_1} < {c_2}/{w_2}$ por las características de los tipos en el modelo de agentes heterogéneos. Podemos ver que para δ pequeños el rango de proporción de costo-beneficios es muy pequeño y además estos deben ser muy pequeños tanto para los individuos de tipo 1 como para los de tipo 2 para mantener la estabilidad, acercándose al modelo simétrico. Esto se debe a que para un δ pequeño el valor de vincularse con alguien más es bajo por lo que las características del modelo indican que ambos tipos de individuos tengan costos pequeños de vincularse directamente y así sostener la formación de la red. Y se va acercando al modelo simétrico pues si el valor de los vínculos es pequeño los tipo 1 buscarían romper un vínculo con otro individuo 1, mientras los de tipo 2 también romperían

[2] La diagonal nos indica que estamos en el modelo simétrico.

su único vinculo y quedaría solo, con un δ pequeño ambos tipos llegarían a quedar sin vínculos lo que haría que no se distinguiera entre los tipos.

Gráfica 6.

Valores posibles de estabilidad para c_i / w_i en una red concéntrica de núcleo denso para $\delta = 0.1, 0.5, 0.9$



Cuando δ esta en valores intermedios, aumentan los posibles valores que pueden tomar los costos-beneficios de ambos tipos, ya que para el limite inferior del tipo 1 los incentivos a vincularse directamente con un tipo 2[3] con el que no tiene relación son más fuertes, por lo que requiere tener un costo alto respecto al beneficio para no hacerlo, y del lado del limite superior del tipo 1 vemos que seguirá teniendo mas peso la perdida de las relaciones con dos vínculos de distancia si los de tipo 1 rompieran sus vínculos por lo que los costos-beneficios no tienen que ser tan bajos para incentivar a los individuos de tipo 1 que sigan vinculados.

En cambio para δ muy grandes, vemos que hay más restricciones para los valores del tipo 1 ya que en primer lugar no hay incentivos a vincularse entre un individuo de tipo alto y uno

[3] Cabe recordar que en una red concéntrica de núcleo denso los individuos de tipo 1 tienen como máximo una relación de 2 vínculos de distancia con los individuos de tipo 2 con los que no mantienen vínculos.

de tipo bajo, dadas las características de la red concéntrica permitiendo costos menores, y en segundo lugar es que para δ grandes si se rompiera el vinculo entre los tipo alto tiene mayor peso las relaciones que estarían a tres vínculos de distancia que las relaciones que se pudieran perder y que están a dos vínculos de distancia, por lo que hay mas incentivo a romper el vinculo entre m's esto exigiría tener unos costos-beneficios menores.

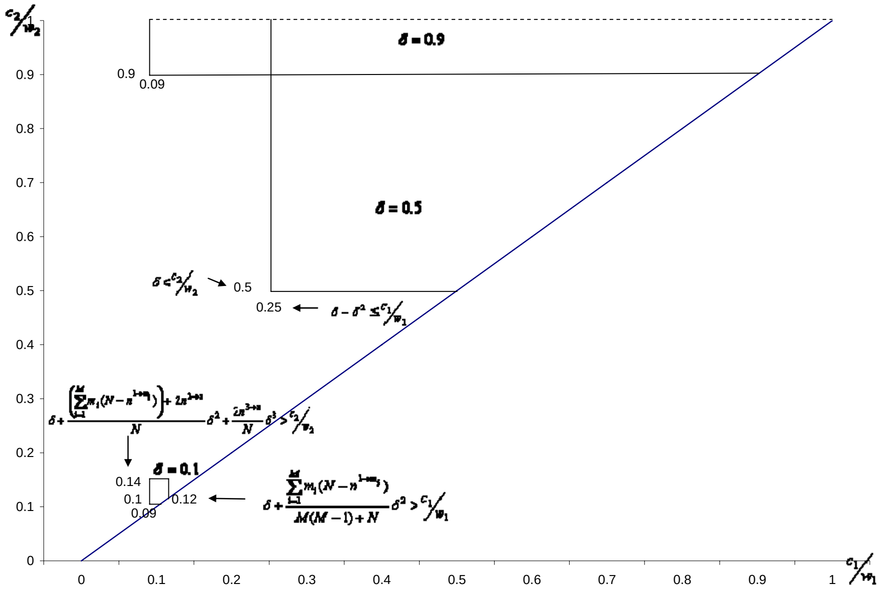
La forma de los valores de tipo 1, se debe básicamente a que los individuos de tipo 1 tienen como máximo dos vínculos de distancia con individuos de tipo 2 con los que no tienen vínculos, y para valores altos y pequeños de δ el valor de los vínculos indirectos será muy cercano al valor de los vínculos directos, por lo que no se requiere de c_1 / w_1 tan altos para evitar que el tipo 1 y tipo 2 se vinculen directamente ya que el valor de los vínculos indirectos (de 2 vínculos de distancia) es lo suficientemente alto como para seguirlos sosteniendo.

