

Virgilio Partida Bush

**TABLA  
DE VIDA  
ACTIVA**



EL COLEGIO DE MÉXICO





## TABLA DE VIDA ACTIVA

**CENTRO DE ESTUDIOS DEMOGRÁFICOS  
Y DE DESARROLLO URBANO**

# TABLA DE VIDA ACTIVA

*Virgilio Partida Bush*



EL COLEGIO DE MÉXICO

312.0972

P2731t

Partida Bush, Virgilio

Tabla de vida activa / Virgilio Partida Bush . — México : El Colegio de México, Centro de Estudios Demográficos y de Desarrollo Urbano, 1996.

278 p. ; il. ; 21 cm.

ISBN 968-12-0573-1

1. México-Población. 2. Población-Pronósticos-México. Población económicamente activa-México. 4. Mortalidad-Estadística-México.

Portada de Mónica Diez-Martínez  
Fotografía de la portada de Carlos Rangel

Primera edición, 1996

D.R. © El Colegio de México  
Camino al Ajusco 20  
Pedregal de Santa Teresa  
10740 México, D. F.

ISBN 968-12-0573-1

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Para Laura, Azucena y Virgilio



# ÍNDICE

|  |     |
|--|-----|
| Índice de cuadros  | 11  |
| Índice de gráficas   | 15  |
| Introducción   | 19  |
| 1. Años brutos y netos de vida activa                            | 25  |
| 1.1. Proporciones de participación en la actividad               | 26  |
| 1.2. Sobrevivientes y tiempo vivido en la actividad              | 35  |
| 1.3. Años brutos de vida activa                                  | 37  |
| 1.4. Años netos de vida activa                                   | 46  |
| 2. La tabla de vida activa: el enfoque tradicional               | 59  |
| 2.1. Sobrevivientes y proporciones instantáneas                  | 65  |
| 2.2. Probabilidades de transición. El supuesto fundamental       | 69  |
| 2.3. Años-persona vividos, eventos y tasas                       | 80  |
| 2.3.1. El enfoque de los eventos                                 | 84  |
| 2.3.2. El enfoque de las tasas                                   | 90  |
| 2.4. Esperanzas de vida  | 112 |
| 2.4.1. El caso especial de un patrón unimodal                    | 127 |
| 2.5. Mortalidad diferencial                                      | 133 |
| 2.5.1. Probabilidades de transición y tiempo vivido              | 139 |
| 2.5.2. Tiempo vivido, eventos y tasas: el enfoque de los eventos | 141 |
| 2.5.3. Tiempo vivido, eventos y tasas: el enfoque de las tasas   | 143 |
| 3. La tabla de vida activa: el enfoque de movimientos múltiples  | 147 |
| 3.1. Relación entre tasas y probabilidades                       | 149 |
| 3.1.1. Tasas y probabilidades                                    | 149 |
| 3.1.2. Años-persona vividos                                      | 154 |

|   |     |
|---|-----|
| 3.2. Probabilidades a partir de proporciones de participación               | 157 |
| 3.2.1. Rango de variación de las probabilidades                             | 161 |
| 3.2.2. Aplicación al caso de México en 1990                                 | 171 |
| 3.2.3. Asignación biproportional iterativa                                  | 194 |
| 3.3. El modelo general de movimientos múltiples                             | 210 |
| 3.3.1. Años-persona vividos con mortalidad diferencial                      | 217 |
| 3.3.2. Estimación a partir de datos observados                              | 219 |
| 4. Aplicaciones de la tabla de vida activa                                  | 231 |
| 4.1. Movimiento de la PEA en un periodo determinado                         | 232 |
| 4.2. Proyecciones de la PEA   | 239 |
| 4.2.1. Probabilidades perspectivas de sobrevivencia                         | 241 |
| 4.2.2. Proyección de la PEA de México, 1990-1995                            | 261 |
| Anexos  |     |
| A. Ajuste de la participación en la actividad en el censo de México de 1990 | 271 |
| B. Tablas de mortalidad, 1990   | 277 |
| Bibliografía  | 281 |

## ÍNDICE DE CUADROS

|   |     |
|---|-----|
| 1.1. México: participación por edad y sexo en la actividad económica, 1990  | 32  |
| 1.2. México: cálculo de los años brutos de vida activa e inactiva por sexo, 1990  | 40  |
| 1.3. México: cálculo de los años-persona vividos en la actividad y en la inactividad por edad y sexo, 1990  | 50  |
| 1.4. México: cálculo de los años netos de vida activa e inactiva por sexo, 1990   | 52  |
| 2.1. Mortalidad de activos respecto a la mortalidad total para la población masculina de cinco países (cociente de las respectivas tasas de mortalidad) | 62  |
| 2.2. México: defunciones registradas según condición de ocupación en la actividad, edad y sexo, 1990  | 62  |
| 2.3. México: proporciones de participación por grupos de edad e instantáneas, 1990  | 70  |
| 2.4. México: sobrevivientes en la tabla de vida activa, 1990  | 71  |
| 2.5. México: probabilidades de transición, 1990   | 78  |
| 2.6. México: años-persona vividos por la cohorte de la tabla de vida activa, 1990 (método de los eventos)   | 92  |
| 2.7. México: eventos y tasas de eventualidad en la tabla de vida activa, 1990 (método de los eventos)   | 94  |
| 2.8. México: años-persona vividos por la cohorte de la tabla de vida activa, 1990 (método de las tasas)   | 104 |
| 2.9. México: eventos y tasas de eventualidad en la tabla de vida activa, 1990 (método de las tasas)   | 106 |
| 2.10. México: esperanzas de vida activa, 1990 (método de los eventos)   | 120 |
| 2.11. México: esperanzas de vida activa, 1990 (método de las tasas)   | 122 |

|   |     |
|---|-----|
| 2.12. México: años netos de vida activa e inactiva por el método directo y por el método tradicional, 1990  | 128 |
| 2.13. México: tiempo vivido acumulado en la tabla de vida activa, 1990  | 134 |
| 3.1. México: probabilidades de transición al estado puro estimadas mediante la liga de grupos quinquenales de edad adyacentes, 1990   | 162 |
| 3.2. México: probabilidades de transición al estado puro estimadas mediante división del grupo de edad en dos subintervalos, 1990   | 164 |
| 3.3. México: valor mínimo del ponderador de la probabilidad activo a activo ( ${}_n w_x^{aa}$ ), para que las tasas de ingreso o las de retiro sean iguales a uno, 1990               | 170 |
| 3.4. México: ponderadores para la probabilidad activo a activo ( ${}_n w_x^{aa}$ ) cuando es correcta la estimación mediante la solución a dos ecuaciones simultáneas, 1990           | 172 |
| 3.5. México: probabilidades de transición al estado puro y factor ${}_n B_x$ para el cálculo de las tasas de ingreso y de retiro, 1990 (método de estados múltiples con proporciones) | 176 |
| 3.6. México: probabilidades de transición y sobrevivencia, 1990 (método de estados múltiples con proporciones)  | 178 |
| 3.7. México: años-persona vividos por la cohorte de la tabla de vida activa, 1990 (métodos de estados múltiples con proporciones)   | 182 |
| 3.8. México: eventos y tasas de eventualidad en la tabla de vida activa, 1990 (método de estados múltiples con proporciones)  | 184 |
| 3.9. México: esperanzas de vida activa, 1990 (método de movimientos múltiples con proporciones)   | 190 |
| 3.10. México: años netos de vida activa e inactiva por el método directo y el de movimientos múltiples, 1990  | 196 |

|   |     |
|---|-----|
| 3.11. México: fracción del saldo neto per cápita ${}_nK_x$ asociado al ponderador ${}_nw_x^{aa}$ , 1990                           | 200 |
| 3.12. México: probabilidades de transición al estado puro y tasas de movilidad mediante asignación biproporcional iterativa, 1990 | 206 |
| 4.1. México: movimiento de la población económicamente activa, 1990 (tasas del método de movimientos múltiples con proporciones)  | 234 |
| 4.2. México: movimiento total de la población económicamente activa según dos métodos de estimación de las tasas de cambio, 1990  | 237 |
| 4.3. México: probabilidades de perspectivas de supervivencia, 1990 (método de las esperanzas de vida parciales)                   | 252 |
| 4.4. México: probabilidades perspectivas de supervivencia, 1990 (método exponencial)  | 256 |
| 4.5. México: proyección de la población económicamente activa e inactiva, 1990-1995   | 264 |
| 4.6. México: cálculo de los nacimientos ocurridos, 1990-1995  | 266 |
| 4.7. México: movimiento total de la población económicamente activa, 1990-1995  | 267 |
| A.1. México: participación en la actividad económica, censo de 1990   | 272 |
| B.1. México: tablas abreviadas de mortalidad por sexo, 1990   | 278 |



## ÍNDICE DE GRÁFICAS

|  |     |
|--|-----|
| 1.1. México: proporciones de participación en la actividad económica por edad y sexo, 1990   | 34  |
| 1.2. México: años brutos y netos de vida activa por edad y sexo, 1990  | 42  |
| 1.3. México: número de veces que la participación masculina supera a la femenina por edad, 1990  | 46  |
| 1.4. México: porcentaje de la vida restante que consumirá la actividad económica por edad, 1990  | 55  |
| 2.1. México: sobrevivientes en la tabla de vida activa, 1990   | 72  |
| 2.2. México: probabilidades de transición ${}_3\hat{p}_{12}^{ia}$ para diversos valores del intervalo previo a la edad 12, 1990 (probabilidades por mil)   | 80  |
| 2.3. México: tasas de ingreso y de retiro en la tabla de vida activa, 1990 (método de los eventos)   | 96  |
| 2.4. México: tasas de ingreso y de retiro en la tabla de vida activa, 1990 (método de las tasas)   | 108 |
| 2.5. México: desviación proporcional en las tasas de ingreso y de retiro obtenidas por el método exponencial respecto de las obtenidas por el método de los eventos, 1990  | 109 |
| 2.6. México: desviación relativa en las proporciones de participación de tabla respecto a las observadas, 1990   | 111 |
| 2.7. México: desviación relativa en las proporciones de participación 12-14 años de tabla respecto a las observadas ( ${}_3a_{12} / {}_3A_{12}$ ), para diversos valores del intervalo previo a la edad 12, 1990 | 111 |
| 2.8. México: esperanzas de vida activa, 1990   | 124 |
| 2.9. México: porcentaje de la vida restante que una persona espera pasar en la actividad, 1990   | 125 |

|  |     |
|--|-----|
| 2.10. México: proporción que representan los años netos de vida activa estimados por el método tradicional de las tasas, de los deducidos por el método directo, 1990        | 130 |
| 3.1. Patrones bimodales de participación femenina  | 148 |
| 3.2. Dinamarca: tasas de ingreso y de retiro masculinas y ponderadores activo a activo, 1972-1974  | 173 |
| 3.3. México: tasas de ingreso y de retiro en la tabla de vida activa, 1990 (método de movimientos múltiples con proporciones)  | 175 |
| 3.4. Tasas de ingreso masculinas en México, 1990 y Dinamarca, 1972-1974  | 187 |
| 3.5. México: desviación relativa de las proporciones de participación deducidas de la tabla de movimientos múltiples respecto de las proporciones observadas, 1990           | 187 |
| 3.6. México: esperanzas de vida activa, 1990 (método de movimientos múltiples con proporciones)  | 192 |
| 3.7. México: porcentaje de la vida restante que una persona espera pasar en la actividad, 1990 (método de movimientos múltiples con proporciones)                            | 193 |
| 3.8. México: proporción que los años netos de vida activa estimados por el método de movimientos múltiples representan de los deducidos por el método directo, 1990          | 194 |
| 3.9. México: asignación biproportional iterativa para estimar las probabilidades de transición masculinas del grupo de edad 25-29 años, 1990                                 | 204 |
| 3.10. México: número de veces que las tasas estimadas por asignación biproportional iterativa representan de las calculadas, fijando los ponderadores ${}_n w_x^{aa}$ , 1990 | 208 |
| 3.11. Diagrama de Lexis que muestra la estimación de las tasas de cambio a partir de probabilidades perspectivas   | 224 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.12. Diagrama de Lexis que muestra la estimación de las tasas de cambio a partir de probabilidades perspectivas para el primer grupo de edades            | 227 |
| 4.1. Diagrama de Lexis que muestra la estimación de las probabilidades perspectivas de sobrevivencia a partir de las tasas de cambio                       | 254 |
| 4.2. México: excedente proporcional de las probabilidades calculadas por el modelo exponencial respecto a las obtenidas con las esperanzas parciales, 1990 | 258 |
| A.1. México: proporciones de participación en la actividad, censadas y ajustadas, 1990   | 274 |



## INTRODUCCIÓN

Uno de los factores determinantes de la riqueza global de una sociedad es indudablemente la cantidad de energía humana consumida, tanto para lograr la sobrevivencia individual de las personas, como para asegurar su convivencia colectiva. Sin riesgo de equivocarnos, podemos afirmar que un mejor aprovechamiento de esa energía, equivale a un mayor nivel de desarrollo social y económico alcanzado por la sociedad.

El conocimiento del monto de la energía total consumida por la sociedad es de invaluable utilidad tanto en la toma de decisiones para la planeación integral del desarrollo, como para la investigación académica; no obstante, debido a la complejidad técnica para captar ese monto, la inmensa mayoría de las fuentes de información se ha limitado a considerar sólo de manera aproximada, la energía humana dedicada a la actividad económica.

En su concepción más general, la actividad económica es aquella que realizan las personas, de manera individual o colectiva, utilizando su propia energía o aquella que les brindan la naturaleza y la tecnología, para producir bienes y servicios dedicados al intercambio en el mercado. Al conjunto de personas que dedican parte de su ener-

gía a la actividad económica, se les llama comúnmente población económicamente activa (PEA). Generalmente la PEA incluye, además de las personas que participan de manera directa en la actividad económica —que tienen un empleo—, a quienes no teniéndolo declaran encontrarse en su búsqueda al contestar una encuesta, fenómeno conocido como desempleo abierto.

El monto de la PEA es un pobre indicador de la energía humana consumida socialmente por la actividad económica; pero si la fuente de datos capta además el tiempo dedicado por cada persona, mediante una sencilla multiplicación puede obtenerse el tiempo total socialmente dedicado a la actividad económica, una medida muy próxima a la cantidad de energía humana consumida por la economía. Incluso, si se dispone del valor monetario del producto generado por la actividad económica, al dividirlo entre el tiempo socialmente dedicado, se tiene un indicador de la productividad: el valor monetario agregado per cápita y por unidad de tiempo.

Considerando la población total, se obtiene la población económicamente inactiva (PEI) como conjunto mutuamente excluyente y exhaustivo de la PEA. La PEI está formada por las personas que no intercambian en el mercado el producto de su energía: quienes son exclusivamente amas de casa, estudiantes, rentistas, jubilados, pensionados y aquellas que están física y mentalmente incapacitadas para trabajar.

Una medida resumida de la energía humana per cápita consumida por la actividad económica, se obtiene mediante la simple división del tiempo socialmente dedicado, entre el volumen de la PEA; otro enfoque consiste en considerar la parte de la vida que un individuo dedica a

la actividad económica, indicador que de manera general podemos llamar esperanza de vida activa.

La estimación más sencilla y antigua sobre las esperanzas de vida activa son los años brutos y netos de vida activa. Concebidos originalmente por Durand (1948: 259-265), consisten en una simple extensión del algoritmo de cálculo de las tasas bruta y neta de reproducción en fecundidad,<sup>1</sup> y representan la parte de la vida restante que una persona espera pasar en la actividad, y los términos brutos y netos indican, respectivamente, la omisión o inclusión del riesgo de fallecer.

Inherente a su sencillez de cálculo, para los años brutos y netos de vida activa existe la restricción analítica de que no se pueden distinguir en función de la situación actual (activo o inactivo) de la persona. Wolfbein (1949) fue pionero en el desarrollo de algoritmos para calcular esperanzas de vida activa por condición de participación, creando para ello la primera tabla de vida activa. Basada su construcción en las simples proporciones de participación en la actividad por edad, la tabla de Wolfbein descansa en un supuesto fundamental: los ingresos a la actividad ocurren sólo en un intervalo de la vida, y los retiros acontecen sólo en el rango de edades restante; supuesto adecuado para la típica pauta unimodal de participación masculina por edad, pero no tanto para el común perfil bimodal y a veces trimodal femenino.

Al método de construcción de tablas de vida activa basado en este supuesto, en lo sucesivo lo llamaremos

---

<sup>1</sup>Promedio de hijas por mujer a lo largo de su vida reproductiva en ausencia o presencia de la mortalidad respectivamente.

método tradicional. Algunas contribuciones se han hecho para mejorar este método desde su concepción original por Wolfbein (Durand y Miller, 1969: 25-35; Camisa, 1969; Somoza, 1970; Rincón, 1977); no obstante, el supuesto fundamental ha prevalecido, debido a que se usan las proporciones de participación en la actividad por edad.

Concebida como una cadena de Markov para cada intervalo de edad, la tabla de mortalidad se ha generalizado en un modelo conocido como tabla de vida de incrementos-decrementos o tabla de vida de estados múltiples (Schoen y Nelson, 1974; Schoen, 1975; Hoem, 1975; Rogers, 1975; Rogers y Ledent, 1976; Schoen y Land, 1979; Hoem y Jensen, 1982; Nour y Suchindran, 1984; Namboodiri y Suchindran, 1987: 137-163), esquema que permite prescindir del supuesto fundamental del método tradicional. No obstante que este nuevo enfoque es bastante atractivo, las aplicaciones al caso de la participación en la actividad económica han sido realmente escasas, pues se requieren datos que difícilmente se encuentran publicados: probabilidades de transición entre la actividad y la inactividad por edad; o bien, tasas de ingreso y de retiro de la actividad que consideren también la edad.

Hoem y Fong (1976) y Willekens (1980) ofrecen métodos para construir tablas de vida activa bajo el enfoque de incrementos-decrementos, donde la diferencia entre ambos procedimientos estriba en el algoritmo que relaciona las probabilidades de transición con las tasas de cambio. La aplicación del enfoque de estados múltiples es factible en cualquier país que cuente con una encuesta continua de ocupación, pues del simple seguimiento de las personas a través de las repetidas entrevistas, se de-

ducen las probabilidades de transición o las tasas de cambio (Hoem y Fong, 1976).

El objetivo de este trabajo es presentar los diferentes procedimientos para construir una tabla de vida activa, buscando un progresivo avance en el grado de complejidad de los métodos. El primer capítulo se dedica a los años brutos y netos de vida activa, y el segundo a la construcción de la tabla de vida activa por el método tradicional. En el tercero, se presenta el enfoque de estados múltiples, es decir, asumiendo que los ingresos y los retiros de la actividad ocurren simultáneamente en todo el rango de edades; además se incluye un procedimiento concebido por el autor, para elaborar la tabla de vida activa a partir de las simples proporciones de participación por edad. Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan algunas aplicaciones de la tabla de vida activa.

A lo largo de este libro, los diferentes procedimientos se ejemplifican con los datos del censo de población de México de 1990. Los niveles de participación captados en ese recuento de habitantes parecen estar algo subestimados. Concientes del posible sesgo que puedan introducir esos datos censales en nuestros resultados, creemos conveniente aclarar que su elección responde únicamente a que tuvimos fácil acceso a ellos para todo el rango de edades. La eventual utilización de los resultados obtenidos aquí, más allá de los fines didácticos para los que se emplean en este documento, puede sesgar la interpretación de la intensidad de la participación en la actividad económica en la República mexicana en 1990.

Conviene mencionar también que a lo largo del trabajo se utilizan algunas de las relaciones matemáticas fundamentales en que se basa la elaboración de una tabla

de mortalidad, donde por elaboración se entiende el mecanismo de llenado del cuadro que describe la extinción por muerte de una cohorte, y no los diferentes algoritmos que se han diseñado para transferir la experiencia observada de la mortalidad a la generación de la tabla. Al lector no familiarizado con el mecanismo de llenado de una tabla de mortalidad, o que no lo recuerde, se le recomienda consultar cualquier libro de análisis demográfico o de cálculo actuarial antes de leer este libro.

Finalmente, deseo expresar mi agradecimiento a dos lectores anónimos por sus valiosos comentarios y sugerencias, así como también a la Secretaría de Salud, porque se me permitió desarrollar parte de este trabajo dentro mi permanencia como funcionario de la Dirección General de Coordinación Sectorial e Internacional.

## 1. AÑOS BRUTOS Y NETOS DE VIDA ACTIVA

La construcción de una tabla de eventualidad, igual que muchos otros modelos demográficos, consiste en un algoritmo que permite convertir medidas observadas de la exposición al riesgo de experimentar un evento, en medidas iguales o equivalentes en la tabla de eventualidad. La tabla de vida activa se puede construir a partir de tres tipos de medidas observadas:

- Proporciones de participación en la actividad (el caso más común);
- Probabilidades retrospectivas de transición entre la actividad y la inactividad;
- Tasas de ingreso y de retiro de la actividad.

Los métodos diseñados para construir la tabla de vida activa a partir de los dos primeros tipos de datos constituyen el enfoque de *transición*, y los desarrollados para incorporar al último corresponden a la perspectiva de *movimiento*.

Las proporciones de participación son las medidas más sencillas de obtener y las más difundidas para el

análisis por edad y sexo de la inserción de la población en la actividad económica. Su amplia difusión se debe al hecho de que para calcularlas se requiere la información más fácil de conseguir: la población total y la económicamente activa, clasificadas por edad y sexo. Las proporciones de participación son la base del cálculo de los años brutos y netos, de los métodos para elaborar la tabla de vida activa tradicional, y de la propuesta que se hace en el tercer capítulo de este libro. Debido a la importancia que revisten esas proporciones para este trabajo, dedicamos las dos primeras secciones de este capítulo a su cálculo y las tres restantes a los años brutos y netos de vida activa.

### 1.1. PROPORCIONES DE PARTICIPACIÓN EN LA ACTIVIDAD

La proporción de participación en la actividad económica o simplemente proporción de activos, se define como el cociente que resulta de dividir la población económicamente activa (PEA) entre la población total; y la proporción de no participación o proporción de inactivos, como la división de la población económicamente inactiva (PEI) entre la población total.<sup>1</sup> Claramente estas proporciones representan las fracciones de personas que trabajan y que no trabajan respectivamente.

---

<sup>1</sup>Conocidas comúnmente como tasas de actividad, aquí se prefiere llamarlas proporciones, porque en la elaboración de la tabla de vida activa se utiliza el concepto de *tasa* más común en demografía: el promedio anual per cápita de eventos; donde un evento para fines de este estudio puede ser un ingreso a la actividad, un retiro de ella o bien una defunción.

Dejemos de lado momentáneamente las variables edad y sexo, y denotemos por  $P$  a la población total residente de un territorio específico en un momento dado en el tiempo, y por  $PEA$  a su población económicamente activa; entonces, la proporción bruta de activos —bruta porque no distingue la edad— está dada por:

$$A = \frac{PEA}{P}$$

y si  $PEI$  denota la población económicamente inactiva, la proporción bruta de inactivos es:

$$I = \frac{PEI}{P}$$

Siendo la  $PEA$  y la  $PEI$  dos conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivos de la población total, tenemos:

$$P = PEA + PEI$$

entonces,

$$A + I = \frac{PEA}{P} + \frac{PEI}{P} = \frac{P}{P} = 1 \quad (1.1)$$

Para ilustrar el cálculo de las proporciones brutas considérese el censo de población de México de 1990, el cual captó 81,249,645 personas, de las cuales 24,345,580 constituían la  $PEA$  y los restantes 56,904,065 individuos la  $PEI$ . Entonces, las proporciones brutas de activos y de inactivos fueron:

$$A = \frac{24,345,580}{81,249,645} = 0.2996 \text{ o } 30\% \text{ e}$$

$$I = \frac{56,904,065}{81,249,645} = 0.7004 \text{ o } 70\%$$

Se puede ver que mientras en 1990, trabajaba poco menos de una tercera parte de la población de México, poco más de dos terceras partes no lo hacían, y que por cada trabajador, poco más de dos personas ( $2.3 = 70/30$ ) adicionales consumían el producto generado por la actividad económica. Esta interpretación es una buena medida de dependencia económica en una sociedad.

Generalmente los niños no trabajan, aun gozando íntegramente de sus facultades físicas y mentales; razón por la que, en una encuesta para captar la PEA, es común adoptar una edad mínima para que una persona pueda ser considerada económicamente activa; denotemos por  $\beta$  a esa edad mínima. En cada sociedad, el valor de  $\beta$  depende de la ley laboral vigente o bien de la costumbre; en el caso del censo de población de México de 1990, por ejemplo, se adoptaron los 12 años como la edad mínima para que una persona fuera considerada económicamente activa ( $\beta = 12$ ).

Si ahora dividimos la PEA sólo entre la población de  $\beta$  años o más de edad, y no entre la población total, tenemos una medida más refinada de la exposición al "riesgo" de trabajar, cociente que recibe precisamente el nombre de proporción refinada de participación en la actividad económica, o simplemente proporción refinada de activos, y cuyo valor está dado por:

$$A_{\beta+} = \frac{PEA_{\beta+}}{P_{\beta+}}$$

y la proporción refinada de inactivos por:

$$I_{\beta+} = \frac{PEI_{\beta+}}{P_{\beta+}}$$

donde  $\beta+$  debe leerse " $\beta$  años o más de edad". Si bien parece innecesario incorporar este subíndice en la PEA, porque la edad  $\beta$  es intrínseca a la definición de la PEA adoptada en la fuente de datos, la incluimos para homogeneizar la notación. De manera análoga a (1.1) se obtiene la igualdad para las proporciones refinadas:

$$A_{\beta+} + I_{\beta+} = 1$$

El censo de México de 1990 captó 55,913,847 personas de doce años o más de edad (mínima para ser activo), de ahí que las proporciones refinadas fueran:

$$A_{12+} = \frac{24,345,580}{55,913,847} = 0.4354 \text{ o } 43.5\% \text{ e}$$

$$I_{12+} = \frac{56,904,065}{55,913,847} = 0.5646 \text{ o } 56.5\%$$

No debe resultar novedoso para el lector que la participación masculina en la actividad económica es mayor que la femenina, hecho observado casi a nivel mundial; por lo cual, el análisis de la participación de la población generalmente se inicia con la diferenciación por sexo. Para el caso del censo mexicano, las proporciones refinadas masculinas fueron:

$$A_{12+} = \frac{18,618,890}{27,084,182} = 0.6874 \text{ o } 68.7\% \text{ e}$$

$$I_{12+} = \frac{8,465,292}{27,084,182} = 0.3126 \text{ o } 31.3\%$$

y las femeninas:

$$A_{12+} = \frac{5,726,690}{28,829,665} = 0.1986 \text{ o } 19.9\% \text{ e}$$

$$I_{12+} = \frac{23,102,975}{28,829,665} = 0.8014 \text{ o } 80.1\%$$

Claramente se puede ver que el nivel de participación masculina en México en 1990 representaba más del triple que el de la femenina ( $3.5 = 0.6874/0.1986$ ).

Sean ahora  ${}_n P_x$ ,  ${}_n PEA_x$  y  ${}_n PEI_x$  la población total, activa e inactiva, respectivamente, entre las edades exactas  $x$  y  $x + n$ , con  $n$  medido en años. Las proporciones específicas de activos e inactivos para ese intervalo de edades son:

$${}_n A_x = \frac{{}_n PEA_x}{{}_n P_x} \quad y \quad {}_n I_x = \frac{{}_n PEI_x}{{}_n P_x} \quad (1.2)$$

las cuales también cumplen la propiedad (1.1):

$${}_n A_x + {}_n I_x = 1 \quad (1.3)$$

independientemente de la longitud del intervalo de edades  $n$ .

Los datos por edad captados por el censo de población de México de 1990 se reproducen en el cuadro 1.1, donde además se incluyen las proporciones de activos e inactivos por grupos de edad, que también se presentan en la gráfica 1.1. Así por ejemplo, la proporción masculina entre los 20 y 25 años de edad exacta (el grupo de edades cumplidas 20-24) es:

$${}_5 A_{20} = \frac{2,917,079}{3,738,128} = 0.7804$$

y la femenina entre los 35 y 40 años (el grupo 35-39):

$${}_5 A_{35} = \frac{593,717}{2,368,551} = 0.2507$$

En las proporciones mostradas en el cuadro 1.1 se puede ver una pauta casi mundial: la mayor partici-

pación masculina en todo el rango de edades. En México en 1990, el nivel de participación de los varones es más del triple que el de las mujeres —excepto entre los 15 y 25 años—, y esa proporción aumenta conforme avanza la edad, superando el quíntuple a partir de los 50 años y alcanzando su máximo de 9.8 veces ( $0.156045/0.0159689$ ) en el grupo 90–94 años. En la gráfica 1.3 se presenta el número de veces que la proporción masculina excede a la femenina.

Consideremos dos edades extremas avanzadas:

- el límite de la vida humana que denotaremos por  $\omega$ , es decir, una edad a la cual nadie sobrevive
- el límite de la participación en la actividad económica que denotaremos por  $\theta$ , o sea, la edad a partir de la cual ya se han retirado de trabajar todos los activos (95 años en México en 1990).

Sea por la costumbre o por la ley laboral vigente, en todas las sociedades  $\theta$  es menor que  $\omega$ .

