

EL COLEGIO DE MEXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRIA EN ECONOMIA

TEORIA ECONOMICA Y TEORIA DE CONTROL

Enrique Ramón Casares Gil

Promoción 1979-81

Mayo, 1990.

ASESOR: Dr. Carlos Manuel Urzúa

REVISOR: Dr. Jorge Ludlow

AGRADECIMIENTOS.

En todo trabajo de tesis es indispensable el soporte y la ayuda, tanto académica, como emotiva, para la realización exitosa de éste.

Quiero dar las gracias al Dr. Rafael Kelly con el que he trabajado y convivido los últimos años, ya que gracias al trabajo conjunto tuve la oportunidad de introducirme en los temas más especializados de la teoría de control. Al Dr. Angel Calderón y al Dr. Carlos Urzua por sus comentarios y paciencia, ya que sin ésta, este trabajo de tesis no se hubiera realizado. Al Colegio de México y a la Universidad Autónoma Metropolitana - Azcapotzalco en donde he realizado mis proyectos de investigación. En especial estoy profundamente agradecido por el apoyo no lineal académico y emotivo de Gilma Garza, así como el apoyo incondicional de mis padres Beatriz y Ramón, de Mela, Mercedes y Melinda.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se aplican una serie de técnicas de la teoría de control a un tipo específico de problemas de política económica. Dichos problemas que surgen cuando se desea que ciertas variables económicas alcancen un cierto valor determinado por los diseñadores de la política económica. Las técnicas de control utilizadas son la teoría sobre control no lineal con objetivo de seguimiento de trayectorias y la teoría del control adaptable con este tipo de seguimiento también. Se supone que el proceso de acumulación de una sociedad dada está regida por el modelo unisectorial neoclásico de crecimiento económico. Se explica y se diseña un controlador no lineal para que la economía en cuestión alcance cualquier trayectoria deseada por los diseñadores de la política económica. Además se plantea el problema de que la economía en cuestión alcance un valor del consumo por unidad de trabajo máximo. Esto se logra por medio del uso del controlador no lineal diseñado. Se efectúa una simulación para ejemplificar esto. Se compara el controlador no lineal con los principios de la teoría del

control óptimo. Por último se considera que el modelo económico en cuestión posee un parámetro difícil de estimar, por lo tanto incierto. Para lograr controlar modelos con estas propiedades se hace indispensable el uso del control adaptable. Se explica y se diseña un controlador adaptable con el fin de que ciertas variables económicas alcancen valores deseados por los diseñadores, aun cuando el modelo posee incertidumbre paramétrica. Se realiza una simulación para ejemplificar esto.

Indice.

I.	Introducción	1
II.	El crecimiento económico	4
III.	Objetivos de la política económica	8
	III.1 Planteamiento	8
	III.2 Control no lineal	11
	III.3 Regla de Oro	14
	III.3.1. Simulación I	19
	III.4 Control adaptable	24
	III.4.1. Simulación II	29
IV.	Conclusiones	34
	Referencias bibliográficas	35

I. Introducción.

Como es conocido, el uso de las técnicas de control en la ciencia económica es amplio. Estas aplicaciones han consistido en la utilización de los diferentes instrumentos de la teoría de control, tales como las técnicas de control óptimo, control estocástico y otras más. El uso específico de ciertos principios analíticos de la teoría de control, depende del planteamiento del problema económico a resolver. Así, cuando el objetivo es diseñar una trayectoria óptima en donde se está optimizando un cierto criterio económico, la utilización de la teoría de control óptimo es la adecuada. En concordancia a esto, en este trabajo de tesis se muestran algunas aplicaciones del instrumental teórico más reciente de las técnicas de control no lineal con objetivo de seguimiento de trayectorias y del control adaptable también. Eso es así, porque en este trabajo se plantea la solución de una cierta clase de problemas de política económica. Problemas de política económica que surgen cuando los diseñadores de la política económica fijan metas deseadas o trayectorias deseadas para ciertas variables económicas y el modelo utilizado para analizar el comportamiento de estas variables

tiene características no lineales y además algunos parámetros del modelo son difíciles de cuantificar. Como es obvio, el objetivo del control no lineal es la de controlar modelos no lineales y la vocación del control adaptable es la de tratar con modelos en donde algunos de los parámetros del modelo son inciertos, esto es, hay dificultad de estimar el valor numérico de algunos parámetros. Estas características se presentan frecuentemente en los modelos económicos complejos y "reales" que se estudian hoy en día. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es el de mostrar la utilidad de ciertas técnicas de control para la solución de una cierta clase de problemas de política económica.

Como es sabido, la teoría de control utiliza las entradas del modelo para controlar las salidas de dicho modelo. La manipulación de las entradas tiene en general el objetivo que las salidas del modelo tiendan y alcancen asintóticamente con respecto al tiempo unas trayectorias deseadas, seleccionadas por los diseñadores de la política económica. En otras palabras se desea que las salidas del modelo tiendan asintóticamente a las salidas deseadas. Este es el planteamiento general de los problemas de control con objetivo de seguimiento de trayectorias. Por lo tanto aquí se utilizan estas técnicas de control para la solución de

problemas de política económica en donde el "Ministerio de Programación" desea que la economía se dirija hacia los objetivos (trayectorias) deseados por la sociedad, considerados por los diseñadores de la política económica.

Para este fin se supone que el crecimiento económico de nuestra economía en cuestión está regida por el modelo de crecimiento presentado por Solow (1956). Hay que aclarar que las técnicas de control no lineal y de control adaptable fueron aplicadas al modelo de Solow (1956) en Kelly, Cásares y Garza (1988), pero con supuestos y objetivos diferentes.

La organización del trabajo es la siguiente: en la sección II se presenta el modelo de crecimiento económico de Solow (1956) dentro del contexto de la teoría de control. En la sección III se plantean algunos problemas de política económica y su solución utilizando las técnicas de control no lineal y del control adaptable, y finalmente en la sección IV se presentan las conclusiones.

II. EL CRECIMIENTO ECONOMICO.

Se supone que el proceso de acumulación de capital de una cierta economía está regida por el modelo de crecimiento de Solow (1956). Excelentes presentaciones se encuentran en Burmeister y Dobell (1970) y Jones (1975). Los supuestos que se utilizan son los siguientes:

A) La fuerza de trabajo con progreso técnico crece a una tasa constante dada exógenamente:

$$E/E = n + \lambda ; \quad x = dx/dt$$

donde:

E: fuerza de trabajo con progreso técnico ó trabajo efectivo.

n: tasa de crecimiento de la población dada exógenamente. ($L/L = n$, donde L es la fuerza de trabajo).