Mientras que para los valores de tipo 2, lo que vemos es que a mayor δ mayor rango de costos-beneficios puede tomar este individuo, ya que las desigualdades son crecientes respecto a δ, además si rompieran sus vínculos estos individuos quedarían fuera de la red. Es decir los tipo 2 tienen menos incentivos a formar nuevos vínculos o romper sus vínculos en la red concéntrica de núcleo denso.

En la gráfica 7 vemos que para δ's pequeños los valores de eficiencia para los de tipo 1 y tipo 2 son muy pequeños, acercándose al modelo simétrico ya que un costo mayor haría que ningún vinculo fuera eficiente por el valor tan pequeño de estos, y el rango de valores va creciendo para δ mayores, ya que para el individuo 1 los vínculos tienen un valor mayor y será eficiente mantener la red aun con costos altos. Para el tipo 2 mientras mas valor tengan los vínculos el c_2 / w_2 debe ser grande para que el grafo completo no sea eficiente.

Gráfica 7.

Valores posibles de eficiencia para c_i/w_i en una red concéntrica de núcleo denso para $\delta = 0.1, 0.5, 0.9$



La gráfica 8 representa los valores para los tipos 1 y 2 en los cuales los valores de costo-beneficio se empalman para que la red concéntrica de núcleo denso sea estable y eficiente, podemos ver que a partir de que δ toma el valor de 0.5 no existirá la restricción $c_1/w_1 < c_2/w_2$, eso quiere decir que para δ grandes el modelo de agentes heterogéneos cobra mayor importancia.

Proposición 6. Para valores pequeños de δ existe estabilidad y eficiencia bajo el modelo simétrico en una red concéntrica de núcleo denso y mientras δ va creciendo el individuo 2 tiene c_2/w_2 mayores por lo que los individuos se van diferenciando más en la compatibilidad entre eficiencia y estabilidad, y el modelo simétrico ya no es eficiente y estable.

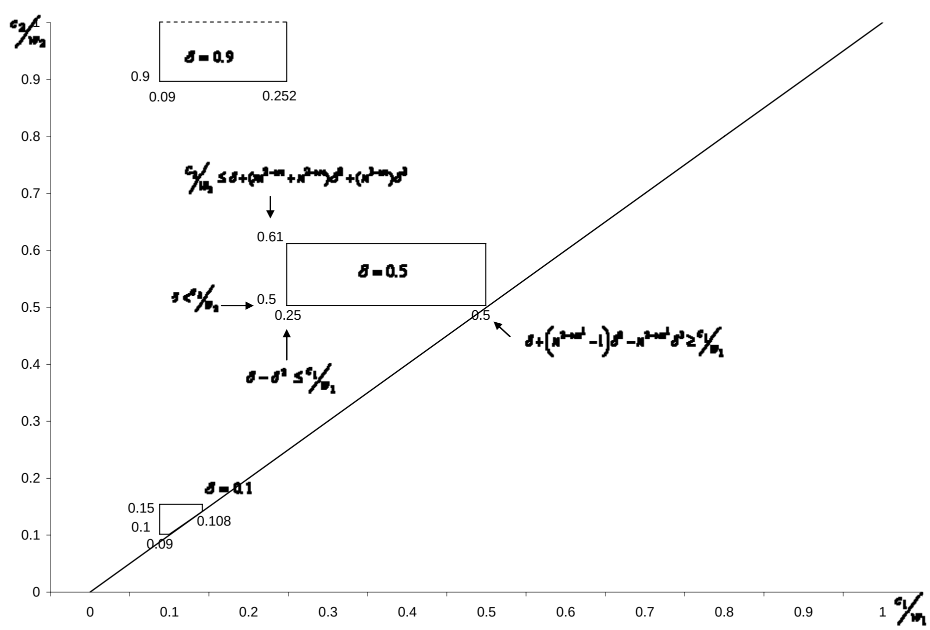
Este resultado se deriva de la estabilidad en primer lugar ya que, si δ es muy grande o muy pequeño se requiere de c_1/w_1 pequeños ya que el valor de los vínculos indirectos es muy cercano al valor de los vínculos directos en la red concéntrica de núcleo denso por lo que no es necesario tener unos costos muy altos para evitar que los agentes de tipo alto busquen vincularse con todos los agentes de tipo 2 con lo que no tengan vínculos. Además con esos valores de δ y con c_1/w_1 bajos los tipos altos no romperán los vínculos entre ellos ya que es de mayor valor las relaciones con dos vínculos de distancia que aquellos que se formen con tres vínculos de distancia con los de tipo 2. Y también se sigue de la eficiencia pues ya que se requiere que el c_2/w_2 para los individuos de tipo 2 sea mayor al valor de un vinculo directo δ para que no sea eficiente los vínculos entre los individuos de tipo 2.