Desagregando la PEA total en grupos de edad:

$$PEA = \sum_{x=\beta}^{\theta-n} {}_n PEA_x = \sum_{x=\beta}^{\theta-n} {}_n P_x {}_n A_x$$

por lo tanto, la proporción bruta de participación es:

$$A = \frac{PEA}{P} = \sum_{x=\beta}^{\theta-n} {}_n c_x {}_n A_x \quad (1.4)$$

donde  ${}_n c_x = {}_n P_x / P$  es la distribución relativa de la población respecto a la edad o estructura por edad de la población, y el índice de la sumatoria se incrementa de acuerdo a la longitud de cada intervalo de edades ( $n$ ),

**CUADRO 1.1**  
**México: participación por edad y sexo**  
**en la actividad económica, 1990**

| Grupo<br>de edad<br>$x, x+n-1$ | Población:                 |                               |                                 | Proporción de:               |                                |
|--------------------------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
|                                | total<br>${}_n P_x$<br>(1) | activa<br>${}_n PEA_x$<br>(2) | inactiva<br>${}_n PEI_x$<br>(3) | activos<br>${}_n A_x$<br>(4) | inactivos<br>${}_n I_x$<br>(5) |
| <i>Hombres</i>                 |                            |                               |                                 |                              |                                |
| 12-14                          | 3,159,216                  | 374,456                       | 2,784,760                       | 0.118528                     | 0.881472                       |
| 15-19                          | 4,759,892                  | 2,303,407                     | 2,456,485                       | 0.483920                     | 0.516080                       |
| 20-24                          | 3,738,128                  | 2,917,079                     | 821,049                         | 0.780358                     | 0.219642                       |
| 25-29                          | 3,050,595                  | 2,743,273                     | 307,322                         | 0.899258                     | 0.100742                       |
| 30-34                          | 2,578,736                  | 2,387,469                     | 191,267                         | 0.925829                     | 0.074171                       |
| 35-39                          | 2,210,565                  | 2,047,353                     | 163,212                         | 0.926167                     | 0.073833                       |
| 40-44                          | 1,705,013                  | 1,562,217                     | 142,796                         | 0.916249                     | 0.083751                       |
| 45-49                          | 1,452,573                  | 1,299,860                     | 152,713                         | 0.894867                     | 0.105133                       |
| 50-54                          | 1,161,875                  | 989,839                       | 172,036                         | 0.851932                     | 0.148068                       |
| 55-59                          | 918,864                    | 729,149                       | 189,715                         | 0.793533                     | 0.206467                       |
| 60-64                          | 769,917                    | 532,978                       | 236,939                         | 0.692254                     | 0.307746                       |
| 65-69                          | 567,641                    | 336,694                       | 230,947                         | 0.593146                     | 0.406854                       |
| 70-74                          | 394,031                    | 197,945                       | 196,086                         | 0.502359                     | 0.497641                       |
| 75-79                          | 277,835                    | 113,377                       | 164,458                         | 0.408073                     | 0.591927                       |
| 80-84                          | 179,820                    | 54,943                        | 124,877                         | 0.305544                     | 0.694456                       |
| 85-89                          | 99,299                     | 22,918                        | 76,381                          | 0.230798                     | 0.769202                       |

|          |            |            |           |          |          |
|----------|------------|------------|-----------|----------|----------|
| 90-94    | 38,021     | 5,933      | 32,088    | 0.156045 | 0.843955 |
| 95 o más | 22,161     | 0          | 22,161    | 0.000000 | 1.000000 |
| Total    | 27,084,182 | 18,618,890 | 8,465,292 | 0.687445 | 0.312555 |

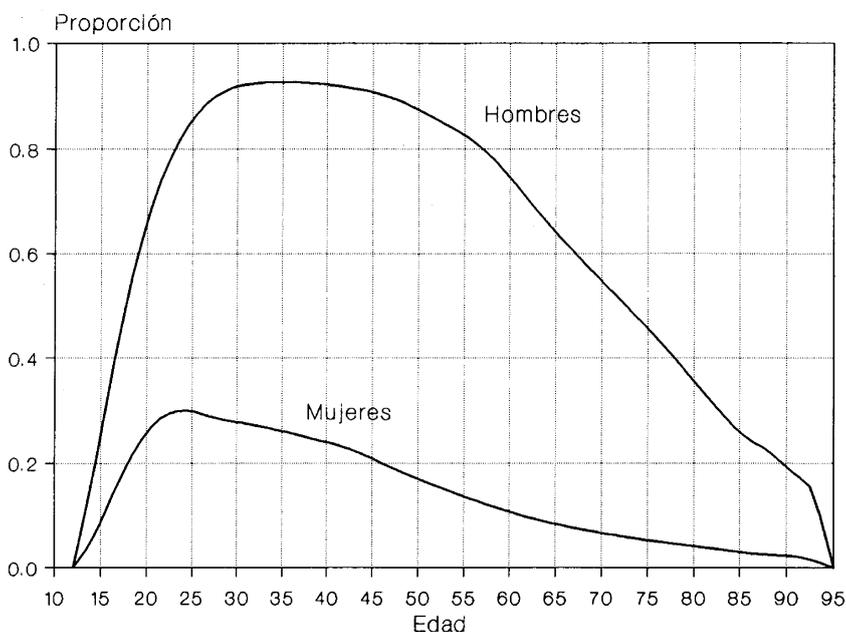
*Mujeres*

|          |            |           |            |          |          |
|----------|------------|-----------|------------|----------|----------|
| 12-14    | 3,143,755  | 113,619   | 3,030,136  | 0.036141 | 0.963859 |
| 15-19    | 4,904,511  | 905,322   | 3,999,189  | 0.184590 | 0.815410 |
| 20-24    | 4,091,035  | 1,208,327 | 2,882,708  | 0.295360 | 0.704640 |
| 25-29    | 3,353,917  | 963,555   | 2,390,362  | 0.287292 | 0.712708 |
| 30-34    | 2,808,883  | 761,802   | 2,047,081  | 0.271212 | 0.728788 |
| 35-39    | 2,368,551  | 593,717   | 1,774,834  | 0.250667 | 0.749333 |
| 40-44    | 1,792,757  | 407,908   | 1,384,849  | 0.227531 | 0.772469 |
| 45-49    | 1,519,287  | 286,895   | 1,232,392  | 0.188835 | 0.811165 |
| 50-54    | 1,231,916  | 189,154   | 1,042,762  | 0.153545 | 0.846455 |
| 55-59    | 975,620    | 118,459   | 857,161    | 0.121419 | 0.878581 |
| 60-64    | 841,400    | 79,574    | 761,826    | 0.094573 | 0.905427 |
| 65-69    | 616,010    | 46,029    | 569,981    | 0.074721 | 0.925279 |
| 70-74    | 432,996    | 25,688    | 407,308    | 0.059326 | 0.940674 |
| 75-79    | 313,001    | 14,670    | 298,331    | 0.046869 | 0.953131 |
| 80-84    | 222,012    | 7,877     | 214,135    | 0.035480 | 0.964520 |
| 85-89    | 126,151    | 3,245     | 122,906    | 0.025723 | 0.974277 |
| 90-94    | 53,168     | 849       | 52,319     | 0.015968 | 0.984032 |
| 95 o más | 34,695     | 0         | 34,695     | 0.000000 | 1.000000 |
| Total    | 28,829,665 | 5,726,690 | 23,102,975 | 0.198639 | 0.801361 |

Fuente: anexo A.

GRÁFICA 1.1

**México: proporciones de participación en la actividad económica por edad y sexo, 1990**



*Fuente:* cuadro 1.1.

y no de uno en uno, como tradicionalmente se evalúan las sumatorias. Dado que

$$\sum_{x=0}^{\omega-n} n c_x = 1$$

podemos extraer de (1.4) un conocido resultado del análisis demográfico: la proporción bruta de participación es la media de las proporciones específicas por edad ( ${}_n A_x$ ), ponderada por la estructura etaria de la población ( ${}_n c_x$ ).

De manera análoga tenemos que la proporción refinada de activos es:

$$A_{\beta+} = \sum_{x=\beta}^{\theta-n} {}_n c_{x,\beta+} A_x \quad (1.5)$$

donde  ${}_n c_{x,\beta+} = {}_n P_x / P_{\beta+}$  es la estructura por edad de la población de  $\beta$  años o más de edad. Resultados análogos se pueden obtener para las proporciones bruta y refinada de inactivos.

## 1.2. SOBREVIVIENTES Y TIEMPO VIVIDO EN LA ACTIVIDAD

Denotemos por  $\ell_x$  los sobrevivientes a la edad exacta  $x$  del efectivo inicial de nacimientos o *radix*, en una cohorte real o ficticia que no experimenta migración a lo largo de su existencia, por ejemplo, la cohorte de una tabla de mortalidad. El término real indica que las medidas observadas (proporciones, probabilidades o tasas) corresponden a una generación realmente observada; en cambio, ficticia es aquella cohorte en que se ligan las medidas por edad observadas en un momento o periodo corto de tiempo, formando una generación cuya experiencia sobre todo el rango de edades no necesariamente habrá experimentado ni experimentará alguna generación; es en este sentido que se habla de una cohorte ficticia o sintética. La inmensa mayoría de las aplicaciones de modelos demográficos en los países en vías de desarrollo corresponde a generaciones ficticias.

Denotemos por  $\ell_x^a$  la población económicamente activa y por  $\ell_x^i$  la inactiva entre los sobrevivientes  $\ell_x$ . Recordando que actividad e inactividad económicas son dos conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivos de la población total, tenemos:

$$\ell_x^a + \ell_x^i = \ell_x \quad (1.6)$$

Sea  $\alpha_x$  la proporción instantánea de activos e  $\iota_x$  la de inactivos a la edad exacta  $x$ , entonces:

$$\alpha_x = \frac{\ell_x^a}{\ell_x} \quad \text{e} \quad \iota_x = \frac{\ell_x^i}{\ell_x}$$

o bien,

$$\ell_x^a = \ell_x \alpha_x \quad \text{y} \quad \ell_x^i = \ell_x \iota_x \quad (1.7)$$

y dividiendo ambos lados de (1.6) entre  $\ell_x$ , tenemos la versión de (1.1) para las proporciones instantáneas:

$$\alpha_x + \iota_x = 1 \quad (1.8)$$

Denotemos ahora por  ${}_nL_x$  los años-persona vividos por la cohorte entre las edades exactas  $x$  y  $x+n$ , por  ${}_nL_x^a$  el tiempo vivido en la actividad y por  ${}_nL_x^i$  en la inactividad, cuyos valores son:

$$\begin{aligned} {}_nL_x &= \int_x^{x+n} \ell_y \, dy \\ {}_nL_x^a &= \int_x^{x+n} \ell_y^a \, dy = \int_x^{x+n} \ell_y \alpha(y) \, dy \\ {}_nL_x^i &= \int_x^{x+n} \ell_y^i \, dy = \int_x^{x+n} \ell_y \iota(y) \, dy \end{aligned} \quad (1.9)$$

La interpretación de estas fórmulas es la siguiente. Sea  $dy$  un pequeño intervalo de tiempo medido en años (quizás una milésima de segundo aún es grande) tal, que durante ese periodo el monto de sobrevivientes  $\ell_y$ ,  $\ell_y^a$  ó  $\ell_y^i$  no cambia. Al cabo de ese pequeño intervalo, cada uno de los sobrevivientes vive  $dy$  años, y el conjunto vive un total de  $\ell_y dy$ ,  $\ell_y^a dy$  ó  $\ell_y^i dy$  años. Como una integral definida es la suma sobre todos los pequeños intervalos

que cubre el rango de variación (la edad  $y$ ), entonces las tres igualdades anteriores expresan los años-persona vividos por la cohorte, en la actividad y en la inactividad respectivamente, entre las edades exactas  $x$  y  $x + n$ .

Si sumamos  ${}_nL_x^a$  y  ${}_nL_x^i$  tenemos la extensión de (1.6) al caso del tiempo vivido:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^a + {}_nL_x^i &= \int_x^{x+n} \ell_y [\alpha(y) + \iota(y)] dy \\ &= \int_x^{x+n} \ell_y dy = {}_nL_x \end{aligned} \quad (1.10)$$

### 1.3. AÑOS BRUTOS DE VIDA ACTIVA

Asumamos que en el intervalo comprendido entre las edades  $\beta$  y  $\theta$  la cohorte no experimenta mortalidad:

$$\ell_x = \ell_\beta \quad \beta \leq x \leq \theta$$

y supongamos también que las proporciones de activos e inactivos se mantienen constantes dentro de cada intervalo de edades:

$$\begin{aligned} \alpha(y) &= {}_nA_x \quad e \\ \iota(y) &= {}_nI_x \quad \text{para } x \leq y \leq x + n \end{aligned} \quad (1.11)$$

Introduciendo ambos supuestos en (1.9), los años-persona vividos en la actividad y en la inactividad son:

$${}_n\hat{L}_x^a = \int_x^{x+n} \ell_\beta {}_nA_x dy = n \ell_\beta {}_nA_x$$

$$\begin{aligned} {}_n\hat{L}_x^i &= n\ell_\beta {}_nI_x \\ \text{para } \beta \leq x \leq \theta - n \end{aligned}$$

donde el símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  indica que se omite el efecto exclusor de la mortalidad.

A partir de la edad  $x$ , los años que pasará la generación en la actividad y en la inactividad son:

$$\begin{aligned} \hat{T}_x^a &= \sum_{u=x}^{\theta-n} {}_n\hat{L}_u^a = \ell_\beta \sum_{u=x}^{\theta-n} n_n A_u \\ \hat{T}_x^i &= \sum_{u=x}^{\theta-n} {}_n\hat{L}_u^i = \ell_\beta \sum_{u=x}^{\theta-n} n_n I_u \end{aligned}$$

donde el índice de la sumatoria se incrementa de acuerdo a la longitud de cada intervalo de edades ( $n$ ). Estos volúmenes de tiempo los vivirá toda la cohorte, por lo cual el promedio de años que cada individuo espera pasar en la actividad y en la inactividad, o años brutos de vida activa e inactiva, son:

$$\begin{aligned} \hat{e}_x^a &= \frac{\hat{T}_x^a}{\ell_x} = \frac{\hat{T}_x^a}{\ell_\beta} = \sum_{u=x}^{\theta-n} n_n A_u \\ \hat{e}_x^i &= \frac{\hat{T}_x^i}{\ell_x} = \frac{\hat{T}_x^i}{\ell_\beta} = \sum_{u=x}^{\theta-n} n_n I_u \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde la palabra brutos indica la omisión del riesgo de fallecer.

Al aplicar (1.12) para obtener los años brutos a las diferentes edades iniciales de todos los intervalos considerados, es necesario realizar tantas sumatorias como grupos de edad se tengan. Este largo proceso de cálculo

se puede reducir sustancialmente mediante una sencilla propiedad de la sumatoria:

$$\begin{aligned}\hat{e}_x^a &= \sum_{u=x}^{\theta-n} n_n A_u = n_n A_x + \sum_{u=x+n}^{\theta-n} n_n A_u \\ &= n_n A_x + \hat{e}_{x+n}^a\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\hat{e}_x^i &= \sum_{u=x}^{\theta-n} n_n I_u = n_n I_x + \sum_{u=x+n}^{\theta-n} n_n I_u \\ &= n_n I_x + \hat{e}_{x+n}^i\end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones son útiles, porque una vez determinados los años per cápita en cada grupo de edad ( $n_n A_x$  ó  $n_n I_x$ ), a partir de los años brutos para el último intervalo ( $\hat{e}_{\theta-n}^a$  ó  $\hat{e}_{\theta-n}^i$ ), mediante una simple acumulación retrospectiva se obtienen los valores para las restantes edades.

Si sumamos los años brutos de vida activa e inactiva en (1.12), incorporando (1.3) tenemos:

$$\hat{e}_x^a + \hat{e}_x^i = \sum_{u=x}^{\theta-n} n [{}_n A_u + {}_n I_u] = \sum_{u=x}^{\theta-n} n = \theta - x \tag{1.14}$$

una propiedad lógica, dado el supuesto de ausencia de la mortalidad y el hecho de que actividad e inactividad económicas son estados mutuamente excluyentes y exhaustivos de la población total.

En el cuadro 1.2 se muestran los pasos seguidos para determinar los años brutos de vida activa e inactiva para la población de México en 1990, y en la gráfica 1.2 se reproduce el patrón por edad. Una vez determinados los años per cápita en la actividad para cada grupo de edades

CUADRO 1.2  
**México: cálculo de los años brutos de vida activa  
 e inactiva por sexo, 1990**

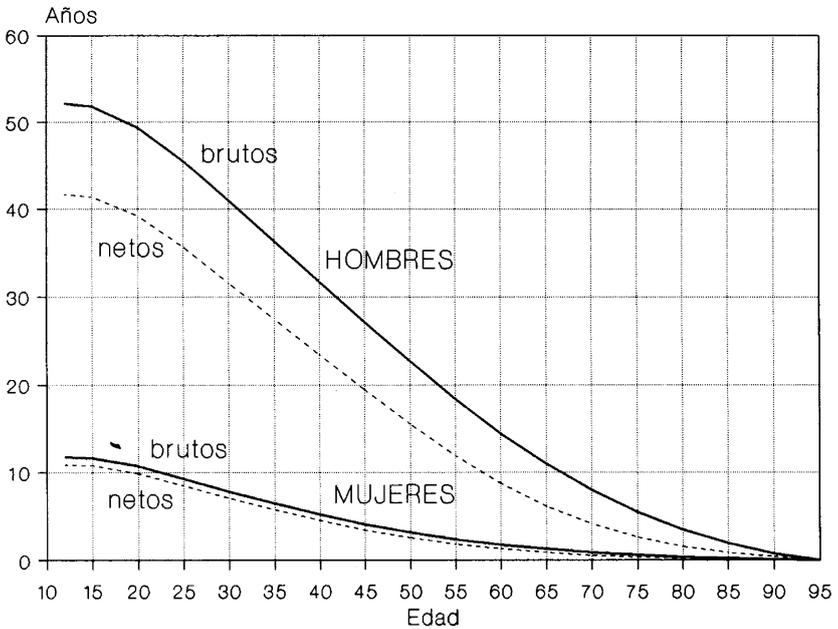
| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Proporción de activos<br>${}_n A_x$<br>(1) | Longitud del grupo<br>$n$<br>(2) | Años per cápita en la actividad<br>${}_n A_x$<br>(3) | Años brutos de vida:           |                                  | Porcentaje vida activa del total<br>$\frac{\hat{e}_x^a}{95-x} \times 100$<br>(6) |
|-----------------------------|--|----------------------------------|--|--------------------------------|----------------------------------|--|
|                             |  |                                  |  | activa<br>$\hat{e}_x^a$<br>(4) | inactiva<br>$\hat{e}_x^i$<br>(5) |  |
| <i>Hombres</i>              |  |                                  |  |                                |                                  |  |
| 12-14                       | 0.118528                                   | 3                                | 0.3556   | 52.157                         | 30.843                           | 62.84  |
| 15-19                       | 0.483920                                   | 5                                | 2.4196   | 51.802                         | 28.198                           | 64.75  |
| 20-24                       | 0.780358                                   | 5                                | 3.9018   | 49.382                         | 25.618                           | 65.84  |
| 25-29                       | 0.899258                                   | 5                                | 4.4963   | 45.480                         | 24.520                           | 64.97  |
| 30-34                       | 0.925829                                   | 5                                | 4.6291   | 40.984                         | 24.016                           | 63.05  |
| 35-39                       | 0.926167                                   | 5                                | 4.6308   | 36.355                         | 23.645                           | 60.59  |
| 40-44                       | 0.916249                                   | 5                                | 4.5812   | 31.724                         | 23.276                           | 57.68  |
| 45-49                       | 0.894867                                   | 5                                | 4.4743   | 27.143                         | 22.857                           | 54.29  |
| 50-54                       | 0.851932                                   | 5                                | 4.2597   | 22.668                         | 22.332                           | 50.37  |
| 55-59                       | 0.793533                                   | 5                                | 3.9677   | 18.409                         | 21.591                           | 46.02  |
| 60-64                       | 0.692254                                   | 5                                | 3.4613   | 14.441                         | 20.559                           | 41.26  |
| 65-69                       | 0.593146                                   | 5                                | 2.9657   | 10.980                         | 19.020                           | 36.60  |
| 70-74                       | 0.502359                                   | 5                                | 2.5118   | 8.014                          | 16.986                           | 32.06  |
| 75-79                       | 0.408073                                   | 5                                | 2.0404   | 5.502                          | 14.498                           | 27.51  |

|                |          |   |        |        |        |       |
|----------------|----------|---|--------|--------|--------|-------|
| 80-84          | 0.305544 | 5 | 1.5277 | 3.462  | 11.538 | 23.08 |
| 85-89          | 0.230798 | 5 | 1.1540 | 1.934  | 8.066  | 19.34 |
| 90-94          | 0.156051 | 5 | 0.7803 | 0.780  | 4.220  | 15.61 |
| <i>Mujeres</i> |          |   |        |        |        |       |
| 12-14          | 0.036141 | 3 | 0.1084 | 11.774 | 71.226 | 14.19 |
| 15-19          | 0.184590 | 5 | 0.9229 | 11.666 | 68.334 | 14.58 |
| 20-24          | 0.295360 | 5 | 1.4768 | 10.743 | 64.257 | 14.32 |
| 25-29          | 0.287292 | 5 | 1.4365 | 9.266  | 60.734 | 13.24 |
| 30-34          | 0.271212 | 5 | 1.3561 | 7.829  | 57.171 | 12.05 |
| 35-39          | 0.250667 | 5 | 1.2533 | 6.473  | 53.527 | 10.79 |
| 40-44          | 0.227531 | 5 | 1.1377 | 5.220  | 49.780 | 9.49  |
| 45-49          | 0.188835 | 5 | 0.9442 | 4.082  | 45.918 | 8.16  |
| 50-54          | 0.153545 | 5 | 0.7677 | 3.138  | 41.862 | 6.97  |
| 55-59          | 0.121419 | 5 | 0.6071 | 2.370  | 37.630 | 5.93  |
| 60-64          | 0.094573 | 5 | 0.4729 | 1.763  | 33.237 | 5.04  |
| 65-69          | 0.074721 | 5 | 0.3736 | 1.290  | 28.710 | 4.30  |
| 70-74          | 0.059326 | 5 | 0.2966 | 0.917  | 24.083 | 3.67  |
| 75-79          | 0.046869 | 5 | 0.2343 | 0.620  | 19.380 | 3.10  |
| 80-84          | 0.035480 | 5 | 0.1774 | 0.386  | 14.614 | 2.57  |
| 85-89          | 0.025723 | 5 | 0.1286 | 0.208  | 9.792  | 2.08  |
| 90-94          | 0.015966 | 5 | 0.0798 | 0.080  | 4.920  | 1.60  |

Fuente: columna (4) del cuadro 1.1 para (1).

GRÁFICA 1.2

**México: años brutos y netos de vida activa por edad y sexo, 1990**



Fuentes : cuadros 1.2 y 1.3.

$(n_n A_x)$ , mediante la acumulación retrospectiva (1.13) se deducen fácilmente los años brutos de vida activa para las restantes edades. Por ejemplo, los años brutos de vida activa masculina a los 65 años son:

$$\hat{e}_{65}^a = {}_5A_{65} + \hat{e}_{70}^a = 2.9657 + 8.014 = 10.980$$

o los femeninos a los 25 años:

$$\hat{e}_{25}^a = {}_5A_{25} + \hat{e}_{30}^a = 1.4365 + 7.829 = 9.266$$

y aplicando (1.14) obtenemos los años brutos de vida inactiva:

$$\hat{e}_{25}^i = 95 - 25 - 9.266 = 60.734$$

Destaca nuevamente la mayor participación masculina; se puede observar en la gráfica 1.3 que el excedente proporcional supera las cuatro veces en todas las edades, y es mayor también que el observado en las proporciones de participación en todo el rango etario. En la gráfica 1.4, se presenta el porcentaje de la vida restante que consumirá la actividad económica, donde se puede ver que el patrón comienza ascendiendo hasta alcanzar un máximo (20 años en hombres y 15 en mujeres) para luego descender de manera continua hasta la última edad de participación. Esta pauta unimodal no es sino resultado del particular patrón por edad de las proporciones de participación (gráfica 1.1).

Frecuentemente ocurre que la fuente de datos reporta un grupo abierto terminal de edades<sup>2</sup>, con lo cual se desconoce la edad  $\theta$  y es necesario fijarla arbitrariamente. Asumamos que de alguna manera se ha fijado  $\theta$  y supongamos que  $A_{z+}$  e  $I_{z+}$  —proporciones de activos e inactivos para el grupo abierto de  $z$  años o más de edad— permanecen invariantes entre  $z$  y  $\theta$ ; entonces, los años brutos de vida activa o inactiva a la edad  $z$  son:

$$\hat{e}_x^a = (\theta - z) A_{z+} \quad \text{ó} \quad \hat{e}_x^i = (\theta - z) I_{z+} \quad (1.15)$$

---

<sup>2</sup>En los cuadros publicados en el *Resumen General* (versión impresa) del censo de México de 1990, el rango de edades para la participación en la actividad económica concluye con el intervalo abierto de 65 años o más.

y a partir de esos valores y mediante (1.13) se obtienen los años brutos para las edades iniciales de todos los intervalos considerados.

Si utilizamos las proporciones que se deducen directamente del censo de 1990 de México para el grupo de 65 años o más (0.467919 para hombres y 0.055500 para mujeres), en lugar de su apertura en grupos quinquenales hasta el 90-94 (véase Anexo A), hacemos  $\theta$  igual a 95 años y aplicamos (1.15) para algunas edades seleccionadas, los años brutos son:

| Edad           | Último grupo en las proporciones |        | Porcentaje de sobrestimación |
|----------------|----------------------------------|--------|------------------------------|
|                | 65 o más                         | 90-94  |                              |
| <i>Hombres</i> |                                  |        |                              |
| 12             | 55.215                           | 52.157 | 5.9                          |
| 25             | 48.538                           | 45.480 | 6.7                          |
| 50             | 25.726                           | 22.668 | 13.5                         |
| 65             | 14.038                           | 10.980 | 27.8                         |
| <i>Mujeres</i> |                                  |        |                              |
| 12             | 12.149                           | 11.774 | 3.2                          |
| 25             | 9.640                            | 9.266  | 4.0                          |
| 50             | 3.513                            | 3.138  | 11.9                         |
| 65             | 1.665                            | 1.290  | 29.0                         |

El efecto es bastante claro: fuera del intervalo abierto de edades (65 años o más), el sesgo se reduce considerablemente, hasta niveles realmente bajos al inicio de la vida activa.

Si bien (1.15) parece un método rápido para obtener los años brutos de vida activa o inactiva a cualquier edad, no debe perderse de vista que esa solución sólo es correcta en dos casos poco factibles:

- i) Suponiendo que la proporción de participación a partir de cualquier edad ( $A_{x+}$ ) se mantiene constante entre  $x$  y  $\theta$ , supuesto que fácilmente se refuta al ver la pauta típica de participación por edad (gráfica 1.1)
- ii) Suponiendo que entre las edades  $x$  y  $\theta$  la estructura por edad es proporcional al tamaño del grupo ( ${}_n c_{u,x+} = n/[\theta - x]$ ) o rectangular, de ahí que por la generalización de (1.5) para cualquier edad:

$$A_{x+} = \sum_{u=x}^{\theta-n} \frac{n}{\theta-x} {}_n A_u = \frac{1}{\theta-x} \sum_{u=x}^{\theta-n} n {}_n A_u \quad \text{ó}$$

$$I_{x+} = \frac{1}{\theta-x} \sum_{u=x}^{\theta-n} n {}_n I_u$$

de donde,

$$\hat{e}_x^a = (\theta - x) A_{x+} \quad \text{ó} \quad \hat{e}_x^i = (\theta - x) I_{x+}$$

y realmente es difícil encontrar una distribución por edad rectangular de la población.

Como ejemplo de la distorsión que se tiene al estimar con (1.15) los años brutos para edades anteriores a  $z$ , a los 12 años para México en 1990 tenemos:

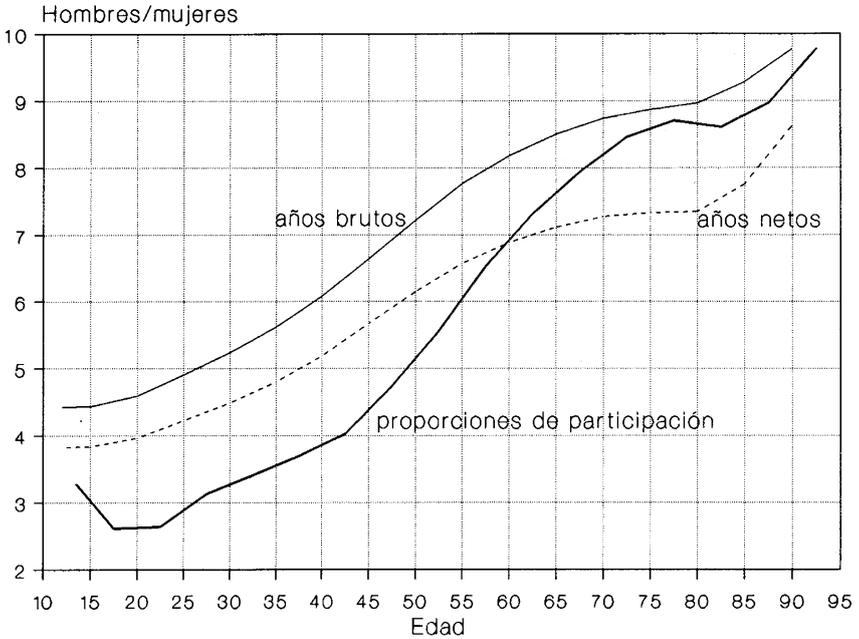
$$\text{para hombres: } \hat{e}_{12}^a = 83 \times 0.687445 = 57.058$$

$$\text{para mujeres: } \hat{e}_{12}^a = 83 \times 0.198639 = 16.487$$

una sobrestimación de 9.4% en los años brutos masculinos y de hasta 40% en los femeninos respecto a las cifras del cuadro 1.2.

## GRÁFICA 1.3

**México: número de veces que la participación masculina supera a la femenina por edad, 1990**



*Fuentes* : deducido de los cuadros 1.1, 1.2 y 1.3.

## 1.4. AÑOS NETOS DE VIDA ACTIVA

La ausencia de mortalidad es sin duda el supuesto más cuestionable cuando se pretende estimar la esperanza de vida activa con los años brutos. Buscando un esquema más realista, aceptemos la incidencia del riesgo de fallecer por edad y tomemos su patrón de una tabla de mortalidad.

Supongamos nuevamente que la proporción de participación en la actividad se mantiene constante dentro de cada grupo de edades, entonces, incorporando (1.11)

en (1.9), tenemos que los años-persona vividos en la actividad y en la inactividad son:

$${}_nL_x^a = \int_x^{x+n} \ell_{y \ n} A_x dy = {}_nL_x \ n A_x \quad (1.16)$$

$${}_nL_x^i = {}_nL_x \ n I_x$$

que por (1.3) claramente satisfacen la propiedad (1.10).