λ : tasa de crecimiento del progreso técnico también dada exógenamente.

B) Se utiliza una función de producción CES (elasticidad de sustitución constante)

$$Q = A [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

en donde:

Q: producto

A: estado de la tecnología. $A > 0$

K: acervo de capital

δ : parámetro distributivo, $0 < \delta < 1$

σ : elasticidad de sustitución. $\sigma = 1 / (1 + \rho)$

$\rho > -1$.

La producción por unidad de trabajo efectivo (q), (una función de producción de producción con rendimientos constantes a escala) será:

$$q = A [\delta k^{-\rho} + (1 - \delta)]^{-1/\rho} \quad (2.1)$$

donde k es la relación capital trabajo efectivo.

C) Se utiliza una función de ahorro proporcional: $S = sQ$, donde s es la tasa de ahorro. La trayectoria de la relación Capital - trabajo efectivo (K/E), entonces está regida por la siguiente ecuación diferencial:

$$k/k = sf(k) / k - E/E$$

en donde $f(k)$ es una función de producción per cápita neoclásica de buen comportamiento ó de rendimientos constantes a escala.

Esta ecuación diferencial da la evolución en el tiempo o trayectoria de la relación capital-trabajo efectivo (k). Dada una condición inicial de la relación capital-trabajo efectivo (k_0) y unos valores de los parámetros, la solución de la ecuación diferencial esto es k tenderá a un valor de equilibrio también conocido como el valor de k en el estado estable (k^*). Este valor se alcanza cuando la tasa de variación de la relación capital-trabajo efectivo es cero ($\dot{k}/k = 0$). Esto es, cuando se tiene una k constante. Una vez alcanzado el estado estacionario, la ecuación (2.1) dice que la economía se encuentra en una situación de pleno empleo de los factores productivos (del capital y del trabajo). Ya que en una situación de equilibrio, la ecuación es la condición de pleno empleo, que viene dada por la igualdad entre la tasa garantizada de crecimiento (g) y la tasa natural con progreso técnico ($n + \lambda$). La tasa garantizada (g) como es sabido está definida como el cociente entre la tasa de ahorro (s) y la relación capital-producto ($v = K/Q$) o sea $g = s/v$. Esta trayectoria de equilibrio de pleno empleo, es una trayectoria estable, ya que si por cualquier razón el valor de k se desvía de su valor de equilibrio, la relación capital-trabajo efectivo regresará a su senda de equilibrio. Bajo nuestros supuestos esta ecuación diferencial queda como:

$$\dot{k}/k = \frac{s A [\delta k^{-\rho} + (1 - \delta)]^{-1/\rho}}{k} - [n + \lambda]$$

Esto es una ecuación diferencial no lineal en k . Por lo tanto el modelo económico no lineal completo será:

$$\dot{k} = s A [\delta k^{-\rho} + (1 - \delta)]^{-1/\rho} - [n + \lambda]k \quad (2.2)$$

$$q = A [\delta k^{-\rho} + (1 - \delta)]^{-1/\rho} \quad (2.1)$$

Desde el punto de vista de la teoría de control, la variable de control será s , la variable de estado k y la salida del modelo q . Sabemos que si la tasa de ahorro aumenta, aumentará k y a su vez q . Esta es la relación básica entre las variables.

III. OBJETIVOS DE POLITICA ECONOMICA

III.1. Planteamiento:

Se plantean 3 objetivos de política económica en una economía donde el proceso de acumulación de capital está gobernado por el modelo de crecimiento presentado anteriormente. Primeramente se desea utilizar la variable s como variable de control, para controlar q . Esto es, se desea llevar a la economía hacia una trayectoria de q deseada (q_d). Para lograr este fin, también llamado objetivo de control, se utilizarán las técnicas de control no lineal para el diseño de un controlador no lineal. La función de dicho controlador no lineal será la de controlar el proceso de acumulación y llevar a la economía hacia dicha q_d .

Una vez diseñado el controlador no lineal, se propone el siguiente objetivo. El segundo objetivo consiste en situar a la economía en una relación capital-trabajo (k) efectivo, (k), y producto-trabajo efectivo, (q), que implique una relación consumo-trabajo, (C/L), máximo.

Para realizar este fin se aplica el principio de la regla de oro de la acumulación, Phelps (1961); explicaciones interesantes se encuentran en Nagatani (1981) y Blanchard y Fischer (1989). La regla de oro dice cuanto deberían ser los valores de q y k que garanticen un valor máximo de la relación consumo - trabajo.

Por lo tanto, para situar a la economía en una trayectoria de crecimiento estable, en donde se esté logrando un valor máximo de todos los posibles valores de C/L que puede lograr nuestra economía en cuestión (dado el valor de los parámetros), es necesario únicamente calcular la regla de oro de la acumulación y a partir de ella deducir la trayectoria deseada. En este punto hay que aclarar que el objetivo de la política económica no es el de diseñar un controlador óptimo por medio de las técnicas de programación dinámica y/o Teoría de control óptimo, sino más bien el de utilizar el controlador no lineal para llevar a la economía de una q cualquiera hacia una q_0 que implicaría que el C/L es el máximo posible de entre todos los estados posibles de la economía (dado el valor de los parámetros). Para ejemplificar los resultados teóricos se presentarán una serie de simulaciones.

Por último, como tercer objetivo, se supone desconocido el valor de un parámetro del modelo, de por sí difícil de

cuantificar: el progreso técnico. Por lo tanto en esta etapa del trabajo se hace pertinente el uso del control adaptable, ya que este tiene como vocación el controlar sistemas con parámetros desconocidos.

III.2 Control Nolineal:

En esta parte del trabajo, el diseño del controlador está basado en los más recientes avances sobre linealización por retroalimentación nolineal de estado (Sastry y Bodson, 1989). Esta técnica de linealización consiste en que unidos el controlador y el modelo, ambos forman un sistema estrictamente lineal y no una aproximación lineal. En nuestro caso se utilizará el concepto de linealización desde la entrada al estado. Esta técnica tiene enormes ventajas metodológicas, ya que la teoría sobre sistemas lineales está bien desarrollada y los sistemas lineales son fácilmente manejables.

