



EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

**INATENCIÓN DE LOS INVERSIONISTAS
EN LOS MERCADOS FINANCIEROS**

ÁNGEL ANTONIO RAMÍREZ FRANCO

PROMOCIÓN 2009-2011

ASESOR:

DR. JOSÉ MIGUEL TORRES GONZÁLEZ

JULIO 2011

Resumen

Está documentado que la información privada del inversionista, sus expectativas y planes de inversión se actualizan sólo de manera esporádica. Además, los modelos basados en la inatención de los agentes han tenido un gran éxito en la descripción de algunos datos macroeconómicos. Duffie (2010) plantea un marco nuevo que permite estudiar la dinámica de los precios de activos en entornos en los que sólo un subconjunto de agentes está participando activamente en cualquier momento del tiempo. En este trabajo avanzamos la propuesta de Duffie en tres sentidos. Primero, se aborda explícitamente el problema de por qué es deseable, aunque casi imposible, llegar a una solución analítica de este modelo. Segunda, desarrollamos algoritmos computacionales propios para resolver el modelo de manera numérica. Por último, se hace un análisis más exhaustivo de los diferentes parámetros del modelo que, entre otras cosas, nos permiten demostrar que el hallazgo central original de Duffie no es robusto a cualquier cambio en los parámetros, lo que sugiere que se debe tener cuidado a la hora de discutir las implicaciones de política de este modelo.

Índice

1. Introducción.....	1
2. Modelo de Inatención.....	7
2.1 Entorno.....	9
2.2 Equilibrio.....	12
3. Solución al Modelo de Inatención.....	17
3.1 Dificultades para resolver analíticamente el modelo.....	17
3.2 Solución al modelo a través del método de Newton para sistemas no lineales...	19
3.3 Aplicando el método de Newton.....	22
4. Conclusión.....	33
Referencias.....	35
Apéndices.....	39
Apéndice 1. Caracterización del equilibrio.....	39
Apéndice 2. Dificultad para caracterizar analíticamente la dinámica del precio.....	44
Apéndice 3. Pseudocódigo (método de Newton para sistemas no lineales).....	44

1. Introducción

Existe una pregunta básica: ¿Qué determina un precio? Podríamos decir que simplemente es la intersección de la curva de oferta y la de demanda. Notamos de inmediato que, desde este enfoque quedan fuera algunos aspectos relevantes como la dimensión temporal, características institucionales bajo las que operan compradores y vendedores, así como las propias características de los inversionistas. Con respecto a ello, O'Hara (1995) remarca el hecho de que si bien éste debe ser el caso en el equilibrio, la pregunta realmente interesante es la de cómo es que este equilibrio se alcanza, qué o quiénes coordinan los deseos de manera que emerge un precio y, qué o quién influye en dicha coordinación.

Así, hoy por hoy el verdadero desafío consiste en explicar por qué los precios exhiben propiedades de series de tiempo particulares. En caracterizar cómo es que diferentes protocolos de comercio afectan la formación o comportamiento de los precios y, es en este desafío en el que pretendemos participar. En particular, el por qué los precios de los activos financieros no se ajustan en cada instante para reflejar el flujo de información nueva en el medio es una pregunta que en los últimos años ha adquirido gran relevancia. Se sabe, que en agosto de 2007 comenzó la que podría considerarse la peor crisis financiera global de las últimas décadas. La pregunta es que si los mercados son más bien eficientes, porqué los precios de los activos tardaron tanto en reflejar lo que ya para muchos era evidente¹.

Aún más, ahora que la normalidad parece haber regresado a los mercados financieros y varios precios están en niveles pre-crisis, queda muy claro que los precios suelen reflejar algo más que “fundamentales”. Shiller (1981) menciona que a menudo se ha discutido en debates populares el hecho de que los índices de precios de las acciones parecen demasiado "volátiles", es decir, que los movimientos en los índices de precios de las acciones no se puede atribuir de manera realista a nueva información objetiva, ya

¹Ver por ejemplo Obstfeld y Rogoff (2009), quienes claramente exponen como lo que pareció ser un periodo benigno desde el punto de vista económico a lo largo del mundo, a mediados de los 2000s, en verdad fue un equilibrio basado en tendencias cada vez más difíciles de sostener, que finalmente convirtieron a EUA en el epicentro de una crisis financiera global.

que los movimientos en los índices de precios parecen ser "demasiado grandes" en relación con los acontecimientos reales.

Por tanto, no es de extrañar la actual popularidad de la investigación de microestructura de mercados, que al tener en cuenta la estructura particular prevista por los "mecanismos de mercado"² (O'Hara, 1995) al modelar el comportamiento de los precios, se suma al desafío. En particular, la microestructura de mercados financieros examina las formas en que diferentes estructuras de mercado, bajo los cuales se desarrollan procesos de intercambio, afectan la formación de precios de los activos. Tratando cuestiones como costos y tiempo de transacción, información y divulgación de la misma, y el propio comportamiento de los inversionistas, busca crear teorías un tanto más precisas sobre la formación de los precios.

Esta rama ya vislumbra la existencia de una interacción entre los mecanismos de mercado y el comportamiento del inversionista. Podríamos pensar que si los mecanismos de mercados afectan al precio, éstos también deben afectar a su vez las decisiones y/o comportamiento de los inversionistas, tal como sugiere O'Hara. A su vez, es muy posible que el comportamiento del inversionista impacte de nuevo a los precios. De manera que, esto sugiere una serie de interconexiones complejas que deben de ser exploradas si es que en verdad se pretende iluminar el comportamiento de los precios, lo que "*... tienen una aplicación inmediata en la regulación de los mercados, en el diseño y formulación de nuevos mecanismos de mercado...*" (O'Hara, 1995).

Siguiendo estas pautas de investigación Duffie (2010) desarrolla un marco conceptual que permite estudiar la dinámica de los precios de activos en entornos en los que sólo un subconjunto de agentes está participando activamente en cualquier punto del tiempo, dado los costos de mantener perfecta atención a oportunidades de negocio. En realidad, y en contraposición a los modelos neoclásicos, es perfectamente creíble que la mayoría de los inversionistas una gran parte del tiempo preste atención a otras tareas, sólo basta darse cuenta de que la cantidad de información disponible es enorme y que la mayor parte viene con un costo de adquisición e interpretación, ya sea en términos monetarios o de tiempo.

² O'Hara (1995) se refiere a cualquier mecanismo de mercado como un tipo de juego de intercambio en el que los jugadores se encuentran (tal vez no físicamente) en algún lugar y actúan de acuerdo con algunas reglas. Así, los elementos centrales son tres: los jugadores, la dimensión donde ocurre el comercio y finalmente las reglas que rigen el intercambio.

Por ejemplo, Bacchetta y Wincoop (2009) muestran que cuando los agentes tienen la posibilidad de elegir entre gestionar activamente su cartera a un costo y, tomar decisiones poco frecuentes, la gran mayoría de los inversionistas no encuentran de su interés actualizar y controlar activamente sus posiciones debido a que la mejora potencial del bienestar resultante no suele superar los costos medidos como honorarios por gestión de activos. Así mismo, Reis (2005, 2006) muestra que si existe un costo por adquirir y procesar información para la formación de expectativas y toma de decisiones, entonces el agente racional de manera óptima se inclina por actualizar su información, expectativas y planes tan sólo de manera esporádica.

El marco que proporciona Duffie (2010) es relativamente nuevo, hasta ahora poco estudiado, y por tanto, en el que pretendemos profundizar. Podríamos considerar la propuesta de Duffie (2010) como una innovación por dos principales razones: 1) Por un lado los modelos de valuación de activos que se usan con mayor frecuencia asumen que los individuos toman decisiones de consumo de forma continua³, cuando en realidad, la observación casual sugiere que no es así⁴; 2) Por otro lado, tal como Bacchetta y Wincoop (2009) afirman, trabajos que examinan las decisiones de cartera poco frecuentes, por lo regular, no examinan las consecuencias sobre la formación de los precios de activos.

La “inatención” de agentes⁵, refiriéndonos a la actualización esporádica de la información privada, expectativas y planes futuros del agente, que juega un papel

³ Fama y French (1992) encuentran un pobre desempeño, en relación a los datos de EUA, del modelo de Sharpe (1964), Lintner (1965), and Black (1972). Lynch (1996) sugiere que el pobre desempeño puede estar relacionado con el supuesto base de que los individuos continuamente actualizan sus decisiones de consumo y composición de cartera (para mayor evidencia empírica del pobre desempeño de estos modelos véase Hansen y Singleton (1982, 1983), y Breeden, Gibbons, y Litzenberger (1989)).

⁴ Lusardi (2003), Amreiks y Zeldes (2004), y Calvet, Campbell y Sodini (2009) encuentran evidencia clara y precisa de que los inversionistas realizan cambios en cartera en realidad con muy poca frecuencia. Por otro lado, Brunnermeier y Nagel (2008) concluyen que la inercia es el principal factor de la asignación de activos en las carteras de los hogares de EUA, mientras que los cambios en la riqueza sólo desempeñan un papel menor. Lo que sugiere, de nuevo, poca frecuencia en el ajuste de carteras de los individuos.

⁵ Reis (2006) hace una interesante comparación entre un lo que denomina “ajuste al estado contingente” y “ajuste con inatención”. El primer tipo de modelo, propuesto por Caballero (1995), no asume costo alguno de obtener, absorber y procesar la información, pero si asume que es costoso implementar el plan de consumo óptimo. Por otro lado, un “modelo de inatención” asume que es costoso recopilar y procesar la información así como calcular la solución óptima. Reis (2006) logra contrastar los modelos en base al realismo empírico de sus hipótesis. Señala que ya existe importante evidencia de que, tal como sugiere un modelo de inatención, la información privada del

central en el modelo de Duffie (2010) ha adquirido relevancia en un importante número de contextos. Reis (2005) presenta y resuelve el problema de un productor que se enfrenta a costos de adquisición, absorción y procesamiento de la información, mostrando que este marco aplicado al estudio de la inflación tiene un buen desempeño. Con implicaciones similares, Moscarini (2004) modela la falta de atención en donde a diferencia de Reis (2005), los individuos sólo logran obtener una señal imperfecta sobre el estado del mundo una vez que deciden participar activamente en el mercado.

Reis (2006), posteriormente crea un marco bajo el cual ahora son los consumidores quienes son inatentos. Encuentra que el modelo es perfectamente capaz de explicar la paradoja que supone el exceso de sensibilidad del consumo a la información pasada y su indiferencia ante choques permanentes del ingreso. Por otro lado, en finanzas dos de los enigmas mejor establecidos y más desafiantes, la anomalía de la prima accionaria (EPP, por sus siglas en inglés) y la anomalía de la paridad del interés descubierta (FPP, por sus siglas en inglés), parecen encontrar una respuesta en estos modelos de información limitada. Gabaix y Laibson (2002) y Lynch (1996) muestran que el suponer que los inversionistas revisan sus decisiones de cartera con poca frecuencia puede explicar la EPP. Similarmente, Bacchetta y Wincoop (2009) muestran que un modelo en el que la toma de decisiones es poco frecuente ayuda a explicar la FPP.