Al introducir (1.11), implícitamente estamos suponiendo que la mortalidad es igual para activos e inactivos. En efecto, dado el supuesto (1.11), tenemos que para cualquier edad dentro del intervalo de edades exactas  $[x, x + n)$ :

$$\begin{aligned} \ell_{x+y}^a &= \ell_{x+y \ n} A_x \quad \text{ó} \\ \ell_{x+y}^i &= \ell_{x+y \ n} I_x \quad \text{para } 0 \leq y \leq n \end{aligned}$$

con lo cual estamos asumiendo que el ritmo de cambio — realmente de disminución — en los sobrevivientes activos e inactivos está dado exclusivamente por el efecto de la mortalidad, pues es el mismo que para toda la cohorte:

$$\frac{\ell_{x+y}^a}{\ell_x^a} = \frac{\ell_{x+y}^i}{\ell_x^i} = \frac{\ell_{x+y}}{\ell_x} = {}_y p_x \quad 0 \leq y \leq n$$

donde  ${}_y p_x$  es la conocida probabilidad de supervivencia entre las edades exactas  $x$  y  $x + y$  en la tabla de mortalidad.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>El supuesto de igual mortalidad para activos e inactivos es indispensable para los algoritmos que se presentan en los siguientes tres capítulos. Esto se discute con mayor detalle al inicio del capítulo 2.

Los años que vivirá la cohorte en la actividad y en la inactividad a partir de la edad  $x$  son:

$$T_x^a = \sum_{u=x}^{\omega-n} {}_nL_u^a \quad y \quad T_x^i = \sum_{u=x}^{\omega-n} {}_nL_u^i \quad (1.17)$$

donde el índice de la sumatoria se incrementa de acuerdo a la longitud del intervalo ( $n$ ), e incorporando (1.10) tenemos la extensión para los años-persona acumulados:

$$T_x^a + T_x^i = \sum_{u=x}^{\omega-n} [{}_nL_u^a + {}_nL_u^i] = \sum_{u=x}^{\omega-n} {}_nL_u = T_x \quad (1.18)$$

donde  $T_x$  es el tiempo vivido por la cohorte de la tabla de mortalidad a partir de la edad exacta  $x$ . Los valores de  $T_x^a$  o de  $T_x^i$  se pueden deducir de manera más rápida mediante la acumulación retrospectiva que se obtiene al descomponer la sumatoria:

$$\begin{aligned} T_x^a &= {}_nL_x^a + \sum_{u=x+n}^{\omega-n} {}_nL_u^a = {}_nL_x^a + T_{x+n}^a \\ y \quad T_x^i &= {}_nL_x^i + T_{x+n}^i \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dividiendo el tiempo vivido en la actividad o en la inactividad a partir de la edad  $x$  entre los sobrevivientes a esa misma edad, tenemos el promedio de años que una persona de edad  $x$  espera pasar en la actividad o en la inactividad en el resto de su vida, o años netos de vida activa o inactiva:

$$e_x^a = \frac{T_x^a}{\ell_x} \quad y \quad e_x^i = \frac{T_x^i}{\ell_x} \quad (1.20)$$

que por (1.18) satisfacen nuevamente la propiedad de cerradura:

$$e_x^a + e_x^i = \frac{T_x^a + T_x^i}{\ell_x} = \frac{T_x}{\ell_x} = e_x \quad (1.21)$$

donde  $e_x$  es la conocida esperanza de vida a la edad  $x$  que se extrae de una tabla de mortalidad. Esta propiedad es útil porque basta con calcular los años netos de vida activa o inactiva para poder determinar los correspondientes al estado opuesto, pues seguramente se cuenta con las esperanzas de vida para todas las edades en la tabla de mortalidad que se utiliza.

En el cuadro 1.3 se muestra el cálculo de los años-persona vividos y en el cuadro 1.4 el de los años netos para la población de México en 1990. Por ejemplo, dada la proporción de participación femenina en el grupo de edades 30-34, aplicando (1.16) deducimos los años-persona vividos en la actividad:

$$\begin{aligned} {}_5L_{30}^a &= {}_5L_{30} {}_5A_{30} = 4,703,213 \times 0.271212 \\ &= 1,275,567 \end{aligned}$$

y habiendo obtenido  $T_{35}^a$  mediante (1.19), los años-persona vividos a partir de los 30 años son:

$$\begin{aligned} T_{30}^a &= {}_5L_{30}^a + T_{35}^a = 1,275,567 + 5,369,830 \\ &= 6,645,397 \end{aligned}$$

de donde, por (1.20) tenemos los años netos de vida activa:

$$e_{30}^a = \frac{T_{30}^a}{\ell_{30}} = \frac{6,645,397}{943,338} = 7.04$$

y despejando en (1.21), los de vida inactiva:

$$e_{30}^i = e_{30} - e_{30}^a = 46.77 - 7.04 = 39.72$$

CUADRO 1.3

México: cálculo de los años-persona vividos en la actividad  
y en la inactividad por edad y sexo, 1990

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Años-persona<br>${}_nL_x$<br>(1) | Proporción de activos<br>${}_nA_x$<br>(2) | Tiempo vivido en el grupo en la: |                                   | Tiempo vivido acumulado en la: |                               |
|-----------------------------|----------------------------------|---|----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
|                             |                                  |   | actividad<br>${}_nL_x^a$<br>(3)  | inactividad<br>${}_nL_x^i$<br>(4) | actividad<br>$T_x^a$<br>(5)    | inactividad<br>$T_x^i$<br>(6) |
| <i>Hombres</i>              |                                  |   |                                  |                                   |                                |                               |
| 12-14                       | 2,836,239                        | 0.118528                                  | 336,174                          | 2,500,065                         | 39,410,549                     | 14,739,634                    |
| 15-19                       | 4,707,257                        | 0.483920                                  | 2,277,936                        | 2,429,321                         | 39,074,375                     | 12,239,569                    |
| 20-24                       | 4,669,958                        | 0.780358                                  | 3,644,240                        | 1,025,718                         | 36,796,439                     | 9,810,248                     |
| 25-29                       | 4,616,702                        | 0.899258                                  | 4,151,608                        | 465,094                           | 33,152,198                     | 8,784,530                     |
| 30-34                       | 4,547,057                        | 0.925829                                  | 4,209,798                        | 337,259                           | 29,000,591                     | 8,319,436                     |
| 35-39                       | 4,460,369                        | 0.926167                                  | 4,131,048                        | 329,321                           | 24,790,793                     | 7,982,177                     |
| 40-44                       | 4,354,340                        | 0.916249                                  | 3,989,661                        | 364,679                           | 20,659,744                     | 7,652,856                     |
| 45-49                       | 4,223,528                        | 0.894867                                  | 3,779,496                        | 444,031                           | 16,670,084                     | 7,288,177                     |
| 50-54                       | 4,056,333                        | 0.851932                                  | 3,455,722                        | 600,611                           | 12,890,587                     | 6,844,146                     |
| 55-59                       | 3,818,385                        | 0.793533                                  | 3,030,015                        | 788,370                           | 9,434,865                      | 6,243,534                     |
| 60-64                       | 3,470,630                        | 0.692254                                  | 2,402,557                        | 1,068,073                         | 6,404,851                      | 5,455,164                     |
| 65-69                       | 2,985,074                        | 0.593146                                  | 1,770,585                        | 1,214,489                         | 4,002,294                      | 4,387,091                     |
| 70-74                       | 2,355,205                        | 0.502359                                  | 1,183,158                        | 1,172,047                         | 2,231,709                      | 3,172,602                     |
| 75-79                       | 1,626,271                        | 0.408073                                  | 663,637                          | 962,633                           | 1,048,551                      | 2,000,556                     |
| 80-84                       | 916,866                          | 0.305544                                  | 280,143                          | 636,722                           | 384,913                        | 1,037,922                     |

|                |           |          |           |           |            |            |
|----------------|-----------|----------|-----------|-----------|------------|------------|
| 85-89          | 382,901   | 0.230798 | 88,373    | 294,528   | 104,770    | 401,200    |
| 90-94          | 105,078   | 0.156051 | 16,398    | 88,680    | 16,398     | 106,672    |
| 95 o más       | 17,991    | 0.000000 | 0         | 17,991    | 0          | 17,991     |
| <i>Mujeres</i> |           |          |           |           |            |            |
| 12-14          | 2,862,210 | 0.036141 | 103,444   | 2,758,767 | 10,387,910 | 50,827,751 |
| 15-19          | 4,761,036 | 0.184590 | 878,838   | 3,882,198 | 10,284,466 | 48,068,984 |
| 20-24          | 4,746,611 | 0.295360 | 1,401,958 | 3,344,654 | 9,405,628  | 44,186,786 |
| 25-29          | 4,727,844 | 0.287292 | 1,358,274 | 3,369,570 | 8,003,671  | 40,842,133 |
| 30-34          | 4,703,213 | 0.271212 | 1,275,567 | 3,427,647 | 6,645,397  | 37,472,562 |
| 35-39          | 4,670,288 | 0.250667 | 1,170,686 | 3,499,602 | 5,369,830  | 34,044,916 |
| 40-44          | 4,625,028 | 0.227531 | 1,052,338 | 3,572,690 | 4,199,144  | 30,545,314 |
| 45-49          | 4,560,818 | 0.188835 | 861,243   | 3,699,575 | 3,146,806  | 26,972,623 |
| 50-54          | 4,467,097 | 0.153545 | 685,899   | 3,781,199 | 2,285,563  | 23,273,049 |
| 55-59          | 4,327,225 | 0.121419 | 525,408   | 3,801,817 | 1,599,664  | 19,491,850 |
| 60-64          | 4,109,079 | 0.094573 | 388,609   | 3,720,469 | 1,074,256  | 15,690,033 |
| 65-69          | 3,768,747 | 0.074721 | 281,605   | 3,487,142 | 685,647    | 11,969,563 |
| 70-74          | 3,262,358 | 0.059326 | 193,543   | 3,068,815 | 404,042    | 8,482,422  |
| 75-79          | 2,567,160 | 0.046869 | 120,320   | 2,446,840 | 210,498    | 5,413,607  |
| 80-84          | 1,730,099 | 0.035480 | 61,384    | 1,668,715 | 90,179     | 2,966,767  |
| 85-89          | 912,365   | 0.025723 | 23,469    | 888,896   | 28,795     | 1,298,052  |
| 90-94          | 333,562   | 0.015966 | 5,326     | 328,236   | 5,326      | 409,156    |
| 95 o más       | 80,921    | 0.000000 | 0         | 80,921    | 0          | 80,921     |

Fuentes : cuadro B.1 para (1) y columna (4) del cuadro 1.1 para (2).

CUADRO 1.4

México: cálculo de los años netos de vida activa  
e inactiva por sexo, 1990

52

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Sobrevivientes<br>$l_x$<br>(1) | Tiempo vivido acumulado en la: |                               | Años netos de vida:   |                          |                            | Porcentaje vida activa del total<br>$\frac{e_x^a}{e_x} \times 100$<br>(7) |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-----------------------|--------------------------|----------------------------|---|
|                             |                                | actividad<br>$T_x^a$<br>(2)    | inactividad<br>$T_x^i$<br>(3) | total<br>$e_x$<br>(4) | activa<br>$e_x^a$<br>(5) | inactiva<br>$e_x^i$<br>(6) |   |
| <i>Hombres</i>              |                                |                                |                               |                       |                          |                            |   |
| 12-14                       | 946,521                        | 39,410,549                     | 14,739,634                    | 57.21                 | 41.64                    | 15.57                      | 72.8  |
| 15-19                       | 944,192                        | 39,074,375                     | 12,239,569                    | 54.35                 | 41.38                    | 12.96                      | 76.1  |
| 20-24                       | 938,249                        | 36,796,439                     | 9,810,248                     | 49.67                 | 39.22                    | 10.46                      | 79.0  |
| 25-29                       | 929,220                        | 33,152,198                     | 8,784,530                     | 45.13                 | 35.68                    | 9.45                       | 79.1  |
| 30-34                       | 916,938                        | 29,000,591                     | 8,319,436                     | 40.70                 | 31.63                    | 9.07                       | 77.7  |
| 35-39                       | 901,346                        | 24,790,793                     | 7,982,177                     | 36.36                 | 27.50                    | 8.86                       | 75.6  |
| 40-44                       | 882,196                        | 20,659,744                     | 7,652,856                     | 32.09                 | 23.42                    | 8.67                       | 73.0  |
| 45-49                       | 858,768                        | 16,670,084                     | 7,288,177                     | 27.90                 | 19.41                    | 8.49                       | 69.6  |
| 50-54                       | 829,547                        | 12,890,587                     | 6,844,146                     | 23.79                 | 15.54                    | 8.25                       | 65.3  |
| 55-59                       | 790,668                        | 9,434,865                      | 6,243,534                     | 19.83                 | 11.93                    | 7.90                       | 60.2  |
| 60-64                       | 733,196                        | 6,404,851                      | 5,455,164                     | 16.18                 | 8.74                     | 7.44                       | 54.0  |
| 65-69                       | 650,652                        | 4,002,294                      | 4,387,091                     | 12.89                 | 6.15                     | 6.74                       | 47.7  |
| 70-74                       | 538,733                        | 2,231,709                      | 3,172,602                     | 10.03                 | 4.14                     | 5.89                       | 41.3  |
| 75-79                       | 400,187                        | 1,048,551                      | 2,000,556                     | 7.62                  | 2.62                     | 5.00                       | 34.4  |
| 80-84                       | 251,233                        | 384,913                        | 1,037,922                     | 5.66                  | 1.53                     | 4.13                       | 27.1  |

TABLA DE VIDA ACTIVA

|                |         |            |            |       |       |       |      |
|----------------|---------|------------|------------|-------|-------|-------|------|
| 85-89          | 121,977 | 104,770    | 401,200    | 4.15  | 0.86  | 3.29  | 20.7 |
| 90-94          | 40,569  | 16,398     | 106,672    | 3.03  | 0.40  | 2.63  | 13.3 |
| 95 o más       | 8,029   | 0          | 17,991     | 2.24  | 0.00  | 2.24  | 0.0  |
| <i>Mujeres</i> |         |            |            |       |       |       |      |
| 12-14          | 954,700 | 10,387,910 | 50,827,751 | 64.12 | 10.88 | 53.24 | 17.0 |
| 15-19          | 953,423 | 10,284,466 | 48,068,984 | 61.20 | 10.79 | 50.42 | 17.6 |
| 20-24          | 950,892 | 9,405,628  | 44,186,786 | 56.36 | 9.89  | 46.47 | 17.6 |
| 25-29          | 947,615 | 8,003,671  | 40,842,133 | 51.55 | 8.45  | 43.10 | 16.4 |
| 30-34          | 943,338 | 6,645,397  | 37,472,562 | 46.77 | 7.04  | 39.72 | 15.1 |
| 35-39          | 937,687 | 5,369,830  | 34,044,916 | 42.03 | 5.73  | 36.31 | 13.6 |
| 40-44          | 930,042 | 4,199,144  | 30,545,314 | 37.36 | 4.52  | 32.84 | 12.1 |
| 45-49          | 919,376 | 3,146,806  | 26,972,623 | 32.76 | 3.42  | 29.34 | 10.4 |
| 50-54          | 904,027 | 2,285,563  | 23,273,049 | 28.27 | 2.53  | 25.74 | 8.9  |
| 55-59          | 881,375 | 1,599,664  | 19,491,850 | 23.93 | 1.81  | 22.12 | 7.6  |
| 60-64          | 847,037 | 1,074,256  | 15,690,033 | 19.79 | 1.27  | 18.52 | 6.4  |
| 65-69          | 792,728 | 685,647    | 11,969,563 | 15.96 | 0.86  | 15.10 | 5.4  |
| 70-74          | 709,467 | 404,042    | 8,482,422  | 12.53 | 0.57  | 11.96 | 4.5  |
| 75-79          | 589,365 | 210,498    | 5,413,607  | 9.54  | 0.36  | 9.19  | 3.7  |
| 80-84          | 432,868 | 90,179     | 2,966,767  | 7.06  | 0.21  | 6.85  | 2.9  |
| 85-89          | 260,052 | 28,795     | 1,298,052  | 5.10  | 0.11  | 4.99  | 2.2  |
| 90-94          | 113,872 | 5,326      | 409,156    | 3.64  | 0.05  | 3.59  | 1.3  |
| 95 o más       | 31,244  | 0          | 80,921     | 2.59  | 0.00  | 2.59  | 0.0  |

Fuentes : cuadro B.1 para (1) y (4) y columnas 5 y 6 del cuadro 1.3 para (2) y (3) respectivamente.

En la gráfica 1.2 se puede ver claramente la disminución que origina la mortalidad en la vida media activa, reduciendo los años brutos masculinos a los doce de edad, cuando la población comienza a incorporarse a la actividad económica, en 20% (41.64 frente a 52.16) y los femeninos en 8% (10.88 frente a 11.77). El mayor riesgo de fallecer en los hombres en todo el rango de edades propicia que el excedente masculino sea menor en los años netos, como se puede apreciar en la gráfica 1.3; en cambio, la combinación del peculiar patrón por edad de la mortalidad humana con la particular pauta de participación, hace que los porcentajes de la vida restante que una persona espera pasar trabajando como años netos y como años brutos se intersecten poco después de los 85 años para ambos sexos, como se puede observar en la gráfica 1.4. Incluso se puede apreciar que la máxima proporción en hombres se desplaza de los 20 años de edad en los años brutos a los 25 años cuando se incorpora la mortalidad.

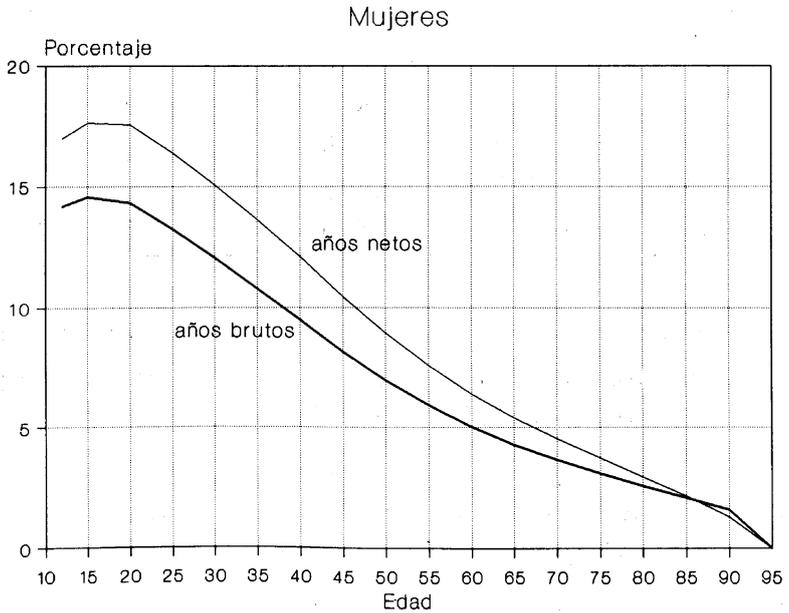
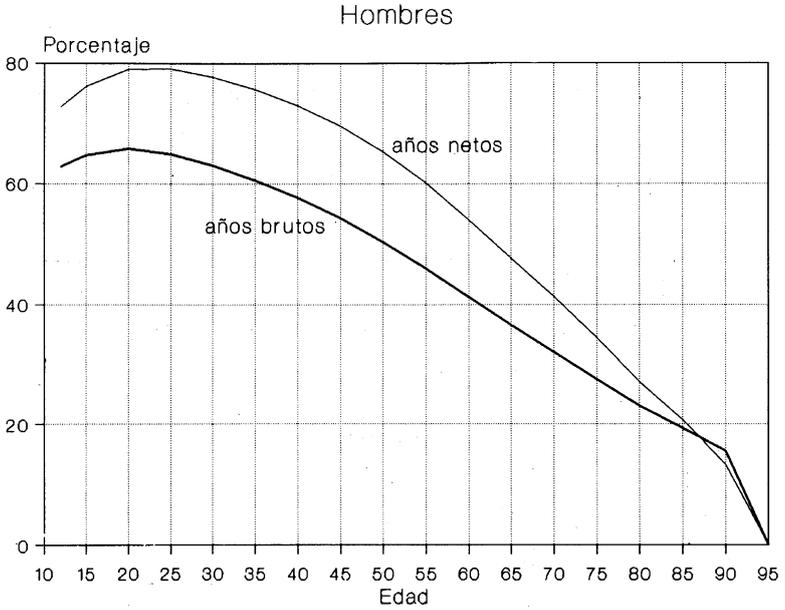
Una simple propiedad de la sumatoria en (1.17) nos permite ver que no es necesario conocer la edad  $\theta$  cuando se tiene un intervalo abierto terminal de edades:

$$T_x^a = \sum_{u=x}^{z-n} {}_nL_u^a + T_z^a \quad y \quad T_x^i = \sum_{u=x}^{z-n} {}_nL_u^i + T_z^i \quad (1.22)$$

donde  $z$  es la edad inicial del intervalo abierto, y los años-persona vividos a partir de la edad  $z$  se pueden obtener suponiendo que la proporción de participación se mantiene constante entre  $z$  y  $\theta$ :

$$T_z^a = T_z A_{z+} \quad y \quad T_z^i = T_z I_{z+} \quad (1.23)$$

**GRÁFICA 1.4**  
**México: porcentaje de la vida restante**  
**que consumirá la actividad económica por edad, 1990**



Fuentes : deducido de los cuadros 1.1, 1.2 y 1.3.

y de manera sencilla los años netos a la edad  $z$ :

$$e_z^a = \frac{T_z^a}{l_z} = \frac{T_z A_{z+}}{l_z} = e_z A_{z+}$$

ó  $e_z^i = e_z I_{z+}$  (1.24)

Si aplicamos este enfoque a las proporciones publicadas de 65 años o más para el censo de México en 1990, los resultados para algunas edades seleccionadas son:

| Edad           | Último grupo en<br>las proporciones<br>65 o más      90-94 |        | Porcentaje<br>de<br>sobrestimación |
|----------------|--|--------|------------------------------------|
| <i>Hombres</i> |  |        |                                    |
| 12             | 41.556   | 41.637 | -0.2                               |
| 25             | 35.595   | 35.677 | -0.2                               |
| 50             | 15.447   | 15.539 | -0.6                               |
| 65             | 6.033  | 6.151  | -1.9                               |
| <i>Mujeres</i> |  |        |                                    |
| 12             | 10.898   | 10.881 | 0.2                                |
| 25             | 8.464  | 8.446  | 0.2                                |
| 50             | 2.547  | 2.528  | 0.7                                |
| 65             | 0.886  | 0.865  | 2.4                                |

A diferencia del caso de los años brutos donde el error es importante, aquí realmente es despreciable, aunque ahora hay subestimación en hombres.

De la misma manera que en los años brutos, la igualdad (1.24) no debe tomarse como un método rápido de estimación para cualquier edad  $x$ , pues su generalización, además del refutable supuesto de invariabilidad en la proporción de participación entre  $x$  y  $\theta$ , sólo es válida en

el poco probable caso de una estructura por edad estacionaria para la población ( ${}_n c_{u,x+} = {}_n L_u / T_x$ ):<sup>4</sup>

$$A_{x+} = \sum_{u=x}^{\theta-n} \frac{{}_n L_u}{T_x} {}_n A_u = \frac{1}{T_x} \sum_{u=x}^{\theta-n} {}_n L_u {}_n A_u = \frac{T_x^a}{T_x}$$

o bien,

$$T_x^a = T_x A_{x+}$$

y dividiendo ambos lados entre  $\ell_x$ :

$$e_x^a = e_x A_{x+} \quad \text{ó} \quad e_x^i = e_x I_{x+}$$

El error que se tiene al aplicar este procedimiento lo podemos ver a los 12 años de edad en México en 1990:

$$\text{para hombres: } e_{12}^a = 57.210 \times 0.687445 = 39.329$$

$$\text{para mujeres: } e_{12}^a = 64.120 \times 0.198639 = 12.737$$

un déficit de 5.5% en los años netos masculinos, y un exceso de 17.1% en los femeninos respecto a las cifras del cuadro 1.4.

Los años netos son indudablemente una mejor estimación de la esperanza de vida activa que los años brutos, porque incorporan el inevitable riesgo de fallecer. No obstante, los años netos —y también los brutos— tienen una restricción interpretativa: no se puede diferenciar entre un activo o un inactivo a la edad en que se calcula la esperanza, porque en (1.12) y (1.20) dividimos el tiempo que vivirá la cohorte en la actividad entre el total

---

<sup>4</sup>Población estacionaria es aquella cuya estructura por edad y su volumen no cambian en el tiempo.

de sobrevivientes  $\ell_x$ , y no entre los activos  $\ell_x^a$  o entre los inactivos  $\ell_x^i$ .

Si bien pareciera que los años netos o esperanza de vida activa para un activo de edad  $x$  es simplemente el cociente  $T_x^a/\ell_x^a$ , en los siguientes capítulos veremos que es correcto sólo bajo ciertas condiciones: los supuestos que adoptemos para la ocurrencia de los ingresos y de los retiros de la actividad en una tabla de vida activa.

## 2. LA TABLA DE VIDA ACTIVA: EL ENFOQUE TRADICIONAL

La tabla de vida activa es un modelo probabilístico que describe la historia de la participación en la actividad económica de una cohorte, generalmente ficticia, hasta la muerte del último sobreviviente, bajo los siguientes cuatro supuestos:

- i) *Markoviano*. Las propensiones a ingresar o a retirarse de la actividad o a fallecer sólo dependen del estado —inactividad o actividad— de presencia al inicio de un intervalo de edades, y no de las situaciones previas de la persona.
- ii) *Homogeneidad*. Esas propensiones son iguales para todos los sobrevivientes en el mismo estado al inicio de un intervalo de edades.
- iii) *Independencia estocástica*. La propensión a fallecer no depende de las propensiones de ingreso o de retiro de la actividad, pero el riesgo de morir sí puede ser diferente entre activos e inactivos.
- iv) *Cerradura*. Las salidas de la cohorte sólo ocurren por mortalidad, es decir, la generación de la tabla

no experimenta migraciones a lo largo de su existencia.

Estos cuatro supuestos se adoptan, por un lado, debido a la falta de datos que permitan evitarlos, y por otro, porque simplifican los procedimientos para construir la tabla de vida activa.

El supuesto de homogeneidad está presente en casi toda la medición demográfica, pues cuando se calcula una tasa, una probabilidad o una proporción, generalmente no se distingue a las personas que realmente están expuestas a experimentar un evento, de aquellas que no lo están, es decir, se considera homogénea a toda la población o a amplios grupos de personas ante el riesgo de experimentar un evento. Pretender evitar totalmente este supuesto nos puede llevar al inoperante caso de obtener medidas individuales de la propensión a sufrir el evento. En el caso de la tabla de vida activa, supondremos por tanto, que los activos y los inactivos son dos grupos homogéneos independientes.

El supuesto markoviano, también presente en gran parte de la medición demográfica y que equivale a asumir que las personas olvidan su pasado, se adopta porque es difícil —si no es que imposible— conseguir datos que permitan reconstruir las historias de la participación en la actividad económica de las personas. La propiedad de Markov se encuentra estrechamente asociada al supuesto de homogeneidad, pues si el riesgo de experimentar un evento no depende de la historia previa, es lógico asumir entonces que esa exposición sea igual para todos los individuos que se encuentran en la misma situación —activo o inactivo— a una determinada edad. La independen-

cia estocástica se asume porque es difícil obtener información que dé cuenta de un doble movimiento (ingreso-muerte o retiro-muerte) en un intervalo de tiempo. El supuesto de cerradura es inherente a la tabla de vida, de la cual tomamos la cohorte, y la ley de mortalidad para la tabla de vida activa.

Un supuesto adicional que tradicionalmente se hace, aunque no es necesario para elaborar una tabla de vida activa, es la continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad, es decir, que el riesgo de fallecer no es diferente entre activos e inactivos. Realmente es difícil obtener patrones de mortalidad diferenciales por condición de participación, pues seguramente se haría con tasas de mortalidad por edad, donde en el numerador se tendrían las defunciones captadas por el registro civil y en el denominador la población censada, siendo entonces necesario que el registro civil captara y publicara la condición de participación de la persona al momento de fallecer, y además que la definición de población económicamente activa fuera la misma en los censos de población y en las estadísticas vitales.

En el cuadro 2.1 mostramos la escasa evidencia empírica que hemos podido recolectar para otros países, observando que son prácticamente iguales los niveles de la mortalidad total y la de los activos, excepto en Australia y Noruega en el grupo de edades 55-64 años. En los países de América Latina es escasa y casi inexistente la información de defunciones por edad y por condición de participación.

En el cuadro 2.2 mostramos las defunciones registradas en 1990 en México por condición de ocupación; puede observarse que sólo se capta a la PEA ocupada ("tra-

CUADRO 2.1

**Mortalidad de activos respecto a la mortalidad total  
para la población masculina de cinco países  
(cociente de las respectivas tasas de mortalidad)**

| Grupo de edad | Australia, 1971 | Inglaterra y Gales, 1971 | Nueva Zelanda, 1961 | Noruega, 1970-1973 | Estados Unidos, 1951 |
|---------------|-----------------|--------------------------|---------------------|--------------------|----------------------|
| 25-34*        | 0.967           | 1.009                    | 0.899               | 0.937              | 0.989                |
| 35-44         | 1.030           | 0.994                    | 0.907               | 0.922              | 1.001                |
| 45-54         | 1.032           | 1.014                    | 0.928               | 0.932              | 1.005                |
| 55-64         | 1.170           | 1.020                    | 0.955               | 0.792              | 0.999                |

\* 20-34 para Noruega.

*Fuente:* Naciones Unidas (1982), pp. 54-55 y 79-90.