Para determinar el controlador que por medio de la variable de control s logre el objetivo de seguimiento, esto es, $q(t) \rightarrow q_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, se procede de la siguiente manera. El modelo económico formado por las ecuaciones (2.1) y (2.2) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \mu \\ Y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde: $x = k$, $\mu = s$, $Y = q$. Por lo tanto:

$$f(x) = -[n + \lambda]k$$

$$g(x) = A [\delta k^{-\rho} + (1 - \delta)]^{-1/\rho}$$

$$h(x) = A [\delta k^{-\rho} + (1 - \delta)]^{-1/\rho} \quad (3.2.2)$$

Suponiendo que $g(x)$ es diferente de 0 para todo x , la ley de control está dada por:

$$\mu = \frac{1}{g(x)} [-f(x) + v] \quad (3.2.3)$$

en donde v es una nueva entrada que será definida posteriormente. Sustituyendo (3.2.1) en (3.2.3) se obtiene:

$$\dot{x} = v \quad (3.2.4)$$

que es una ecuación diferencial lineal. Si en el modelo, $h^{-1}(y)$ y $\partial h^{-1}/\partial y$ están definidas y $q_d = Y_d$ y $\dot{q}_d = \dot{Y}_d$ son funciones continuas y acotadas, la nueva entrada puede seleccionarse como:

$$\begin{aligned} v &= \dot{x}_d + \beta (x_d - x) & (\beta > 0) \\ x_d &= h^{-1}(y_d) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Reemplazando (3.2.5) en (3.2.4) se obtiene:

$$\dot{\tilde{x}} = -\beta \tilde{x}$$

en donde $\tilde{x} = x_d - x$.

Esta es una ecuación diferencial lineal cuyas soluciones son exponencialmente decrecientes a cero cuando $\beta > 0$. Por lo tanto $x(t) \rightarrow x_d(t)$ y $y(t) \rightarrow y_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para el modelo de Solow (1956), se tiene que sustituyendo (3.2.2) y (3.2.5) en (3.2.3) se obtiene el controlador no lineal:

$$\dot{s} = \frac{[n + \lambda] k}{A[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)]^{-1/\rho}} + \frac{1}{A[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)]^{-1/\rho}} [\dot{k}_d + \beta \tilde{k}] \quad (3.2.6)$$

$$k_d = \left[\frac{q_d^{-\rho} - A^{-\rho}(1-\delta)}{A^{-\rho}\delta} \right]^{-1/\rho} \quad (3.2.7)$$

en donde: $\tilde{k} = k_d - k$

Nótese que sustituyendo (3.2.6) en (2.2) se obtiene:

$$\dot{\tilde{k}} + \beta \tilde{k} = 0$$

la cual es una ecuación diferencial lineal exponencialmente convergente a cero. Esto quiere decir que $\tilde{k}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y que $k(t) \rightarrow k_d$ y $q(t) \rightarrow q_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto el objetivo de control se cumple. Esto es que la economía se dirigirá hacia las trayectorias de q_d deseadas por los diseñadores de la política económica. El primer

objetivo se ha logrado: el diseño de un controlador no lineal.

III.3 Regla de Oro.

Ahora se plantea el problema que la economía se dirija hacia un valor del producto por unidad de trabajo efectivo en donde se logre el máximo consumo por unidad de trabajo, dado el valor numérico de los parámetros.

Aquí hay que señalar que son equivalentes la maximización del consumo por trabajo (C/L) y la maximización del consumo por trabajo efectivo (C/E), ya que $C/L = e^{\lambda t} C/E$.

Se conoce por técnicas de optimización que la regla de oro de la acumulación se puede obtener por medio de:

$$C/L = e^{\lambda t} [f(k) - sf(k)]$$

y en condiciones de equilibrio, en donde $\dot{k}/k = 0$, se tiene que:

$$sf(k) = (n + \lambda)k$$

por lo tanto:

$$C/L = e^{\lambda t} [f(k) - (n + \lambda)k]$$

derivando con respecto a k :

$$\partial(C/L)/\partial k = e^{\lambda t} [f'(k) - (n + \lambda)] = 0$$

despejando se obtiene la llamada regla de oro de la acumulación:

$$f'(k) = n + \lambda \quad (3.3.1)$$

En donde $f'(k)$ es la productividad marginal del capital.

Se supone que la elasticidad de sustitución es $\sigma = 1$ (supuesto simplificador). Esto implica que $\rho = 0$, pero, aun cuando la división por cero no está permitida, es bien sabido que cuando $\rho \rightarrow 0$ la función de producción CES se aproxima a la función de producción Cobb-Douglas. Por lo tanto se tiene que:

$$q = Ak^{\alpha}$$

cuando $\rho \rightarrow 0$ y recordando que $\alpha = \delta$

Calculando la productividad marginal del capital:

$$\partial q / \partial k = f'(k) = A\alpha k^{\alpha-1}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3.3.1) se obtiene la regla de oro de la acumulación para el caso de una función de producción Cobb-Douglas: $A\alpha k^{\alpha-1} = n + \lambda$. Despejando k de $A\alpha k^{\alpha-1} = n + \lambda$ y sustituyendola en la función de producción Cobb-Douglas se obtiene:

$$q = A \left[\frac{n + \lambda}{A\alpha} \right]^{\alpha/\alpha-1}$$

Por lo tanto se tiene la q_d como:

$$q_d(t) = A \left[\frac{n + \lambda}{A\alpha} \right]^{\alpha/\alpha-1} \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (3.3.1)$$

Este es el valor constante de q que se desea que la economía alcance ya que este valor de q implica un máximo valor de (C/L) , dado el valor de los parámetros.

Bien pudo haberse planteado un problema en términos de programación dinámica y/o teoría de control óptimo. Recordando que en el equilibrio la maximización de (C/L) maximiza también (C/E) , se tiene:

$$\text{Max} \int_0^{t_f} W(C/E) dt$$

$$\text{s.a. } k/k = \frac{s f(k)}{k} - [n + \lambda]$$

$$\delta \quad k = f(k) - (C/E) - [n + \lambda] k$$

$k(0) > 0$ dado; $k(t_f) = k^* \geq 0$. En donde $k(0)$ es la condición inicial y k^* es la condición terminal. k^* puede ser cero y el problema tendrá entonces horizonte infinito. W es una función de utilidad social no ponderada.