Todo esto sugiere que estos modelos de inatención son ampliamente aplicables a diferentes problemas económicos. No sólo pueden explicar la aparente desconexión existente entre la información disponible y las acciones observadas, expuesta en un principio, sino que además lo hacen con gran éxito. Tal como menciona Reis (2006), si bien es difícil saber con certeza el éxito de sus aplicaciones, existen suficientes esperanzas para justificar el prestar atención a la falta de atención. El éxito de los modelos basados en la falta de atención en la descripción de los datos, sugiere que bien vale la pena el desafío. Es con esta idea en mente, y la oportunidad que plantea un modelo que hasta hoy poco ha sido estudiado, dada su reciente creación, que existe suficiente motivación para retomar el trabajo de Duffie (2010).

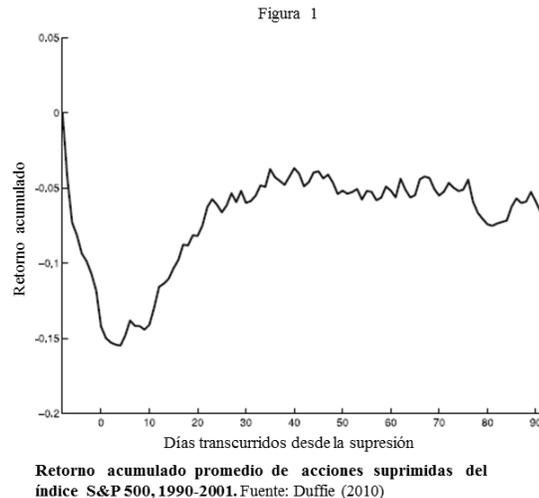
agente, sus expectativas y planes futuros son tan solo esporádicamente actualizados (mayor evidencia empírica es provista por Alessie y Lusardi (1999) y, Hurst (2003)). Contrario a lo establecido por el modelo de estado-contingentes, donde la información pública y privada coinciden en todos los instantes.

Tres son los principales adelantos de este trabajo. Primero, se muestra la gran complejidad que supone el caracterizar analíticamente la dinámica del precio bajo el marco propuesto por Duffie (2010). La segunda, y en respuesta a ello, a diferencia de Duffie se propone y expone claramente un método para resolver el modelo a fin analizar con mayor cuidado sus implicaciones. Con esto se busca que los resultados principales puedan ser replicados con relativa facilidad y, exista una metodología a fin de probar nuevas hipótesis. Tercero, tras un análisis cuidadoso se concluye que en general a menos que se asuma extrema aversión al riesgo, el modelo de inatención no puede explicar la drástica respuesta de los precios ante un choque de oferta observada en la evidencia empírica. Consideramos que este último hallazgo es una de las principales aportaciones de este trabajo. En particular, esto sugiere que hay que ser más cuidadosos con las implicaciones de política.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se hace una breve descripción del modelo planteado por Duffie (2010), en la que se remarca los supuestos principales y las condiciones que deben cumplirse en equilibrio. La Sección 3 trata de analizar con más cuidado las implicaciones del modelo. Así, en la Sección 3.1 se dan cuenta de los principales desafíos que implica resolver el modelo analíticamente. En la sección 3.2 se describe, a diferencia de Duffie (2010), claramente un procedimiento que hace posible resolver numéricamente el modelo a fin de analizarlo. Utilizando métodos numéricos, es posible resolver para una gran variedad de escenarios. Dicho procedimiento bien puede implementarse para futuras comparaciones. A partir de ello, en la sección 3.3 se propone y resuelve un caso. A diferencia de Duffie (2010), buscando aislar el efecto propio de la inatención de los agentes, se juega con algunos de los parámetros del modelo, encontrando que el fenómeno no es tan claro como se había supuesto. Finalmente, la Sección 4 concluye dando cuenta de los principales hallazgos y sugiriendo posible rutas para trabajos futuros.

2. Modelo de Inatención

En este apartado se presenta el modelo planteado por Duffie (2010), cuyo objetivo es el de ilustrar las consecuencias de choques de oferta de activos en los precios en un entorno en donde tan solo un subconjunto de inversionista presta atención en cualquier punto del tiempo. El patrón que describen los precios ante choques de oferta normalmente es el de una súbita reacción seguida de una reversión⁶. La Figura 1, muestra dicho patrón al ilustrar el impacto promedio en el precio ante un choque de oferta relacionado a la supresión de acciones del índice S&P 500⁷.



Duffie (2010) cree que la amplitud del efecto inmediato en los precios, así como el patrón de la recuperación posterior, refleja los obstáculos al comercio inmediato que supone el hecho de que tan solo un subconjunto de inversionistas atiende oportunidades de negociación en un periodo determinado: *“Del grado del impacto en los precios*

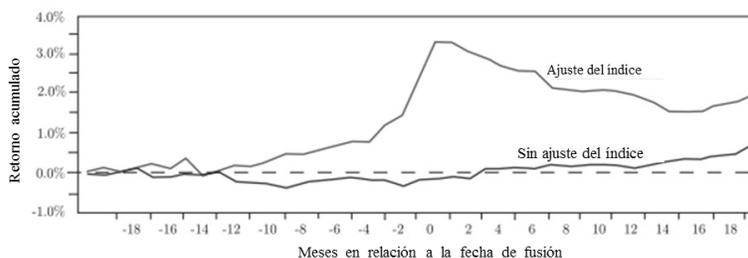
⁶Chen, Noronha y Singhal (2004), para un conjunto de datos similares, respaldan este comportamiento de los precios ante un choque, un notable impacto en los precios y una subsecuente reversión.

⁷ Una importante cantidad de inversión se encuentra indexada. Tras la decisión de Standard & Poors de eliminar una acción particular del S&P 500, los fondos cuya responsabilidad es realizar un seguimiento de este índice tienen un incentivo muy alto de vender este activo suprimido en la fecha que se hace efectiva la eliminación (véase Blume y Edelen, 2001).

(refiriéndose a la Figura 1), parece que un número relativamente limitado de inversionistas considera seriamente la compra de estas acciones (aquellas que han sido eliminadas del índice) cerca del día de supresión. (Por lo que) Se requiere una concesión substancial en el precio”.

La Figura 2, ilustra un caso similar, un choque de oferta que se produce a raíz de la fusión de una empresa incluida en un índice bursátil principal con una que no está incluida en ese índice⁸. Siguiendo la misma idea, los precios reflejan un aumento de la demanda de activos, mismos que deben ser suministrados por los inversionistas que están disponibles para este propósito tan solo en el corto plazo, generando así un notable impacto en los precios y, una subsecuente reversión.

Figura 2



Retorno acumulado promedio de las acciones de los adquirentes. A fin de mantener el índice S&P 500 comparable a través del tiempo, el índice se ajusta si el adquirente está en el índice S&P 500 y la empresa adquirida no lo está. Fuente: Mitchell, Pulvino y Stafford (2004).

La hipótesis central es la de que un choque de oferta debe ser absorbido en el corto plazo por un número limitado de inversionistas, siendo así necesaria una concesión importante en el precio a fin de absorber el choque. Estos inversionistas con el tiempo, y una vez que otros inversionistas están disponibles, planean deshacerse del riesgo asociado. Así, el impacto inicial es seguido por una recuperación gradual. El resultado es pues una trayectoria peculiar, que Duffie (2010) pretende ejemplificar al retomar y ampliar el modelo dinámico de equilibrio general de Stapleton y Subrahmanyam (1978), permitiendo un horizonte de tiempo infinito y al suponer que los inversionistas actualizan tan solo esporádicamente su información y planes de inversión. Es sobre este

⁸Mitchell, Pulvino y Stafford (2004) explican que en la fecha efectiva de la fusión, los fondos encargados de replicar al índice deben aumentar sus posiciones del capital fusionado a fin de mantener la nueva versión del activo en proporción a su nueva y más grande capitalización total de mercado.

modelo que pretendemos profundizar más adelante a fin de esclarecer si en verdad existe una implicación teórica robusta, sugerida por el modelo, sobre el papel que puede estar desempeñando la inatención del inversionista. Con este fin, primero se procede a dar una breve descripción del modelo. En una primera subsección se presentan los supuestos que rigen el modelo y, posteriormente en la Sección 2.2 se caracteriza al equilibrio.

2.1 Entorno

Se asume que los inversionistas maximizan su utilidad esperada del consumo en cada uno de los períodos, donde la utilidad es separable-aditiva y exponencial en el consumo. Con el fin de crear el entorno de interés, el modelo prevé dos tipos de inversionistas:

1. **Inversionistas Inatentos.** Una fracción q de inversionistas permanece fuera del mercado por un número fijo de periodos. De manera que si, un inversionista de este tipo realiza inversiones de forma activa a finales del periodo t , no será sino hasta finales del periodo $t + k$ que actualizase su información, expectativas y planes de inversión. Estos inversionistas optan por reinvertir los dividendos que genera el único activo “riesgoso” a una tasa constante libre de riesgo, $(r - 1)$ ⁹, mientras se encuentran temporalmente fuera del mercado. De manera que el ingreso neto, asociado a la compra en el periodo t de una unidad del activo, en la próxima fecha de operación $t + k$ se define como:

$$R_{t+k} = S_{t+k} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} X_{t+i}$$

Donde S_{t+k} es el precio del activo en $(t + k)$ y, X_{t+i} el flujo de efectivo que genera el activo en $(t + i)$.

⁹ La tasa de interés libre de riesgo, $r - 1$, se sabe con certeza en el periodo 0, y r es una tasa bruta.

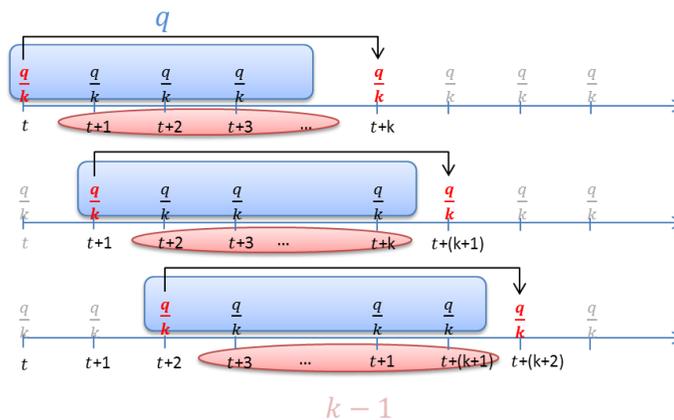
2. **Inversionistas Frecuentes.** Naturalmente, la fracción restante $(1 - q)$ corresponde a inversionistas que periodo a periodo actualizan su información, expectativas y planes de inversión. Así, los ingresos netos que genera una unidad del activo adquirido en t para la próxima fecha de operación es:

$$R_{t+1} = S_{t+1} + X_{t+1} \quad (1)$$

Donde S_t es el precio del activo en t y, X_t el flujo de efectivo que genera el activo en t .

Las actividades de los inversionistas inatentos se distribuyen en el tiempo de manera uniforme, de tal forma que la fracción $\frac{1}{k}$ corresponde a la proporción de inversionistas inatentos que operan de manera activa en cualquier punto del tiempo (véase figura 3). Así, una fracción $\frac{q}{k}$ de inversionistas opera en el periodo t , tras el cual permanecen fuera del mercado por $(k - 1)$ periodos, reintegrándose al mercado en el periodo $t + k$, tras el cual, una vez actualizada su información y estrategias de inversión, nuevamente se ausenta del mercado por el mismo número de periodos y así sucesivamente. En cada uno de los periodos de ausentismo, existe otra fracción $\frac{q}{k}$ distinta de inversionistas realizando operación activamente, por lo que en cualquier punto de tiempo la población total de inversionistas operando activamente es $(1 - q) + \frac{q}{k}$.