CUADRO 2.2

**México: defunciones registradas según condición de ocupación  
en la actividad, edad y sexo, 1990**

| Grupo de edad  | total<br>(1) | trabaja<br>(2) | no trabaja<br>(3) | no especificado<br>(4) | % no especificado<br>(5) = $100 \times \frac{(4)}{(1)}$ |
|----------------|--------------|----------------|-------------------|------------------------|---|
| <i>Hombres</i> |              |                |                   |                        |   |
| 0-11           | 52,740       | 80             | 1,791             | 50,869                 | 96.5  |
| 12-14          | 2,149        | 77             | 541               | 1,531                  | 71.2  |

|                |         |       |        |         |      |
|----------------|---------|-------|--------|---------|------|
| 15-34          | 32,910  | 2,691 | 8,974  | 21,245  | 64.6 |
| 35-54          | 39,075  | 1,777 | 4,728  | 32,570  | 83.4 |
| 55-74          | 57,292  | 746   | 2,326  | 54,220  | 94.6 |
| 75-94          | 51,575  | 164   | 889    | 50,522  | 98.0 |
| 95 o más       | 3,907   | 6     | 37     | 3,864   | 98.9 |
| Total          | 239,648 | 5,541 | 19,286 | 214,821 | 89.6 |
| 12 o más       | 186,908 | 5,461 | 17,495 | 163,952 | 87.7 |
| <i>Mujeres</i> |         |       |        |         |      |
| 0-11           | 41,986  | 24    | 1,128  | 40,834  | 97.3 |
| 12-14          | 1,313   | 13    | 189    | 1,111   | 84.6 |
| 15-34          | 12,630  | 206   | 1,376  | 11,048  | 87.5 |
| 35-54          | 21,048  | 101   | 851    | 20,096  | 95.5 |
| 55-74          | 44,630  | 48    | 669    | 43,913  | 98.4 |
| 75-94          | 54,856  | 23    | 456    | 54,377  | 99.1 |
| 95 o más       | 6,692   | 3     | 27     | 6,662   | 99.6 |
| Total          | 183,155 | 418   | 4,696  | 178,041 | 97.2 |
| 12 o más       | 141,169 | 394   | 3,568  | 137,207 | 97.2 |

*Fuente:* información obtenida por Patricia Fernández Ham a partir del archivo magnético generado por el INEGI, que incluye el contenido estadístico de las actas de defunción.

baja”). Aun cuando asumiéramos que la mortalidad de la PEA ocupada —que sí podemos calcular—<sup>1</sup> es la misma que para toda la PEA, enfrentamos el problema de distribuir la enorme proporción de condición de ocupación no especificada (columna 4 del cuadro 2.2), que para el rango de edades que nos ocupa (12 o más), supera 87% en hombres y 97% en mujeres. Cualquier forma de distribución que adoptáramos para el rubro no especificado sería totalmente arbitraria y cuestionable. Es preferible entonces asumir que el riesgo de fallecer es el mismo para activos e inactivos, apoyándonos fundamentalmente en las cifras del cuadro 2.1, que suponer dudosos diferenciales de poca o nula evidencia empírica.

Una vez analizados los supuestos que subyacen a la construcción de la tabla de vida activa, procedamos a presentar las funciones biométricas que componen la tabla. La primera sección está dedicada a la forma de cálculo de los sobrevivientes y de las proporciones instantáneas de participación; la segunda a las probabilidades de transición, donde surge el problema de estimación que obliga a adoptar el supuesto fundamental del enfoque tradicional. En la tercera se presentan dos diferentes enfoques para deducir los años-persona vividos y las tasas de cambio de estado; la cuarta se dedica a las esperanzas de vida; y finalmente en la quinta se generaliza el modelo para el caso en que se considera diferente la mortalidad entre activos e inactivos.

---

<sup>1</sup>En el cuadro 26 del *Resumen General* del censo de 1990 se desglosa la PEA en ocupada y desocupada.

## 2.1. SOBREVIVIENTES Y PROPORCIONES INSTANTÁNEAS

Retomemos cinco definiciones del capítulo anterior:

- $l_x$  Sobrevivientes a la edad exacta  $x$  del efectivo inicial de nacimientos o *radix* de una tabla de mortalidad.
- $l_x^a$  Sobrevivientes en la actividad económica a la edad exacta  $x$ .
- $l_x^i$  Sobrevivientes en la inactividad económica a la edad exacta  $x$ .
- $\alpha_x$  Proporción instantánea de activos a la edad exacta  $x$ .
- $\iota_x$  Proporción instantánea de inactivos a la edad exacta  $x$ .

Siendo actividad e inactividad económicas dos conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivos de la población total, tenemos la igualdad (1.6):

$$l_x^a + l_x^i = l_x \quad (2.1)$$

de la definición de proporción instantánea:

$$\alpha_x = \frac{l_x^a}{l_x} \quad \text{e} \quad \iota_x = \frac{l_x^i}{l_x}$$

las igualdades (1.7):

$$l_x^a = l_x \alpha_x \quad \text{y} \quad l_x^i = l_x \iota_x \quad (2.2)$$

y dividiendo ambos lados de (2.1) entre  $l_x$  tenemos (1.8):

$$\alpha_x + \iota_x = 1 \quad (2.3)$$

El primer paso para construir la tabla de vida activa es deducir los sobrevivientes activos e inactivos, para cada una de las edades de corte de los grupos etarios en que se encuentren clasificados nuestros datos (generalmente múltiplos de cinco excepto para  $\beta$ ). Conocidos los sobrevivientes totales  $\ell_x$  de una tabla de mortalidad, separarlos por condición de participación equivale por (2.2) a obtener las proporciones instantáneas  $\alpha_x$  e  $\iota_x$ .

Con el fin de aprovechar al máximo la evidencia empírica de que disponemos, lo indicado es obtener las proporciones instantáneas a partir de las observadas por grupos de edad  ${}_nA_x$ . Para esto supongamos que la proporción para un intervalo etario es igual a la proporción instantánea para la edad media del grupo:

$${}_nA_x = \alpha_{x+n/2} \quad (2.4)$$

Conocidas las proporciones de participación para dos grupos de edad adyacentes, digamos de longitud  $h$  y  $n$  años respectivamente, generalmente se sugiere para la estimación de la proporción instantánea una simple interpolación lineal:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_{x-h/2} + \frac{\alpha_{x+n/2} - \alpha_{x-h/2}}{x+n/2 - (x-h/2)} [x - (x-h/2)] \\ &= {}_hA_{x-h} + \frac{{}_nA_x - {}_hA_{x-h}}{h+n} h \\ &= \frac{n{}_hA_{x-h} + h{}_nA_x}{h+n} \end{aligned} \quad (2.5)$$

y para el caso más común de intervalos de igual longitud ( $h = n$ ):

$$\alpha_x = \frac{{}_nA_{x-n} + {}_nA_x}{2} \quad (2.6)$$

Otra posibilidad es la interpolación geométrica:

$$\alpha_x = {}^{h+n}\sqrt{({}_hA_{x-h})^n ({}_nA_x)^h}$$

y para intervalos de igual longitud:<sup>2</sup>

$$\alpha_x = \sqrt{({}_nA_{x-n}) ({}_nA_x)}$$

No obstante, debido a que la interpolación geométrica arroja siempre valores inferiores a la aritmética, la suma de las proporciones instantáneas  $\alpha_x$  e  $\iota_x$  (con  ${}_nI_x$ ) que se obtengan por interpolación geométrica será menor que uno, y por ende no satisfarán (2.3), siendo necesario entonces algún tipo de reescalamiento para cumplir con la propiedad de cerradura (2.3). En cambio, las proporciones instantáneas que se obtienen mediante interpolación lineal (2.5 ó 2.6) por la propiedad (1.3) satisfacen (2.3).

Casos especiales son las edades extremas de participación:  $\alpha_\theta$  debe ser cero porque a partir de  $\theta$  nadie permanece activo; en cambio para la edad inicial, algunos autores (Camisa, 1969; Cervera y Partida, 1977; Rincón, 1977) asumen que a la edad  $\beta$  una fracción de la población es económicamente activa, y suponen que la proporción es cero para algún intervalo previo — generalmente de un año ( $h = 1$ )— es decir,  ${}_hA_{\beta-h} = 0$ , con lo cual, al aplicar (2.5):

$$\alpha_\beta = \frac{h_n A_\beta}{h + n} \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>Existen otras formas de interpolar, por ejemplo, las funciones *spline cúbico* (Burden y Faires, 1988: 134-153).

La asignación de cualquier longitud  $h$  es arbitraria, y dado que un instante antes de la edad exacta  $\beta$  nadie es activo,  $h$  debiera ser tan pequeña como se pueda, entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} {}_h A_{\beta-h} = \alpha_{\beta} = 0$$

opción que prefieren otros autores (Elizaga, 1979: 384; Willekens, 1980). Si bien esta última posibilidad parece entrar en contradicción con la definición de  $\beta$  como edad inicial de participación, nos parece más adecuada, pues permite que un instante después ya hayan ingresado personas a la actividad. A lo largo de este trabajo aceptaremos por lo tanto que  $\alpha_{\beta} = 0$ , e iremos presentando gráficamente el efecto que la asignación arbitraria de  $h$  en (2.7) (de cero a uno) tiene en las diferentes medidas.

Continuando con nuestros datos para México en 1990, en el cuadro 2.3 se presentan las proporciones instantáneas de participación obtenidas mediante interpolación lineal. Así, por ejemplo, aplicando (2.5) obtenemos la proporción instantánea masculina a los 15 años:

$$\begin{aligned} \alpha_{15} &= \frac{5 \times {}_3 A_{12} + 3 \times {}_5 A_{15}}{3 + 5} \\ &= \frac{5 \times 0.118528 + 3 \times 0.483920}{8} = 0.255550 \end{aligned}$$

y la femenina a los 40, aplicando (2.6):

$$\begin{aligned} \alpha_{40} &= \frac{{}_5 A_{35} + {}_5 A_{40}}{2} \\ &= \frac{0.250667 + 0.227531}{2} = 0.239099 \end{aligned}$$

La pauta por edad es la misma que para las proporciones por grupos (gráfica 1.1), pues sólo hemos interpolado entre ellas. Finalmente, despejando  $l_x$  en (2.3) y aplicando (2.2) obtenemos los sobrevivientes activos e inactivos, cuyos valores se muestran en el cuadro 2.4, y su comportamiento por edad se ilustra en la gráfica 2.1, siguiendo prácticamente el mismo patrón que para las proporciones de participación.

## 2.2. PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN. EL SUPUESTO FUNDAMENTAL

Definamos las siguientes probabilidades:

${}_n p_x$  Probabilidad que un sobreviviente de edad exacta  $x$  tiene de vivir  $n$  años más.

${}_n q_x$  Probabilidad que un sobreviviente de edad exacta  $x$  tiene de morir antes de  $n$  años.

Ambas satisfacen la conocida propiedad de *cerradura* de la tabla de mortalidad:

$${}_n p_x + {}_n q_x = 1 \quad (2.8)$$

${}_n p_x^{aa}$  Probabilidad que un activo de edad exacta  $x$  tiene de sobrevivir en la actividad  $n$  años después.

${}_n p_x^{ai}$  Probabilidad que un activo de edad exacta  $x$  tiene de sobrevivir en la inactividad  $n$  años después.

${}_n p_x^{ia}$  Probabilidad que un inactivo de edad exacta  $x$  tiene de sobrevivir en la actividad  $n$  años después.

${}_n p_x^{ii}$  Probabilidad que un inactivo de edad exacta  $x$  tiene de sobrevivir en la inactividad  $n$  años después.

## CUADRO 2.3

**México: proporciones de participación por grupos de edad e instantáneas, 1990**

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Hombres          |                   | Mujeres          |                   |
|-----------------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|
|                             | grupo            | instantánea       | grupo            | instantánea       |
|                             | ${}_nA_x$<br>(1) | $\alpha_x$<br>(2) | ${}_nA_x$<br>(3) | $\alpha_x$<br>(4) |
| 12-14                       | 0.118528         | 0.000000          | 0.036141         | 0.000000          |
| 15-19                       | 0.483920         | 0.255550          | 0.184590         | 0.091809          |
| 20-24                       | 0.780358         | 0.632139          | 0.295360         | 0.239975          |
| 25-29                       | 0.899258         | 0.839808          | 0.287292         | 0.291326          |
| 30-34                       | 0.925829         | 0.912544          | 0.271212         | 0.279252          |
| 35-39                       | 0.926167         | 0.925998          | 0.250667         | 0.260939          |
| 40-44                       | 0.916249         | 0.921208          | 0.227531         | 0.239099          |
| 45-49                       | 0.894867         | 0.905558          | 0.188835         | 0.208183          |
| 50-54                       | 0.851932         | 0.873400          | 0.153545         | 0.171190          |
| 55-59                       | 0.793533         | 0.822733          | 0.121419         | 0.137482          |
| 60-64                       | 0.692254         | 0.742893          | 0.094573         | 0.107996          |
| 65-69                       | 0.593146         | 0.642700          | 0.074721         | 0.084647          |
| 70-74                       | 0.502359         | 0.547752          | 0.059326         | 0.067024          |
| 75-79                       | 0.408073         | 0.455216          | 0.046869         | 0.053098          |
| 80-84                       | 0.305544         | 0.356809          | 0.035480         | 0.041174          |
| 85-89                       | 0.230798         | 0.268171          | 0.025723         | 0.030602          |
| 90-94                       | 0.156051         | 0.193425          | 0.015966         | 0.020845          |
| 95 o más                    | 0.000000         | 0.000000          | 0.000000         | 0.000000          |

Fuente: columna (4) del cuadro 1.1 para (1) y (3).

Conviene aclarar que  ${}_np_x^{ia}$  y  ${}_np_x^{ai}$  no son probabilidades de ingreso y de retiro de la actividad, respectivamente, ni  ${}_np_x^{aa}$  ni  ${}_np_x^{ii}$  probabilidades de permanecer en el estado de actividad o inactividad, sino sólo expresan probabilidades de transición de un estado al inicio de un periodo a otro estado —pudiendo ser el mismo— al final del intervalo. Esto es, supongamos que los sobrevivientes al cabo del periodo de  $n$  años, pueden hacer un número finito de cambios durante el intervalo —incluido el cero—

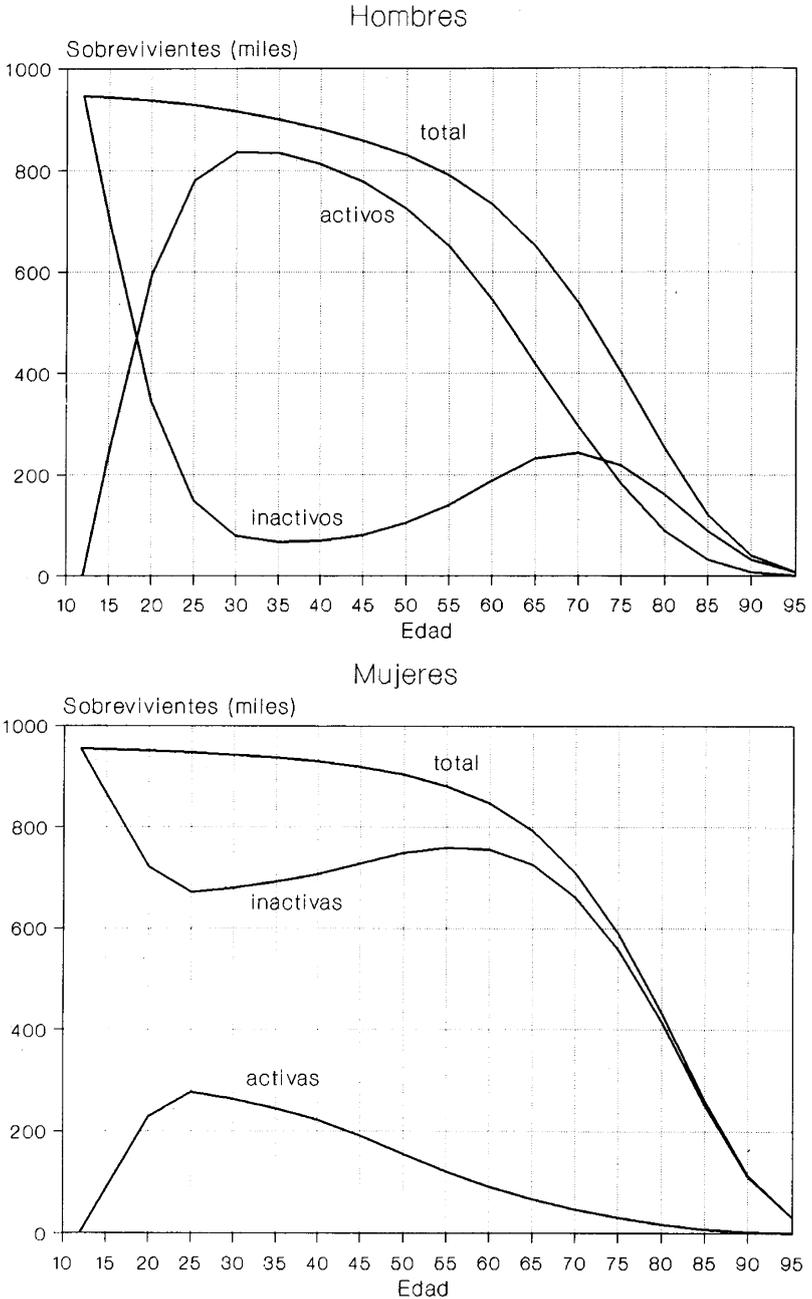
CUADRO 2.4

México: sobrevivientes en la tabla de vida activa, 1990

| Edad<br>$x$ | <i>Hombres</i>        |                           |                             | <i>Mujeres</i>        |                           |                             |
|-------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------------|
|             | total<br>$l_x$<br>(1) | activos<br>$l_x^a$<br>(2) | inactivos<br>$l_x^i$<br>(3) | total<br>$l_x$<br>(4) | activas<br>$l_x^a$<br>(5) | inactivas<br>$l_x^i$<br>(6) |
| 12          | 946,521               | 0                         | 946,521                     | 954,700               | 0                         | 954,700                     |
| 15          | 944,192               | 241,288                   | 702,904                     | 953,423               | 87,533                    | 865,890                     |
| 20          | 938,249               | 593,104                   | 345,145                     | 950,892               | 228,190                   | 722,702                     |
| 25          | 929,220               | 780,367                   | 148,853                     | 947,615               | 276,065                   | 671,550                     |
| 30          | 916,938               | 836,746                   | 80,192                      | 943,338               | 263,429                   | 679,909                     |
| 35          | 901,346               | 834,645                   | 66,701                      | 937,687               | 244,679                   | 693,008                     |
| 40          | 882,196               | 812,686                   | 69,510                      | 930,042               | 222,372                   | 707,670                     |
| 45          | 858,768               | 777,664                   | 81,104                      | 919,376               | 191,399                   | 727,977                     |
| 50          | 829,547               | 724,526                   | 105,021                     | 904,027               | 154,760                   | 749,267                     |
| 55          | 790,668               | 650,508                   | 140,160                     | 881,375               | 121,173                   | 760,202                     |
| 60          | 733,196               | 544,687                   | 188,509                     | 847,037               | 91,477                    | 755,560                     |
| 65          | 650,652               | 418,174                   | 232,478                     | 792,728               | 67,102                    | 725,626                     |
| 70          | 538,733               | 295,092                   | 243,641                     | 709,467               | 47,551                    | 661,916                     |
| 75          | 400,187               | 182,172                   | 218,015                     | 589,365               | 31,294                    | 558,071                     |
| 80          | 251,233               | 89,642                    | 161,591                     | 432,868               | 17,823                    | 415,045                     |
| 85          | 121,977               | 32,711                    | 89,266                      | 260,052               | 7,958                     | 252,094                     |
| 90          | 40,569                | 7,847                     | 32,722                      | 113,872               | 2,374                     | 111,498                     |
| 95          | 8,029                 | 0                         | 8,029                       | 31,244                | 0                         | 31,244                      |

Fuente: cuadro B.1 para (1) y (4).

GRÁFICA 2.1  
México: sobrevivientes en la tabla de vida activa, 1990



Fuente: cuadro 2.4.

entre los estados actividad e inactividad económicas, entonces:

- i) Si el monto de los movimientos es nulo o par, la persona se encuentra en el mismo estado al inicio y al final del intervalo, casos comprendidos en las probabilidades  ${}_n p_x^{aa}$  y  ${}_n p_x^{ii}$
- ii) Si el monto de los movimientos es non, la persona se encuentra en estados opuestos al inicio y al final del intervalo, situaciones comprendidas en las probabilidades  ${}_n p_x^{ia}$  y  ${}_n p_x^{ai}$

Dejemos de lado por un momento el efecto exclusor de la mortalidad y definamos las probabilidades de transición al estado puro:

${}_n \hat{p}_x^{aa}$  Probabilidad que un activo de edad exacta  $x$  tiene de encontrarse en la actividad  $n$  años después.

${}_n \hat{p}_x^{ai}$  Probabilidad que un activo de edad exacta  $x$  tiene de encontrarse en la inactividad  $n$  años después.

${}_n \hat{p}_x^{ia}$  Probabilidad que un inactivo de edad exacta  $x$  tiene de encontrarse en la actividad  $n$  años después.

${}_n \hat{p}_x^{ii}$  Probabilidad que un inactivo de edad exacta  $x$  tiene de encontrarse en la inactividad  $n$  años después.

donde el símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  indica la omisión de la mortalidad, al igual que en los años brutos de vida activa en el capítulo anterior. Ante la ausencia de migraciones (supuesto de *cerradura*), una persona sólo puede encontrarse en la actividad o en la inactividad al final del periodo de  $n$  años; es claro entonces que:

$${}_n\hat{p}_x^{aa} + {}_n\hat{p}_x^{ai} = 1 \quad \text{y} \quad {}_n\hat{p}_x^{ia} + {}_n\hat{p}_x^{ii} = 1 \quad (2.9)$$

Por los supuestos de independencia estocástica y de continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad, podemos establecer que:

$$\begin{aligned} {}_n p_x^{aa} &= {}_n\hat{p}_x^{aa} {}_n p_x & {}_n p_x^{ai} &= {}_n\hat{p}_x^{ai} {}_n p_x \\ {}_n p_x^{ia} &= {}_n\hat{p}_x^{ia} {}_n p_x & {}_n p_x^{ii} &= {}_n\hat{p}_x^{ii} {}_n p_x \end{aligned} \quad (2.10)$$

y por (2.9):

$${}_n p_x^{aa} + {}_n p_x^{ai} = {}_n p_x \quad \text{y} \quad {}_n p_x^{ia} + {}_n p_x^{ii} = {}_n p_x \quad (2.11)$$

Desde una óptica retrospectiva, los activos (inactivos) a la edad exacta  $x+n$  son aquellas personas que habiéndose encontrado en cualquiera de los estados (actividad o inactividad)  $n$  años antes, al cabo del intervalo se encuentran en la actividad (inactividad):

$$\begin{aligned} \ell_{x+n}^a &= \ell_x^a {}_n p_x^{aa} + \ell_x^i {}_n p_x^{ia} \\ \ell_{x+n}^i &= \ell_x^a {}_n p_x^{ai} + \ell_x^i {}_n p_x^{ii} \end{aligned} \quad (2.12)$$

de donde, por la conocida propiedad de la tabla de mortalidad:

$$\ell_{x+n} = \ell_x {}_n p_x \quad (2.13)$$

sustituyendo (2.10):

$$\begin{aligned} \ell_x \alpha_{x+n} {}_n p_x &= \ell_x \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa} {}_n p_x + \ell_x \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ia} {}_n p_x \\ \ell_x \iota_{x+n} {}_n p_x &= \ell_x \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{ai} {}_n p_x + \ell_x \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ii} {}_n p_x \end{aligned}$$

y dividiendo ambos lados entre  $\ell_x {}_n p_x$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{x+n} &= \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa} + \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ia} \\ \iota_{x+n} &= \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{ai} + \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ii} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Al introducir (2.9) en estas últimas ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_{x+n} &= \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa} + \iota_x (1 - {}_n\hat{p}_x^{ii}) \\ \iota_{x+n} &= \alpha_x (1 - {}_n\hat{p}_x^{aa}) + \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ii}\end{aligned}$$

aparentemente tenemos la solución al problema, pues es un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas ( ${}_n\hat{p}_x^{aa}$  y  ${}_n\hat{p}_x^{ii}$ ); sin embargo no tiene solución única, pues ambas ecuaciones no sólo son linealmente dependientes, sino incluso la misma. En efecto, sustituyendo  $\alpha_{x+n}$  por  $1 - \iota_{x+n}$  (propiedad 2.3) en la primera ecuación, se obtiene la segunda, o bien, sustituyendo  $\iota_{x+n}$  por  $1 - \alpha_{x+n}$  en la segunda, se llega a la primera. La solución es entonces introducir alguna restricción, es decir, fijar arbitrariamente el valor de alguna de las probabilidades de transición al estado puro, y mediante (2.9) y (2.14) obtener las tres probabilidades restantes.

Si al cabo del periodo genérico de  $n$  años, la cohorte de la tabla de vida activa no hubiera experimentado transferencias entre la actividad y la inactividad, sino sólo mortalidad, el monto esperado de activos al final del intervalo sería  $\ell_{x+n}^a p_x$ , pero el verdadero efectivo fue  $\ell_{x+n}^a$ ; de donde, si el segundo excede al primero estamos en el caso en que los ingresos a la actividad superan a los retiros, y en la relación inversa las salidas exceden a las entradas. De esta conclusión extraemos el supuesto fundamental del método tradicional para construir tablas de vida activa:

Si el saldo neto (ingresos menos retiros) de intercambios entre la actividad y la inactividad económicas es positivo, se supone que sólo hay ingresos a la actividad; si es negativo, se asume que sólo hay retiros.

Incorporando el supuesto en nuestras funciones biométricas, tenemos que sólo hay ingresos cuando:

$$\ell_{x+n}^a - \ell_x^a n p_x > 0$$

o bien, dividiendo ambos lados entre  $\ell_x n p_x$ :

$$\alpha_{x+n} - \alpha_x > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha_{x+n} > \alpha_x$$

por lo que podemos concluir que:

si  $\alpha_{x+n} > \alpha_x$  sólo hay ingresos a la actividad

si  $\alpha_{x+n} < \alpha_x$  sólo hay retiros de la actividad

(2.15)

Revisando la gráfica 1.1 podemos ver que el supuesto es acorde con la pauta unimodal masculina —prácticamente mundial—, pues se asume que los ingresos ocurren sólo antes de la moda (casi siempre entre los 30 y 45 años) y los retiros sólo ocurren después, además que es congruente con el hecho de que la casi totalidad de los varones inactivos son personas física o mentalmente incapacitadas para trabajar, que difícilmente regresarán a la actividad después de la edad modal. En cambio, asumir que desde muy temprana edad (antes de los 25 ó 30 años) las mujeres ya no ingresarán a la actividad es inadecuado, porque la inmensa mayoría de las inactivas están física y mentalmente capacitadas para desempeñarse dentro de la actividad económica; es frecuente el reingreso de aquéllas que pasaron a ser inactivas por matrimonio, maternidad o ambos, hecho que se refleja en los patrones bimodales (véase gráfica 3.1) y hasta trimodales de participación femenina.<sup>3</sup>

El supuesto fundamental implica asumir que en un intervalo de edades particular hay un sólo movimiento

---

<sup>3</sup>Véase por ejemplo United Nations (1962: 27-35).

(ingreso o retiro) o ninguno, pues de lo contrario ocurrirían ingresos y retiros simultáneamente; por lo tanto, en los grupos donde las proporciones aumentan  ${}_n\hat{p}_x^{ai} = 0$ , y donde disminuyen  ${}_n\hat{p}_x^{ia} = 0$ , obteniéndose las probabilidades de transición al estado puro al introducir ambas restricciones en (2.9) y (2.14):

i) Si  $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ :

$${}_n\hat{p}_x^{aa} = 1 \quad {}_n\hat{p}_x^{ai} = 0 \quad (2.16)$$

$${}_n\hat{p}_x^{ia} = \frac{\alpha_{x+n} - \alpha_x}{\iota_x} \quad {}_n\hat{p}_x^{ii} = \frac{\iota_{x+n}}{\iota_x}$$

ii) Si  $\alpha_{x+n} < \alpha_x$ :

$${}_n\hat{p}_x^{aa} = \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x} \quad {}_n\hat{p}_x^{ai} = \frac{\alpha_x - \alpha_{x+n}}{\alpha_x} \quad (2.17)$$

$${}_n\hat{p}_x^{ia} = 0 \quad {}_n\hat{p}_x^{ii} = 1$$

Así por ejemplo, para nuestros datos de México en 1990, la probabilidad de transición masculina de inactivo a los 25 años a activo a los 30 es:

$${}_5\hat{p}_{25}^{ia} = \frac{\alpha_{30} - \alpha_{25}}{\iota_{25}} = \frac{0.912544 - 0.839808}{0.160192} = 0.454053$$

y la femenina de activa a inactiva entre los 50 y 55 años:

$${}_n\hat{p}_{55}^{ai} = \frac{\alpha_{55} - \alpha_{60}}{\alpha_{55}} = \frac{0.137482 - 0.107996}{0.137482} = 0.214469$$

Las probabilidades al estado puro y con mortalidad se presentan en el cuadro 2.5, y en la gráfica 2.2 se muestra el efecto que la selección de  $h$  tiene en (2.7).<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Asignamos el valor de uno a la probabilidad  ${}_3\hat{p}_{12}^{aa}$  en el cuadro 2.5 para ser consistentes con (2.16), sin que esto altere los resultados obtenidos a lo largo del capítulo.