Un problema muy particular es la de considerar que la condición inicial $k(0)$ sea la misma para todo período de tiempo, esto es: $k(0) = k(t)$ para todo $t > 0$ y además que el nivel de $k(0)$ sea logrado por medio de capital gratuito (esto es capital recibido sin costo por algún medio). Este valor de k , constante para todo t , corresponderá al que resulte de la solución de este muy particular problema de crecimiento óptimo si se considera un horizonte finito largo, esto es, $k^* = k(t) = k(0)$.

La solución de este problema muy particular nos daría una trayectoria óptima en donde se estaría maximizando el flujo del consumo por trabajo efectivo y precisamente la regla de oro es la condición que maximiza dicho flujo: $\int_0^t U(C/L) dt$, Branson (1978). Justamente en el ejercicio anterior, en donde se utiliza la regla de oro como trayectoria deseada, no

se está planteando un tipo de maximización del flujo del consumo por trabajo efectivo, ya que el controlador no lineal no fue diseñado para optimizar ningún criterio, solamente se está llevando, en forma asintótica al stock de capital, k , al valor deseado obtenido al aplicar la regla de oro, es decir al valor que maximiza la función de utilidad. No es óptimo en el sentido de que el stock de capital per-cápita obtenido por el controlador no maximiza la función de utilidad en un horizonte. Esto no es sorprendente ya que el controlador no lineal fue diseñado para cumplir con el objetivo de seguimiento y no de optimización. No obstante al alcanzar la trayectoria deseada y al estar siempre la economía, por medio del controlador no lineal, en una trayectoria de crecimiento de la regla de oro, la trayectoria de la economía será también una trayectoria óptima. El controlador no lineal estará generando la tasa de ahorro necesaria para mantener a la economía en una trayectoria de regla de oro o una trayectoria óptima. Aunque verdaderamente este es un caso particular, ya que la trayectoria deseada es la regla de oro. Es evidente pues que el controlador no lineal diseñado no es óptimo.

Además, hay que recalcar que es claro que la regla de oro es la solución muy particular de un problema de crecimiento óptimo. Pero es muy importante señalar que dicha regla de oro es el valor al que tienden asintóticamente (solución

límite de crecimiento óptimo) los problemas más generales del crecimiento óptimo (programación dinámica y/o teórica de control óptimo), en donde $k(0) > 0$ es dado ó heredado del tiempo pasado, Jones (1975).

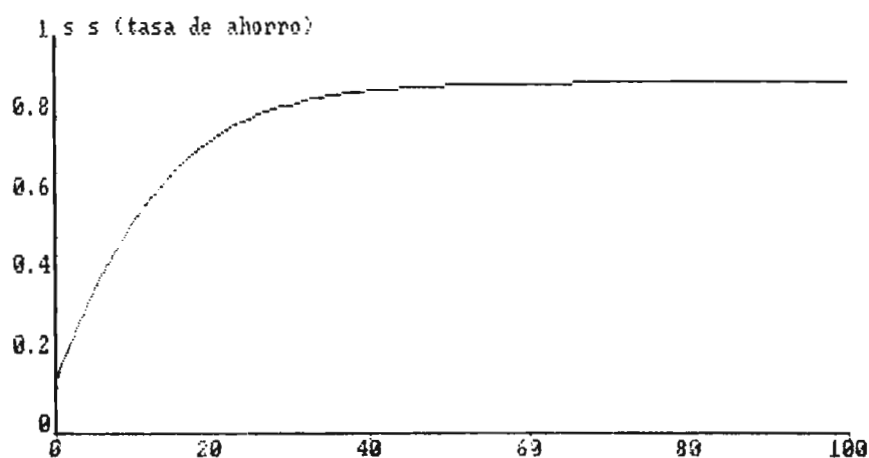
III.3.1. Simulación I.

En esta sección se presentan resultados de simulación del modelo de Solow descrito por las ecuaciones (3.2.1), el controlador no lineal, (3.2.6) y la trayectoria deseado obtenida de la aplicación de la regla de oro en (3.2.7).

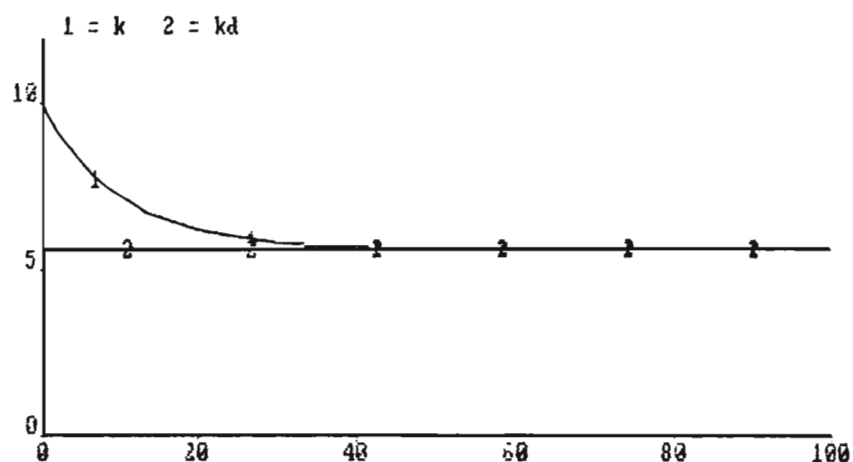
Se realizaron dos simulaciones, modificando el valor de algunos de los parámetros con el fin de ilustrar que el controlador no lineal siempre lleva asintóticamente a las variables a sus valores deseados.