Figura 3



Frecuencia y sincronización entre las actividades de los inversionistas

Ambos tipos de inversionistas viven por un periodo de tiempo finito, consumen la totalidad de su riqueza y finalmente son reemplazados por inversionistas del mismo tipo. El tiempo de vida de los inversionistas no juega un papel determinante en el comportamiento de los precios en cualquier equilibrio estacionario debido a las propiedades de la utilidad exponencial.

Denotando al vector $\mathbf{H}_t = (D_{t-1}, D_{t-2}, \dots, D_{t-(k-1)})^T$ como el vector de cantidades mantenidas fuera del mercado por la fracción $q - \frac{q}{k}$ de inversionistas infrecuentes en el periodo t (las posiciones de los inversionistas inatentos que no operan en t pero si en los $k - 1$ periodos previos), el vector de estado gaussiano se define como:

$$\mathbf{Y}_t = (\Phi_t^T, \mathbf{H}_t^T)^T \quad (2)$$

Donde Φ_t es un VAR de variables arbitrarias de dimensión n que satisface: $\Phi_{t+1} = \Lambda \Phi_t + \Sigma^{1/2} \epsilon_{t+1}$, para algún vector ϵ_t de variables aleatorias iid normales con media cero y varianza unitaria de dimensión n , y algunas matrices Λ y Σ de dimensión $n \times n$ donde Σ es semidefinida positiva y simétrica.

A diferencia de Stapleton y Subrahmany (1978), Duffie (2010) incluye una variable de estado (adicional, \mathbf{H}_t) cuya tarea es la de contabilizar la disponibilidad inmediata y pasado o futura del capital de los varios inversionistas. Por último, tal como se hace en la mayoría de la literatura, la oferta y dividendo del activo se definen, respectivamente, como procesos exógenos de la forma:

$$Z_t = \beta_z^T \Phi_t \quad (3)$$

$$X_t = \beta_x^T \Phi_t \quad (4)$$

Para algunos vectores, β_z y β_x , de coeficientes dados de dimensión n .

El mercado sólo abre en cada momento discreto del tiempo. No se permite el comercio entre estos puntos en el tiempo. Los flujos de efectivo se generan en estos tiempos y las decisiones de consumo e inversión son tomadas. Los flujos de efectivo se

pagan en forma de dividendos. Los flujos negativos pueden ser considerados como dividendos negativos, es decir, “*totalmente suscritas las cuestiones de derechos de acciones*” (Stapleton y Subrahmanyam, 1978). Así, los accionistas pueden ser requeridos a aportar más capital (siendo esto así un flujo negativo). No hay responsabilidad limitada (el precio del activo puede ser negativo).

2.2 Equilibrio

En equilibrio los agentes toman decisiones óptimas de inversión y el mercado se vacía. En cuanto a la primera condición no existe mayor complejidad, con la salvedad del hecho de que se debe estar consciente de que tan solo un subconjunto de inversionistas toma decisiones en cualquier punto del tiempo. Bajo los supuestos de utilidad exponencial, normalidad conjunta de los flujos de efectivo y tasa de interés constante, el problema del consumidor multiperiodo se reduce a uno de media-varianza periodo a periodo (véase Stapleton y Subrahmanyam, 1978). Así las demandas óptimas de los inversionistas, inatentos y atentos, respectivamente son:

$$D_t = \frac{q}{k} \frac{E(R_{t+k} | \mathbf{Y}_t) - r^k S_t}{\theta \text{Var}(R_{t+k} | \mathbf{Y}_t)} \quad (5)$$

$$K_t = (1 - q) \frac{E(S_{t+1} + X_{t+1} | \mathbf{Y}_t) - r S_t}{\phi \text{V}(S_{t+1} + X_{t+1} | \mathbf{Y}_t)} \quad (6)$$

Donde θ y ϕ son la media armónica¹⁰ de los coeficientes de aversión absoluta al riesgo.

De manera que el inversionista estará dispuesto a adquirir una mayor cantidad del activo conforme la ganancia esperada sea alta y su varianza baja. Por otro lado, es importante entender qué implica la condición de vaciado del mercado. Para que el mercado se vacíe la suma de las demandas agregadas (la de los inversionistas atentos

¹⁰ La media armónica, denominada H, de una cantidad finita de números es igual al recíproco, o inverso, de la media aritmética de los recíprocos de dichos valores.

más la de los inatentos) debe ser igual a la oferta total *disponible*. La oferta total disponible se obtiene al contabilizar las posiciones de los inversionistas no frecuentes. De tal manera que, para el periodo t , esta condición es:

$$D_t + K_t = Z_t - \mathbf{1} \cdot \mathbf{H}_t \quad ^{11} \quad (7)$$

Se asume y caracteriza al equilibrio estacionario, en particular se anticipa un equilibrio lineal donde:

- 1) El precio del activo es de la forma:

$$S_t = \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_t \quad (8)$$

- 2) La demanda del inversionista inatento es de la forma:

$$D_t = \mathbf{a}^T \mathbf{Y}_t \quad (9)$$

- 3) La demanda del inversionista frecuente es de la forma:

$$K_t = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}_t \quad (10)$$

Para algunos vectores de coeficientes \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} de dimensión $(k+1)$ dados.

El supuesto de demandas lineales es una línea típica de análisis seguida en situaciones similares. Stein (2009) considera a esta restricción de linealidad, como una aproximación razonable a la conducta de un individuo en el mundo real. Así, como \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} son endógenas, sabremos que serán óptimos dentro de la clase de demandas lineales. Bajo estos supuestos, la dinámica del vector estado queda completamente caracterizada:

¹¹ Nótese que es perfectamente válido tener $Z_t - \mathbf{1} \cdot \mathbf{H}_t \leq 0$. En este caso, el activo estaría siendo lanzado al mercado por los inversionistas tomando posiciones cortas.

$$\mathbf{Y}_{t+1} = A(\mathbf{a})\mathbf{Y}_t + B\boldsymbol{\epsilon}_{t+1} \quad (11)$$

$$\text{Donde } A(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{n \times n} & & 0_{n \times (k-1)} \\ & \mathbf{a}^T & \\ 0_{(k-2) \times n} & \Pi_{(k-2)} & 0_{(k-2) \times 1} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \Sigma^{1/2} \\ 0_{(k-1) \times n} \end{pmatrix}$$

El modelo ahora se encuentra completamente especificado, la media y varianza condicional de la rentabilidad por unidad de activo, R_{t+k} , de cualquier inversionista situado en el periodo t se puede calcular explícitamente. Resulta ser que $E(R_{t+k} | \mathbf{Y}_t)$ es lineal en \mathbf{Y}_t y la $Var(R_{t+k} | \mathbf{Y}_t) = \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ es determinística (véase Anexo 1, ecuaciones 14 y 15). De lo anterior se deduce rápidamente que las demandas son en efecto lineales en \mathbf{Y}_t y, aún más, de la forma anticipada:

$$D_t = \frac{q}{k} \frac{E(R_{t+k} | \mathbf{Y}_t) - r^k S_t}{\theta \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_t$$

$$K_t = (1 - q) \frac{E(S_{t+1} + X_{t+1} | \mathbf{Y}_t) - r S_t}{\phi \sigma_1^2(\mathbf{c})} \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{Y}_t$$

Siendo esto así, los coeficientes que resuelven el problema de optimización, bajo la conjetura del equilibrio, son:

$$\mathbf{a}(\mathbf{c}) = \frac{q}{k} \frac{\left\{ (A(\mathbf{a})^{T^k} - r^k \Pi) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} A(\mathbf{a})^{T^i} \Gamma \right\}}{\theta \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \quad \dots^{12} \quad (12)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = (1 - q) \frac{\{(A(\mathbf{a})^T - r \Pi) \mathbf{c} + A(\mathbf{a})^T \Gamma\}}{\phi \sigma_1^2(\mathbf{c})} \quad (13)$$

Por último, bajo la conjetura del equilibrio, la condición de vaciado de mercado se reduce a:

¹² La fórmula correspondiente que presenta Duffie (2010) es errónea (pg. 1263). Se deja como extensión analizar si el error es significativo o no.

$$\mathbf{a}(\mathbf{c}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \mathbf{g} \quad (14)$$

Donde $\mathbf{g} = (\mathbf{B}_z^T, -\mathbf{1}^T)^T_{n+(k-1)}$.

Por lo que en cualquier equilibrio estacionario \mathbf{c}^* debe resolver:

$$\mathbf{a}(\mathbf{c}^*) + \mathbf{b}(\mathbf{a}(\mathbf{c}^*), \mathbf{c}^*) = \mathbf{g} \quad (15)$$

3. Solución al Modelo de Inatención

El modelo en si representa una novedad debido, en particular, a la hipótesis sobre la inactividad de los inversionistas. Por otro lado, como ya se ha mencionado, es un modelo que poco ha sido estudiado, muy posiblemente debido a su reciente creación. El objetivo es analizarlo con más cuidado, con el fin de conocer el papel que puede estar desempeñando el comportamiento del inversionista en la formación de los precios.

Con este objetivo en mente, se antoja una caracterización analítica de la solución. La Subsección 3.1 muestra que esto es un reto muy complejo y, da cuenta de los principales desafíos que representa dicho proceder. De la dificultad de utilizar un procedimiento analítico sugerimos utilizar métodos numéricos. Así, en la Subsección 3.2 y a diferencia de Duffie (2010), se describe de forma rigurosa un procedimiento que permite resolver numéricamente el modelo. Por último, en la Subsección 3.3 a partir de procedimiento propuesto, se modelan algunos casos que sugieren, a diferencia de lo que Duffie (2010) presenta, que el modelo puede no ser del todo robusto.

3.1 Dificultades para resolver analíticamente el modelo

Es natural tratar de buscar una solución analítica que permita identificar plenamente la dependencia de los precios por los coeficientes, tanto endógenos como exógenos, principalmente k y q . La idea sería contar con una función impulso-respuesta del precio que, permita establecer un patrón de comportamiento en el tiempo perfectamente verificable tras una perturbación en el sistema. Siendo esto así, se podría determinar en general el grado en que el comportamiento de los inversionistas, aquí propuesto, puede alterar a la formación de precios. Responder qué tan lento es el ajuste de los precios, o si existen condiciones bajo las cuales la actualización esporádica de la información, expectativas y planes de inversión no sea un factor determinante.