CUADRO 2.5

México: probabilidades de transición, 1990

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Al estado puro                      |                                       |                                     |                                       | Sobrevivencia<br>$n p_x$ | Con mortalidad                |                                 |                               |                                 |
|-----------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
|                             | Activo                              |                                       | Inactivo                            |                                       |                          | Activo                        |                                 | Inactivo                      |                                 |
|                             | activo<br>$n \hat{p}_x^{aa}$<br>(1) | inactivo<br>$n \hat{p}_x^{ai}$<br>(2) | activo<br>$n \hat{p}_x^{ia}$<br>(3) | inactivo<br>$n \hat{p}_x^{ii}$<br>(4) |                          | activo<br>$n p_x^{aa}$<br>(6) | inactivo<br>$n p_x^{ai}$<br>(7) | activo<br>$n p_x^{ia}$<br>(8) | inactivo<br>$n p_x^{ii}$<br>(9) |
| <i>Hombres</i>              |                                     |                                       |                                     |                                       |                          |                               |                                 |                               |                                 |
| 12-14                       | 1.000000                            | 0.000000                              | 0.255550                            | 0.744450                              | 0.997539                 | 0.997539                      | 0.000000                        | 0.254921                      | 0.742618                        |
| 15-19                       | 1.000000                            | 0.000000                              | 0.505862                            | 0.494138                              | 0.993705                 | 0.993705                      | 0.000000                        | 0.502678                      | 0.491027                        |
| 20-24                       | 1.000000                            | 0.000000                              | 0.564532                            | 0.435468                              | 0.990377                 | 0.990377                      | 0.000000                        | 0.559099                      | 0.431278                        |
| 25-29                       | 1.000000                            | 0.000000                              | 0.454053                            | 0.545947                              | 0.986783                 | 0.986783                      | 0.000000                        | 0.448051                      | 0.538732                        |
| 30-34                       | 1.000000                            | 0.000000                              | 0.153842                            | 0.846158                              | 0.982995                 | 0.982995                      | 0.000000                        | 0.151226                      | 0.831769                        |
| 35-39                       | 0.994827                            | 0.005173                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.978753                 | 0.973690                      | 0.005063                        | 0.000000                      | 0.978753                        |
| 40-44                       | 0.983011                            | 0.016989                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.973444                 | 0.956907                      | 0.016537                        | 0.000000                      | 0.973444                        |
| 45-49                       | 0.964488                            | 0.035512                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.965974                 | 0.931670                      | 0.034304                        | 0.000000                      | 0.965974                        |
| 50-54                       | 0.941989                            | 0.058011                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.953132                 | 0.897840                      | 0.055292                        | 0.000000                      | 0.953132                        |
| 55-59                       | 0.902958                            | 0.097042                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.927312                 | 0.837324                      | 0.089988                        | 0.000000                      | 0.927312                        |
| 60-64                       | 0.865131                            | 0.134869                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.887419                 | 0.767733                      | 0.119686                        | 0.000000                      | 0.887419                        |
| 65-69                       | 0.852268                            | 0.147732                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.827990                 | 0.705669                      | 0.122321                        | 0.000000                      | 0.827990                        |
| 70-74                       | 0.831062                            | 0.168938                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.742829                 | 0.617336                      | 0.125492                        | 0.000000                      | 0.742829                        |
| 75-79                       | 0.783823                            | 0.216177                              | 0.000000                            | 1.000000                              | 0.627789                 | 0.492076                      | 0.135714                        | 0.000000                      | 0.627789                        |

|       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 80-84 | 0.751582 | 0.248418 | 0.000000 | 1.000000 | 0.485513 | 0.364903 | 0.120610 | 0.000000 | 0.485513 |
| 85-89 | 0.721273 | 0.278727 | 0.000000 | 1.000000 | 0.332596 | 0.239892 | 0.092703 | 0.000000 | 0.332596 |
| 90-94 | 0.000000 | 1.000000 | 0.000000 | 1.000000 | 0.197906 | 0.000000 | 0.197906 | 0.000000 | 0.197906 |

*Mujeres*

|       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 12-14 | 1.000000 | 0.000000 | 0.091809 | 0.908191 | 0.998662 | 0.998662 | 0.000000 | 0.091687 | 0.906976 |
| 15-19 | 1.000000 | 0.000000 | 0.163143 | 0.836857 | 0.997345 | 0.997345 | 0.000000 | 0.162710 | 0.834635 |
| 20-24 | 1.000000 | 0.000000 | 0.067565 | 0.932435 | 0.996554 | 0.996554 | 0.000000 | 0.067333 | 0.929222 |
| 25-29 | 0.958555 | 0.041445 | 0.000000 | 1.000000 | 0.995487 | 0.954229 | 0.041258 | 0.000000 | 0.995487 |
| 30-34 | 0.934422 | 0.065578 | 0.000000 | 1.000000 | 0.994010 | 0.928824 | 0.065185 | 0.000000 | 0.994010 |
| 35-39 | 0.916301 | 0.083699 | 0.000000 | 1.000000 | 0.991847 | 0.908831 | 0.083016 | 0.000000 | 0.991847 |
| 40-44 | 0.870699 | 0.129301 | 0.000000 | 1.000000 | 0.988532 | 0.860714 | 0.127818 | 0.000000 | 0.988532 |
| 45-49 | 0.822304 | 0.177696 | 0.000000 | 1.000000 | 0.983305 | 0.808576 | 0.174729 | 0.000000 | 0.983305 |
| 50-54 | 0.803096 | 0.196904 | 0.000000 | 1.000000 | 0.974943 | 0.782973 | 0.191971 | 0.000000 | 0.974943 |
| 55-59 | 0.785531 | 0.214469 | 0.000000 | 1.000000 | 0.961040 | 0.754927 | 0.206113 | 0.000000 | 0.961040 |
| 60-64 | 0.783798 | 0.216202 | 0.000000 | 1.000000 | 0.935883 | 0.733544 | 0.202340 | 0.000000 | 0.935883 |
| 65-69 | 0.791800 | 0.208200 | 0.000000 | 1.000000 | 0.894969 | 0.708636 | 0.186333 | 0.000000 | 0.894969 |
| 70-74 | 0.792220 | 0.207780 | 0.000000 | 1.000000 | 0.830714 | 0.658109 | 0.172606 | 0.000000 | 0.830714 |
| 75-79 | 0.775450 | 0.224550 | 0.000000 | 1.000000 | 0.734466 | 0.569542 | 0.164924 | 0.000000 | 0.734466 |
| 80-84 | 0.743218 | 0.256782 | 0.000000 | 1.000000 | 0.600764 | 0.446499 | 0.154265 | 0.000000 | 0.600764 |
| 85-89 | 0.681163 | 0.318837 | 0.000000 | 1.000000 | 0.437880 | 0.298268 | 0.139612 | 0.000000 | 0.437880 |
| 90-94 | 0.000000 | 1.000000 | 0.000000 | 1.000000 | 0.274376 | 0.000000 | 0.274376 | 0.000000 | 0.274376 |

*Fuente:* cuadro B.1 para (5).

GRÁFICA 2.2

México: probabilidades de transición  ${}_3\hat{p}_{12}^i$  para diversos valores del intervalo previo a la edad 12, 1990 (probabilidades por mil)



### 2.3. AÑOS-PERSONA VIVIDOS, EVENTOS Y TASAS

Definamos los siguientes conceptos para el tiempo vivido por la cohorte de la tabla de vida activa:

${}_nL_x$  Años-persona vividos entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nL_x^a$  Años-persona vividos en la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nL_x^i$  Años-persona vividos en la inactividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nL_x^{aa}$  Años-persona vividos en la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$  por los activos a la edad  $x$ .

${}_nL_x^{ai}$  Años-persona vividos en la inactividad entre las edades  $x$  y  $x + n$  por los activos a la edad  $x$ .

${}_nL_x^{ia}$  Años-persona vividos en la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$  por los inactivos a la edad  $x$ .

${}_nL_x^{ii}$  Años-persona vividos en la inactividad entre las edades  $x$  y  $x + n$  por los inactivos a la edad  $x$ .

Dado que actividad e inactividad son dos conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivos de la población, tenemos la igualdad (1.10):

$${}_nL_x = {}_nL_x^a + {}_nL_x^i \quad (2.18)$$

Desde una óptica retrospectiva, el tiempo vivido en la actividad (inactividad) serán los años-persona vividos en ella tanto por quienes eran activos como por quienes eran inactivos al inicio del intervalo genérico de  $n$  años:

$${}_nL_x^a = {}_nL_x^{aa} + {}_nL_x^{ia} \quad \text{y} \quad {}_nL_x^i = {}_nL_x^{ai} + {}_nL_x^{ii} \quad (2.19)$$

Dado el supuesto de continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad, cualquiera de los activos (inactivos) a la edad exacta  $x$  espera vivir en promedio  ${}_nL_x/\ell_x$  años durante el periodo genérico  $n$  inmediato posterior, y todos en conjunto:

$$\ell_x \frac{{}_nL_x^a}{\ell_x} = {}_nL_x \alpha_x \quad \text{ó} \quad \ell_x \frac{{}_nL_x^i}{\ell_x} = {}_nL_x \iota_x$$

de donde, desde una óptica prospectiva:

$${}_nL_x^{aa} + {}_nL_x^{ai} = {}_nL_x \alpha_x \quad \text{y} \quad {}_nL_x^{ia} + {}_nL_x^{ii} = {}_nL_x t_x \quad (2.20)$$

Definamos ahora por:

${}_na_x$  la proporción de activos en la cohorte de la tabla de vida activa —o proporción de activos de tabla— entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_ni_x$  la proporción de inactivos en la cohorte de la tabla de vida activa entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

Siguiendo razonamientos análogos al establecimiento de (1.16) tenemos que:

$${}_na_x = \frac{{}_nL_x^a}{{}_nL_x} \quad \text{y} \quad {}_ni_x = \frac{{}_nL_x^i}{{}_nL_x} \quad (2.21)$$

de donde, por (2.18) tenemos el equivalente a (1.3) para las proporciones de tabla:

$${}_na_x + {}_ni_x = \frac{{}_nL_x^a + {}_nL_x^i}{{}_nL_x} = \frac{{}_nL_x}{{}_nL_x} = 1 \quad (2.22)$$

Denotemos ahora por:

${}_nd_x$  las defunciones ocurridas entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nd_x^a$  las defunciones ocurridas en la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nd_x^i$  las defunciones ocurridas en la inactividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nH_x^{ia}$  los ingresos a la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nH_x^{ai}$  las salidas de la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_n m_x^{ia}$  la tasa de ingreso a la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_n m_x^{ai}$  la tasa de retiro de la actividad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_n m_x$  la tasa de mortalidad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

Por la definición de tasa en demografía: “el cociente que resulta de dividir los eventos ocurridos en un intervalo de tiempo entre los años-persona vividos por la población expuesta al riesgo durante el mismo intervalo”, las tasas de ingreso y de retiro de la actividad y de mortalidad están dadas por:

$$\begin{aligned} {}_n m_x^{ia} &= \frac{{}_n H_x^{ia}}{{}_n L_x^i} & {}_n m_x^{ai} &= \frac{{}_n H_x^{ai}}{{}_n L_x^a} \\ \text{y } {}_n m_x &= \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por el supuesto de continuidad en la mortalidad y (2.21), las defunciones de activos e inactivos son:

$$\begin{aligned} {}_n d_x^a &= {}_n L_x^a {}_n m_x = {}_n L_x {}_n a_x {}_n m_x = {}_n d_x {}_n a_x \\ {}_n d_x^i &= {}_n d_x {}_n i_x \end{aligned} \quad (2.24)$$

y por (2.22):

$${}_n d_x^a + {}_n d_x^i = {}_n d_x ({}_n a_x + {}_n i_x) = {}_n d_x \quad (2.25)$$

Finalmente, introduciendo el principio de la ecuación compensadora o del balance demográfico: el volumen de activos (inactivos) al final del intervalo de edades es igual

al monto de activos (inactivos) al inicio, más los ingresos (retiros), menos los retiros (ingresos) y menos las defunciones ocurridas en la actividad (inactividad); tenemos que:

$$\ell_{x+n}^a = \ell_x^a + {}_nH_x^{ia} - {}_nH_x^{ai} - {}_nd_x^a \quad (2.26)$$

$$\ell_{x+n}^i = \ell_x^i + {}_nH_x^{ai} - {}_nH_x^{ia} - {}_nd_x^i$$

### 2.3.1. El enfoque de los eventos

i)  $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ .

Determinemos primero los años-persona vividos. Debido a la ausencia de retiros  ${}_nL_x^{ai} = 0$ , con lo cual por (2.20) y (2.21):

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= {}_nL_x \alpha_x \\ {}_nL_x^{ai} &= 0 \\ {}_nL_x^{ia} &= {}_nL_x^a - {}_nL_x \alpha_x = {}_nL_x ({}_na_x - \alpha_x) \\ {}_nL_x^{ii} &= {}_nL_x^i = {}_nL_x {}_ni_x \end{aligned} \quad (2.27)$$

con lo que se reduce el problema a obtener los valores de  ${}_na_x$  y  ${}_ni_x$ . Lo indicado es asumir que son iguales a las proporciones de participación observadas ( ${}_na_x = {}_nA_x$  y  ${}_ni_x = {}_nI_x$ ), pues son las medidas empíricas a partir de las cuales se construye la tabla de vida activa. No obstante, los años-persona deben ser una cantidad positiva, por lo cual, para obtener  ${}_nL_x^{ia}$  necesitamos que  ${}_nA_x = {}_na_x > \alpha_x$ . ¿Cuándo ocurre lo contrario? Cuando

$${}_nA_x < \alpha_x < \alpha_{x+n}$$

o bien sustituyendo (2.6),

$${}_n A_x < \frac{{}_n A_{x-n} + {}_n A_x}{2} < \frac{{}_n A_x + {}_n A_{x+n}}{2}$$

de donde

$${}_n A_x < {}_n A_{x-n} < {}_n A_{x+n}$$

es decir, alrededor de un valle (mínimo relativo), con lo cual el patrón de participación por edad debe tener al menos dos modas. Si bien en el caso de una pauta unimodal —como las de ambos sexos en nuestro ejemplo de México en 1990—, queda garantizado que la proporción para el grupo de edad supera a la instantánea al inicio en todo intervalo ascendente ( $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ ); ante la posibilidad de una pauta con al menos un valle, para asegurarnos que los años-persona sean una cantidad positiva hagamos:

$${}_n a_x = \begin{cases} {}_n A_x & \text{si } {}_n A_x > \alpha_x \\ \frac{\alpha_x + \alpha_{x+n}}{2} & \text{si } {}_n A_x < \alpha_x \end{cases} \quad (2.28)$$

Los ingresos a la actividad se pueden estimar dividiéndolos en dos conjuntos: aquellos que sobreviven al final del periodo (a la edad  $x + n$ ), y aquellos que fallecen durante el intervalo. Ante la ausencia de retiros de la actividad, el saldo neto de intercambios  $\ell_{x+n}^a - \ell_x^a {}_n p_x$  al final del periodo corresponde a los ingresos sobrevivientes; y por el supuesto de continuidad de la mortalidad y la definición de tasa, las defunciones son  ${}_n L_x^{ia} {}_n m_x$ , con lo cual por (2.27):

$$\begin{aligned} {}_n H_x^{ia} &= \ell_{x+n}^a - \ell_x^a {}_n p_x + {}_n L_x^{ia} {}_n m_x \\ &= \ell_{x+n}^a - \ell_x^a {}_n p_x + {}_n L_x {}_n m_x ({}_n a_x - \alpha_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ell_{x+n}^a - \ell_x^a {}_n p_x + {}_n d_x ({}_n a_x - \alpha_x) \\
&= \ell_{x+n}^a + {}_n d_x^a - \ell_x^a {}_n p_x - \ell_x^a {}_n q_x \\
&= \ell_{x+n}^a - \ell_x^a + {}_n d_x^a
\end{aligned} \tag{2.29}$$

que también pudimos haber obtenido despejando en la primera ecuación compensadora en (2.26) y haciendo nulos los retiros de la actividad ( ${}_n H_x^{ai} = 0$ ).

ii)  $\alpha_x > \alpha_{x+n}$ .

Dada la ausencia de ingresos, los años-persona vivos son:

$$\begin{aligned}
{}_n L_x^{aa} &= {}_n L_x^a = {}_n L_x {}_n a_x \\
{}_n L_x^{ai} &= {}_n L_x^i - {}_n L_x \iota_x = {}_n L_x \alpha_x - {}_n L_x^a \\
&= {}_n L_x (\alpha_x - {}_n a_x) \\
{}_n L_x^{ia} &= 0 \\
{}_n L_x^{ii} &= {}_n L_x \iota_x
\end{aligned} \tag{2.30}$$

y asumiendo que las proporciones de tabla son iguales a las observadas, es necesario que  $\alpha_x > {}_n a_x = {}_n A_x$  para que  ${}_n L_x^{ai}$  sea positivo. Lo contrario ocurre ahora cuando

$${}_n A_x > \alpha_x > \alpha_{x+n}$$

o bien sustituyendo (2.6),

$${}_n A_x > \frac{{}_n A_{x-n} + {}_n A_x}{2} > \frac{{}_n A_x + {}_n A_{x+n}}{2}$$

de donde

$${}_n A_x > {}_n A_{x-n} > {}_n A_{x+n}$$

es decir, alrededor de una cima o moda (máximo relativo). Adoptando el equivalente a (2.28):

$${}_n a_x = \begin{cases} {}_n A_x & \text{si } {}_n A_x < \alpha_x \\ \frac{\alpha_x + \alpha_{x+n}}{2} & \text{si } {}_n A_x > \alpha_x \end{cases} \quad (2.31)$$

queda garantizado que  ${}_n L_x^{ai}$  sea positivo. Correspondiendo ahora el saldo neto de intercambios  $\ell_x^a {}_n p_x - \ell_{x+n}^a$  al final del periodo a los retiros sobrevivientes, y  ${}_n L_x^{ai} {}_n m_x$  a sus defunciones:

$$\begin{aligned} {}_n H_x^{ai} &= \ell_x^a {}_n p_x - \ell_{x+n}^a + {}_n L_x^{ai} {}_n m_x \\ &= \ell_x^a {}_n p_x - \ell_{x+n}^a + {}_n L_x {}_n m_x (\alpha_x - {}_n a_x) \\ &= \ell_x^a {}_n p_x - \ell_{x+n}^a + {}_n d_x (\alpha_x - {}_n a_x) \\ &= \ell_x^a {}_n p_x + \ell_x^a {}_n q_x - \ell_{x+n}^a - {}_n d_x^a \\ &= \ell_x^a - \ell_{x+n}^a - {}_n d_x^a \end{aligned} \quad (2.32)$$

que también pudimos haber obtenido al despejar en la ecuación compensadora (2.26) y considerando nulos los ingresos ( ${}_n H_x^{ia} = 0$ ). Incluso, si sustituimos (2.1) y (2.25) en (2.32), llegamos a una ecuación de la misma estructura que (2.29) para los inactivos:

$$\begin{aligned} {}_n H_x^{ai} &= \ell_x - \ell_x^i - \ell_{x+n} + \ell_{x+n}^i - {}_n d_x + {}_n d_x^i \\ &= \ell_{x+n}^i - \ell_x^i + {}_n d_x^i \end{aligned}$$

por la conocida relación de la tabla de mortalidad  ${}_n d_x = \ell_x - \ell_{x+n}$ .

En el caso de México en 1990, siendo ambos patrones de participación unimodales, para cualquier intervalo de edades ascendente tenemos que  ${}_n a_x = {}_n A_x$ , con lo cual, por ejemplo, para las mujeres entre 20 y 25 años de edad, con los datos de los cuadros 1.3, 2.3 y 2.4 y aplicando (2.21) y (2.27):

$${}_5L_{20}^a = {}_5L_{20} {}_5a_{20} = 4,746,611 \times 0.295360 = 1,401,958$$

$$\begin{aligned} {}_5L_{20}^i &= {}_5L_{20} - {}_5L_{20}^a = 4,746,611 - 1,401,958 \\ &= 3,344,653 \end{aligned}$$

$${}_5L_{20}^{aa} = {}_5L_{20} \alpha_{20} = 4,746,611 \times 0.239975 = 1,139,067$$

$${}_5L_{20}^{ai} = 0$$

$$\begin{aligned} {}_5L_{20}^{ia} &= {}_5L_{20}^a - {}_5L_{20}^{aa} = 1,401,958 - 1,139,067 \\ &= 262,891 \end{aligned}$$

$${}_5L_{20}^{ii} = {}_5L_{20}^i = 3,344,653$$

con (2.24) y despejando en (2.25) las defunciones:

$${}_5d_{20}^a = {}_5d_{20} {}_5a_{20} = 3,277 \times 0.295360 = 968$$

$${}_5d_{20}^i = {}_5d_{20} - {}_5d_{20}^a = 3,277 - 968 = 2,309$$

por (2.29) los ingresos:

$$\begin{aligned} {}_5H_{20}^{ia} &= \ell_{25}^a - \ell_{20}^a + {}_5d_{20}^a \\ &= 276,065 - 228,190 + 968 = 48,843 \end{aligned}$$

y como  ${}_5H_{20}^{ai} = 0$ , de (2.23) obtenemos las tasas de ingreso y de retiro:

$${}_5m_{20}^{ia} = \frac{{}_5H_{20}^{ia}}{{}_5L_{20}^i} = \frac{48,843}{3,344,653} = 0.014603$$

$${}_5m_{20}^{ai} = \frac{{}_5H_{20}^{ai}}{{}_5L_{20}^a} = \frac{0}{1,401,958} = 0$$

Como ejemplo de un intervalo descendente tomemos el caso masculino para el grupo de edades 35-39 años; como  $\alpha_{35} < {}_5A_{35}$ , por (2.31):

$${}_5a_{35} = \frac{\alpha_{35} + \alpha_{40}}{2} = \frac{0.925998 + 0.921208}{2} = 0.923603$$

valor ligeramente inferior al observado ( ${}_5A_{35} = 0.926167$ ); aplicando (2.21) y (2.30):

$${}_5L_{35}^a = {}_5L_{35} {}_5a_{35} = 4,460,369 \times 0.923603 = 4,119,612$$

$$\begin{aligned} {}_5L_{35}^i &= {}_5L_{35} - {}_5L_{35}^a = 4,460,369 - 4,119,612 \\ &= 340,757 \end{aligned}$$

$${}_5L_{35}^{aa} = {}_5L_{35}^a = 4,119,612$$

$$\begin{aligned} {}_5L_{35}^{ai} &= {}_5L_{35} \alpha_{35} - {}_5L_{35}^a \\ &= 4,460,369 \times 0.925998 - 4,119,612 \\ &= 10,682 \end{aligned}$$

$${}_5L_{35}^{ia} = 0$$

$${}_5L_{35}^{ii} = {}_5L_{35} \iota_{35} = 4,460,369 \times 0.074002 = 330,075$$

con (2.24) y despejando en (2.25) las defunciones:

$${}_5d_{35}^a = {}_5d_{35} {}_5a_{35} = 19,151 \times 0.923603 = 17,688$$

$${}_5d_{35}^i = {}_5d_{35} - {}_5d_{35}^a = 19,151 - 17,688 = 1,463$$

por (2.32) los retiros:

$$\begin{aligned} {}_5H_{35}^{ai} &= \ell_{35}^a - \ell_{40}^a - {}_5d_{35}^a \\ &= 834,645 - 812,686 - 17,688 = 4,271 \end{aligned}$$

y de (2.23) obtenemos las tasas de ingreso y de retiro:

$${}_5m_{35}^{ia} = \frac{{}_5H_{35}^{ia}}{{}_5L_{35}^i} = \frac{0}{340,757} = 0$$

$${}_5m_{35}^{ai} = \frac{{}_5H_{35}^{ai}}{{}_5L_{35}^a} = \frac{4,271}{4,119,612} = 0.001037$$

Los resultados para los años-persona vividos se presentan en el cuadro 2.6, y para los eventos y sus tasas en el cuadro 2.7. En los patrones por edad de las tasas de ingreso y de retiro que se reproducen en la gráfica 2.3, se puede ver prácticamente el mismo perfil en ambos para los dos tipos de tasas.

### 2.3.2. El enfoque de las tasas

Retomemos la definición matemática de tiempo vivido en (1.9). Por el primer teorema del valor medio para las integrales, sabemos que existe  $\xi$  —el valor medio— tal que:

$${}_nL_x = \int_0^n \ell_{x+y} dy = n \ell_{x+\xi} \quad \text{con } 0 \leq \xi \leq n$$

sustituyendo en la tasa de mortalidad en (2.23):

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{\ell_{x+\xi}}$$

es decir, un promedio anual de defunciones ( ${}_n d_x/n$ ) per cápita (la división entre los sobrevivientes promedio  $\ell_{x+\xi}$ ). Esta conclusión es válida para cualquier tasa demográfica de eventualidad.

Denotemos por  $\mu_x$  la tasa instantánea o fuerza de mortalidad, la cual se obtiene al hacer tender a cero el intervalo genérico  $n$ ; entonces, recordando que  ${}_n d_x = \ell_x - \ell_{x+n}$ , tenemos la conocida relación:

$$\mu_x = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{n \ell_{x+\xi}} = \frac{-\frac{\partial}{\partial x} \ell_x}{\ell_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \{ \ell_x \}$$

que sigue siendo un promedio anual per cápita.<sup>5</sup> También la tasa instantánea de mortalidad se puede obtener como:

$$\mu_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_nq_x}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{n d_x}{n}}{\ell_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \{ \ell_x \}$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial entre  $x$  y  $x + n$ :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+n} \mu_y dy &= - \int_x^{x+n} \frac{\partial}{\partial y} \ln \{ \ell_y \} dy \\ &= -\ln \{ \ell_{x+n} \} + \ln \{ \ell_x \} \\ &= -\ln \left\{ \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} \right\} \end{aligned}$$

y cambiando el signo y tomando exponencial en ambos lados:

$${}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = e^{-\int_0^n \mu_{x+y} dy} \quad (2.33)$$

Denotemos por  $\mu_x^{ia}$  la tasa instantánea de ingreso a la actividad y por  $\mu_x^{ai}$  la tasa instantánea de retiro de la actividad, que al igual que la tasa de mortalidad están dadas por:

$$\mu_x^{ia} = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x^{ia} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n p_x^{ia}}{n} \quad (2.34)$$

---

<sup>5</sup>En la ecuación anterior hemos usado la situación de que al estar  $\xi$  acotada superiormente por  $n$ , conforme  $n$  tiende a cero también  $\xi$  tiende a cero, y entonces  $\ell_{x+\xi}$  tiende a  $\ell_x$ , asumiendo que los sobrevivientes de la tabla de mortalidad son una función continua de la edad entre  $x$  y  $x + n$ .