En el primer caso el valor numérico de los parámetros fue seleccionado de la siguiente manera: la tasa de crecimiento de la población, (n) , en 0.03; la tasa de crecimiento del progreso técnico, (λ) , 0.02; el estado de la tecnología, (A) , 0.1; el parámetro distributivo, (δ) , 0.666; para la elasticidad de sustitución ($\sigma = 1 / 1+\rho$), se consideró para ρ

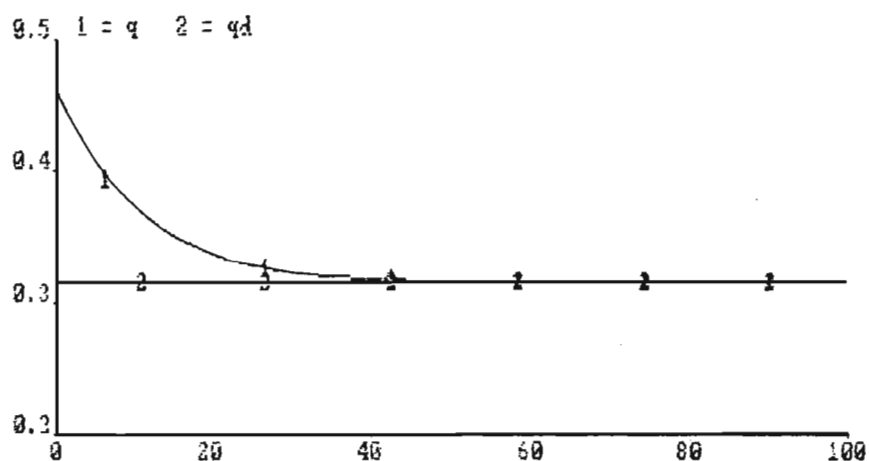
un valor de .001; la relación capital/trabajo efectivo inicial, $(k(0))$, 10 y el parámetro de diseño β en 0.1. La gráfica 1 muestra el comportamiento que ha de seguir la tasa de ahorro en el tiempo y las gráficas 2 y 3 muestran las trayectorias del capital/trabajo efectivo (k) y producto/trabajo efectivo (q) , respectivamente. Note que una vez alcanzado los valores deseados de k_d y q_d el controlador establece que la tasa de ahorro permanezca constante en el tiempo.



Gráfica 1. Tasa de ahorro. ($\rho = .001$)

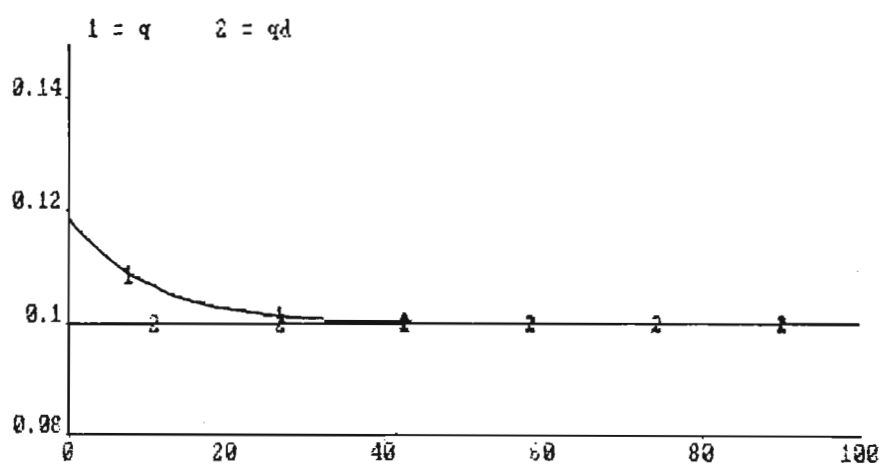


Gráfica 2. Capital/trabajo efectivo. ($\rho = .001$)



Gráfica 3. Producto/trabajo efectivo. ($\rho = .001$)

El segundo caso de simulación realizado fue considerando un valor de ρ más cercado a cero ($\rho = .0000001$), es decir equivalente a que el modelo económico sea descrito por una función Cobb-Douglas. Se tomaron los mismos valores numéricos que en el caso anterior para los parámetros de n , λ , A , δ y β y se consideró que la economía partía de una situación



Gráfica 6. Producto/trabajo efectivo. ($\rho = .0000001$)

III.4 Control adaptable.

Ahora se considera que el parámetro λ es desconocido. Por lo tanto el problema de control no puede ser resuelto por los métodos convencionales. Aquí se hace indispensable el uso de las técnicas del control adaptable. Excelentes resúmenes sobre control adaptable se encuentran en Astrom (1983) y Astrom (1987).

La ley de control ahora es:

$$s = \frac{[n + \hat{\theta}] k}{A[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)]^{-1/\rho}} + \frac{1}{A[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)]^{-1/\rho}} [\dot{k}_d + \tilde{k}] \quad (3.4.1)$$

$$k_d = \left[\frac{q_d^{-\rho} - A^{-\rho}(1-\delta)}{A^{-\rho}\delta} \right]^{-1/\rho} \quad (3.4.2)$$

$$\tilde{k} = k_d - k$$

donde hay que estimar $\hat{\theta}$. Para este fin se propone la siguiente ley de adaptación tipo integral (algoritmo de

estimación paramétrico):

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \phi \varepsilon \quad ; \quad \dot{\tilde{\theta}} = \gamma k \tilde{k} \quad (3.4.3)$$

en donde: ε es el error $\tilde{k}$; γ es un escalar positivo llamado ganancia de adaptación y ϕ una señal que puede ser obtenida de las entradas y salidas del modelo económico, en este caso $\phi = -k$. El error paramétrico se define como: $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ en donde $\theta^* = \lambda$. Sustituyendo (3.4.1) en (2.1):

$$\dot{k} = k\hat{\theta} + [\dot{k}_d + \beta k] - \lambda k$$

y como $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ tenemos:

$$\dot{k} = k\tilde{\theta} + [\dot{k}_d + \beta k] \quad (3.4.4)$$

A partir de las ecuaciones (3.4.3) y (3.4.4) se obtiene el llamado modelo del error, el cual es utilizado para demostrar estabilidad en el sistema adaptable y para probar que el objetivo de control se cumple.

Notando que $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$ tenemos que:

$$\dot{\tilde{k}} + \beta \tilde{k} = -\tilde{\theta} k \quad (3.4.5)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma \tilde{k} \tilde{k} \quad (3.4.6)$$

Las ecuaciones (3.4.5) y (3.4.6) son el llamado modelo del error. Este posee la misma estructura que el presentado en Kelly et. al. (1988). Enunciemos el siguiente teorema:

TEOREMA: Considérese el modelo económico descrito por las ecuaciones (2.1) y (2.2), la ley de control (3.4.1) y la ley de adaptación (3.4.3). Supóngase que λ es una constante desconocida, entonces:

- a) $\tilde{\theta} \in L_{\infty}$
- b) $\tilde{k} \in L_2 \cap L_{\infty}$
- c) $q_d - q \in L_2 \cap L_{\infty}$
- d) $\tilde{k}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$
- e) $|q_d(t) - q(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

en donde:

$$L_2 = \left\{ x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \left[\int_0^{\infty} |x^2| dt \right]^{1/2} < \infty \right\}$$

$$L_{\infty} = \left\{ x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| < \infty \right\}$$

El siguiente lema será de utilidad para la demostración del teorema.