Para facilitar la apreciación de las dificultades para resolver analíticamente el modelo bastará con tomar uno de los casos más simples posibles. Siguiendo a Duffie (2010), se parte del hecho de que el estado del mundo está descrito en particular por la oferta del activo riesgoso, los flujos de efectivo que de él se derivan y, como ya se mencionó, por

las posiciones que mantienen los inversionistas que no se encuentran temporalmente disponibles, esto es $\mathbf{Y}_t = (Z_t, X_t, \mathbf{H}_t^T)^T$ ¹³. En particular, bajo los supuestos simplificadores de que la oferta y los dividendos sean procesos independientes, cada uno en particular como un proceso estocástico iid con media condicional cero y varianza unitaria, el primer desafío consiste en encontrar la solución al sistema que resuelve para los coeficientes endógenos. Bajo estas condiciones, el sistema¹⁴ se reduce a uno de $2k + 2$ ecuaciones y $2k + 2$ incógnitas $(a_1, \dots, a_{k+1}, b_1, \dots, b_{k+1})$:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{k} \frac{\left\{ (A(\mathbf{a})^{T^k} - r^k \Pi) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} A(\mathbf{a})^{T^i} \Gamma \right\}}{\theta \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})}$$

$$\mathbf{c} = (A(\mathbf{a})^T - r \Pi)^{-1} \left(\frac{\phi \sigma_1^2(\mathbf{c})}{1 - q} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) - A(\mathbf{a})^T \Gamma \right)$$

Donde $\Gamma = ((0,1)^T, \mathbf{0})_{k+1}^T$, $\mathbf{g} = ((1,0)^T, -\mathbf{1}^T)_{k+1}^T$ y $(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & & 0_{2 \times (k-1)} \\ & (a_1, \dots, a_{k+1}) & \\ 0_{(k-2) \times 2} & \Pi_{(k-2)} & 0_{(k-2) \times 1} \end{pmatrix}$ ¹⁵

Bajo estos supuestos la matriz $A(\mathbf{a})$ se simplifica a una matriz cuyos elementos, en su gran mayoría, son ceros. Esto puede sugerir que existe alguna probabilidad de trabajar con algún procedimiento analítico. Sin embargo, contrario a lo que parece, con solo elevar esta matriz a unas cuantas potencias, $A(\mathbf{a})^k$, se hace evidente la gran complejidad que supone el caracterizar a dicho operador (véase Anexo 2). Ante la aparente imposibilidad de resolver analíticamente para todo k , y puesto que en particular es éste uno de los parámetros cuyo impacto en el precio se pretende estudiar, se procede a resolver numéricamente el problema¹⁶. Tal como se da cuenta en el siguiente apartado, este procedimiento está lejos de ser trivial.

¹³ Nótese que en este contexto tenemos $\Phi_t = (Z_t, X_t)$. Cumpliéndose las condiciones de linealidad, de la oferta y los dividendos, con respecto a Φ_t (véase Sección 2, ecuaciones 3 y 4). En este caso se tiene $\mathbf{B}_z^T = (1,0)$ y $\mathbf{B}_x^T = (0,1)$.

¹⁴ Véase Sección 2, ecuaciones 12, 13 y 15.

¹⁵ Por simplicidad no se muestra la definición de $\sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, puesto que es muy compleja y no necesaria para el punto que se quiere exponer en este apartado.

¹⁶ Vale la pena observar que incluso fijando para valores muy pequeños de k (aún más $k = 2$), y manteniendo los demás parámetros como variables, no fue posible obtener una solución para el sistema descrito en esta subsección utilizando Mathematica 8.0.

3.2 Solución al modelo a través del método de Newton para sistemas no lineales.

Si bien, solucionar numéricamente es posible, tal como se constató no necesariamente es sencillo. Ante la imposibilidad de resolver para cualquier caso, por simple que fuera, donde k fuese mayor o igual a 4 utilizando directamente Mathematica 8.0, fue necesario idear otra forma. Se desarrolló un algoritmo basado en el método de Newton. El método de Newton es uno de los métodos más utilizados en ingeniería dada su relativa eficiencia en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Converge muy rápido (en relación a otros tipos de iteración funcional) y proporciona una muy buena precisión en los resultados.

A fin de explicar con claridad en que consiste el método de Newton, a continuación se ilustra el caso base que resuelve para funciones de una sola variable (usualmente conocido como el método de Newton o método de Newton-Raphson). Burden y Faires (2001, pg. 66) afirman que es una de las técnicas numéricas para resolver una problema de búsqueda de raíces, $f(x) = 0$, más poderosas y conocidas. La exposición del método está basada en el libro de Burden y Faires (2001).

Empezamos definiendo a $f: [a, b] \rightarrow R$ como una función derivable definida en el intervalo real $[a, b]$. Posteriormente, sea $\tilde{x} \in [a, b]$ una aproximación de p tal que $f'(\tilde{x}) \neq 0$ y $|p - \tilde{x}|$ es “pequeño”, consideramos el primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de \tilde{x} :

$$f(x) = f(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})f'(\tilde{x}) + \frac{(x - \tilde{x})^2}{2} f''(\xi(x)),$$

Donde $\xi(x)$ está entre x y \tilde{x} . Dado que $f(p) = 0$ esta ecuación, con $x = p$, da

$$0 = f(\tilde{x}) + (p - \tilde{x})f'(\tilde{x}) + \frac{(p - \tilde{x})^2}{2} f''(\xi(x))$$

Derivamos el método de Newton suponiendo que, como $|p - \tilde{x}|$ es tan pequeño, el término que contiene $(p - \tilde{x})^2$ es mucho menor y que

$$0 \approx f(\tilde{x}) + (p - \tilde{x})f'(\tilde{x})$$

Despejando p de esta ecuación obtenemos

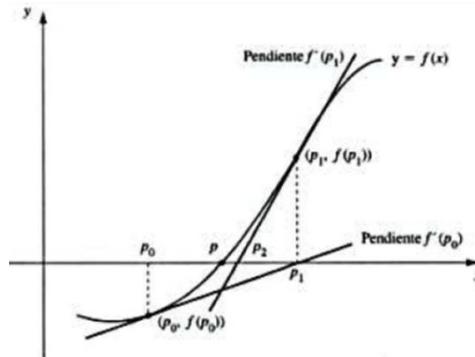
$$p \approx \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$$

Esto nos prepara para introducir el método de Newton, el cual comienza con una aproximación inicial de p_0 y genera la sucesión $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \text{ para } n \geq 1$$

La Figura 4 muestra gráficamente cómo se obtienen las aproximaciones usando tangentes sucesivas. Comenzando con la aproximación inicial p_0 , la aproximación p_1 es la intersección con el eje x de la línea tangente a la gráfica de f en $(p_0, f(p_0))$. La aproximación p_2 es la intersección x de la tangente a la gráfica de f en $(p_1, f(p_1))$ y así sucesivamente.

Figura 4. Frecuencia y sincronización entre las actividades de los inversionistas



Fuente: Burden y Faires (1997).

Por tanto, el método de Newton puede ser visto bajo un esquema de la forma

$$p_n = g(p_{n-1}), \text{ para } n \geq 1$$

Para g de la forma

$$g(x) = x - \phi(x)f(x),$$

Donde $\phi(x) = 1/f'(x)$ ¹⁷

Similarmente, la aplicación para el caso n -dimensional $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (conocido como el método de Newton para sistemas no lineales), que es el caso de interés, conlleva un procedimiento similar del que finalmente se obtiene¹⁸

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1}F(\mathbf{x}),$$

Donde $J(\mathbf{x})$ es la matriz Jacobiana.

El procedimiento de la iteración funcional pasa de seleccionar $\mathbf{x}^{(0)}$ a generar, para $k \geq 1$,

$$\mathbf{x}^{(k)} = G(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}F(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

Para nuestro caso en especial se tiene que

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}^T, \mathbf{c}^T)^T$$

De tal forma que, buscando solucionar el sistema que resuelve para los coeficientes endógenos (véase Sección 2, ecuaciones 12, 13 y 15), definimos a $F(\mathbf{x})$ como

¹⁷Garantiza que el procedimiento iterativo derivado de g sea cuadráticamente convergente (véase Burden y Faires 2001, pg. 83)

¹⁸Véase Burden y Faires 2001, pgs. 611-616.

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} - \frac{q}{k} \frac{\{(A(\mathbf{a})^{T^k} - r^k \Pi) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} A(\mathbf{a})^{T^i} \Gamma\}}{\theta \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \\ \mathbf{c} - (A(\mathbf{a})^T - r \Pi)^{-1} \left(\frac{\phi \sigma_1^2(\mathbf{c})}{1-q} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) - A(\mathbf{a})^T \Gamma \right) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

El algoritmo para resolver utilizando este método puede consultarse en el Anexo 3. Así, una vez descritos los procesos autorregresivos que forman parte del vector estado, utilizando el algoritmo es posible obtener los vectores \mathbf{a}^* , \mathbf{c}^* que resuelven para todo equilibrio estacionario. Determinados estos vectores de coeficientes, basta con proponer alguna condición inicial, \mathbf{Y}_0 , a fin de modelar el comportamiento de los precios.

3.3 Aplicando el método de Newton

Ya especificado un procedimiento que permite resolver el modelo, esta subsección presenta la solución de un caso particular. Como veremos más adelante, buscando aislar por primera vez el efecto de la intención sobre los precios, se juega con algunos de los parámetros exógenos del modelo que no se encuentran directamente relacionados con la inatención del inversionista. Los resultados que se obtienen sugieren, contrario a lo que expone Duffie (2010), que el modelo en general no concede tanta importancia a la intención del inversionista. El impacto inicial se debilita de manera importante, e incluso desaparece, bajo ciertas especificaciones que se encontraron tras el intento por disminuir posibles influencias sobre el precio (distintas a la inatención).

Puesto que se quiere ilustrar la respuesta de los precios ante un choque de oferta, bajo el contexto especificado en la Sección 2, se empieza por asumir para todo $t \geq 1$ una oferta constante $Z_t = Z_1$, con media condicional en el periodo cero de 0. Así, asumimos que en el periodo uno tiene lugar un choque de oferta de tamaño 2. De manera similar a Kleidon (1986) y Timmermann (1996), se especifica a los dividendos como un proceso AR(1), esto es $x_{t+1} = \rho x_t + \varepsilon_{t+1}$ donde $\rho = 0.9$ y $\varepsilon_{t+1} \sim iid$ con media 0 y varianza 0.1¹⁹. A fin de mantener cierta equivalencia entre los ejemplos expuestos, al permitir

¹⁹ Tanto en Kleidon (1986) como en Timmerman (1996) definen un proceso para los dividendos (en niveles) como un AR(1) con media distinta a cero. Además, Timmerman (1996) introduce un componente de tendencia. Dado el supuesto de linealidad, en los dividendos, con respecto a un

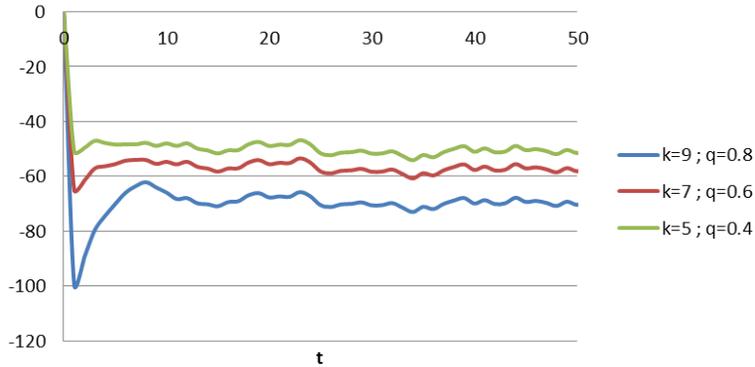
que tan solo que varíe el o los parámetros que se encuentren bajo estudio, se toma la misma realización de los dividendos para todos los escenarios expuestos a menos que claramente se indique lo contrario.

Dado que todo comienza en el periodo cero, suponemos que el vector de demandas rezagadas para ese periodo es en realidad un vector de ceros, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{0}$. Por último, y de momento, se asume una tasa de interés libre de riesgo del 8% y coeficientes absolutos de aversión al riesgo igual a uno ($\phi = \theta = 1$). Dados algunos valores para k y q , tomamos como punto de arranque la media condicional del vector estado en el periodo cero, se introduce exógenamente el choque de oferta en el periodo uno y, posteriormente la dinámica del entorno sigue según se describe en la Sección 2.