## CUADRO 2.6

### México: años-persona vividos por la cohorte de la tabla de vida activa, 1990 (método de los eventos)

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Un activo de edad $x$ en la:    |                                   |                                 | Un inactivo de edad $x$ en la:  |                                   |                                | actividad<br>$nL_x^a$<br>(7) | inactividad<br>$nL_x^i$<br>(8) |
|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
|                             | actividad<br>$nL_x^{aa}$<br>(1) | inactividad<br>$nL_x^{ai}$<br>(2) | total<br>$nL_x \alpha_x$<br>(3) | actividad<br>$nL_x^{ia}$<br>(4) | inactividad<br>$nL_x^{ii}$<br>(5) | total<br>$nL_x \iota_x$<br>(6) |                              |                                |
| <i>Hombres</i>              |                                 |                                   |                                 |                                 |                                   |                                |                              |                                |
| 12-14                       | 0                               | 0                                 | 0                               | 336,174                         | 2,500,065                         | 2,836,239                      | 336,174                      | 2,500,065                      |
| 15-19                       | 1,202,940                       | 0                                 | 1,202,940                       | 1,074,996                       | 2,429,321                         | 3,504,317                      | 2,277,936                    | 2,429,321                      |
| 20-24                       | 2,952,063                       | 0                                 | 2,952,063                       | 692,177                         | 1,025,718                         | 1,717,895                      | 3,644,240                    | 1,025,718                      |
| 25-29                       | 3,877,145                       | 0                                 | 3,877,145                       | 274,463                         | 465,094                           | 739,557                        | 4,151,608                    | 465,094                        |
| 30-34                       | 4,149,388                       | 0                                 | 4,149,388                       | 60,410                          | 337,259                           | 397,669                        | 4,209,798                    | 337,259                        |
| 35-39                       | 4,119,612                       | 10,682                            | 4,130,294                       | 0                               | 330,075                           | 330,075                        | 4,119,612                    | 340,757                        |
| 40-44                       | 3,989,661                       | 21,593                            | 4,011,254                       | 0                               | 343,086                           | 343,086                        | 3,989,661                    | 364,679                        |
| 45-49                       | 3,779,497                       | 45,154                            | 3,824,651                       | 0                               | 398,877                           | 398,877                        | 3,779,497                    | 444,031                        |
| 50-54                       | 3,455,722                       | 87,079                            | 3,542,801                       | 0                               | 513,532                           | 513,532                        | 3,455,722                    | 600,611                        |
| 55-59                       | 3,030,014                       | 111,496                           | 3,141,510                       | 0                               | 676,875                           | 676,875                        | 3,030,014                    | 788,371                        |
| 60-64                       | 2,402,557                       | 175,751                           | 2,578,308                       | 0                               | 892,322                           | 892,322                        | 2,402,557                    | 1,068,073                      |
| 65-69                       | 1,770,585                       | 147,922                           | 1,918,507                       | 0                               | 1,066,567                         | 1,066,567                      | 1,770,585                    | 1,214,489                      |
| 70-74                       | 1,183,158                       | 106,911                           | 1,290,069                       | 0                               | 1,065,136                         | 1,065,136                      | 1,183,158                    | 1,172,047                      |
| 75-79                       | 663,638                         | 76,667                            | 740,305                         | 0                               | 885,966                           | 885,966                        | 663,638                      | 962,633                        |

|          |         |        |         |   |         |         |         |         |
|----------|---------|--------|---------|---|---------|---------|---------|---------|
| 80-84    | 280,143 | 47,003 | 327,146 | 0 | 589,720 | 589,720 | 280,143 | 636,723 |
| 85-89    | 88,373  | 14,310 | 102,683 | 0 | 280,218 | 280,218 | 88,373  | 294,528 |
| 90-94    | 16,398  | 3,927  | 20,325  | 0 | 84,753  | 84,753  | 16,398  | 88,680  |
| 95 o más | 0       | 0      | 0       | 0 | 17,991  | 17,991  | 0       | 17,991  |

*Mujeres*

|          |           |        |           |         |           |           |           |           |
|----------|-----------|--------|-----------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 12-14    | 0         | 0      | 0         | 103,444 | 2,758,766 | 2,862,210 | 103,444   | 2,758,766 |
| 15-19    | 437,108   | 0      | 437,108   | 441,730 | 3,882,198 | 4,323,928 | 878,838   | 3,882,198 |
| 20-24    | 1,139,067 | 0      | 1,139,067 | 262,891 | 3,344,653 | 3,607,544 | 1,401,958 | 3,344,653 |
| 25-29    | 1,358,274 | 19,070 | 1,377,344 | 0       | 3,350,500 | 3,350,500 | 1,358,274 | 3,369,570 |
| 30-34    | 1,275,566 | 37,816 | 1,313,382 | 0       | 3,389,831 | 3,389,831 | 1,275,566 | 3,427,647 |
| 35-39    | 1,170,686 | 47,975 | 1,218,661 | 0       | 3,451,627 | 3,451,627 | 1,170,686 | 3,499,602 |
| 40-44    | 1,052,338 | 53,501 | 1,105,839 | 0       | 3,519,189 | 3,519,189 | 1,052,338 | 3,572,690 |
| 45-49    | 861,244   | 88,242 | 949,486   | 0       | 3,611,332 | 3,611,332 | 861,244   | 3,699,574 |
| 50-54    | 685,898   | 78,824 | 764,722   | 0       | 3,702,375 | 3,702,375 | 685,898   | 3,781,199 |
| 55-59    | 525,408   | 69,507 | 594,915   | 0       | 3,732,310 | 3,732,310 | 525,408   | 3,801,817 |
| 60-64    | 388,609   | 55,156 | 443,765   | 0       | 3,665,314 | 3,665,314 | 388,609   | 3,720,470 |
| 65-69    | 281,605   | 37,409 | 319,014   | 0       | 3,449,733 | 3,449,733 | 281,605   | 3,487,142 |
| 70-74    | 193,543   | 25,112 | 218,655   | 0       | 3,043,703 | 3,043,703 | 193,543   | 3,068,815 |
| 75-79    | 120,320   | 15,990 | 136,310   | 0       | 2,430,850 | 2,430,850 | 120,320   | 2,446,840 |
| 80-84    | 61,384    | 9,852  | 71,236    | 0       | 1,658,863 | 1,658,863 | 61,384    | 1,668,715 |
| 85-89    | 23,469    | 4,451  | 27,920    | 0       | 884,445   | 884,445   | 23,469    | 888,896   |
| 90-94    | 5,326     | 1,627  | 6,953     | 0       | 326,609   | 326,609   | 5,326     | 328,236   |
| 95 o más | 0         | 0      | 0         | 0       | 80,921    | 80,921    | 0         | 80,921    |

CUADRO 2.7  
**México: eventos y tasas de eventualidad**  
**en la tabla de vida activa, 1990 (método de los eventos)**

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Ingresos<br>$nH_x^{ia}$<br>(1) | Retiros<br>$nH_x^{ai}$<br>(2) | Defunciones:                |                               |                         | Tasas:                         |                               |                          |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
|                             |                                |                               | activos<br>$n d_x^a$<br>(3) | inactivos<br>$n d_x^i$<br>(4) | total<br>$n d_x$<br>(5) | ingreso<br>$n m_x^{ia}$<br>(6) | retiro<br>$n m_x^{ai}$<br>(7) | muerte<br>$n m_x$<br>(8) |
| <i>Hombres</i>              |                                |                               |                             |                               |                         |                                |                               |                          |
| 12-14                       | 241,564                        | 0                             | 276                         | 2,053                         | 2,329                   | 0.096623                       | 0.000000                      | 0.000821                 |
| 15-19                       | 354,692                        | 0                             | 2,876                       | 3,067                         | 5,943                   | 0.146005                       | 0.000000                      | 0.001263                 |
| 20-24                       | 194,309                        | 0                             | 7,046                       | 1,983                         | 9,029                   | 0.189437                       | 0.000000                      | 0.001933                 |
| 25-29                       | 67,423                         | 0                             | 11,044                      | 1,237                         | 12,281                  | 0.144966                       | 0.000000                      | 0.002660                 |
| 30-34                       | 12,335                         | 0                             | 14,436                      | 1,156                         | 15,592                  | 0.036574                       | 0.000000                      | 0.003429                 |
| 35-39                       | 0                              | 4,271                         | 17,688                      | 1,463                         | 19,151                  | 0.000000                       | 0.001037                      | 0.004294                 |
| 40-44                       | 0                              | 13,557                        | 21,465                      | 1,963                         | 23,428                  | 0.000000                       | 0.003398                      | 0.005380                 |
| 45-49                       | 0                              | 26,989                        | 26,149                      | 3,072                         | 29,221                  | 0.000000                       | 0.007141                      | 0.006919                 |
| 50-54                       | 0                              | 40,896                        | 33,122                      | 5,757                         | 38,879                  | 0.000000                       | 0.011834                      | 0.009585                 |
| 55-59                       | 0                              | 60,215                        | 45,606                      | 11,866                        | 57,472                  | 0.000000                       | 0.019873                      | 0.015051                 |
| 60-64                       | 0                              | 69,372                        | 57,141                      | 25,403                        | 82,544                  | 0.000000                       | 0.028874                      | 0.023784                 |
| 65-69                       | 0                              | 56,698                        | 66,384                      | 45,535                        | 111,919                 | 0.000000                       | 0.032022                      | 0.037493                 |
| 70-74                       | 0                              | 43,320                        | 69,600                      | 68,947                        | 138,547                 | 0.000000                       | 0.036614                      | 0.058826                 |
| 75-79                       | 0                              | 31,746                        | 60,784                      | 88,170                        | 148,954                 | 0.000000                       | 0.047836                      | 0.091592                 |

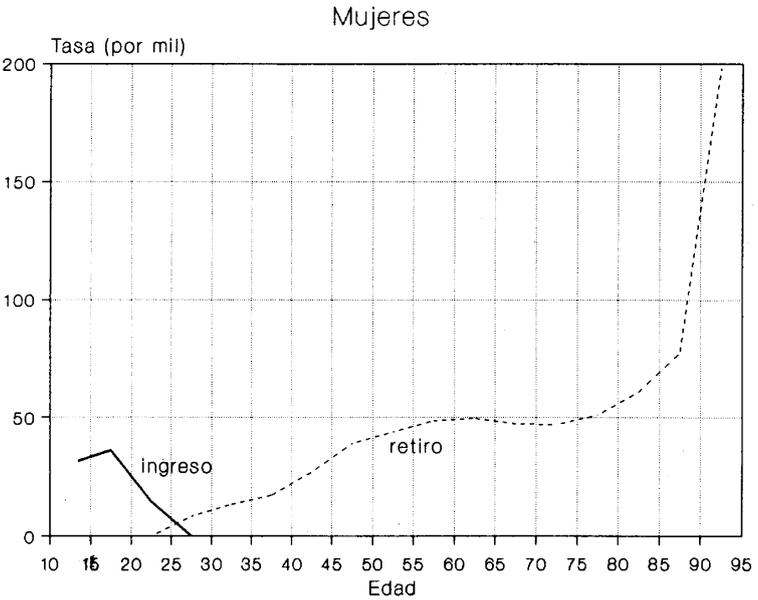
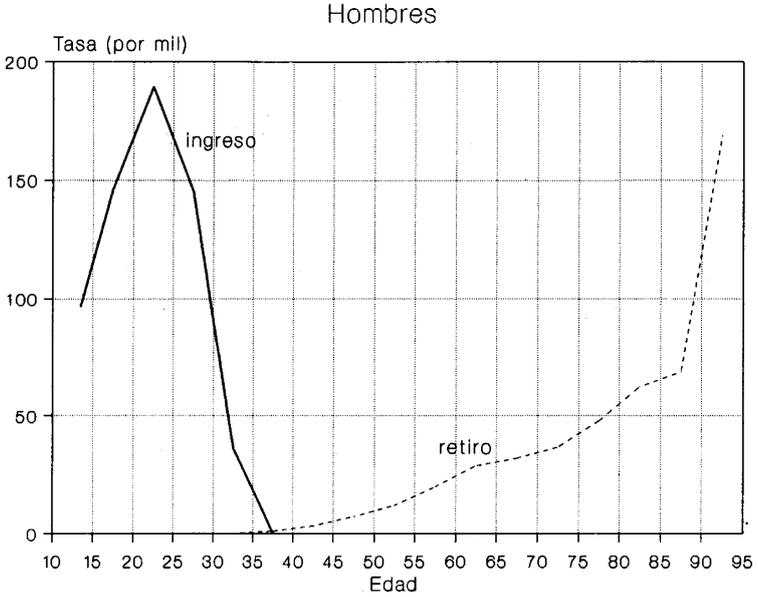
|          |   |        |        |        |         |          |          |          |
|----------|---|--------|--------|--------|---------|----------|----------|----------|
| 80-84    | 0 | 17,438 | 39,493 | 89,763 | 129,256 | 0.000000 | 0.062247 | 0.140976 |
| 85-89    | 0 | 6,075  | 18,789 | 62,619 | 81,408  | 0.000000 | 0.068743 | 0.212608 |
| 90-94    | 0 | 2,769  | 5,078  | 27,462 | 32,540  | 0.000000 | 0.168862 | 0.309675 |
| 95 o más |   |        |        | 8,029  | 8,029   |          |          | 0.446279 |

*Mujeres*

|          |         |        |       |         |         |          |          |          |
|----------|---------|--------|-------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 12-14    | 87,579  | 0      | 46    | 1,231   | 1,277   | 0.031746 | 0.000000 | 0.000446 |
| 15-19    | 141,124 | 0      | 467   | 2,064   | 2,531   | 0.036352 | 0.000000 | 0.000532 |
| 20-24    | 48,843  | 0      | 968   | 2,309   | 3,277   | 0.014603 | 0.000000 | 0.000690 |
| 25-29    | 0       | 11,407 | 1,229 | 3,048   | 4,277   | 0.000000 | 0.008398 | 0.000905 |
| 30-34    | 0       | 17,217 | 1,533 | 4,118   | 5,651   | 0.000000 | 0.013498 | 0.001202 |
| 35-39    | 0       | 20,391 | 1,916 | 5,729   | 7,645   | 0.000000 | 0.017418 | 0.001637 |
| 40-44    | 0       | 28,546 | 2,427 | 8,239   | 10,666  | 0.000000 | 0.027126 | 0.002306 |
| 45-49    | 0       | 33,741 | 2,898 | 12,451  | 15,349  | 0.000000 | 0.039177 | 0.003365 |
| 50-54    | 0       | 30,109 | 3,478 | 19,174  | 22,652  | 0.000000 | 0.043897 | 0.005071 |
| 55-59    | 0       | 25,527 | 4,169 | 30,169  | 34,338  | 0.000000 | 0.048585 | 0.007935 |
| 60-64    | 0       | 19,239 | 5,136 | 49,173  | 54,309  | 0.000000 | 0.049507 | 0.013217 |
| 65-69    | 0       | 13,330 | 6,221 | 77,040  | 83,261  | 0.000000 | 0.047336 | 0.022092 |
| 70-74    | 0       | 9,132  | 7,125 | 112,978 | 120,103 | 0.000000 | 0.047183 | 0.036815 |
| 75-79    | 0       | 6,136  | 7,335 | 149,161 | 156,496 | 0.000000 | 0.050997 | 0.060961 |
| 80-84    | 0       | 3,733  | 6,132 | 166,684 | 172,816 | 0.000000 | 0.060814 | 0.099888 |
| 85-89    | 0       | 1,824  | 3,760 | 142,420 | 146,180 | 0.000000 | 0.077720 | 0.160221 |
| 90-94    | 0       | 1,055  | 1,319 | 81,309  | 82,628  | 0.000000 | 0.198085 | 0.247714 |
| 95 o más |         |        |       | 31,244  | 31,244  |          |          | 0.386105 |

GRÁFICA 2.3

México: tasas de ingreso y de retiro en la tabla de vida activa, 1990  
(método de los eventos)



Fuente: cuadro 2.7.

$$\mu_x^{ai} = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x^{ai} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n p_x^{ai}}{n}$$

i)  $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ .

Consideremos un pequeño intervalo de tiempo —digamos  $\Delta y > 0$ — y la probabilidad de transición  ${}_{y+\Delta y} p_x^{ii}$ . El evento que un individuo esté en la inactividad a la edad  $x$  y en la inactividad a la edad  $x + y + \Delta y$  podemos descomponerlo en dos subeventos de acuerdo a su situación a la edad  $x + y$ : que no ingrese a la actividad  $(1 - \mu_{x+y}^{ia} \Delta y)$  o que fallezca  $(\mu_{x+y} \Delta y)$  entre las edades exactas  $x + y$  y  $x + y + \Delta y$ ; es decir,

$${}_{y+\Delta y} p_x^{ii} = {}_y p_x^{ii} (1 - \mu_{x+y}^{ia} \Delta y - \mu_{x+y} \Delta y)$$

o bien,

$$\frac{{}_{y+\Delta y} p_x^{ii} - {}_y p_x^{ii}}{\Delta y} = -{}_y p_x^{ii} (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y})$$

de donde, tomando el límite cuando  $\Delta y$  tiende a cero:

$$\frac{\partial}{\partial y} {}_y p_x^{ii} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{{}_{y+\Delta y} p_x^{ii} - {}_y p_x^{ii}}{\Delta y} = -{}_y p_x^{ii} (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y})$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln \{ {}_y p_x^{ii} \} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} {}_y p_x^{ii}}{{}_y p_x^{ii}} = -\mu_{x+y}^{ia} - \mu_{x+y}$$

integrando entre 0 y  $n$ :

$$\ln \{ {}_n p_x^{ii} \} = - \int_0^n (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y}) dy$$

y tomando exponencial en ambos lados:

$${}_n p_x^{ii} = e^{-\int_0^n (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y}) dy} = e^{-\int_0^n \mu_{x+y}^{ia} dy} {}_n p_x$$

donde la última igualdad se desprende de (2.33); y por (2.10):

$${}_n \hat{p}_x^{ii} = \frac{{}_n p_x^{ii}}{{}_n p_x} = e^{-\int_0^n \mu_{x+y}^{ia} dy}$$

Si suponemos que la tasa instantánea de ingreso permanece constante a lo largo del intervalo de  $n$  años:

$$\mu_{x+y}^{ia} = {}_n m_x^{ia} \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq n$$

entonces:

$${}_n \hat{p}_x^{ii} = e^{-n {}_n m_x^{ia}}$$

y tomando logaritmo natural en ambos lados e incorporando (2.16):

$${}_n m_x^{ia} = -\frac{\ln\{{}_n \hat{p}_x^{ii}\}}{n} = -\frac{\ln\left\{\frac{l_{x+n}}{l_x}\right\}}{n} \quad (2.35)$$

Una vez obtenidas las tasas de ingreso, como no hay retiros por tratarse de un intervalo de edades ascendente, sustituyendo (2.23) y (2.24) en la segunda ecuación compensadora de (2.26):

$$\ell_{x+n}^i = \ell_x^i - {}_n L_x^i {}_n m_x^{ia} - {}_n L_x^i {}_n m_x$$

o bien, por (2.12):

$$({}_n p_x^{ii} - 1) \ell_x^i = -{}_n L_x^i ({}_n m_x^{ia} + {}_n m_x)$$

de donde:

$${}_nL_x^i = \ell_x^i \frac{1 - {}_n p_x^{ii}}{{}_n m_x^{ia} + {}_n m_x}$$

entonces, como  ${}_nL_x^{ai} = 0$  porque no hay retiros de la actividad, por (2.19)  ${}_nL_x^{ii} = {}_nL_x^i$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= {}_nL_x \alpha_x \\ {}_nL_x^{ai} &= 0 \\ {}_nL_x^{ii} &= \ell_x^i \frac{1 - {}_n p_x^{ii}}{{}_n m_x^{ia} + {}_n m_x} \\ {}_nL_x^{ia} &= {}_nL_x \iota_x - {}_nL_x^{ii} \end{aligned} \quad (2.36)$$

ii)  $\alpha_x > \alpha_{x+n}$ .

Siguiendo pasos análogos al caso de intervalos ascendentes tenemos para las tasas de retiro de la actividad:

$${}_n m_x^{ai} = -\frac{\ln\{n\hat{p}_x^{aa}\}}{n} = -\frac{\ln\left\{\frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x}\right\}}{n} \quad (2.37)$$

y para los años-persona vividos:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= \ell_x^a \frac{1 - {}_n p_x^{aa}}{{}_n m_x^{ai} + {}_n m_x} \\ {}_nL_x^{ai} &= {}_nL_x \alpha_x - {}_nL_x^{aa} \\ {}_nL_x^{ia} &= 0 \\ {}_nL_x^{ii} &= {}_nL_x \iota_x \end{aligned} \quad (2.38)$$

Este enfoque de las tasas no se puede aplicar para el último grupo de edades de participación, pues al ser  $\alpha_\theta = 0$ , el logaritmo natural en el numerador de (2.37) no está definido.<sup>6</sup> Para resolver este problema tenemos dos opciones:

---

<sup>6</sup>Recuérdese que  $\theta$  es una edad a partir de la cual nadie permanece activo, y que en el Anexo A la estimamos en 95 años para México en 1990.

- i) Extrapolar la tasa de retiro a partir de los valores obtenidos para los grupos de edad anteriores y aplicar (2.38).
- ii) Extrapolar las proporciones de participación de la tabla  ${}_n a_x = {}_n L_x^a / {}_n L_x$  obtenidas para todos los grupos de edad previos, pudiendo usar para ello las proporciones observadas  ${}_n A_x$ ; <sup>7</sup> obtener luego las defunciones de activos con (2.24), y finalmente aplicar (2.32):

$${}_n H_{\theta-n}^{ai} = \ell_{\theta-n}^a - {}_n d_{\theta-n}^a$$

pues  $\ell_{\theta}^a = 0$ .

Es difícil decir cuál es mejor, porque ambas opciones revisten cierto grado de arbitrariedad.

Repitiendo nuestro ejemplo para las mujeres del grupo 20-24 años y aplicando (2.35) a las probabilidades del cuadro 2.5 obtenemos la tasa de ingreso:

$${}_5 m_{20}^{ia} = -\frac{\ln\{{}_5 \hat{p}_{20}^{ii}\}}{5} = -\frac{\ln\{0.932435\}}{5} = 0.013991$$

y como del anexo B la de mortalidad es  ${}_5 m_{20} = 0.000690$ , por (2.36) los años-persona vividos son:

$$\begin{aligned} {}_5 L_{20}^{aa} &= {}_5 L_{20} \alpha_{20} = 4,746,611 \times 0.239975 = 1,139,067 \\ {}_5 L_{20}^{ai} &= 0 \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>Es claro que partiendo de (2.36) o de (2.38), al aplicar (2.19) y (2.21) difícilmente la proporción de participación de tabla resultante  ${}_n a_x$  coincidirá con la observada  ${}_n A_x$ . Véase la gráfica 2.6.

$$\begin{aligned}
 {}_5L_{20}^{ii} &= \ell_{20}^i \frac{1-{}_5p_{20}^{ii}}{{}_5m_{20}^{ia}+{}_5m_{20}} = 722,702 \frac{1-0.929222}{0.014681} = 3,484,058 \\
 {}_5L_{20}^{ia} &= {}_5L_{20} \iota_{20} - {}_5L_{20}^{ii} \\
 &= 4,746,611 \times 0.760025 - 3,484,058 \\
 &= 123,486
 \end{aligned}$$

con (2.18) y (2.17) los totales:

$$\begin{aligned}
 {}_5L_{20}^a &= {}_5L_{20}^{aa} + {}_5L_{20}^{ia} = 1,139,067 + 123,486 \\
 &= 1,262,553 \\
 {}_5L_{20}^i &= {}_5L_{20}^{ia} + {}_5L_{20}^{ii} = 0 + 3,484,058 = 3,484,058 \\
 \text{y } {}_5a_{20} &= \frac{{}_5L_{20}^a}{{}_5L_{20}} = \frac{1,262,553}{4,746,611} = 0.265990
 \end{aligned}$$

valor 10% inferior al de la proporción observada (0.29536 del cuadro 1.1). Aplicando (2.23) y (2.24) tenemos los ingresos y las defunciones:

$$\begin{aligned}
 {}_5H_{20}^{ia} &= {}_5L_{20}^i {}_5m_{20}^{ia} = 3,484,058 \times 0.013991 \\
 &= 48,746 \\
 {}_5d_{20}^a &= {}_5L_{20}^a {}_5m_{20} = 1,262,553 \times 0.000690 \\
 &= 872 \\
 {}_5d_{20}^i &= {}_5L_{20}^i {}_5m_{20} = 3,484,058 \times 0.000690 \\
 &= 2,405 \\
 {}_5d_{20} &= {}_5d_{20}^a + {}_5d_{20}^i = 872 + 2,405 = 3,277
 \end{aligned}$$

Para los hombres entre los 35 y 40 años, aplicando (2.37) obtenemos la tasa de retiro:

$${}_5m_{35}^{ai} = -\frac{\ln\{{}_5\hat{p}_{35}^{aa}\}}{5} = -\frac{\ln\{0.994827\}}{5} = 0.001037$$

y como la de mortalidad del anexo B es  ${}_5m_{35} = 0.004294$ ; entonces por (2.38) los años-persona vividos son:

$$\begin{aligned}
 {}_5L_{35}^{aa} &= \ell_{35}^a \frac{1 - {}_5p_{35}^{aa}}{{}_5m_{35}^{ai} + {}_5m_{35}} = 834,645 \frac{1 - 0.973690}{0.005331} = 4,119,302 \\
 {}_5L_{35}^{ai} &= {}_5L_{35} \alpha_{35} - {}_5L_{35}^{aa} \\
 &= 4,460,369 \times 0.925998 - 4,119,302 = 10,992 \\
 {}_5L_{35}^{ia} &= 0 \\
 {}_5L_{35}^{ii} &= {}_5L_{35} \iota_{35} = 4,460,369 \times 0.974002 = 330,075
 \end{aligned}$$

con (2.18) y (2.17), los totales:

$$\begin{aligned}
 {}_5L_{35}^a &= {}_5L_{35}^{aa} + {}_5L_{35}^{ia} = 4,119,302 + 0 = 4,119,302 \\
 {}_5L_{35}^i &= {}_5L_{35}^{ia} + {}_5L_{35}^{ii} = 10,992 + 330,075 = 341,067
 \end{aligned}$$

$$\text{y } {}_5a_{35} = \frac{{}_5L_{35}^a}{{}_5L_{35}} = \frac{4,119,302}{4,460,369} = 0.923534$$

apenas 0.3% menor que la proporción observada (0.926167 del cuadro 1.1). Aplicando (2.23) y (2.24) tenemos los ingresos y las defunciones:

$$\begin{aligned}
 {}_5H_{35}^{ai} &= {}_5L_{35}^a {}_5m_{35}^{ai} = 4,119,302 \times 0.001037 \\
 &= 4,273 \\
 {}_5d_{35}^a &= {}_5L_{35}^a {}_5m_{35}^a = 4,119,302 \times 0.004294 \\
 &= 17,687 \\
 {}_5d_{35}^i &= {}_5L_{35}^i {}_5m_{35}^i = 341,067 \times 0.004294 \\
 &= 1,464 \\
 {}_5d_{35} &= {}_5d_{35}^a + {}_5d_{35}^i = 17,687 + 1,464 = 19,151
 \end{aligned}$$

En nuestro ejemplo de México en 1990, utilizamos la segunda opción para el último grupo de edades de participación; así, buscando congruencia en el patrón por edad de las proporciones  ${}_n a_x$ , de acuerdo con la pauta del cociente  ${}_n a_x / {}_n A_x$  (gráfica 2.6) supusimos que:

$$\frac{{}_5 a_{90}}{{}_5 A_{90}} = \frac{{}_5 a_{85}}{{}_5 A_{85}} \quad \text{o bien} \quad {}_5 a_{90} = {}_5 A_{90} \frac{{}_5 a_{85}}{{}_5 A_{85}}$$

de donde,

$$\begin{aligned} {}_5d_{90}^a &= {}_5d_{90} {}_5a_{90} & {}_5H_{90}^{ai} &= \ell_{90}^a - {}_5d_{90}^a \\ & & \text{y} & \\ & & & {}_5L_{90}^a = {}_5L_{90} {}_5a_{90} \end{aligned}$$

En los cuadros 2.8 y 2.9 se presentan los resultados; en la gráfica 2.4 las tasas de ingreso y de retiro bajo el modelo exponencial, y en la gráfica 2.5 la proporción que representan respecto a las tasas obtenidas bajo el enfoque de los eventos. Tanto en las tasas de ingreso como en las de retiro se podrá notar el mismo perfil para ambos sexos (gráficas 2.3 y 2.4). En la gráfica 2.5, se puede ver que mientras en las mujeres ambos tipos de tasas no se alejan más de 5%, las de ingreso masculinas son más de 10% inferiores entre los 20 y 30 años de edad.

Al aplicar (2.38) a un intervalo ascendente, notando que  ${}_n p_x^{aa} = {}_n p_x$  y  ${}_n m_x^{ai} = 0$ ,

$${}_n L_x^{aa} = \ell_x^a \frac{1 - {}_n p_x}{{}_n m_x} = \ell_x \alpha_x \frac{{}_n q_x}{{}_n m_x} = \frac{{}_n d_x}{{}_n m_x} \alpha_x = {}_n L_x \alpha_x$$

el mismo resultado que en (2.36). De la misma manera, al aplicar (2.36) a un intervalo descendente ( ${}_n p_x^{ii} = {}_n p_x$  y  ${}_n m_x^{ia} = 0$ ):

$${}_n L_x^{ii} = \ell_x^i \frac{1 - {}_n p_x}{{}_n m_x} = \frac{{}_n d_x}{{}_n m_x} \ell_x = {}_n L_x \ell_x$$

el mismo resultado que en (2.38). Entonces, dado que en un intervalo ascendente:

$${}_n \hat{p}_x^{aa} = 1 \quad \text{y} \quad {}_n m_x^{ai} = -\frac{\ell n \{ {}_n \hat{p}_x^{aa} \}}{n} = 0$$

## CUADRO 2.8

### México: años-persona vividos por la cohorte de la tabla de vida activa, 1990 (método de las tasas)

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Un activo de edad $x$ en la:    |                                   |                                 | Un inactivo de edad $x$ en la:  |                                   |                                | actividad<br>$nL_x^a$<br>(7) | inactividad<br>$nL_x^i$<br>(8) |
|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
|                             | actividad<br>$nL_x^{aa}$<br>(1) | inactividad<br>$nL_x^{ai}$<br>(2) | total<br>$nL_x \alpha_x$<br>(3) | actividad<br>$nL_x^{ia}$<br>(4) | inactividad<br>$nL_x^{ii}$<br>(5) | total<br>$nL_x \iota_x$<br>(6) |                              |                                |
| <i>Hombres</i>              |                                 |                                   |                                 |                                 |                                   |                                |                              |                                |
| 12-14                       | 0                               | 0                                 | 0                               | 380,197                         | 2,456,042                         | 2,836,239                      | 380,197                      | 2,456,042                      |
| 15-19                       | 1,202,940                       | 0                                 | 1,202,940                       | 989,328                         | 2,514,989                         | 3,504,317                      | 2,192,268                    | 2,514,989                      |
| 20-24                       | 2,952,063                       | 0                                 | 2,952,063                       | 550,882                         | 1,167,013                         | 1,717,895                      | 3,502,945                    | 1,167,013                      |
| 25-29                       | 3,877,145                       | 0                                 | 3,877,145                       | 184,525                         | 555,032                           | 739,557                        | 4,061,670                    | 555,032                        |
| 30-34                       | 4,149,388                       | 0                                 | 4,149,388                       | 31,460                          | 366,209                           | 397,669                        | 4,180,848                    | 366,209                        |
| 35-39                       | 4,119,302                       | 10,992                            | 4,130,294                       | 0                               | 330,075                           | 330,075                        | 4,119,302                    | 341,067                        |
| 40-44                       | 3,976,413                       | 34,841                            | 4,011,254                       | 0                               | 343,086                           | 343,086                        | 3,976,413                    | 377,927                        |
| 45-49                       | 3,755,271                       | 69,380                            | 3,824,651                       | 0                               | 398,877                           | 398,877                        | 3,755,271                    | 468,257                        |
| 50-54                       | 3,436,743                       | 106,058                           | 3,542,801                       | 0                               | 513,532                           | 513,532                        | 3,436,743                    | 619,590                        |
| 55-59                       | 2,983,662                       | 157,848                           | 3,141,510                       | 0                               | 676,875                           | 676,875                        | 2,983,662                    | 834,723                        |
| 60-64                       | 2,397,956                       | 180,352                           | 2,578,308                       | 0                               | 892,322                           | 892,322                        | 2,397,956                    | 1,072,674                      |
| 65-69                       | 1,771,880                       | 146,627                           | 1,918,507                       | 0                               | 1,066,567                         | 1,066,567                      | 1,771,880                    | 1,213,194                      |
| 70-74                       | 1,178,271                       | 111,798                           | 1,290,069                       | 0                               | 1,065,136                         | 1,065,136                      | 1,178,271                    | 1,176,934                      |
| 75-79                       | 659,481                         | 80,824                            | 740,305                         | 0                               | 885,966                           | 885,966                        | 659,481                      | 966,790                        |

|          |         |        |         |   |         |         |         |         |
|----------|---------|--------|---------|---|---------|---------|---------|---------|
| 80-84    | 287,400 | 39,746 | 327,146 | 0 | 589,720 | 589,720 | 287,400 | 629,466 |
| 85-89    | 89,453  | 13,230 | 102,683 | 0 | 280,218 | 280,218 | 89,453  | 293,448 |
| 90-94    | 16,598  | 3,727  | 20,325  | 0 | 84,753  | 84,753  | 16,598  | 88,480  |
| 95 o más | 0       | 0      | 0       | 0 | 17,991  | 17,991  | 0       | 17,991  |