En el ejemplo de búsqueda de empleo tenemos que si la información es publica o privada (cercano a 1 y 0) los costos para los alumnos exitosos deben ser pequeños y para los alumnos no exitosos los costos deben ser pequeños cuando la información es publica para mantener la red, y los costos de los alumnos no exitosos deben ser mayores cuando la información es privada, pues si el costo es bajo y al ser la información privada los alumnos exitosos podrían conectarse con varios no exitosos y no solo con uno, esto para que haya estabilidad y eficiencia en la red concéntrica de núcleo denso.

Gráfica 8.

Valores posibles de eficiencia y estabilidad para c_i/w_i en una red concéntrica de núcleo denso para

$\delta = 0.1, 0.5, 0.9$



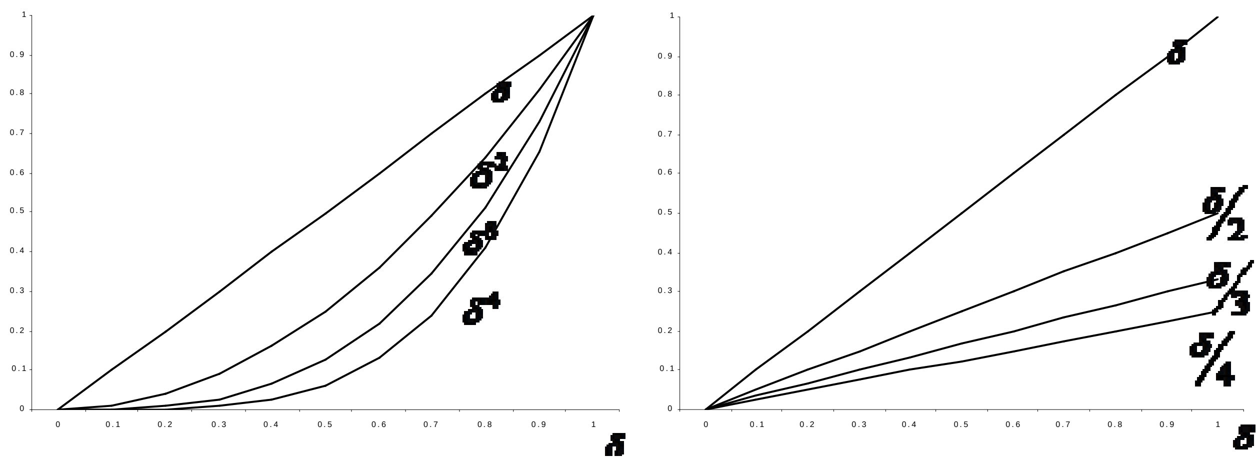
VI. Conclusiones

La forma en que se descuentan los vínculos indirectos explica el hecho de que para δ´s pequeños exista estabilidad y eficiencia para agentes homogéneos (cuando estamos sobre la línea de 45º en la gráfica 8) y heterogéneos, y para δ's grandes solo hay estabilidad y eficiencia para agentes heterogéneos (ver grafica 8). Esto se debe a que existe un intercambio, en las condiciones de estabilidad para el agente 1, entre los vínculos directos que gano y los vínculos indirectos que pierdo al momento de formar un nuevo vinculo bilateralmente, y entre los vínculos directos que pierdo y los vínculos indirectos que gano al momento de romper el vinculo unilateralmente, ya que cuando δ es grande o pequeño los vínculos directos e indirectos se acercan como se muestra en la gráfica 9, lo que nos dice que en ambos casos los vínculos indirectos tienen un gran valor casi cercano a un vinculo directo entonces el agente requiere de costos pequeños para que prefiera los vínculos directos.