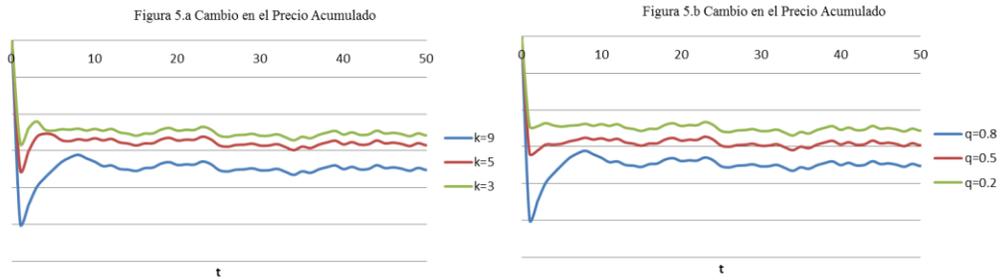
La Figura 5 presenta los resultados obtenidos para tres casos: ($k = 9$ y $q = 0.8$), ($k = 7$ y $q = 0.6$) y ($k = 5$ y $q = 0.4$), donde, como se ya se ha mencionado, $k - 1$ corresponde al periodo de inactividad y q a la fracción de inversionistas inatentos. Estos casos bastan para lo que en este apartado se pretende exponer con suficiente claridad. Se anexan dos figuras, Figura 5.a ($q = 0.8$) y Figura 5.b ($k = 9$), a fin de observar y conocer el comportamiento del precio ante cambios aislados en ambos parámetros. Es importante tener en cuenta que tan solo estamos interesados en la trayectoria que describen los precios a lo largo del tiempo y, no en los valores particulares por sí mismos (puesto que en ningún momento se buscó calibrar el modelo), de manera que las gráficas ilustran los cambios en el precio acumulado en niveles. Así, el único interés es el de ilustrar la respuesta del precio ante un choque de oferta a fin de descubrir si la inactividad del inversionista, bajo los supuestos considerados por el modelo, en verdad origina un patrón similar al sugerido por Duffie (2010).

proceso autorregresivo (Φ_t), en nuestro caso se asume $\mu = 0$ y no se incluye un componente de tendencia (aun cuando los modelos no son equivalentes, Timmerman (1996) trabaja con coeficientes que van dentro del intervalo 0.8 a 0.99 y una varianza del término de error de 0.0016).

Figura 5. Cambio en el Precio Acumulado



Evolución del precio ante un choque de oferta para distintos periodos de inatención (k) y distintas fracciones correspondientes a la proporción de inversionistas inatentos (q).

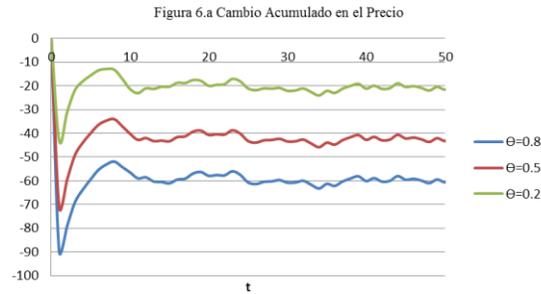


Evolución del precio ante un choque de oferta para distintos valores de k y q=0.8. Evolución del precio ante un choque de oferta para distintos valores de q y k=9.

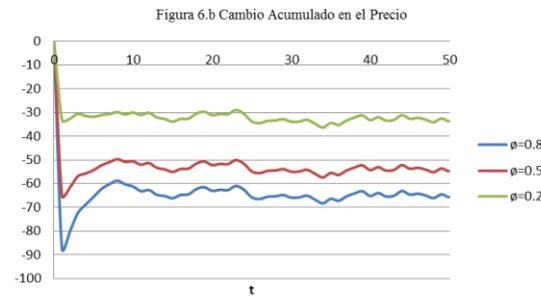
Observamos que el patrón en común que describen los precios en cada uno de los casos presentados, ante un choque de oferta es el de una súbita caída seguida de una recuperación gradual. La hipótesis central de Duffie (2010) es precisamente esto, la creencia de que en general la intención de los agentes afecta a la formación de precios significativamente.

Si se quiere dar con una explicación para estos resultados, basta con mencionar que conforme aumentan k y q , disminuye la fracción total de inversionistas operando de manera activa en cada uno de los periodos $(1 - q) + \frac{q}{k}$. Así, el choque de oferta debe ser absorbido en el corto plazo por un número cada vez más limitado de inversionistas y, dado el capital cada vez más limitado que ello supone, se otorga una concesión más importante en el precio a medida que aumenten k y q a fin de que el choque inicial sea absorbido. Aún más, como sugiere la Figura 6.a ($k = 9 ; q = 0.8 ; \phi = 1$) y 6.b

$(k = 9 ; q = 0.8 ; \theta = 1)^{20}$, la aversión al riesgo de los inversionistas puede hacer necesaria una concesión mayor en el precio. Pues, conforme un inversionista sea más adverso al riesgo menor será su disposición a canalizar recursos a inversiones que impliquen un riesgo, haciendo necesario un descuento más significativo.



Evolución del precio ante un choque de oferta para distintos valores del coeficiente de aversión al riesgo (absoluto) de inversionistas atentos (θ).



Evolución del precio ante un choque de oferta para distintos valores del coeficiente de aversión al riesgo (absoluto) de los inversionistas inatentos (ϕ).

A su vez, estos inversionistas con el tiempo, y una vez que otros inversionistas han entrado al mercado, planean deshacerse del riesgo asociado. Por otro lado, tal como afirma Duffie (2010), los inversionistas que entran al mercado en periodos subsiguientes al choque de oferta caen en cuenta de que una vez realizadas sus operaciones permanecerán fuera del mercado por un número fijo de periodos tras los cuales el precio habrá de recuperarse. De manera que, el impacto inicial es seguido por una recuperación gradual.

²⁰ Observamos que, el grado de aversión al riesgo de los inversionistas atentos influye en mayor medida sobre el impacto inicial. Esto bien puede deberse al hecho de que bajo los parámetros supuestos, para todo periodo el número de inversionistas atentos sobrepasa significativamente al número de inversionistas inatentos.

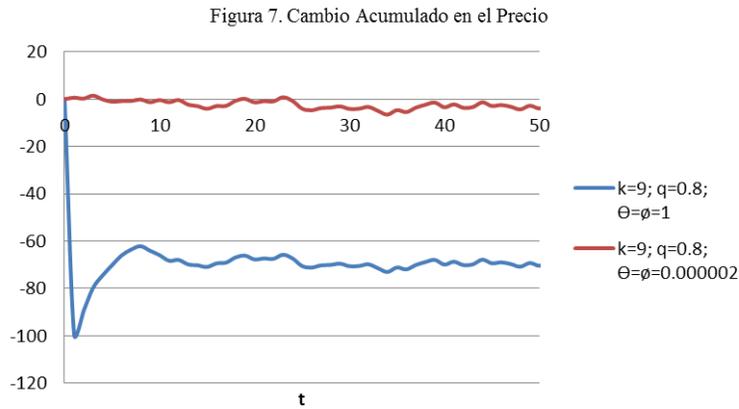
Finalmente, es importante tener en cuenta el grado en que se pueda estar sobrestimando el impacto de la inatención sobre los precios, algo en lo que Duffie (2010) no profundiza y, que bien vale la pena trabajar con detenimiento. Como ilustra la Figura 6.a y 6.b existen otros parámetros a quienes atribuirles parte del efecto, siendo esto así, no sería mala idea matizar las fuentes del comportamiento de los precios observado. Con esto en mente a continuación se presentan dos casos, en los que buscando aislar el efecto propio de la inatención sobre los precios, se encontró que una vez que se juega con los parámetros del modelo el fenómeno no es tan claro. El primer caso muestra que ocurre con la trayectoria de los precios cuando los coeficientes de aversión absoluta al riesgo varían. El segundo caso lo hace, para distintas propiedades del proceso definido para los dividendos.

- **Caso I: Aversión al Riesgo.**

El primer caso en realidad es muy sencillo, y para su exposición se utilizan algunos de los resultados expuestos hasta ahora. Tiene que ver con los coeficientes de aversión absoluta al riesgo. Si bien, tal como sugieren Babcock, Choi y Feinerman (1993), el uso de niveles de aversión al riesgo absoluto (ARA, por sus siglas en inglés) para determinar los efectos de la aversión al riesgo de los agentes es común, los valores asumidos o estimados en estudios empíricos difieren significativamente. Por ejemplo, Love y Buccola (1991) estiman un valor máximo de 0.538 mientras Collender y Zilberman (1985) utilizar un valor mínimo de 0.000000921. Babcock, Choi y Feinerman (1993) determinan rangos que consideran “razonables” de niveles de ARA para estudios de simulación en donde se utilicen funciones de utilidad con aversión absoluta constante. Estos rangos sugieren un valor máximo de 0.046204 y un valor mínimo de 0.000002.

En realidad, aún con estas referencias, resulta difícil definir que rangos son razonables en la mayoría de los casos. Sin embargo, recordemos que en principio tan solo se busca disminuir la influencia de otros parámetros (en este caso en particular el del coeficiente de aversión absoluta al riesgo), sobre los precios a fin de vislumbrar que tanto del efecto observado puede atribuirse a la inactividad del inversionista. Así, tomamos el mínimo valor sugerido por

Babcock, Choi y Feinerman (1993). La Figura 7 expone gráficamente el caso, se observa que, aún bajo el supuesto de inatención del inversionista, la trayectoria que se había supuesto característica de la inatención de los inversionistas desaparece (en esta caso en $t = 1$ tenemos $\Delta p > 0$ y, aún más en $t = 2$, $\Delta p < 0$).



Evolución del precio ante un choque de oferta para cambio simultáneos de los coeficiente de aversión absoluta al riesgo (Θ y θ).

Aún más, incluso para $q = 0.99$, manteniendo ($k = 9$ y $\phi = \theta = 0.000002$), sigue sin revelarse algún indicio que sugiera que existe un efecto sobre el precio ante el choque originado por la inatención de los inversionistas. Tan solo ocurre un cambio marginal a lo largo de toda la trayectoria imposible de visualizar gráficamente (véase Figura 8.a).

Figura 8.a

	k=9; q=0.8; $\Theta=\theta=0.000002$	k=9; q=0.99; $\Theta=\theta=0.000002$
Cambio en el precio en t=1	0.662238427	0.661783585
Reducción en el cambio tras el aumento en q	-0.000454842	

Reducción en el cambio del precio tras un aumento en la fracción de correspondiente a los inversionistas inatentos (q) en el periodo en que ocurre el choque de oferta.

Ocurre lo mismo para $k = 21$, con ($q = 0.8$ y $\phi = \theta = 0.000002$). La Figura 8.b ilustra este caso.

Figura 8.b

	k=9; q=0.8; $\Theta=\sigma=0.000002$	k=12; q=0.8; $\Theta=\sigma=0.000002$	k=16; q=0.8; $\Theta=\sigma=0.000002$	k=21; q=0.8; $\Theta=\sigma=0.000002$
Cambio en el precio en t=1	0.662238427	0.662196658	0.66214571	0.662087615

Reducción en el cambio del precio tras un aumento en los periodos de inactividad (k) en el periodo en que ocurre el choque de oferta.