*Mujeres*

|          |           |        |           |         |           |           |           |           |
|----------|-----------|--------|-----------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 12-14    | 0         | 0      | 0         | 133,486 | 2,728,724 | 2,862,210 | 133,486   | 2,728,724 |
| 15-19    | 437,108   | 0      | 437,108   | 363,220 | 3,960,708 | 4,323,928 | 800,328   | 3,960,708 |
| 20-24    | 1,139,067 | 0      | 1,139,067 | 123,486 | 3,484,058 | 3,607,544 | 1,262,553 | 3,484,058 |
| 25-29    | 1,348,499 | 28,845 | 1,377,344 | 0       | 3,350,500 | 3,350,500 | 1,348,499 | 3,379,345 |
| 30-34    | 1,269,707 | 43,675 | 1,313,382 | 0       | 3,389,831 | 3,389,831 | 1,269,707 | 3,433,506 |
| 35-39    | 1,166,760 | 51,901 | 1,218,661 | 0       | 3,451,627 | 3,451,627 | 1,166,760 | 3,503,528 |
| 40-44    | 1,032,516 | 73,323 | 1,105,839 | 0       | 3,519,189 | 3,519,189 | 1,032,516 | 3,592,512 |
| 45-49    | 862,195   | 87,291 | 949,486   | 0       | 3,611,332 | 3,611,332 | 862,195   | 3,698,623 |
| 50-54    | 686,472   | 78,250 | 764,722   | 0       | 3,702,375 | 3,702,375 | 686,472   | 3,780,625 |
| 55-59    | 528,267   | 66,648 | 594,915   | 0       | 3,732,310 | 3,732,310 | 528,267   | 3,798,958 |
| 60-64    | 393,535   | 50,230 | 443,765   | 0       | 3,665,314 | 3,665,314 | 393,535   | 3,715,544 |
| 65-69    | 284,248   | 34,766 | 319,014   | 0       | 3,449,733 | 3,449,733 | 284,248   | 3,484,499 |
| 70-74    | 194,936   | 23,719 | 218,655   | 0       | 3,043,703 | 3,043,703 | 194,936   | 3,067,422 |
| 75-79    | 120,465   | 15,845 | 136,310   | 0       | 2,430,850 | 2,430,850 | 120,465   | 2,446,695 |
| 80-84    | 61,950    | 9,286  | 71,236    | 0       | 1,658,863 | 1,658,863 | 61,950    | 1,668,149 |
| 85-89    | 23,562    | 4,358  | 27,920    | 0       | 884,445   | 884,445   | 23,562    | 888,803   |
| 90-94    | 5,347     | 1,606  | 6,953     | 0       | 326,609   | 326,609   | 5,347     | 328,215   |
| 95 o más | 0         | 0      | 0         | 0       | 80,921    | 80,921    | 0         | 80,921    |

**CUADRO 2.9**  
**México: eventos y tasas de eventualidad**  
**en la tabla de vida activa, 1990 (método de las tasas)**

| Grupo de edad<br>$x, x+n-1$ | Ingresos<br>$nH_x^{ia}$<br>(1) | Retiros<br>$nH_x^{ai}$<br>(2) | Defunciones:                |                               |                         | Tasas:                        |                              |                         |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------|
|                             |                                |                               | activos<br>$n^d_x^a$<br>(3) | inactivos<br>$n^d_x^i$<br>(4) | total<br>$n^d_x$<br>(5) | ingreso<br>$nm_x^{ia}$<br>(6) | retiro<br>$nm_x^{ai}$<br>(7) | muerte<br>$nm_x$<br>(8) |
| <i>Hombres</i>              |                                |                               |                             |                               |                         |                               |                              |                         |
| 12-14                       | 241,601                        | 0                             | 312                         | 2,017                         | 2,329                   | 0.098370                      | 0.000000                     | 0.000821                |
| 15-19                       | 354,584                        | 0                             | 2,768                       | 3,175                         | 5,943                   | 0.140988                      | 0.000000                     | 0.001263                |
| 20-24                       | 194,035                        | 0                             | 6,773                       | 2,256                         | 9,029                   | 0.166267                      | 0.000000                     | 0.001933                |
| 25-29                       | 67,185                         | 0                             | 10,805                      | 1,476                         | 12,281                  | 0.121047                      | 0.000000                     | 0.002660                |
| 30-34                       | 12,235                         | 0                             | 14,336                      | 1,256                         | 15,592                  | 0.033410                      | 0.000000                     | 0.003429                |
| 35-39                       | 0                              | 4,273                         | 17,687                      | 1,464                         | 19,151                  | 0.000000                      | 0.001037                     | 0.004294                |
| 40-44                       | 0                              | 13,627                        | 21,395                      | 2,033                         | 23,428                  | 0.000000                      | 0.003427                     | 0.005380                |
| 45-49                       | 0                              | 27,157                        | 25,981                      | 3,240                         | 29,221                  | 0.000000                      | 0.007232                     | 0.006919                |
| 50-54                       | 0                              | 41,077                        | 32,940                      | 5,939                         | 38,879                  | 0.000000                      | 0.011952                     | 0.009585                |
| 55-59                       | 0                              | 60,914                        | 44,908                      | 12,564                        | 57,472                  | 0.000000                      | 0.020416                     | 0.015051                |
| 60-64                       | 0                              | 69,481                        | 57,032                      | 25,512                        | 82,544                  | 0.000000                      | 0.028975                     | 0.023784                |
| 65-69                       | 0                              | 56,649                        | 66,433                      | 45,486                        | 111,919                 | 0.000000                      | 0.031971                     | 0.037493                |
| 70-74                       | 0                              | 43,608                        | 69,313                      | 69,234                        | 138,547                 | 0.000000                      | 0.037010                     | 0.058826                |
| 75-79                       | 0                              | 32,126                        | 60,403                      | 88,551                        | 148,954                 | 0.000000                      | 0.048714                     | 0.091592                |

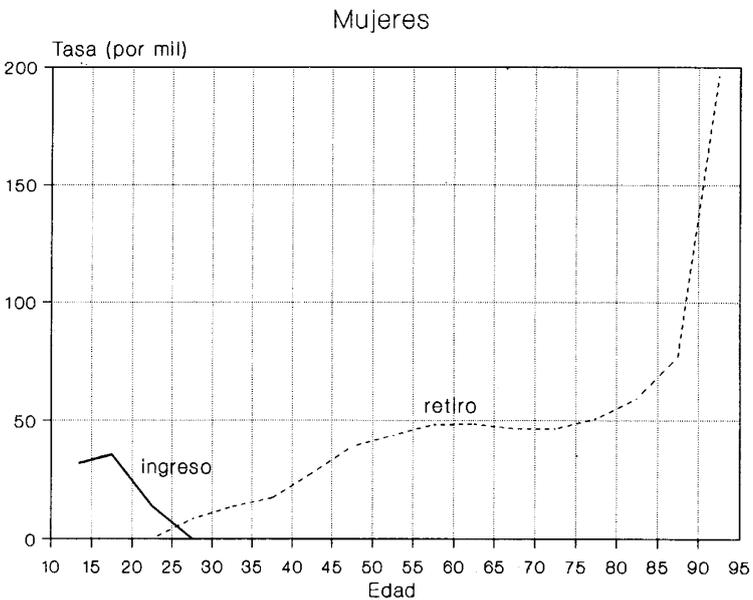
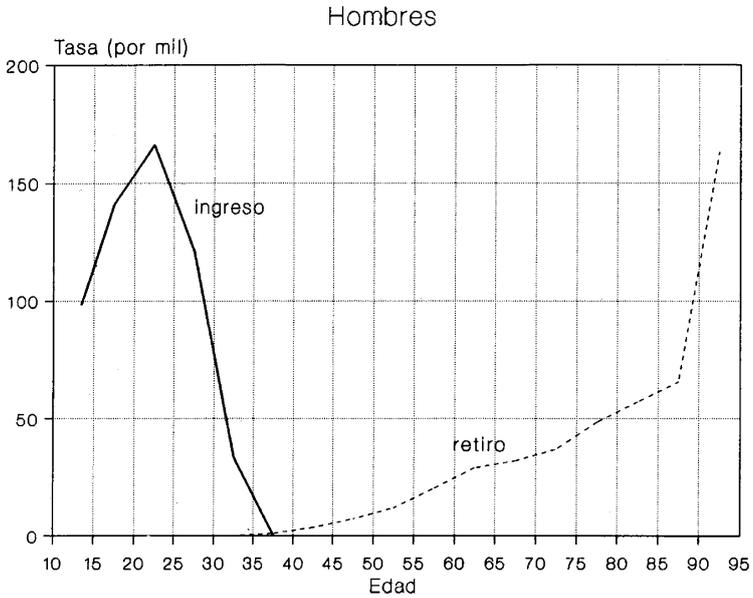
|          |   |        |        |        |         |          |          |          |
|----------|---|--------|--------|--------|---------|----------|----------|----------|
| 80-84    | 0 | 16,415 | 40,516 | 88,740 | 129,256 | 0.000000 | 0.057115 | 0.140976 |
| 85-89    | 0 | 5,846  | 19,018 | 62,390 | 81,408  | 0.000000 | 0.065348 | 0.212608 |
| 90-94    | 0 | 2,707  | 5,140  | 27,400 | 32,540  | 0.000000 | 0.163092 | 0.309675 |
| 95 o más |   |        |        | 8,029  | 8,029   |          |          | 0.446279 |

*Mujeres*

|          |         |        |       |         |         |          |          |          |
|----------|---------|--------|-------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 12-14    | 87,593  | 0      | 60    | 1,217   | 1,277   | 0.032100 | 0.000000 | 0.000446 |
| 15-19    | 141,082 | 0      | 425   | 2,106   | 2,531   | 0.035621 | 0.000000 | 0.000532 |
| 20-24    | 48,746  | 0      | 872   | 2,405   | 3,277   | 0.013991 | 0.000000 | 0.000690 |
| 25-29    | 0       | 11,416 | 1,220 | 3,057   | 4,277   | 0.000000 | 0.008466 | 0.000905 |
| 30-34    | 0       | 17,224 | 1,526 | 4,125   | 5,651   | 0.000000 | 0.013565 | 0.001202 |
| 35-39    | 0       | 20,397 | 1,910 | 5,735   | 7,645   | 0.000000 | 0.017482 | 0.001637 |
| 40-44    | 0       | 28,592 | 2,381 | 8,285   | 10,666  | 0.000000 | 0.027692 | 0.002306 |
| 45-49    | 0       | 33,737 | 2,902 | 12,447  | 15,349  | 0.000000 | 0.039129 | 0.003365 |
| 50-54    | 0       | 30,106 | 3,481 | 19,171  | 22,652  | 0.000000 | 0.043856 | 0.005071 |
| 55-59    | 0       | 25,504 | 4,192 | 30,146  | 34,338  | 0.000000 | 0.048279 | 0.007935 |
| 60-64    | 0       | 19,173 | 5,201 | 49,108  | 54,309  | 0.000000 | 0.048721 | 0.013217 |
| 65-69    | 0       | 13,271 | 6,280 | 76,981  | 83,261  | 0.000000 | 0.046689 | 0.022092 |
| 70-74    | 0       | 9,081  | 7,177 | 112,926 | 120,103 | 0.000000 | 0.046583 | 0.036815 |
| 75-79    | 0       | 6,127  | 7,344 | 149,152 | 156,496 | 0.000000 | 0.050862 | 0.060961 |
| 80-84    | 0       | 3,677  | 6,188 | 166,628 | 172,816 | 0.000000 | 0.059353 | 0.099888 |
| 85-89    | 0       | 1,809  | 3,775 | 142,405 | 146,180 | 0.000000 | 0.076791 | 0.160221 |
| 90-94    | 0       | 1,049  | 1,325 | 81,303  | 82,628  | 0.000000 | 0.196185 | 0.247714 |
| 95 o más |         |        |       | 31,244  | 31,244  |          |          | 0.386105 |

GRÁFICA 2.4

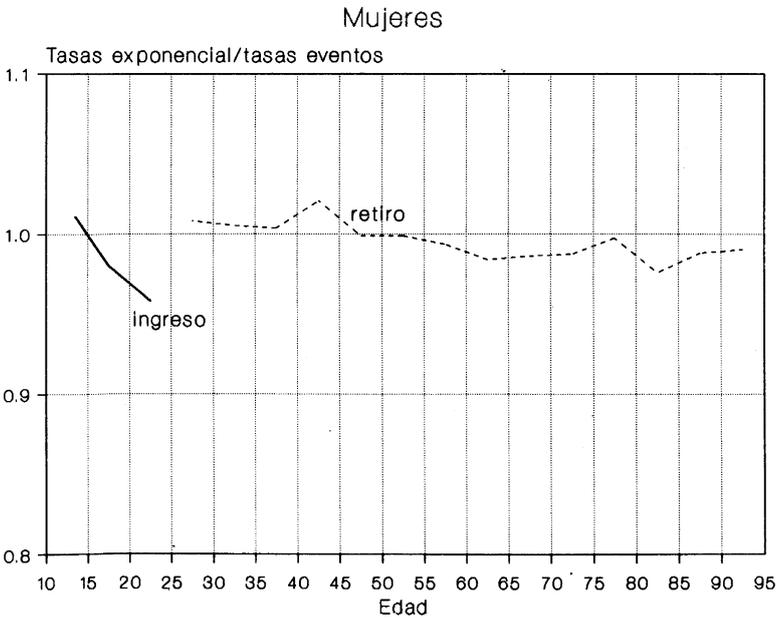
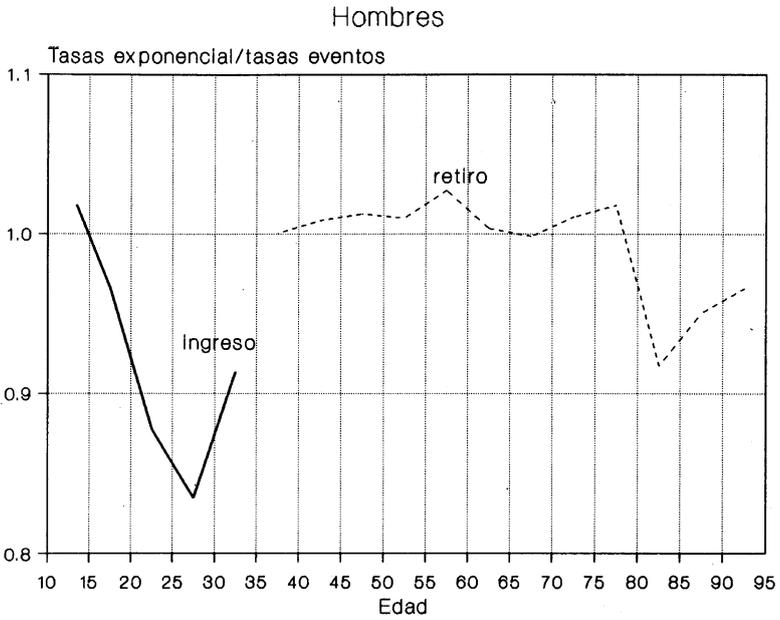
México: tasas de ingreso y de retiro en la tabla de vida activa, 1990  
(método de las tasas)



Fuente: cuadro 2.9.

GRÁFICA 2.5

**México: desviación proporcional en las tasas de ingreso y de retiro obtenidas por el método exponencial respecto de las obtenidas por el método de los eventos, 1990**



y en uno descendente:

$${}_n\hat{p}_x^{ii} = 1 \quad \text{y} \quad {}_n m_x^{ia} = -\frac{\ell n\{{}_n\hat{p}_x^{ii}\}}{n} = 0$$

podemos generalizar (2.35) a (2.38) como:

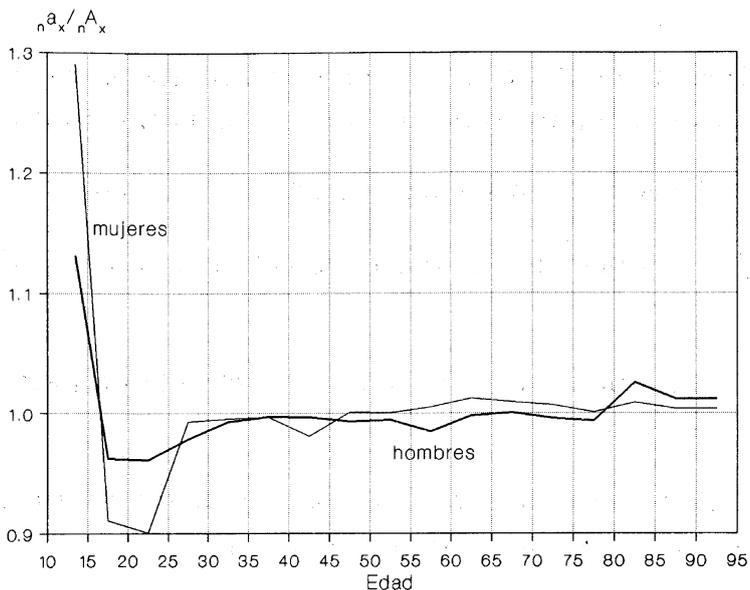
$$\begin{aligned}
 {}_n m_x^{ai} &= -\frac{\ell n\{{}_n\hat{p}_x^{aa}\}}{n} & {}_n m_x^{ia} &= -\frac{\ell n\{{}_n\hat{p}_x^{ii}\}}{n} \\
 {}_n L_x^{aa} &= \ell_x^a \frac{1 - {}_n p_x^{aa}}{{}_n m_x^{ai} + {}_n m_x} & {}_n L_x^{ai} &= {}_n L_x \alpha_x - {}_n L_x^{aa} \\
 {}_n L_x^{ii} &= \ell_x^i \frac{1 - {}_n p_x^{ii}}{{}_n m_x^{ia} + {}_n m_x} & {}_n L_x^{ia} &= {}_n L_x \iota_x - {}_n L_x^{ii}
 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Debido a que (2.36) y (2.38) se obtuvieron a partir de las ecuaciones compensadoras (2.26), las igualdades para los años-persona vividos en (2.39) son válidas tanto para el método de los eventos como para el de las tasas.

En la gráfica 2.6 se muestra la desviación de las proporciones de tabla por el método de las tasas respecto a las observadas. Se puede ver muy poca distorsión para ambos sexos a partir de los 20 años, pero un fuerte sesgo en el grupo 12-14. ¿Cuál es el efecto de la longitud  $h$  para el intervalo previo al calcular  $\alpha_{12}$  con (2.7)? Tenemos la respuesta en la gráfica 2.7, donde podemos ver que, aunque la probabilidad  ${}_3\hat{p}_{12}^{ia}$  —y por ende la tasa de ingreso  ${}_3m_{12}^{ia}$ — disminuye conforme  $h$  crece, el alejamiento de la proporción de participación de tabla aumenta. El patrón exhibido para ambos sexos en la gráfica 2.7 es un indicador de que la selección de  $h = 0$ , y por tanto  $\alpha_{12} = 0$  es adecuada.

GRÁFICA 2.6

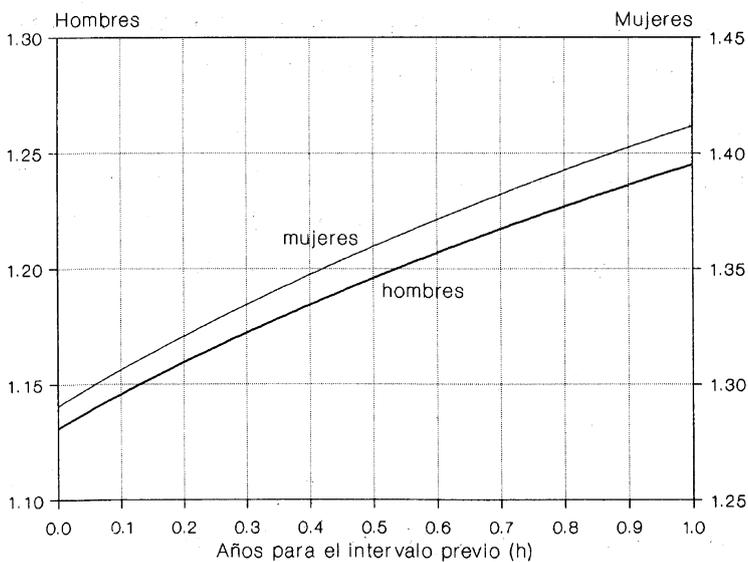
México: desviación relativa en las proporciones de participación de tabla respecto a las observadas, 1990



Fuentes : cuadros 1.1 y 2.8.

GRÁFICA 2.7

México: desviación relativa en las proporciones de participación 12-14 años de tabla respecto a las observadas ( ${}_3 a_{12} / {}_3 A_{12}$ ), para diversos valores del intervalo previo a la edad 12, 1990



## 2.4. ESPERANZAS DE VIDA

Definamos ahora los siguientes conceptos para el tiempo vivido acumulado por la cohorte de la tabla de vida:

$T_x$  Años-persona vividos a partir de la edad  $x$ .

$T_x^a$  Años-persona vividos en la actividad a partir de la edad  $x$ .

$T_x^i$  Años-persona vividos en la inactividad a partir de la edad  $x$ .

$T_x^{aa}$  Años-persona vividos en la actividad a partir de la edad  $x$  por los activos a la edad  $x$ .

$T_x^{ai}$  Años-persona vividos en la inactividad a partir de la edad  $x$  por los activos a la edad  $x$ .

$T_x^{ia}$  Años-persona vividos en la actividad a partir de la edad  $x$  por los inactivos a la edad  $x$ .

$T_x^{ii}$  Años-persona vividos en la inactividad a partir de la edad  $x$  por los inactivos a la edad  $x$ .

Estas funciones biométricas equivalen a los años-persona vividos de la sección anterior haciendo  $n = \omega - x$ , con  $\omega$  la edad límite de la vida humana:

$$\begin{aligned} T_x &= \omega - x L_x \\ T_x^a &= \omega - x L_x^a & T_x^i &= \omega - x L_x^i \\ T_x^{aa} &= \omega - x L_x^{aa} & T_x^{ai} &= \omega - x L_x^{ai} \\ T_x^{ia} &= \omega - x L_x^{ia} & T_x^{ii} &= \omega - x L_x^{ii} \end{aligned}$$

con lo cual, extendiendo (2.18) y (2.19):

$$T_x^a = T_x^{aa} + T_x^{ai} \quad T_x^i = T_x^{ia} + T_x^{ii}$$

y

$$T_x = T_x^a + T_x^i \quad (2.40)$$

No obstante, sólo tres tiempos vividos acumulados pueden evaluarse como la suma de los correspondientes años-persona vividos en los grupos de edad comprendidos:

$$T_x = \sum_{y=x}^{\omega-n} nL_x \quad T_x^a = \sum_{y=x}^{\omega-n} nL_x^a \quad T_x^i = \sum_{y=x}^{\omega-n} nL_x^i \quad (2.41)$$

pues, dado que un activo (inactivo) de edad  $x$  puede salir de la actividad (inactividad) y regresar varias veces en el resto de su vida,  $T_x^{aa}$ ,  $T_x^{ai}$ ,  $T_x^{ia}$  y  $T_x^{ii}$  además de los valores de  ${}_nL_x^{aa}$ ,  ${}_nL_x^{ai}$ ,  ${}_nL_x^{ia}$  y  ${}_nL_x^{ii}$  respectivamente, comprenden parte de todas estas funciones para edades superiores a  $x + n$ . Para poder deducir los valores de  $T_x^{aa}$ ,  $T_x^{ai}$ ,  $T_x^{ia}$  y  $T_x^{ii}$ , definamos primero las esperanzas de vida:

$e_x$  Esperanza de vida a la edad  $x$ , es decir, años que en promedio espera vivir a partir de la edad  $x$  cada uno de los sobrevivientes a la edad  $x$ .

$e_x^{aa}$  Esperanza de vida activa para un activo de edad  $x$ , es decir, años que en promedio espera vivir en la actividad a partir de la edad  $x$  un activo de edad  $x$ .

$e_x^{ai}$  Esperanza de vida inactiva para un activo de edad  $x$ , o años que en promedio espera vivir en la inactividad a partir de la edad  $x$  un activo de edad  $x$ .

$e_x^{ia}$  Esperanza de vida activa para un inactivo de edad

$x$ , o años que en promedio espera vivir en la actividad a partir de la edad  $x$  un inactivo de edad  $x$ .

$e_x^{ii}$  Esperanza de vida inactiva para un inactivo de edad  $x$ , o años que en promedio espera vivir en la inactividad a partir de la edad  $x$  un inactivo de edad  $x$ .

De su definición, claramente sus valores están dados por:

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{T_x}{l_x} \\
 e_x^{aa} &= \frac{T_x^{aa}}{l_x^a} & e_x^{ai} &= \frac{T_x^{ai}}{l_x^a} \\
 e_x^{ia} &= \frac{T_x^{ia}}{l_x^i} & e_x^{ii} &= \frac{T_x^{ii}}{l_x^i}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Al cabo de  $n$  años si sobreviven, los activos de edad  $x$  pueden encontrarse activos o inactivos al final del periodo; por lo que, los años que esperan vivir en la actividad son:

$$T_x^{aa} = {}_nL_x^{aa} + l_x^a {}_n p_x^{aa} e_{x+n}^{aa} + l_{x+n}^a {}_n p_x^{ai} e_{x+n}^{ia}$$

de donde, generalizando:

$$\begin{aligned}
 T_x^{aa} &= {}_nL_x^{aa} + l_x^a {}_n p_x^{aa} e_{x+n}^{aa} + l_{x+n}^a {}_n p_x^{ai} e_{x+n}^{ia} \\
 T_x^{ai} &= {}_nL_x^{ai} + l_x^a {}_n p_x^{aa} e_{x+n}^{ai} + l_{x+n}^a {}_n p_x^{ai} e_{x+n}^{ii} \\
 T_x^{ia} &= {}_nL_x^{ia} + l_x^i {}_n p_x^{ia} e_{x+n}^{aa} + l_{x+n}^i {}_n p_x^{ii} e_{x+n}^{ia} \\
 T_x^{ii} &= {}_nL_x^{ii} + l_x^i {}_n p_x^{ia} e_{x+n}^{ai} + l_{x+n}^i {}_n p_x^{ii} e_{x+n}^{ii}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

y por (2.42):

$$\begin{aligned}
 e_x^{aa} &= {}_n e_x^{aa} + {}_n p_x^{aa} e_{x+n}^{aa} + {}_n p_x^{ai} e_{x+n}^{ia} \\
 e_x^{ai} &= {}_n e_x^{ai} + {}_n p_x^{aa} e_{x+n}^{ai} + {}_n p_x^{ai} e_{x+n}^{ii} \\
 e_x^{ia} &= {}_n e_x^{ia} + {}_n p_x^{ia} e_{x+n}^{aa} + {}_n p_x^{ii} e_{x+n}^{ia} \\
 e_x^{ii} &= {}_n e_x^{ii} + {}_n p_x^{ia} e_{x+n}^{ai} + {}_n p_x^{ii} e_{x+n}^{ii}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

donde  ${}_n e_x^{aa} = {}_n L_x^{aa} / \ell_x^a$ ,  ${}_n e_x^{ai} = {}_n L_x^{ai} / \ell_x^a$ ,  ${}_n e_x^{ia} = {}_n L_x^{ia} / \ell_x^i$  y  ${}_n e_x^{ii} = {}_n L_x^{ii} / \ell_x^i$  son las esperanzas de vida parciales entre  $x$  y  $x+n$ .

Si aceptamos la continuidad de la mortalidad en la participación, haciendo  $n = \omega - x$  en (2.20):

$$T_x^{aa} + T_x^{ai} = T_x \alpha_x \quad \text{y} \quad T_x^{ia} + T_x^{ii} = T_x \iota_x$$

de donde,

$$e_x^{aa} + e_x^{ai} = e_x \quad \text{y} \quad e_x^{ia} + e_x^{ii} = e_x \tag{2.45}$$

En tanto medidas per cápita se puede ver una clara analogía con (2.11).

¿Cuál es la relación entre las esperanzas de vida activa y los años netos de vida activa vistos en la sección 1.4? Despejando en (2.42) y sustituyendo en (2.40):

$$T_x^a = \ell_x^a e_x^{aa} + \ell_x^i e_x^{ia} = \ell_x (\alpha_x e_x^{aa} + \iota_x e_x^{ia})$$

de donde por (1.20):

$$\begin{aligned}
 e_x^a &= \frac{T_x^a}{\ell_x} = \alpha_x e_x^{aa} + \iota_x e_x^{ia} \\
 e_x^i &= \alpha_x e_x^{ai} + \iota_x e_x^{ii}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

es decir, una media ponderada, pues  $\alpha_x + \iota_x = 1$  por (2.3).

Aceptando el supuesto fundamental del método tradicional y asumiendo la continuidad de la mortalidad en

la participación en la actividad económica, por (2.39) las esperanzas parciales de vida activa son:

$$\begin{aligned}
 {}_n e_x^{aa} &= \frac{1 - {}_n p_x^{aa}}{n m_x^{ai} + n m_x} \\
 {}_n e_x^{ai} &= {}_n e_x - \frac{1 - {}_n p_x^{aa}}{n m_x^{ai} + n m_x} \\
 {}_n e_x^{ia} &= {}_n e_x - \frac{1 - {}_n p_x^{ii}}{n m_x^{ia} + n m_x} \\
 {}_n e_x^{ii} &= \frac{1 - {}_n p_x^{ii}}{n m_x^{ia} + n m_x} \\
 \text{CON} \quad {}_n e_x &= \frac{n l_x}{l_x} = \frac{1}{l_x} \frac{n d_x}{n m_x} = \frac{n q_x}{n m_x}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde  ${}_n e_x$  es la esperanza de vida parcial en la tabla de mortalidad. Se puede ver que (2.47) satisface (2.45) para las esperanzas parciales:

$${}_n e_x^{aa} + {}_n e_x^{ai} = {}_n e_x \quad \text{y} \quad {}_n e_x^{ia} + {}_n e_x^{ii} = {}_n e_x$$

Recordando que en un intervalo ascendente  ${}_n p_x^{aa} = {}_n p_x$  y  $n m_x^{ai} = 0$ , al aplicar (2.47):

$$\begin{aligned}
 {}_n e_x^{aa} &= \frac{1 - {}_n p_x}{n m_x} = \frac{n q_x}{n m_x} = {}_n e_x \\
 {}_n e_x^{ai} &= {}_n e_x - {}_n e_x = 0
 \end{aligned}$$

y de la misma manera, para un intervalo descendente:

$${}_n e_x^{ii} = {}_n e_x \quad \text{y} \quad {}_n e_x^{ia} = {}_n e_x - {}_n e_x = 0$$

con lo que se cumplen (2.36) y (2.38) respectivamente.