Lo que me interesa explorar es una nueva manera de descontar el valor de los vínculos indirectos, que se aleje de la manera en que lo concibe Jackson Y Wolinsky (1996), y analizar el comportamiento de la compatibilidad de eficiencia y estabilidad en las redes con agentes heterogéneos. Un ejemplo de cómo se podría descontar estos vínculos sería el dividir δ entre el número de vínculos en lugar de elevarlos a una potencia (ver gráfica 9). Lo más deseable es que cuando el valor de los vínculos (δ) es importante el valor de las relaciones directas se fuera alejando del valor de los vínculos indirectos en el momento de dicho intercambio, ya que cuando δ tiende a 1 (conexiones con mayor valor) las relaciones directas sería mas importantes a los vínculos indirectos y las relaciones con dos vínculos de distancia serían mas importantes que las relaciones con más vínculos de distancia y así sucesivamente, y posiblemente el agente de productividad alta no requiera de costos bajos para mantener el vinculo directo.

Grafica 9.

Comportamiento del factor de descuento cuando se descuenta de manera exponencial o de manera lineal.



También este análisis es útil para el análisis de la organización social o económica ya establecidas, que pueden ser estables debido a los incentivos individuales de los agentes que forman la red, pero que puede ser que no sean eficientes, es decir, no hay compatibilidad de incentivos entre individuos y el conjunto social. Para llegar a una red estable que sea eficiente tendríamos que crear ciertas políticas que modifiquen los costos o los beneficios de los individuos por medio de trasferencias como impuestos o subsidios, para crear incentivos de modificar la estructura de la red, como el análisis de Bloch y Jackson (2004) en su articulo de formación de redes con transferencia entre jugadores pero que no es motivación de este trabajo.

VII. Bibliografía

Bala V. y S. Goyal, (2000); “A noncooperative model of network formation”; Econometrica; Vol. 68; No. 5; 1181-1229.

Bloch F. y M.O. Jackson, (2007);“The formation of networks with transfers among players”; Journal of Economic Theory; 133; 83-110.

Dutta B. y S. Mutuswami, (1997); “Stable Networks”; Journal of Economic Theory, 76, 322-344.

Dutta B. y M.O. Jackson,(2001); “On the formation of Networks and Groups”; Models of the strategic Formation of Networks and Groups editado por Bhaskar Dutta y Matthew O. Jackson.

Jackson M.O. (2001), “The Stability and Efficiency of economic and social Networks”, forthcoming: Advances of economic Design, editado por Murat Sertel, Springer- Verlag.

Jackson M.O. (2004), “Network Formation” in The New Palgrave Dictionary of Economics and the Law, MacMillan Press.

Jackson M.O. y A. Wolinsky, (1996), “A Strategic Model of Social and Economic Networks”, Journal of Economic Theory, 71, p. 44-74.

Johnson C. y R.P. Gilles, (2000); “Spatial Social Networks”, Review Of Economic Design, 5, 273-300.

Myerson, R.,(1977); “Graphs and Cooperation in Games”; Math. Operations Research, 2, 225-229.

Watts, A. (2001) ``A Dynamic Model of Network Formation,” Games and Economic Behavior, 34, 331-341.

VIII. Apéndice

Prueba proposición 1. $\delta - \delta^2 \leq c_1/w_1$ mide el beneficio que tendría un agente tipo alto de vincularse directamente con otro agente ya sea de tipo alto o bajo que esta a dos vínculos de distancia de el y debe ser menor a la proporción del costo sobre el beneficio para m para que no existan incentivos a tener dicho vinculo. Y $c_1/w_1 \leq \delta$ mide la perdida de beneficio para el individuo m que esta en el centro de la estrella por perder alguno de sus vínculos directos.