Se concluye que, a menos que se asuma alta aversión al riesgo, la hipótesis central de Duffie (2010) no se sostendrá, al menos no en general²¹.

- **Caso II: Variabilidad de los dividendos.**

Tal como concluye Timmermann (1996), en contextos más convencionales, las propiedades que se asuman sobre el proceso que siguen los dividendos pueden incidir significativamente en la volatilidad de los precios. Nuestro caso, no es la excepción, las propiedades que se asuman sobre el proceso deben incidir en el comportamiento del precio. Este proceso forma parte del vector estado y, los precios se encuentran determinados directamente por el vector estado. Por tanto, no es de extrañar que el comportamiento de los precios sea altamente sensible a las propiedades del proceso asumido para los dividendos (ρ y σ_ε^2).

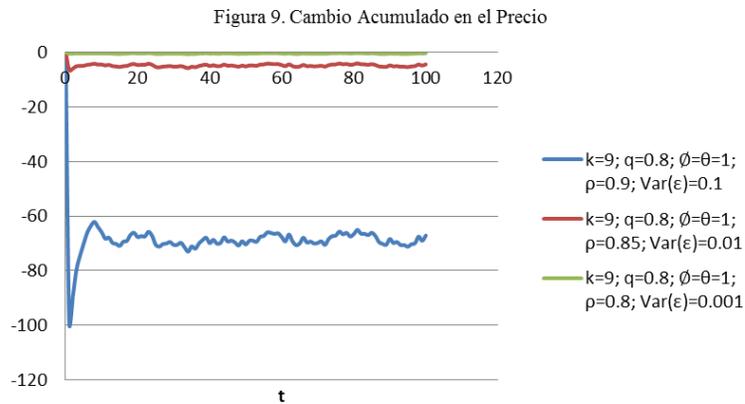
Buscando reducir el impacto de los dividendos sobre el comportamiento de los precios, con el fin de matizar el efecto propio de la inatención, se reduce su varianza²². Recordemos, que se asumió un proceso de la forma: $x_{t+1} = \rho x_t + \varepsilon_{t+1}$ con $\rho < 1$, por tanto lo varianza de los dividendos se define como:

²¹ Cabe destacar que si bien, para los casos presentados en las Figuras 8.a y 8.b se tiene $\Delta p > 0$ en $t=1$, este es menor conforme aumentó q o k , lo que concuerda con la tendencias expuestos en las Figuras 5.1 y 5.2.

²² Como el objetivo del trabajo ha sido estudiar la dinámica del precio ante un choque de oferta se ha supuesto para todo $t \geq 1$ una oferta gaussiana constante $Z_t = Z_1$, lo que hace imposible suponer

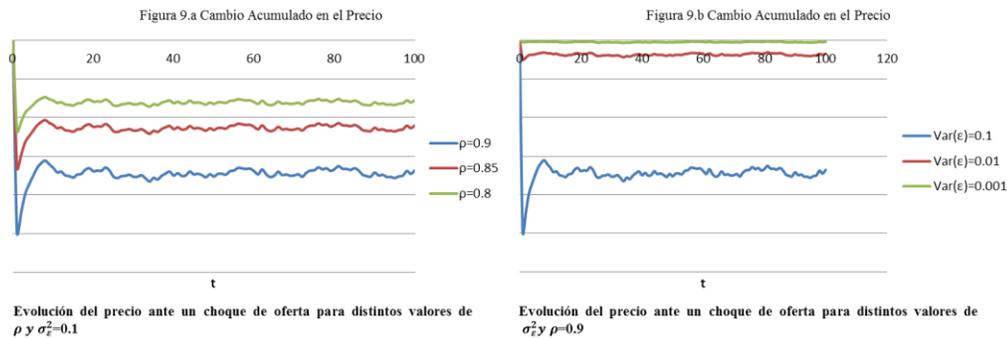
$$var(x_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \rho^2)}$$

Siendo esto así, existen tres formas de reducir la varianza de los dividendos. La primera es disminuyendo σ_ε^2 , la segunda es disminuyendo ρ y, finalmente, reduciendo simultáneamente σ_ε^2 y ρ . La Figura 9 ($k = 9$; $q = 0.8$; $\phi = \theta = 1$), muestra distintas trayectorias para distintos valores de ρ y σ_ε^2 . Se anexan dos figuras, Figura 9.a ($k=9$; $q=0.8$; $\phi=\theta=1$; $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1$), y Figura 9.b ($k=9$; $q=0.8$; $\phi=\theta=1$; $\rho = 0.9$), a fin de observar el comportamiento del precio ante cambios aislados en cada uno de los determinantes de la varianza, σ_ε^2 o ρ .



Evolución del precio ante un choque de oferta para distintos valores de σ_ε^2 y ρ .

que los dividendos sean constantes en el tiempo con el fin de aislar el efecto de la oferta (nótese que en este caso la matriz B definida en la Sección 2 (véase ecuación 11), es una matriz de ceros y, que por tanto el sistema que resuelve para los coeficientes endógenos se indetermina).



Lintner (1956) presenta algunos de los resultados generales más importantes de los estudios realizados hasta esa fecha por la Escuela de Negocios de Harvard sobre la política de dividendos corporativos, donde remarca el “*conservadurismo*” (en palabras de Lintner) observado en general en el comportamiento de los dividendos, que se deriva de políticas encaminadas a “*estabilizar la distribución y proporcionar consistencia de los dividendos*”.

En realidad, este resultado teóricamente hace sentido. Recordemos que el modelo supone que los inversionistas presentan preferencias de media-varianza. Conforme disminuya la varianza de los dividendos, también lo hace la varianza del ingreso futuro asociado a la compra de activos riesgosos²³. Por lo que ahora los inversionistas estarán dispuestos a canalizar una mayor cantidad de recursos a la compra de activos riesgosos, de manera que no es necesaria una gran concesión en el precio a fin de que cualquier choque de oferta sea absorbido. Siendo esto así, el hecho de que observemos el patrón que muestra la evidencia empírica (del precio ante un choque de oferta), puede estar muy bien en función de las propiedades asumidas para el proceso que genera los dividendos antes que a la inactividad del inversionista.

La conclusión general es que, a menos que se asuma significativa aversión al riesgo y exista considerable variabilidad de los dividendos, el modelo de inatención no puede

²³ Véase la definición de $Var(R_{t+k} | Y_t) = \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ en el Apéndice 1.

explicar el patrón descrito por los precios en la evidencia empírica²⁴. En el mejor de los casos, a partir de lo observado, *podría* esperarse que aún bajo algunas condiciones extremas (poca aversión al riesgo y variabilidad de los dividendos), el modelo logre replicar el comportamiento observado de los precios a medida que los periodos de intención sean extremadamente grandes. Por la limitante del tiempo, puesto que se requiere de un gran número de horas para obtener resultados con k grandes (al menos utilizando Mathematica 8.0), esta última hipótesis no se pudo constatar, pero basándonos tan solo en las tendencias observadas a lo largo del trabajo puede ser posible. Aun si fuera este el caso, estos periodos deberían ser *muy* grandes, lo cual nos lleva a otra interrogante: qué tan viable es suponer valores de k , por ejemplo cercanos a 60, o aún más, a 100 para apenas, probablemente, ver un impacto visible en los precios.

²⁴ Replicando los resultados obtenidos por Duffie (2010), notamos que para cualquier valor de k y q , mantenido todo lo demás similar, el efecto inicial en el precio ante el choque es más débil, por lo que esta hipótesis debe cumplirse (incluso verse aún con más claridad) para el caso particular presentado por Duffie (2010).

4. Conclusión

El presente trabajo mostró que a menos que se asuma significativa aversión al riesgo, el modelo de inatención no puede explicar el patrón descrito por los precios en la evidencia empírica. Éste hecho se evidencia aún más bajo ciertas propiedades asumidas en el proceso definido para los dividendos. En particular, se observó que conforme disminuya la varianza de dicho proceso el impacto inicial en los precios, característico de un choque de oferta, se debilita significativamente. Si bien, bajo algunas condiciones el modelo no logra explicar la drástica respuesta de los precios ante choques de oferta, esto no indica de ninguna manera que el fenómeno en sí, la intención del inversionista, no sea un factor determinante en la formación de los precios. Tan solo muestra que los resultados, obtenidos bajo los supuestos que rigen el modelo, no son tan robustos como se creía y que bien vale la pena hacer estudios todavía más precisos. En principio atender las hipótesis, que por falta de tiempo no se pudieron corroborar y, de igual interés, sería establecer que tan robustos son los resultados presentados al método numérico utilizado.

Por último, sería una de gran provecho calibrar el modelo. Se tienen series de tiempo por ejemplo, para los dividendos²⁵, las tasas de interés, se tienen registros de las acciones en circulación y, existen varios estudios que muestran como estimar coeficientes de aversión absoluta al riesgo “razonables” a partir de las primas por riesgo (véase por ejemplo Babcock, Choi y Feinerman 1993)²⁶, en suma, en principio todo es observable. Introducir la dimensión temporal al modelo puede decirnos mucho, por ejemplo, que valores son razonables de k , estableciendo así con mucha más precisión el papel que juega la inatención en el comportamiento de los precios. Tal vez, el reto más grande sea buscar una solución al hecho de que los precios de los activos no pueden ser negativos. En un principio se buscó solucionar el problema eliminando el supuesto de normalidad, sin embargo no fue posible. Timmerman (1996) ataca esta problemática de manera mucho más simple y, muy probablemente se podría hacer algo similar para nuestro caso. El reto puede no ser

²⁵ Timmermann (1996), estima un AR(1) a partir de bases anuales de dividendos (reales en niveles) del S&P 500.

²⁶ Quienes muestran como seleccionar coeficientes (ARA) apropiados, para el caso en particular de utilidades con ARA constante, como es el caso de la función exponencial asumida en nuestro caso.

fácil, pero sí de gran provecho: “...se ha avanzado tanto que estamos en posición de construir modelos de equilibrio general, con fundamentos microeconómicos, donde interactúan agentes inatentos. Esto no es una tarea fácil, y sigue habiendo varios (pero interesantes) obstáculos a superar. Dado el éxito que los modelos basados en la inatención han tenido en la descripción de los datos, esto parece ser una actividad que bien vale la pena seguir.” (Reis, 2005)

Referencias

- Alessie, R., Kapteyn, A., & Lusardi, A., (1999). "Saving after retirement: evidence from three different surveys". *Labour Economics* 6 (2), 277-310.
- Ameriks, J., & Zeldes, S. (2004). "How do household portfolio shares vary with age?". *Documento de trabajo, Columbia University*.
- Babcock, B. A., Choi, E., & Feinerman, E. (1993). "Risk and Probability Premiums for CARA Utility Functions". *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 18(1), 17-24.
- Bacchetta, P., & van Wincoop, E. (2009). "Infrequent Portfolio Decisions: A Solution to the Forward Discount Puzzle". *American Economic Review*, 100(3), 870-904.
- Black, F., (1972). "Capital market equilibrium with restricted borrowing". *Journal of Business* 45, 444-455.
- Blume, M., & Edelen, R., (2001). "On replicating the S&P 500 index". *Documento de trabajo, University of Pennsylvania-Finance Department*.
- Breeden, D. T., Gibbons, M. R., & Litzenberger, R. H. (1986). "Empirical tests of the consumption oriented CAPM". *Documento de trabajo, Stanford University*.
- Brunnermeier, M. K., & Nagel, S., (2008). "Do wealth fluctuations generate time-varying risk aversion? Micro-evidence on individual's asset allocation". *American Economic Review* 98:3, 713-736.
- Burden, R. L., Faires, J. D., & Nagel, Simon Monchon, C., (2001). *Análisis numérico*. 7 Ed. Cengage Learning Editores. 839 pgs.
- Calvet, L. E., Campbell, J. Y., & Sodini, P., (2009). "Fight or flight? Portfolio rebalancing by individual investors". *Journal of Political Economy* 107(2), 205-251.
- Caballero, R. J., (1995). "Near-rationality, heterogeneity, and aggregate consumption". *Journal of Money, Credit and Banking* 27(1), 29-48.
- Chen, H., Noronha, G., & Singal, V. (2004). "The Price Response to S&P 500 Index Additions and Deletions: Evidence of Asymmetry and a New Explanation". *Journal of Finance*, 59(4), 1901-1929.