Lema: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f y $\dot{f} \in L_{\infty}$ y $f \in L_2$, entonces $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. (Desoder y Vidyasagar, (1975)).

Demostracion: Se propone la siguiente función de Liapunov para el modelo del error:

$$V(t) = \tilde{\theta}^2 + \gamma \tilde{k}^2 \geq 0 \quad (3.4.7)$$

cuya derivada es:

$$\dot{V}(t) = 2 \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} + 2 \gamma \tilde{k} \dot{\tilde{k}}$$

sustituyendo los valores de $\dot{\tilde{\theta}}$ y $\dot{\tilde{k}}$ del modelo del error se obtiene:

$$\dot{V}(t) = -2 \gamma \beta \tilde{k}^2 \leq 0 \quad (3.4.8)$$

De (3.4.7) y (3.4.8) se tiene que $\tilde{\theta} \in L_{\infty}$ y $\tilde{k} \in L_{\infty}$ y como $V(t)$ es una función positiva no creciente se tiene que $V(0) \geq V(t)$ para todo $t \geq 0$, integrando (3.4.8) tenemos:

$$V(t) - V(0) = -2 \gamma \beta \int_0^t \tilde{k}^2(\tau) d\tau$$

y como $V(0) \geq V(t)$ se tiene:

$$\frac{V(0)}{2\gamma\beta} \geq \int_0^t \tilde{k}^2(\tau) d\tau$$

por lo tanto $\tilde{k} \in L_2$. Y por los resultados anteriores $\tilde{k} \in L_2 \cap L_\infty$.

Esto demuestra los incisos a) y b). De las ecuaciones (2.1) y (3.4.2) y del hecho que $\tilde{k} = k_d - k$ y de que $\tilde{k} \in L_2 \cap L_\infty$ se comprueba el inciso c). Por medio de c) y como q_d está acotada se deduce también que q está acotada. Utilizando la ecuación (2.1) deducimos que si q está acotada, k está acotada también. Utilizando (3.4.5) y como k , $\tilde{k}$ y $\tilde{\theta}$ están acotadas esto implica que $\tilde{k}$ está acotada también. Aplicando el lema enunciado anteriormente tenemos que $\tilde{k}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, con lo cual se demuestra el inciso d). El inciso e) se sigue inmediatamente. Por lo tanto se demuestra que el objetivo de control es logrado esto es que $q(t) \rightarrow q_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

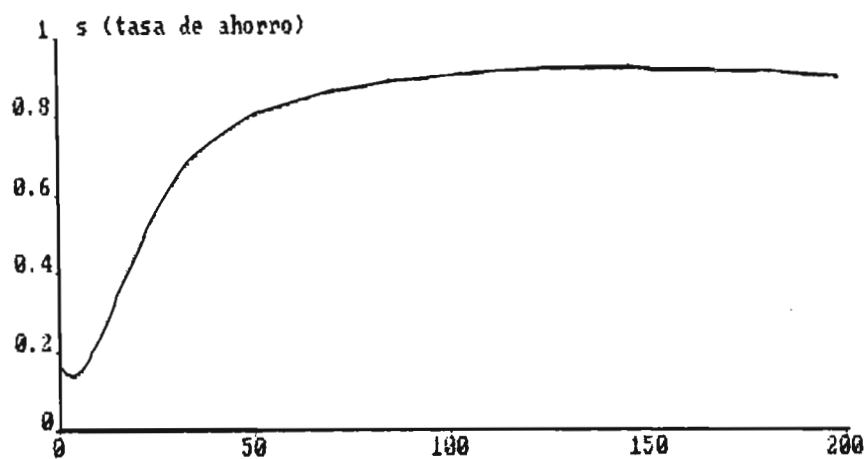
Se ha logrado diseñar y comprobar la estabilidad de un sistema adaptable. Aquí hay que resaltar que el controlador adaptable es capaz de generar las entradas necesarias para lograr el objetivo de control con únicamente información disponible de k , obviamente ésta no puede provenir del modelo económico, ya que un parámetro de él es desconocido. La

información de k tendrá que ser medida de fuentes directas o generada por otro modelo.

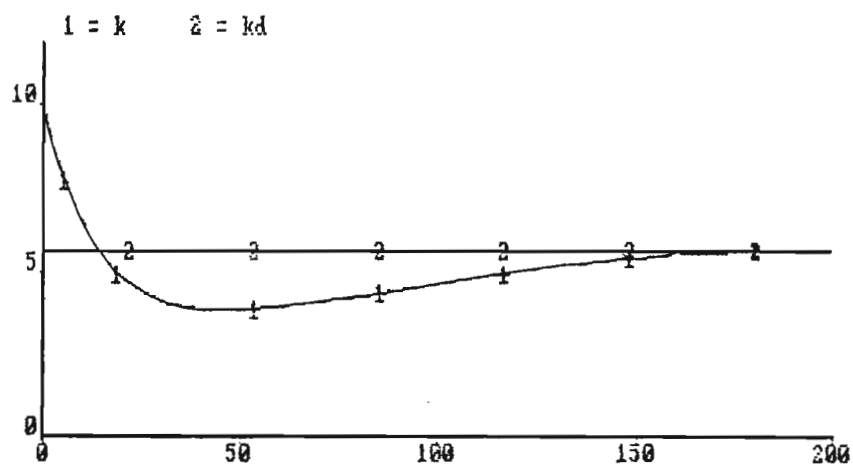
III.4.1. Simulación II.

Al igual que en el caso del controlador no lineal se realizaron para el control adaptable dos simulaciones para ilustrar la efectividad del controlador para llevar las variables a sus valores deseados. En estas simulaciones se utilizaron las ecuaciones del modelo de Solow en (3.2.1), el controlador adaptable (3.4.1), la ley de adaptación (3.4.3) y la trayectoria deseada en (5.4.2).