Para los individuos de tipo bajo el beneficio que obtendrían por vincularse con otro individuo de tipo bajo o uno de tipo alto que esté a dos vínculos de distancia es medido por $\delta - \delta^2$ que debe ser menor a c_2/w_2 . Y si alguno de estos individuos de tipo bajo rompe su vinculo con el centro perderían el valor por estar vinculados directamente con este mas todas sus relaciones directas con dos vínculos de distancia medida por $c_2/w_2 \le \delta + (R-2)\delta^2$.

Y es para todo δ ya que ya que el limite inferior de la condición para los de tipo alto es estrictamente menor al limite superior de la desigualdad de los de tipo bajo para cualquier valor de δ, lo que nos da un margen para los valores de $c_1/w_1 < c_2/w_2$.

Prueba proporción 2. De igual forma para la estrella con un individuo de tipo bajo en el centro. Se llega al siguiente resultado: una estrella con un agente tipo bajo como centro es estable si cumple $\delta - \delta^2 \le c_1/w_1 \le \delta + (R-2)\delta^2$ y $\delta - \delta^2 \le c_2/w_2 \le \delta$, sabemos que c_1/w_1 no puede ser mayor o igual que $c_2/w_2 \le \delta$.

Prueba de proposición 3. Consideremos g' es un componente g que contiene r individuos. En una red en forma de estrella con un m como centro el número de vínculos directos entre los tipo alto (individuos m) es (m-1)+n que es la máxima cantidad de vínculos que puede haber entre estos individuos. En la red g' hay f vínculos directos entre los tipo 1, h vínculos directos entre los tipo 1 y 2 y k vínculos directos entre los tipo 2. Sea $f + h + k \ge (m-1) + n$ el número de vínculos directos en este componente. El valor de estos vínculos directos $f(2w_1\delta - 2c_1) + h(w_1\delta + w_2\delta - c_1 - c_2) + k(2w_2\delta - 2c_2)$. Como máximo se tiene el siguiente número de vínculos indirectos con dos vínculos de distancia $\frac{(m-1)m}{2} - f + \frac{(n+1)n}{2} - k + (m-1)n$. El valor de estas conexiones indirectas con dos vínculos de distancia es $\left(\frac{(m-1)m}{2} - f\right)(2w_1\delta^2) + ((m-1)n)(w_1\delta^2 + w_2\delta^2) + \left(\frac{(n+1)n}{2} - k\right)(2w_2\delta^2)$.

El valor completo del componente es como máximo:

$$f(2w_1\delta - 2c_1) + h(w_1\delta + w_2\delta - c_1 - c_2) + k(2w_2\delta - 2c_2) + \left(\frac{(m-1)m}{2} - f\right)(2w_1\delta^2) + ((m-1)n)(w_1\delta^2 + w_2\delta^2) + \left(\frac{(n+1)n}{2} - k\right)(2w_2\delta^2) \qquad (1)$$

Si este componente es una estrella entonces su valor es:

$$(m-1)(2w_1\delta-2c_1)+n(w_1\delta+w_2\delta-c_1-c_2)+\left(\frac{(m-1)m}{2}-(m-1)\right)(2w_1\delta^2)+$$
$$((m-1)n)(w_1\delta^2+w_2\delta^2)+\left(\frac{(n+1)n}{2}-n\right)(2w_2\delta^2) \qquad (2)$$

(1)-(2)= $(f-(m-1))(2w_1\delta-2c_1-2w_1\delta^2)+(h-n)(w_1\delta-c_1)+(h-n)(w_2\delta-c_2)+$ $k(2w_2\delta-2c_2-2w_2\delta^2)+n(2w_2\delta^2)$ el cual es a lo máximo 0 puesto que $f\geq(m-1)$, $h\geq n$ $k\geq 0$ y $n\geq 0$ además si $\delta<c_1/w_1$ y $\delta<c_2/w_2$, y es menor que 0 si $h>n$, $k>0$ y/o $n>0$. El valor del componente g' puede igualar el valor de la red en forma de estrella solo cuando $h=n$, $f=(m-1)$ y $k=0$.