- Collender, R. N., & Zilberman, D. (1985). "Land Allocation Decisions Under Alternative Return Distributions". *American Journal of Agricultural Economics*, 67: 727-31.
- Duffie, D. (2010). "Presidential Address: Asset Price Dynamics with Slow-Moving Capital". *Journal of Finance*, 65(4), 1237-1267.
- Gabaix, X., & Laibson, D., (2002). "The 6D bias and the equity premium puzzle". *NBER Macroeconomics Annual*, 257-311.
- Hansen, L., & Singleton, K. J. (1982). "Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models". *Econometrica*, 50, 1269-1285.
- Hansen, L., & Singleton, K. J. (1983). "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns". *Journal of Political Economy*, 91(2), 249-265.
- Hurst, E., (2003). "Grasshoppers, ants and pre-retirement wealth: a test of permanent income consumers". *NBER Documento de trabajo*, 10098.
- Kleidon, A. W. (1986). "Bias in Small Sample Tests of Stock Price Rationality". *Journal of Business*, 59(2), 237-261.
- Lintner, J. (1956). "Distribution of Incomes of Corporations Among Dividends, Retained Earnings, and Taxes". *American Economic Review*, 46(2), 97-113.
- Lintner, J. (1965). "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets". *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- Love, H. A., & Buccola, S. T., (1991). "Joint Risk Preference – Technology Estimation with a Primal System". *American Journal of Agricultural Economics*, 73: 765-74.
- Lusardi, A., (2003). "Planning and savings for retirement". *Documento de trabajo*, Dartmouth College.
- Lynch, A. W. (1996). "Decision Frequency and Synchronization Across Agents: Implications for Aggregate Consumption and Equity Return". *Journal of Finance*, 51(4), 1479-1497.
- Mitchell, M., Pulvino, T., & Stafford, E. (2004). "Price Pressure around Mergers". *Journal of Finance*, 59(1), 31-63.
- Moscarini, G., (2004). "Limited information capacity as a source of inertia". *Journal of Economic Dynamics and Control* 28 (10), 2003-2035.

- Obstfeld, M., & Rogoff, K., (2009). "Global Imbalances and the Financial Crisis: Products of Common Causes". *Documento de trabajo, Harvard University*.
- O'Hara, M., (1995). *Market Microstructure Theory, Blackwell*. Oxford.
- Reis, R. (2005). "Inattentive Producers". *Review of Economic Studies*, 73(3), 793-821.
- Reis, R. (2006). "Inattentive Consumers". *Journal of Monetary Economics*, 53(8), 1761-1800.
- Sharpe, W. F. (1964). "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk". *Journal of Finance*, 19, 425-442.
- Shiller, R. J. (1981). "Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?". *American Economic Review*, 71(3), 421-436.
- Stapleton, R. C., & Subrahmanyam, M. G. (1978). "A multiperiod equilibrium asset pricing model". *Econometrica* 46, 1077-1096.
- Stein, J.C., (2009). "Presidential Address: Sophisticated Investors and Market Efficiency". *Journal of Monetary Economics*, 53(8), 1761-1800.
- Timmermann, A. (1996). "Excess Volatility and Predictability of Stock Prices in Autoregressive Dividend Models with Learning". *Review of Economic Studies*, 63(4), 523-557.

Apéndices

Apéndice 1. Caracterización del equilibrio

Denotando al vector:

$$\mathbf{H}_t = (D_{t-1}, D_{t-2}, \dots, D_{t-(k-1)})^T \dots(1)$$

Como el vector de cantidades mantenidas fuera del mercado por inversionistas infrecuentes, el vector estado es:

$$\mathbf{Y}_t = (\Phi_t^T, \mathbf{H}_t^T)^T \dots(2)$$

Donde, Φ_t es un VAR de variables arbitrarias de dimensión n que satisface:

$$\Phi_{t+1} = \Lambda \Phi_t + \Sigma^{1/2} \epsilon_{t+1} \dots(3)$$

Para algún vector ϵ_t de variables aleatorias iid normales, con media cero y varianza unitaria, de dimensión n .

La oferta y dividendo del activo son procesos exógenos de la forma:

$$Z_t = \beta_z^T \Phi_t \dots(4)$$

$$X_t = \beta_x^T \Phi_t \dots(5)$$

Para algunos vectores β_z y β_x de coeficientes dados de dimensión n .

Se asume un equilibrio estacionario lineal, donde:

- 1) El precio del activo es de la forma:

$$S_t = \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_t \dots(6)$$

- 2) La demanda del inversionista inatento es de la forma:

$$D_t = \mathbf{a}^t \mathbf{Y}_t \dots(7)$$

- 3) La demanda del inversionista frecuente es de la forma:

$$K_t = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}_t \dots(8)$$

Bajo estos supuestos, la dinámica del vector estado viene dada por:

$$\mathbf{Y}_{t+1} = A(\mathbf{a})\mathbf{Y}_t + B\epsilon_{t+1} \dots(9)$$

$$\text{Dónde } A(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} A_{n \times n} & & 0_{n \times (k-1)} \\ & \mathbf{a}^T & \\ 0_{(k-2) \times n} & \Pi_{(k-2)} & \mathbf{0}_{(k-2)} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \Sigma^{1/2} \\ 0_{(k-1) \times n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \mathbf{Y}_{t+1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{t+1} \\ \mathbf{H}_{t+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Lambda \boldsymbol{\Phi}_t + \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_{t+1} \\ D_t \\ D_{t-1} \\ \vdots \\ D_{t-(k-2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Lambda \boldsymbol{\Phi}_t + \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_{t+1} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{Y}_t \\ D_{t-1} \\ \vdots \\ D_{t-(k-2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & \cdots & \Lambda_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{n,1} & \cdots & \Lambda_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{1,1} & \cdots & 0_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n,1} & \cdots & 0_{n,k-1} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_1 & \cdots \mathbf{a}_{n+(k-1)} \\ \begin{pmatrix} 0_{1,1} & \cdots & 0_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k-2,1} & \cdots & 0_{k-2,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{1,1} & \cdots & 0_{1,k-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k-2,1} & \cdots & 1_{n,k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_{k-2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{1,t} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{n,t} \\ D_{t-1} \\ \vdots \\ D_{t-(k-1)} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \cdots & \Sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{n,1} & \cdots & \Sigma_{n,n} \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \begin{pmatrix} 0_{1,1} & \cdots & 0_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k-2,1} & \cdots & 1_{k-2,n} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{1,t+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n,t+1} \end{bmatrix} \\
&= A(\mathbf{a})\mathbf{Y}_t + B\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}
\end{aligned}$$

Con esto último, fácilmente se pueden calcular los momentos condicionales de \mathbf{Y}_{t+k} .

$$1) \quad E(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) = A(\mathbf{a})^k \mathbf{Y}_t \quad \dots(10)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad E(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) &= E\{A(\mathbf{a})^k \mathbf{Y}_t + \sum_{j=1}^k A(\mathbf{a})^{k-j} B \boldsymbol{\epsilon}_{t+j} | \mathbf{Y}_t\} \\
&= E\{A(\mathbf{a})^k \mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_t\} + E\{\sum_{j=1}^k A(\mathbf{a})^{k-j} B \boldsymbol{\epsilon}_{t+j} | \mathbf{Y}_t\} \\
&= A(\mathbf{a})^k E\{\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_t\} + \sum_{j=1}^k A(\mathbf{a})^{k-j} B E\{\boldsymbol{\epsilon}_{t+j} | \mathbf{Y}_t\} \\
&= A(\mathbf{a})^k \mathbf{Y}_t
\end{aligned}$$

$$2) \quad cov(\mathbf{Y}_{t+i} \mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t) = \sum_{l=1}^{\min(i,j)} (A(\mathbf{a})^{i-l} B) (A(\mathbf{a})^{j-l} B)^T \quad \dots(11)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad cov(\mathbf{Y}_{t+i}\mathbf{Y}_{t+j}|\mathbf{Y}_t) &= E\{(\mathbf{Y}_{t+i} - A(\mathbf{a})^k \mathbf{Y}_t)(\mathbf{Y}_{t+j} - A(\mathbf{a})^k \mathbf{Y}_t)|\mathbf{Y}_t\} \\
&= E\left\{\left(\sum_{l=1}^i A(\mathbf{a})^{i-l} B \boldsymbol{\epsilon}_{t+l}\right)\left(\sum_{m=1}^j A(\mathbf{a})^{j-m} B \boldsymbol{\epsilon}_{t+l}\right)^T \middle| \mathbf{Y}_t\right\} \\
&= \sum_{l=1}^i \sum_{m=1}^j A(\mathbf{a})^{i-l} B E\{\boldsymbol{\epsilon}_{t+l}\boldsymbol{\epsilon}_{t+l}^T | \mathbf{Y}_t\} B^T A(\mathbf{a})^{j-mT} \\
&= \sum_{l=1}^{\min(i,j)} A(\mathbf{a})^{i-l} B E\{\boldsymbol{\epsilon}_{t+l}\boldsymbol{\epsilon}_{t+l}^T | \mathbf{Y}_t\} B^T A(\mathbf{a})^{j-lT} \\
&= \sum_{l=1}^{\min(i,j)} A(\mathbf{a})^{i-l} B \sigma_\epsilon \Pi_n B^T A(\mathbf{a})^{j-lT} \\
&= \sum_{l=1}^{\min(i,j)} (A(\mathbf{a})^{i-l} B) (A(\mathbf{a})^{j-l} B)^T
\end{aligned}$$

Sean θ y ϕ la media armónica del coeficiente de aversión absoluta al riesgo de los inversionistas no frecuentes y frecuentes, respectivamente, y, además r la tasa de retorno bruta a la inversión libre de riesgo. Puesto que se asume que los inversionistas no frecuentes reinvierte los dividendos a la tasa libre de riesgo hasta su siguiente fecha de operación, su demanda viene dada por:

$$D_t = \frac{q}{k} \frac{E_t(R_{t+k}) - r^k S_t}{\theta V_t(R_{t+k})} \dots(12)$$

Donde E_t y V_t son la media y varianza condicional respectivamente dado Y_t y,

$$R_{t+k} = S_{t+k} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} X_{t+i}$$

La demanda de inversionistas frecuentes es:

$$K_t = (1 - q) \frac{E_t(S_{t+1} + X_{t+1}) - r S_t}{\phi V_t(S_{t+1} + X_{t+1})} \dots(13)$$

Retomando la conjetura sobre el equilibrio calculamos los momentos condicionales de R_{t+k} .