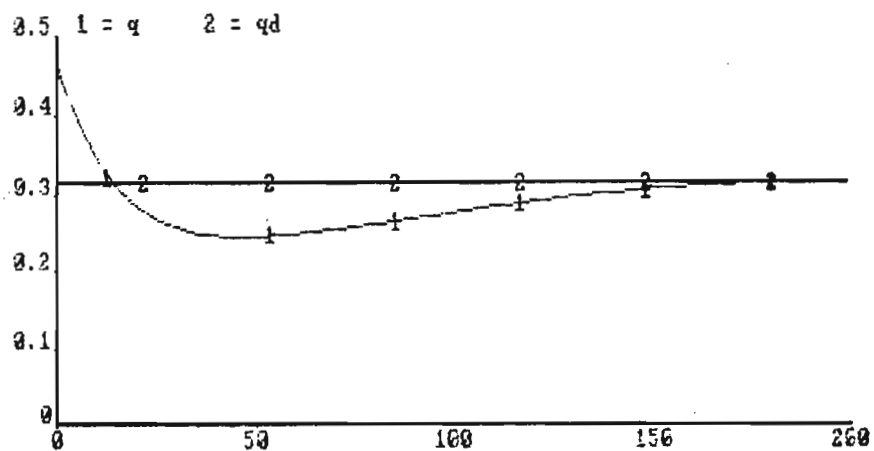
En las gráficas 7, 8, 9 y 10 se presentan los resultados de la simulación para la tasa de ahorro, la relación capital/trabajo efectivo, producto/trabajo efectivo y la evolución del parámetro θ , respectivamente. Los valores numéricos utilizados fueron los siguientes: para los parámetros del modelo: $n = 0.03$, $\lambda = 0.02$, $A = .1$, $\delta = .666$, $\rho = .001$, la condición inicial $k(0) = 10$ y los parámetros de diseño: $\beta = .05$ y $\gamma = .00005$.



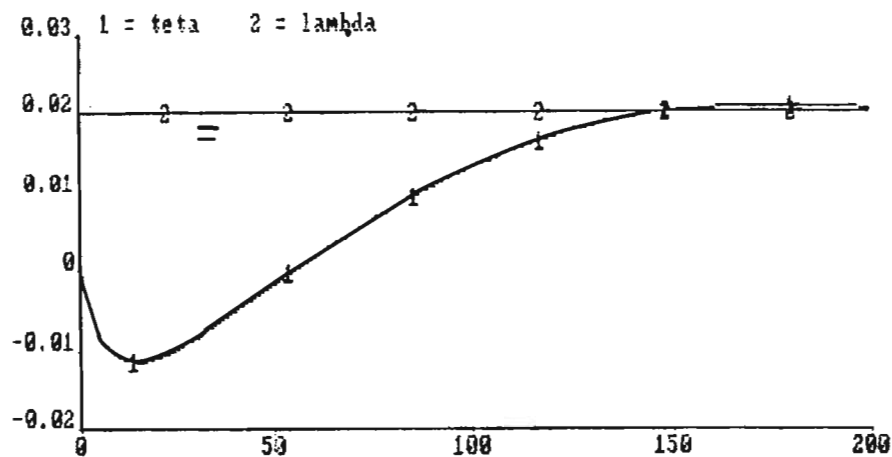
Gráfica 7. Tasa de ahorro. ($\rho = .001$)



Gráfica 8. Capital/trabajo efectivo. ($\rho = .001$).



Gráfica 9. Producto/trabajo efectivo. ($\rho = .001$).

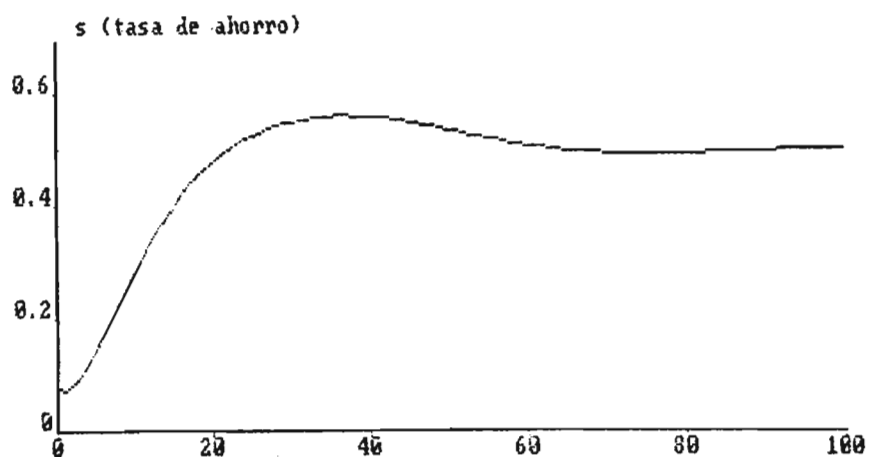


Gráfica 10. Parámetro θ . ($\rho = .001$)

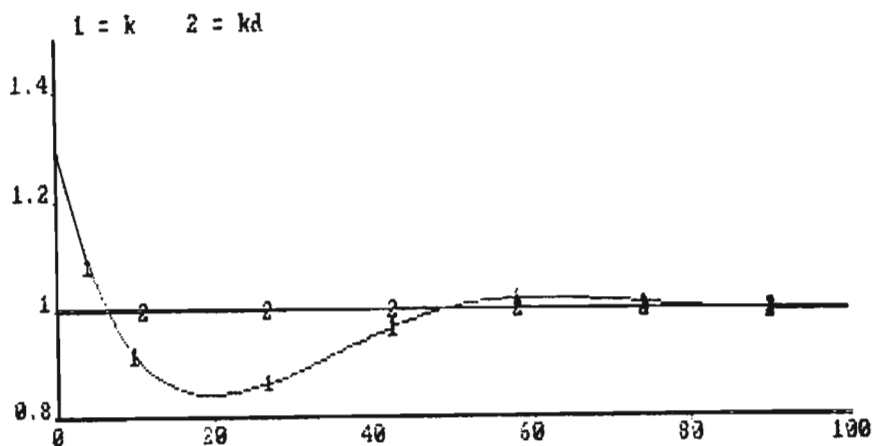
Note que en este caso, en virtud de que el modelo contiene un parámetro desconocido, las trayectorias que siguen las variables k y q aunque tienden asintóticamente a los valores deseados, k_d y q_d , oscilan en la etapa de transición. Esto es debido a que el parámetro θ , estimación del parámetro desconocido, oscila hasta alcanzar el valor verdadero de .02.