Se ha mostrado que si $\delta<c_1/w_1$ y $\delta<c_2/w_2$, entonces cualquier componente de un grafo fuertemente eficiente debe ser una red en forma de estrella. Cualquier componente de un grafo fuertemente eficiente debe tener valor no negativo. Usando (2) se muestra que una red de $m+p$ y/o $n+q$ individuos es más grande en valor. Si existe una red concéntrica de núcleo denso con m y n individuos, entonces una red concéntrica de núcleo denso con $m+1$ y/o $n+1$ individuos tiene un valor más alto. Por último de (2) tenemos:

$$(m-1)(2w_1\delta-2c_1)+n(w_1\delta+w_2\delta-c_1-c_2)+\left(\frac{(m-1)m}{2}-(m-1)\right)(2w_1\delta^2)+$$
$$((m-1)n)(w_1\delta^2+w_2\delta^2)+\left(\frac{(n+1)n}{2}-n\right)(2w_2\delta^2)>0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow (2(M-1)+N)(w_1\delta-c_1)+((M-1)(M-2)+(M-1)N)(w_1\delta^2)>0 \qquad (3)$$

y $N(w_2\delta-c_2)+((M-1)N+(N-1)N)(w_2\delta^2)>0$ (4)

Despejando c_1/w_1 de (3) y c_2/w_2 de (4) tenemos: $\delta+\frac{(M-1)(M+N-2)}{2(M-1)+N}\delta^2>c_1/w_1$ y $\delta+((M-1)+(N-1))\delta^2>c_2/w_2$.

Prueba proposición 4. Para $\delta - \delta^2 \le c_1/w_1$ esta parte de la desigualdad mide el beneficio que tendría un individuo m (tipo alto) de vincularse directamente con un n (tipo bajo) que esta a dos vínculos de distancia de el y debe ser menor a la proporción costo beneficio de m. Y $\delta + \left(n^{2\to m^1} - 1\right)\delta^2 - n^{2\to m^1}\delta^3 \ge c_1/w_1$ mide como, al romper algún vinculo directo entre los individuos m, la relación entre el individuo m y n con dos vínculos de distancia se convierte en una relación con tres vínculos de distancia y esta medida debe ser mayor o igual a c_1/w_1 para mantener el vinculo entre dos individuos de tipo alto.

Mientras $\delta - \delta^3 \le c_2/w_2$ mide la ganancia que tendría algún individuo n de vincularse con otro individuo n que esta a tres vínculos de distancia. Y $c_2/w_2 \le \delta + (m^{2\to n} + n^{2\to n})\delta^2 + (n^{3\to n})\delta^3$ representa el beneficio que perdería el individuo de tipo bajo(n) si rompiera el vínculo con m, pues si esto sucediera el individuo n quedaría sin relaciones en la red.

Una red concéntrica de núcleo denso será estable para cualquier valor de δ, ya que $\delta - \delta^2 < \delta + (m^{2\to n} + n^{2\to n})\delta^2 + (n^{3\to n})\delta^3$ para cualquier valor de δ, es decir el limite inferior de la primera desigualdad (tipo alto) siempre será menor que el limite superior de la segunda desigualdad (tipo bajo), lo que da un margen para que se cumpla $c_1/w_1 < c_2/w_2$.

Prueba de la proposición 5. Considere g' es un componente g que contiene r individuos. En una red concéntrica de núcleo denso el número de vínculos directos entre los tipo alto (individuos m) es $\frac{m(m-1)}{2}$ que es la máxima cantidad de vínculos que puede haber entre estos individuos, mas n vínculos entre individuos de tipo 1 y 2 ya que los de tipo 2 solo pueden tener un vinculo. En la red g' hay f vínculos directos entre los tipo 1, h vínculos directos entre los tipo 1 y 2 y k vínculos directos entre los tipo 2. Sea $f + h + k \ge \frac{m(m-1)}{2} + n$ el número de vínculos directos en este componente, como

$f = \frac{m(m-1)}{2}$ y $h \geq n$ entonces $h + k \geq n$. El valor de estos vínculos directos $k(2w_1\delta - 2c_1) + h(w_1\delta + w_2\delta - c_1 - c_2) + f(2w_2\delta - 2c_2)$. Como máximo se tiene el siguiente número de vínculos indirectos con dos vínculos de distancia $\sum_{i=1}^{m} m_i \left(n - n^{1 \to m_i}\right) - (h - n) + n^{2 \to n}$, donde $n^{1 \to m_i}$ es el número de individuos de tipo 2 que están vinculados directamente con el individuo m_i y $n^{2 \to n}$ es el número de individuos de tipo 2 que están vinculados con otro de tipo 2 con dos vínculos de distancia. El valor de estas conexiones indirectas con dos vínculos de distancia es $\left(\sum_{i=1}^{m} m_i \left(n - n^{1 \to m_i}\right) - (h - n)\right)\left(w_1\delta^2 + w_2\delta^2\right) + (n^{2 \to n})(2w_2\delta^2)$. Como máximo se tiene el siguiente número de vínculos indirectos con tres vínculos de distancia $n^{3 \to n}$.El valor de estos vínculos indirectos es $\left(n^{3 \to n}\right) 2w_2\delta^3$.