- Antes recordemos de (5) que

$$\begin{aligned}
X_t &= \beta_x^T \Phi_t \\
&= (\beta_x^T, 0^T)(\Phi_t^T, H_t^T)^T \\
&= (\beta_x^T, 0^T) Y_t
\end{aligned}$$

Por tanto

$$X_t = \boldsymbol{\Gamma}^T Y_t \text{ donde } \boldsymbol{\Gamma}^T = (\beta_x^T, 0^T)^T$$

$$1) \quad E_t(R_{t+k}) = (\mathbf{c}^T A(\mathbf{a})^k + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \boldsymbol{\Gamma}^T A(\mathbf{a})^i) \mathbf{Y}_t \dots(14)$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad E_t(R_{t+k}) &= E(S_{t+k} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} X_{t+i} | \mathbf{Y}_t) \\
&= E(\mathbf{c}^T \mathbf{Y}_{t+k} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{Y}_{t+i} | \mathbf{Y}_t) \\
&= \mathbf{c}^T E(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T E(\mathbf{Y}_{t+i} | \mathbf{Y}_t) \\
&= (\mathbf{c}^T A(\mathbf{a})^k + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T A(\mathbf{a})^i) \mathbf{Y}_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad V_t(R_{t+k}) &= \mathbf{c}^T V_t(\mathbf{Y}_{t+k}) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{c}^T \text{cov}_t(\mathbf{Y}_{t+k}, \mathbf{Y}_{t+i}) \mathbf{\Gamma} + \\
&\quad \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T \text{cov}_t(\mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{Y}_{t+k}) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k r^{2k-i-j} \mathbf{\Gamma}^T \text{cov}_t(\mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{Y}_{t+j}) \mathbf{\Gamma} = \\
&\quad \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \dots (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad V_t(R_{t+k}) &= \text{cov}(R_{t+k} | \mathbf{Y}_t) \\
&= \text{cov}(\mathbf{c}^T \mathbf{Y}_{t+k} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_{t+k} + \sum_{j=1}^k r^{k-j} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t) \\
&= \text{cov}(\mathbf{c}^T \mathbf{Y}_{t+k}, \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) + \\
&\quad \text{cov}(\mathbf{c}^T \mathbf{Y}_{t+k}, \sum_{j=1}^k r^{k-j} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t) + \\
&\quad \text{cov}(\sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) + \\
&\quad \text{cov}(\sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{Y}_{t+i}, \sum_{j=1}^k r^{k-j} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t) \\
&= \mathbf{c}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+k}, \mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{c} + \sum_{j=1}^k r^{k-j} \mathbf{c}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+k}, \mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{\Gamma} + \\
&\quad \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{c} + \\
&\quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k r^{2k-i-j} \mathbf{\Gamma}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{\Gamma} \\
&= \mathbf{c}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+k}, \mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{c}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+k}, \mathbf{Y}_{t+i} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{\Gamma} + \\
&\quad \sum_{i=1}^k r^{k-i} \mathbf{\Gamma}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{c} + \\
&\quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k r^{2k-i-j} \mathbf{\Gamma}^T \text{cov}(\mathbf{Y}_{t+i}, \mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t) \mathbf{\Gamma} \\
&= \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})
\end{aligned}$$

Notemos que $E_t(S_{t+1} + X_{t+1}) = E_t(R_{t+1})$, por lo que de los resultados anterior tenemos:

$$E_t(S_{t+1} + X_{t+1}) = (\mathbf{c} + \mathbf{\Gamma})^T A(\mathbf{a}) \mathbf{Y}_t \dots (16)$$

$$V_t(S_{t+1} + X_{t+1}) = (\mathbf{c} + \mathbf{\Gamma})^T B B^T (\mathbf{c} + \mathbf{\Gamma}) = \sigma_1^2(\mathbf{c}) \dots (17)$$

En equilibrio se vacían los mercados:

$$D_t + K_t = Z_t - \mathbf{1} \cdot \mathbf{H}_t \dots (18)$$

De la conjetura sobre el equilibrio tenemos:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{Y}_t + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})^T \mathbf{Y}_t = \mathbf{B}_z^T \Phi_t - \mathbf{1} \cdot \mathbf{H}_t$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \mathbf{a}^T \mathbf{Y}_t + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})^T \mathbf{Y}_t &= (\mathbf{B}_z^T, -\mathbf{1}^T) (\boldsymbol{\Phi}_t^T, \mathbf{H}_t^T)^T \\
\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_t + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cdot \mathbf{Y}_t &= (\mathbf{B}_z^T, -\mathbf{1}^T)^T \cdot (\boldsymbol{\Phi}_t^T, \mathbf{H}_t^T)^T \\
\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_t + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cdot \mathbf{Y}_t &= (\mathbf{B}_z^T, -\mathbf{1}^T)^T \cdot \mathbf{Y}_t \\
\rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= \mathbf{g}_{\dots(19)} \quad \text{donde } \mathbf{g} = (\mathbf{B}_z^T, -\mathbf{1}^T)^T
\end{aligned}$$

Finalmente resolvemos para los coeficientes endógenos.

- 1) Puesto que $E_t(R_{t+k})$ es lineal en \mathbf{Y}_t y $\sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ es determinística:

$$D_t = \frac{q}{k} \frac{E_t(R_{t+k}) - r^k S_t}{\theta \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_t \quad \dots(20)$$

Trabajamos el dividendo del segundo término de la igualdad

$$\begin{aligned}
E_t(R_{t+k}) - r^k S_t &= (\mathbf{c}^T A(\mathbf{a})^k + \sum_{i=1}^k r^{k-i} \boldsymbol{\Gamma}^T A(\mathbf{a})^i) \mathbf{Y}_t - r^k \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_t \\
&= (\mathbf{c}^T A(\mathbf{a})^k - r^k \mathbf{c}^T) \mathbf{Y}_t + (\sum_{i=1}^k r^{k-i} \boldsymbol{\Gamma}^T A(\mathbf{a})^i) \mathbf{Y}_t \\
&= (\mathbf{c}^T A(\mathbf{a})^k - r^k \mathbf{c}^T)^T \cdot \mathbf{Y}_t + (\sum_{i=1}^k r^{k-i} \boldsymbol{\Gamma}^T A(\mathbf{a})^i)^T \cdot \mathbf{Y}_t \\
&= \left\{ (\mathbf{c}^T A(\mathbf{a})^k - r^k \mathbf{c}^T)^T + (\sum_{i=1}^k r^{k-i} \boldsymbol{\Gamma}^T A(\mathbf{a})^i)^T \right\} \cdot \mathbf{Y}_t \\
&= \left\{ (\mathbf{c}^T A(\mathbf{a})^k - r^k \mathbf{c}^T)^T + (\sum_{i=1}^k r^{k-i} \boldsymbol{\Gamma}^T A(\mathbf{a})^i)^T \right\} \cdot \mathbf{Y}_t \\
&= \left\{ (A(\mathbf{a})^{kT} \mathbf{c} - r^k \mathbf{c}) + (\sum_{i=1}^k r^{k-i} A(\mathbf{a})^{iT} \boldsymbol{\Gamma}) \right\} \cdot \mathbf{Y}_t \\
E_t(R_{t+k}) - r^k S_t &= \left\{ (A(\mathbf{a})^{kT} - r^k I) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} A(\mathbf{a})^{iT} \boldsymbol{\Gamma} \right\} \cdot \mathbf{Y}_t \quad \dots(21)
\end{aligned}$$

De (19) y (20) se infiere:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{k} \frac{\left\{ (A(\mathbf{a})^{kT} - r^k I) \mathbf{c} + \sum_{i=1}^k r^{k-i} A(\mathbf{a})^{iT} \boldsymbol{\Gamma} \right\}}{\theta \sigma_k^2(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \quad \dots(22)$$

- 2) Similarmente de la demanda de los inversionistas frecuentes se obtiene:

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = (1 - q) \frac{\{ (A(\mathbf{a})^T - r I) \mathbf{c} + A(\mathbf{a})^T \boldsymbol{\Gamma} \}}{\phi \sigma_1^2(\mathbf{c})} \quad \dots(23)$$

3) Finalmente, de (19) y (23) se tiene:

$$\mathbf{c} = (A(\mathbf{a})^T - rI)^{-1} \left(\frac{\phi \sigma_1^2(\mathbf{c})}{1 - q} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) - A(\mathbf{a})^T \mathbf{r} \right) \dots(24)$$

En cualquier equilibrio estacionario se deben cumplir (22) y (24).

Apéndice 2. Dificultad para caracterizar analíticamente la dinámica del precio.

$$A(\mathbf{a})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$$

$$A(\mathbf{a})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 a_3^2 + a_1 a_4 & a_2 a_3^2 + a_2 a_4 & a_3 a_4 + a_3(a_3^2 + a_4) & a_3^2 a_4 + a_4^2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 + a_4 & a_3 a_4 \end{pmatrix}$$

$$A(\mathbf{a})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 a_3 a_4 + a_3(a_1 a_3^2 + a_1 a_4) + a_1 a_3 & a_2 a_3 a_4 + a_3(a_2 a_3^2 + a_2 a_4) + a_2 a_3 & a_3(a_3^2 + a_4) + a_3 a_4 + a_3(a_3 a_4 + a_3(a_3^2 + a_4) + a_3) & a_4 a_3 + a_4(a_3 a_4 + a_3) + a_3(a_3^2 + a_3(a_3 a_4 + a_3)) & a_3 a_4 a_3 + a_3^2 + a_3(a_3^2 a_3 + a_4 a_3) \\ a_1 a_3^2 + a_1 a_4 & a_2 a_3^2 + a_2 a_4 & a_3 a_4 + a_3(a_3^2 + a_4) + a_3 & a_3^2 + a_3(a_3 a_4 + a_3) & a_3^2 a_3 + a_4 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 + a_4 & a_3 a_4 + a_3 & a_3 a_3 \end{pmatrix}$$

Apéndice 3. Pseudocódigo (método de Newton para sistemas no lineales)

Para aproximar la solución del sistema no lineal $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ dada una aproximación inicial

\mathbf{x} :

ENTRADA número n de ecuaciones e incógnitas; aproximación inicial $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$,

tolerancia TOL : número máximo de iteraciones N .

SALIDA solución aproximada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ o un mensaje de que se rebasó el número de iteraciones.

Paso 1 Tome $k = 1$.

Paso 2 Mientras ($k \leq N$) haga los pasos 3-7.

Paso 3 Calcule $F(\mathbf{x})$ y $J(\mathbf{x})$, donde $J(\mathbf{x})_{i,j} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Paso 4 Resuelva el sistema lineal $n \times n$ $J(\mathbf{x})\mathbf{y} = -F(\mathbf{x})$,

Paso 5 Tome $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$

Paso 6 Si $\|\mathbf{y}\| < TOL$, entonces SALIDA (\mathbf{x}):

(Procedimiento terminado exitosamente)

PARAR.

Paso 7 Tome $k = k + 1$

Paso 8 Salida (“Número máximo de iteraciones excedido”);

(Procedimiento terminado sin éxito)

PARAR.