Las gráficas 11, 12, 13 y 14 muestran el comportamiento de la tasa de ahorro, la relación capital/trabajo efectivo, producto/trabajo efectivo y el parámetro θ , respectivamente. Para este caso se utilizaron los mismo valores para n , λ , A y δ que en el caso anterior y $\rho = .0000001$, es decir considerando que el modelo económico se comporta con una función de producción Cobb-Douglas. Se supuso para esta simulación que la economía partía de una situación inicial de

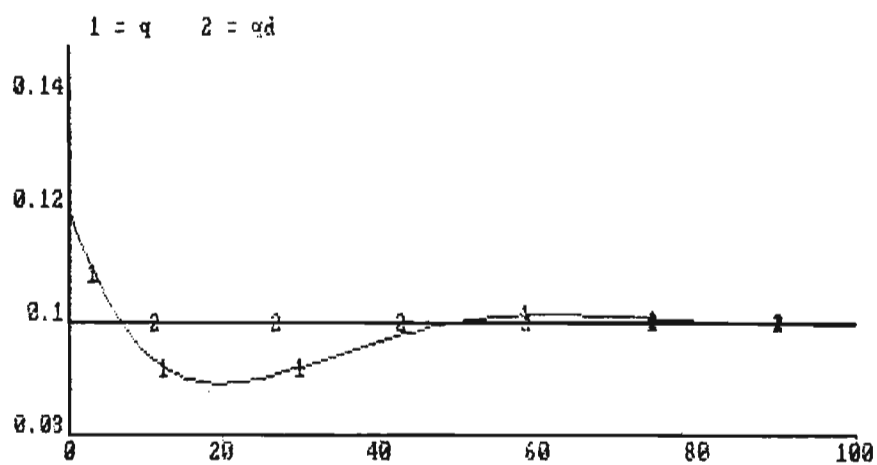
$k(0) = 1.3$ y los parámetros de diseño fueron seleccionados a los siguientes valores: $\beta = 0.1$ y $\gamma = 0.1$.



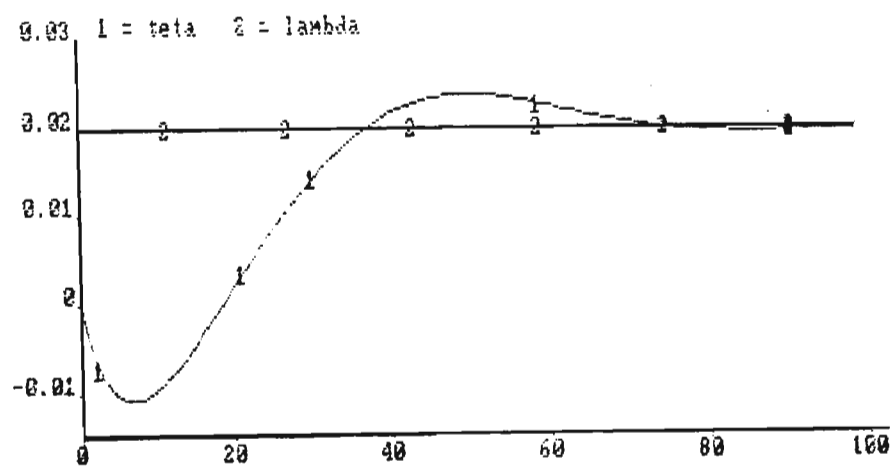
Gráfica 11. Tasa de ahorro. ($\rho = .0000001$).



Gráfica 12. Capital/trabajo efectivo. ($\rho = .0000001$).



Gráfica 13. Producto/trabajo efectivo. ($\rho = .0000001$).



Gráfica 14. Parámetro θ . ($\rho = .0000001$).

IV. CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha mostrado el uso de diferentes técnicas de control para la solución de varios problemas de política económica. Se utilizaron las técnicas de control no lineal para el diseño de un controlador no lineal con el objetivo de que este llevara a ciertas variables económicas a ciertos valores deseados por los diseñadores de la política económica. Se demostró que el sistema formado por el controlador no lineal y el modelo económico es estable. Esto implica que se puede lograr alcanzar cualquier trayectoria deseada. Asimismo se mostró que este controlador puede conducir a la economía hacia la trayectoria en donde se alcanza un nivel máximo del (C/L). También se mostró estabilidad global para el sistema de control adaptable en el caso en el que un parámetro del modelo económico era desconocido. Lo anterior muestra la utilidad de ciertas herramientas de la teoría de control para la manipulación de un cierto tipo de modelos económicos. El beneficio teórico y empírico para la teoría económica es evidente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Astrom, K. J. "Theory and aplicaciones of adaptive control-A survey". Automatica, Vol. 19, No. 5, 1983, pp. 471-486.

- [2] Astrom, K. J., "Adaptive Feedback Control". Preceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 2, Febrero 1987.

- [3] Blanchard, O. J., Fischer S., "Lectures on Macroeconomics", The MIT Press, 1989.

- [4] Branson W. H., "Teoría y política Macroeconómica", Fondo de Cultura Económica, 1978.

- [5] Burmesiter E., Dobell, R. "Teorías matemáticas del crecimiento económico", Bosch Casa Editorial, Barcelona, 1973.

- [6] Desoder y Vidyasagar, "Feedback systems: Input-Output properties", Academic Press, 1975.

- [7] Gandolfo, F., "Mathematical methods and models in economic dynamics". North-Holland, Pub. Co., Amsterdam, 1971.
- [8] Jones, H., "An introduction to Modern Theories of Economic Growth", Thomas Nelson and sons, Middlesex, Inglaterra, 1975.
- [9] Kelly, R., Cásares E., Garza G., "Modelos económicos dinámicos y control adaptable", Analisis economico, Vol. VII, Nos. 12/13, enero-diciembre de 1988.
- [10] Nagatani, K., "Macroeconomic dynamics", Cambridge University Press, 1981.
- [11] Phelps, E. S., "The Golden Rule of Accumulation: a fable for growth men", American Economic Review, Vol. 51, 1961, pp. 638-643.
- [12] Sastry, S. Bodson M., "Adaptive control. Stability, Convergence and Robustness", Prentice-Hall, 1989.
- [13] Solow R. M., "A contribution to the theory of economic growth". Quarterly Journal of Economics, Vol. LXX, 1956, pp. 65-94.