El valor completo del componente es como máximo:

$$k(2w_1\delta - 2c_1) + h(w_1\delta + w_2\delta - c_1 - c_2) + f(2w_2\delta - 2c_2) + \left(\sum_{i=1}^{m} m_i \left(n - n^{1 \to m_i}\right) - (h - n)\right)\left(w_1\delta^2 + w_2\delta^2\right)$$
$$+ (n^{2 \to n})(2w_2\delta^2) + \left(n^{3 \to n}\right) 2w_2\delta^3 \qquad (1)$$

Si este componente es una red concéntrica de núcleo denso su valor sería:

$$\frac{m(m-1)}{2}\left(2w_1\delta - 2c_1\right) + n(w_1\delta + w_2\delta - c_1 - c_2) + \left(\sum_{i=1}^{m} m_i \left(n - n^{1 \to m_i}\right)\right)\left(w_1\delta^2 + w_2\delta^2\right) +$$
$$(n^{2 \to n})(2w_2\delta^2) + \left(n^{3 \to n}\right) 2w_2\delta^3 \qquad (2)$$

(1)-(2) $= \left(2k - m(m-1)\right)\left(w_1\delta - c_1\right) + \left(h - n\right)\left(w_1\delta - c_1 - w_1\delta^2\right) + \left(h - n\right)\left(w_2\delta - c_2 - w_2\delta^2\right)$ $+ 2f(w_2\delta - c_2)$ el cual es a lo máximo 0 puesto que $2k = m(m-1)$, $h \geq n$ y $f \geq 0$ además si $\delta - \delta^2 < c_1/w_1$ y $\delta < c_2/w_2$, y es menor que 0 si $h > n$ y/o $f > 0$. El valor del componente g' puede igualar el valor de la red concéntrica de núcleo denso solo cuando $h = n$ y $f = 0$.

Se ha mostrado que si $\delta - \delta^2 < c_1/w_1$ y $\delta < c_2/w_2$, entonces cualquier componente de un grafo fuertemente eficiente debe ser una red concéntrica de núcleo denso. Cualquier componente de un grafo fuertemente eficiente debe tener valor no negativo. Usando (2) se muestra que una red de $m+p$ y/o $n+q$ individuos es más grande en valor. Si existe una red concéntrica de núcleo denso con m y n individuos, entonces una red concéntrica de núcleo denso con $m+1$ y/o $n+1$ individuos tiene un valor más alto. Por último de (2) tenemos:

$$\frac{m(m-1)}{2}\left(2w_1\delta - 2c_1\right) + n(w_1\delta + w_2\delta - c_1 - c_2) + \left(\sum_{i=1}^{m} m_i\left(n - n^{1\to m_i}\right)\right)\left(w_1\delta^2 + w_2\delta^2\right) +$$

$$(n^{2\to n})(2w_2\delta^2) + \left(n^{3\to n}\right)2w_2\delta^3 > 0$$

$$\Rightarrow (M(M-1)+N)(w_1\delta - c_1) + \left(\sum_{i=1}^{M} m_i(N - n^{1\to m_i})\right)(w_1\delta^2) > 0 \qquad (3)$$

$$\text{y} \quad N(w_2\delta - c_2) + \left(\sum_{i=1}^{M} m_i(N - n^{1\to m_i})\right)\left(w_2\delta^2\right) + n^{2\to n}\left(2w_2\delta^2\right) + n^{3\to n}\left(2w_2\delta^3\right) > 0 \qquad (4)$$

Despejando c_1/w_1 de (3) y c_2/w_2 de (4) tenemos: $\delta + \frac{\sum_{i=1}^{M} m_i(N - n^{1\to m_i})}{M(M-1)+N}\delta^2 > c_1/w_1$ y

$$\delta + \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} m_i(N - n^{1\to m_i})\right) + 2n^{2\to n}}{N}\delta^2 + \frac{2n^{3\to n}}{N}\delta^3 > c_2/w_2 .$$