Las ecuaciones (2.44) se aplican de manera recursiva. No habiendo activos y no estando definida la división entre cero, matemáticamente las esperanzas  $e_{\theta}^{aa}$  y  $e_{\theta}^{ai}$  no existen; sin embargo, es para simplificar la aplicación de (2.44) que las asumimos iguales a cero, sin que ello propicie error alguno en la determinación de las esperanzas para las edades anteriores:

$$e_{\theta}^{aa} = 0 \quad e_{\theta}^{ai} = 0 \quad e_{\theta}^{ia} = 0 \quad \text{y} \quad e_{\theta}^{ii} = e_x \quad (2.48)$$

Para la edad inicial  $\beta$  tampoco se pueden determinar las esperanzas  $e_{\beta}^{aa}$  y  $e_{\beta}^{ai}$  mediante (2.42) porque no está definida la división entre cero cuando adoptamos  $\alpha_{\beta} = 0$ ; no obstante, siendo el primer intervalo de edades forzosamente ascendente ( ${}_n p_{\beta}^{aa} = {}_n p_{\beta}$  y  ${}_n p_{\beta}^{ai} = 0$ ), sustituyendo (2.47) en (2.44):

$$e_{\beta}^{aa} = {}_n e_{\beta} {}_n p_{\beta} e_{\beta+n}^{aa} \quad \text{y} \quad e_{\beta}^{ai} = {}_n p_{\beta} e_{\beta+n}^{ai} \quad (2.49)$$

porque  ${}_n e_{\beta}^{ai} = 0$ . Esta ecuación tiene una sencilla explicación: dado que un infinitésimo de tiempo  $dx$  después de la edad exacta  $\beta$  ya hay activos, las esperanzas de vida activa e inactiva para los activos a la edad exacta  $\beta + dx$  son iguales a los valores obtenidos mediante (2.49), pues un infinitésimo es demasiado pequeño para que cambien los valores de  ${}_n e_{\beta}$  y  ${}_n p_{\beta}$ ; o bien, siendo la tabla de vida activa un modelo probabilístico, las esperanzas de vida activa e inactiva sólo dependen de las probabilidades de transición.

Por ejemplo, por el método de los eventos, con la información de los cuadros 2.4 y 2.6 tenemos para los hombres:

$${}_5 e_{90}^{aa} = \frac{{}_5 L_{90}^{aa}}{\ell_{90}^a} = \frac{16,398}{7,847} = 2.09$$

sustituyendo este resultado y (2.48) en (2.44):

$$\begin{aligned} e_{90}^{aa} &= {}_5 e_{90}^{aa} + {}_5 p_{90}^{aa} {}_5 e_{95}^{aa} + {}_5 p_{90}^{ai} {}_5 e_{95}^{ia} \\ &= 2.09 + 0 \times 0 + 0.197906 \times 0 = 2.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{85}^{ia} &= {}_5 e_{85}^{ia} + {}_5 p_{85}^{ia} {}_5 e_{90}^{aa} + {}_5 p_{85}^{ii} {}_5 e_{90}^{ia} \\ &= 0 + 0 \times 0 + 0.197906 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

despejando en (2.45):

$$e_{90}^{ai} = e_{90} - e_{90}^{aa} = 3.03 - 2.09 = 0.94$$

$$e_{90}^{ii} = e_{90} - e_{90}^{ia} = 3.03 - 0 = 3.03$$

a los 85 años:

$${}_5e_{85}^{aa} = \frac{{}_5L_{85}^{aa}}{l_{85}^a} = \frac{88,373}{32,711} = 2.702$$

nuevamente por (2.44):

$$\begin{aligned} e_{85}^{aa} &= {}_5e_{85}^{aa} + {}_5p_{85}^{aa} {}_5e_{90}^{aa} + {}_5p_{85}^{ai} {}_5e_{90}^{ia} \\ &= 2.70 + 0.239892 \times 2.09 + 0.092703 \times 0 = 3.20 \end{aligned}$$

$$e_{85}^{ai} = e_{85} - e_{85}^{aa} = 4.15 - 3.20 = 0.95$$

$$\begin{aligned} e_{85}^{ia} &= {}_5e_{85}^{ia} + {}_5p_{85}^{ia} {}_5e_{90}^{aa} + {}_5p_{85}^{ii} {}_5e_{90}^{ia} \\ &= 0 + 0 \times 2.09 + 0.332596 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$e_{85}^{ii} = e_{85} - e_{85}^{ia} = 4.15 - 0 = 4.15$$

y aplicando (2.46) los años netos de vida activa e inactiva:

$$\begin{aligned} e_{85}^a &= \alpha_{85} e_{85}^{aa} + \iota_{85} e_{85}^{ia} \\ &= 0.268171 \times 3.20 + 0.731826 \times 0 = 0.86 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{85}^i &= \alpha_{85} e_{85}^{ai} + \iota_{85} e_{85}^{ii} \\ &= 0.268171 \times 0.95 + 0.731826 \times 4.15 = 3.29 \end{aligned}$$

los mismos valores obtenidos en la sección 1.4 (columnas 5 y 6 del cuadro 1.4).

En los cuadros 2.10 y 2.11 y en la gráfica 2.8 se presentan las esperanzas de vida activa por ambos métodos

—de eventos y de tasas.<sup>8</sup> Un primer aspecto que salta a la vista es que sólo las esperanzas de vida activa, tanto para un activo como para un inactivo, son funciones monótonas decrecientes respecto a la edad, como el patrón de las esperanzas totales de vida ( $e_x$ ) a partir de los 10 años. Llama también la atención que las esperanzas de vida activa para un inactivo son ligeramente inferiores en todas las edades por el método de las tasas (columna 4 de los cuadros 2.10 y 2.11); en cambio para los activos, sólo lo son hasta los 60 años en hombres y hasta los 40 en mujeres.

En la gráfica 2.9 se presenta el porcentaje de su vida restante que un activo, un inactivo o cualquier persona (años netos) espera pasar en la actividad. Es interesante observar que una vez que una persona es activa, la mayor parte de su vida restante espera pasarla en la actividad, tanto si es hombre como si es mujer. En cambio, mientras los varones inactivos de 20 años de edad o menos esperan pasar poco más de 60% del resto de sus vidas en la actividad, las inactivas de 12 años esperan pasar sólo un poco más de la sexta parte, las quinceañeras casi un octavo y las de 20 años, alrededor de la veinticincoava parte. El peculiar patrón del porcentaje de su vida restante que un activo espera pasar en la actividad (el ascenso a partir de los 50 años en mujeres y de los 65 en hombres) es sólo resultado del patrón unimodal de participación por edad en México en 1990.<sup>9</sup>

---

<sup>8</sup>Debido a la gran similitud en los valores de los cuadros 2.10 y 2.11, sólo se ilustran gráficamente las esperanzas de vida activa por el método de las tasas.

<sup>9</sup>Como se muestra en la subsección 2.4.1, a partir de la edad modal  $\eta$ , la esperanza de vida activa para un activo es simplemente

CUADRO 2.10

México: esperanzas de vida activa, 1990 (método de los eventos)

| Edad<br><i>x</i> | Para un activo de edad <i>x</i> en: |                                  |   | Para un inactivo de edad <i>x</i> en: |                                  |   | Total<br><i>e<sub>x</sub></i> |
|------------------|-------------------------------------|----------------------------------|---|---------------------------------------|----------------------------------|---|-------------------------------|
|                  | actividad<br>$e_x^{aa}$<br>(1)      | inactividad<br>$e_x^{ai}$<br>(2) | % actividad<br>$100 \times e_x^{aa}/e_x$<br>(3) | actividad<br>$e_x^{ia}$<br>(4)        | inactividad<br>$e_x^{ii}$<br>(5) | % actividad<br>$100 \times e_x^{ia}/e_x$<br>(6) |                               |
| <i>Hombres</i>   |                                     |                                  |   |                                       |                                  |   |                               |
| 12               | 50.86                               | 6.35                             | 88.9  | 41.63                                 | 15.58                            | 72.8  | 57.21                         |
| 15               | 47.98                               | 6.37                             | 88.3  | 39.10                                 | 15.24                            | 72.0  | 54.35                         |
| 20               | 43.26                               | 6.41                             | 87.1  | 32.23                                 | 17.44                            | 64.9  | 49.67                         |
| 25               | 38.66                               | 6.47                             | 85.7  | 19.97                                 | 25.17                            | 44.2  | 45.13                         |
| 30               | 34.14                               | 6.56                             | 83.9  | 5.24                                  | 35.46                            | 12.9  | 40.70                         |
| 35               | 29.69                               | 6.67                             | 81.7  | 0.00                                  | 36.36                            | 0.0   | 36.36                         |
| 40               | 25.42                               | 6.67                             | 79.2  | 0.00                                  | 32.09                            | 0.0   | 32.09                         |
| 45               | 21.44                               | 6.46                             | 76.8  | 0.00                                  | 27.90                            | 0.0   | 27.90                         |
| 50               | 17.79                               | 6.00                             | 74.8  | 0.00                                  | 23.79                            | 0.0   | 23.79                         |
| 55               | 14.50                               | 5.33                             | 73.1  | 0.00                                  | 19.83                            | 0.0   | 19.83                         |
| 60               | 11.76                               | 4.42                             | 72.7  | 0.00                                  | 16.18                            | 0.0   | 16.18                         |
| 65               | 9.57                                | 3.32                             | 74.2  | 0.00                                  | 12.89                            | 0.0   | 12.89                         |
| 70               | 7.56                                | 2.47                             | 75.4  | 0.00                                  | 10.03                            | 0.0   | 10.03                         |
| 75               | 5.76                                | 1.86                             | 75.5  | 0.00                                  | 7.62                             | 0.0   | 7.62                          |
| 80               | 4.29                                | 1.37                             | 75.8  | 0.00                                  | 5.66                             | 0.0   | 5.66                          |

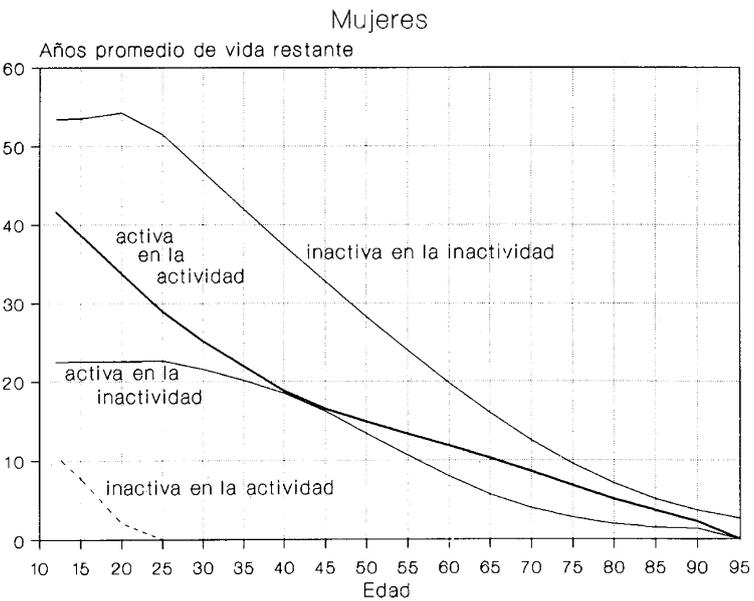
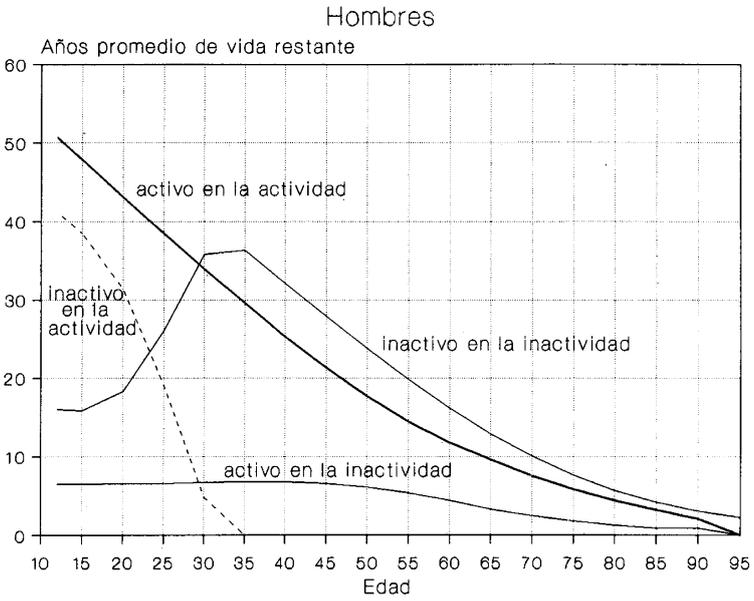
|                |       |       |      |       |       |      |       |
|----------------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|
| 85             | 3.20  | 0.95  | 77.2 | 0.00  | 4.15  | 0.0  | 4.15  |
| 90             | 2.09  | 0.94  | 68.9 | 0.00  | 3.03  | 0.0  | 3.03  |
| 95             | 0.00  | 0.00  |      | 0.00  | 2.24  | 0.0  | 2.24  |
| <i>Mujeres</i> |       |       |      |       |       |      |       |
| 12             | 41.73 | 22.39 | 65.1 | 10.88 | 53.24 | 17.0 | 64.12 |
| 15             | 38.79 | 22.42 | 63.4 | 7.96  | 53.25 | 13.0 | 61.20 |
| 20             | 33.88 | 22.48 | 60.1 | 2.32  | 54.04 | 4.1  | 56.36 |
| 25             | 28.99 | 22.55 | 56.2 | 0.00  | 51.55 | 0.0  | 51.55 |
| 30             | 25.23 | 21.54 | 53.9 | 0.00  | 46.77 | 0.0  | 46.77 |
| 35             | 21.95 | 20.09 | 52.2 | 0.00  | 42.03 | 0.0  | 42.03 |
| 40             | 18.88 | 18.47 | 50.5 | 0.00  | 37.36 | 0.0  | 37.36 |
| 45             | 16.44 | 16.32 | 50.2 | 0.00  | 32.76 | 0.0  | 32.76 |
| 50             | 14.77 | 13.50 | 52.2 | 0.00  | 28.27 | 0.0  | 28.27 |
| 55             | 13.20 | 10.73 | 55.2 | 0.00  | 23.93 | 0.0  | 23.93 |
| 60             | 11.74 | 8.05  | 59.3 | 0.00  | 19.79 | 0.0  | 19.79 |
| 65             | 10.22 | 5.75  | 64.0 | 0.00  | 15.96 | 0.0  | 15.96 |
| 70             | 8.50  | 4.03  | 67.8 | 0.00  | 12.53 | 0.0  | 12.53 |
| 75             | 6.73  | 2.82  | 70.5 | 0.00  | 9.54  | 0.0  | 9.54  |
| 80             | 5.06  | 2.00  | 71.6 | 0.00  | 7.06  | 0.0  | 7.06  |
| 85             | 3.62  | 1.48  | 70.9 | 0.00  | 5.10  | 0.0  | 5.10  |
| 90             | 2.24  | 1.40  | 61.6 | 0.00  | 3.64  | 0.0  | 3.64  |
| 95             | 0.00  | 0.00  |      | 0.00  | 2.59  | 0.0  | 2.59  |

CUADRO 2.11  
**México: esperanzas de vida activa, 1990 (método de las tasas)**

| Edad<br>$x$    | Para un activo de edad $x$ en: |                                  |   | Para un inactivo de edad $x$ en: |                                  |   | Total<br>$e_x$ |
|----------------|--------------------------------|----------------------------------|---|----------------------------------|----------------------------------|---|----------------|
|                | actividad<br>$e_x^{aa}$<br>(1) | inactividad<br>$e_x^{ai}$<br>(2) | % actividad<br>$100 \times e_x^{aa}/e_x$<br>(3) | actividad<br>$e_x^{ia}$<br>(4)   | inactividad<br>$e_x^{ii}$<br>(5) | % actividad<br>$100 \times e_x^{ia}/e_x$<br>(6) |                |
| <i>Hombres</i> |                                |                                  |   |                                  |                                  |   |                |
| 12             | 50.73                          | 6.48                             | 88.7  | 41.19                            | 16.02                            | 72.0  | 57.21          |
| 15             | 47.86                          | 6.49                             | 88.1  | 38.50                            | 15.85                            | 70.8  | 54.35          |
| 20             | 43.14                          | 6.53                             | 86.8  | 31.38                            | 18.30                            | 63.2  | 49.67          |
| 25             | 38.54                          | 6.60                             | 85.4  | 19.10                            | 26.03                            | 42.3  | 45.13          |
| 30             | 34.02                          | 6.68                             | 83.6  | 4.86                             | 35.84                            | 11.9  | 40.70          |
| 35             | 29.56                          | 6.80                             | 81.3  | 0.00                             | 36.36                            | 0.0   | 36.36          |
| 40             | 25.29                          | 6.80                             | 78.8  | 0.00                             | 32.09                            | 0.0   | 32.09          |
| 45             | 21.32                          | 6.58                             | 76.4  | 0.00                             | 27.90                            | 0.0   | 27.90          |
| 50             | 17.70                          | 6.09                             | 74.4  | 0.00                             | 23.79                            | 0.0   | 23.79          |
| 55             | 14.43                          | 5.40                             | 72.8  | 0.00                             | 19.83                            | 0.0   | 19.83          |
| 60             | 11.75                          | 4.42                             | 72.7  | 0.00                             | 16.18                            | 0.0   | 16.18          |
| 65             | 9.57                           | 3.32                             | 74.2  | 0.00                             | 12.89                            | 0.0   | 12.89          |
| 70             | 7.56                           | 2.47                             | 75.4  | 0.00                             | 10.03                            | 0.0   | 10.03          |
| 75             | 5.78                           | 1.84                             | 75.9  | 0.00                             | 7.62                             | 0.0   | 7.62           |
| 80             | 4.39                           | 1.27                             | 77.5  | 0.00                             | 5.66                             | 0.0   | 5.66           |

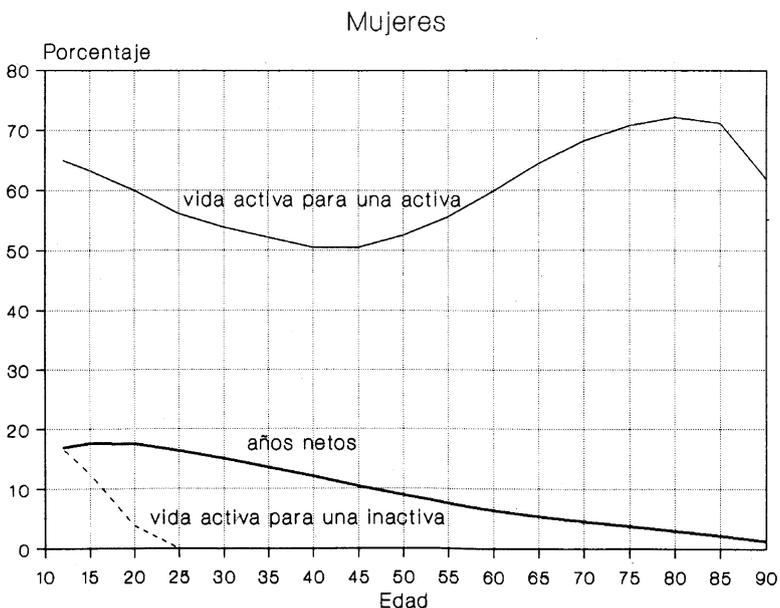
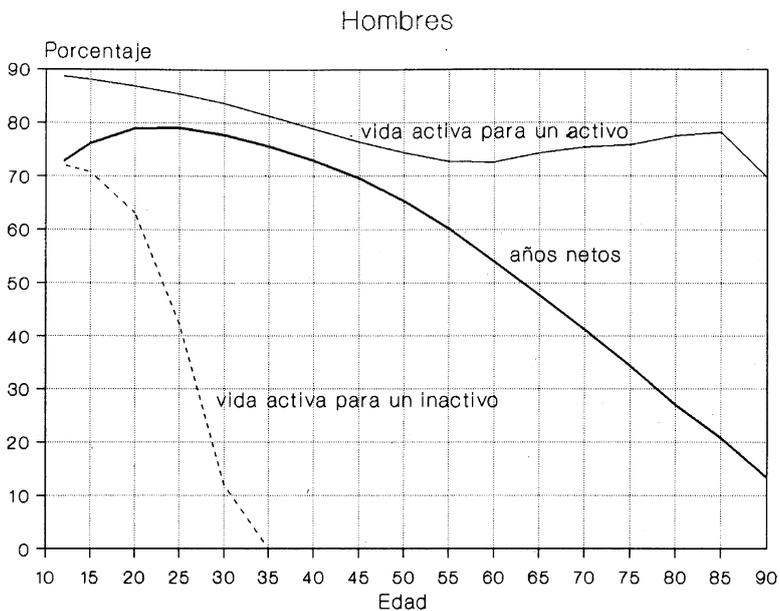
|                |       |       |      |       |       |      |       |
|----------------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|
| 85             | 3.24  | 0.91  | 78.2 | 0.00  | 4.15  | 0.0  | 4.15  |
| 90             | 2.12  | 0.92  | 69.7 | 0.00  | 3.03  | 0.0  | 3.03  |
| 95             | 0.00  | 0.00  |      | 0.00  | 2.24  | 0.0  | 2.24  |
| <i>Mujeres</i> |       |       |      |       |       |      |       |
| 12             | 41.64 | 22.48 | 64.9 | 10.66 | 53.46 | 16.6 | 64.12 |
| 15             | 38.70 | 22.51 | 63.2 | 7.68  | 53.52 | 12.6 | 61.20 |
| 20             | 33.79 | 22.57 | 60.0 | 2.12  | 54.24 | 3.8  | 56.36 |
| 25             | 28.90 | 22.65 | 56.1 | 0.00  | 51.55 | 0.0  | 51.55 |
| 30             | 25.17 | 21.60 | 53.8 | 0.00  | 46.77 | 0.0  | 46.77 |
| 35             | 21.91 | 20.13 | 52.1 | 0.00  | 42.03 | 0.0  | 42.03 |
| 40             | 18.86 | 18.50 | 50.5 | 0.00  | 37.36 | 0.0  | 37.36 |
| 45             | 16.52 | 16.25 | 50.4 | 0.00  | 32.76 | 0.0  | 32.76 |
| 50             | 14.85 | 13.42 | 52.5 | 0.00  | 28.27 | 0.0  | 28.27 |
| 55             | 13.31 | 10.62 | 55.6 | 0.00  | 23.93 | 0.0  | 23.93 |
| 60             | 11.85 | 7.94  | 59.9 | 0.00  | 19.79 | 0.0  | 19.79 |
| 65             | 10.29 | 5.67  | 64.5 | 0.00  | 15.96 | 0.0  | 15.96 |
| 70             | 8.54  | 3.98  | 68.2 | 0.00  | 12.53 | 0.0  | 12.53 |
| 75             | 6.75  | 2.79  | 70.8 | 0.00  | 9.54  | 0.0  | 9.54  |
| 80             | 5.10  | 1.96  | 72.2 | 0.00  | 7.06  | 0.0  | 7.06  |
| 85             | 3.63  | 1.47  | 71.2 | 0.00  | 5.10  | 0.0  | 5.10  |
| 90             | 2.25  | 1.39  | 61.9 | 0.00  | 3.64  | 0.0  | 3.64  |
| 95             | 0.00  | 0.00  |      | 0.00  | 2.59  | 0.0  | 2.59  |

GRÁFICA 2.8  
 México: esperanzas de vida activa, 1990



Fuente: cuadro 2.11

**GRÁFICA 2.9**  
**México: porcentaje de la vida restante**  
**que una persona espera pasar en la actividad, 1990**



Fuentes : columna (7) del cuadro 1.4 y columnas (3) y (6) del cuadro 2.11.

Es claro el efecto de la mayor participación masculina, pues al estar cercanas a uno las  $\alpha_x$ , en tanto ponderadores, propician que la media (años netos) esté muy próxima a la función que multiplican en (2.46) (vida activa para un activo  $e_x^{aa}$ ) hasta los 45 años, cuando los niveles de participación comienzan a disminuir aceleradamente (gráfica 1.1) y los años netos a alejarse de la esperanza de vida activa para un activo. Nótese que el alejamiento es sólo resultado del decrecimiento de las  $\alpha_x$ , pues a partir de los 35 años la esperanza de vida activa para un inactivo es nula porque ya no hay ingresos a la actividad (el supuesto fundamental del enfoque tradicional); y para las mujeres se extrae la misma conclusión de los 25 años en adelante. En el caso de un patrón unimodal de participación —como los de ambos sexos en México en 1990— podemos concluir, al despejar en (2.46) y dado que el segundo sumando para los años netos de vida activa es cero, que el exceso proporcional de la esperanza de vida activa respecto a los años netos a partir de la edad modal (el tramo monótono decreciente) es igual —bajo el enfoque de los eventos— al inverso de la proporción instantánea de participación ( $1/\alpha_x$ ).

En el cuadro 2.12 se presentan los años netos de vida activa e inactiva obtenidos por el método directo (cuadro 1.4) y por el enfoque tradicional para construir una tabla de vida activa, y en la gráfica 2.10 la proporción que los obtenidos por el método de las tasas representa de los

---

$T_x^a/\ell_x^a$ , de donde, la fracción que representan de la esperanza de vida total es el simple cociente de la proporción de participación de tabla de  $x$  años o más ( $a_{x+} = T_x^a/T_x$ ), entre la proporción instantánea ( $a_{x+}/\alpha_x$ ).

calculados por el método directo, error realmente despreciable, pues en ningún caso excede 3%, que se debe a la diferencia entre las proporciones observadas ( ${}_nA_x$ ) y las proporciones de tabla ( ${}_na_x$ ) (gráfica 2.6). En cambio, en el método de los eventos, al haber asumido que las proporciones de tabla son iguales a las observadas, tenemos la coincidencia estricta en mujeres, sobre todo el rango de edades; y la pequeña subestimación en hombres, antes de los 40 años, se debe al leve cambio que introdujimos en la proporción del grupo 35-39 (tomamos la media aritmética de las proporciones instantáneas de participación en lugar de la observada).

¿Cuál es el efecto que la selección de  $h$  en (2.7) tiene en la esperanza de vida activa para un inactivo de 12 años? Realmente despreciable, pues mientras bajo el enfoque de los eventos apenas disminuye de 41.63 ( $h = 0$ ) a 41.54 ( $h = 1$ ) en hombres, y de 10.88 a 10.85 en mujeres; bajo el procedimiento de las tasas el descenso es aún menor: de 41.19 a 41.16 y de 10.66 a 10.64 respectivamente.

#### 2.4.1. El caso especial de un patrón unimodal

Veremos a continuación una sencilla manera de determinar las esperanzas de vida activa cuando se tiene un patrón unimodal de participación por edad. Denotemos por  $\eta$  la edad en la que se alcanza la moda (máximo absoluto) y dividamos el rango de edades en dos intervalos: antes y después de la moda.

i)  $x \geq \eta$

Analicemos primero el tramo descendente de la curva,

**CUADRO 2.12**  
**México: años netos de vida activa e inactiva**  
**por el método directo y por el método tradicional, 1990**

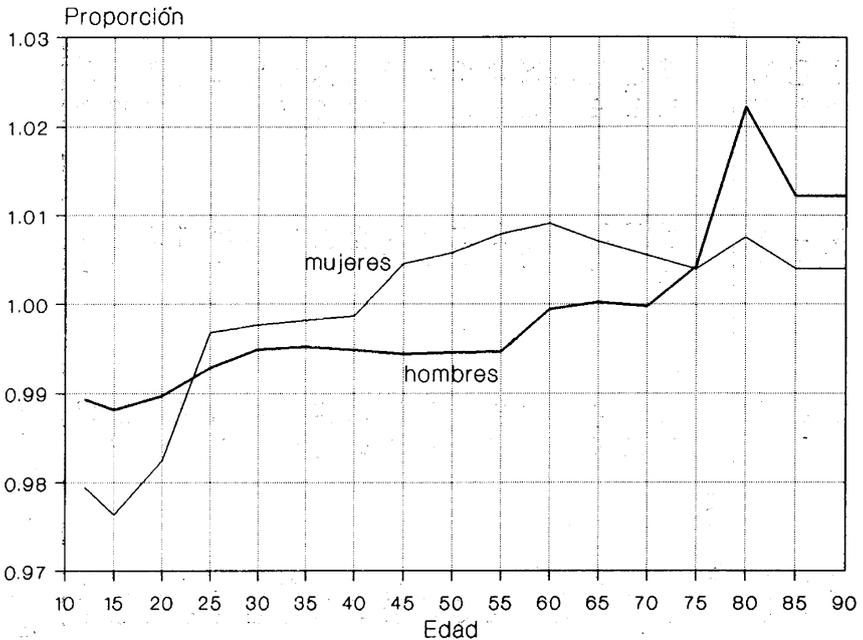
| Edad<br>$x$    | <u>Método directo:</u>   |                            | <u>Método de los eventos:</u> |                            | <u>Método de las tasas:</u> |                            |
|----------------|--------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
|                | activa<br>$e_x^a$<br>(1) | inactiva<br>$e_x^i$<br>(2) | activa<br>$e_x^a$<br>(3)      | inactiva<br>$e_x^i$<br>(4) | activa<br>$e_x^a$<br>(5)    | inactiva<br>$e_x^i$<br>(6) |
| <i>Hombres</i> |                          |                            |                               |                            |                             |                            |
| 12             | 41.64                    | 15.57                      | 41.63                         | 15.58                      | 41.19                       | 16.02                      |
| 15             | 41.38                    | 12.96                      | 41.37                         | 12.98                      | 40.89                       | 13.45                      |
| 20             | 39.22                    | 10.46                      | 39.21                         | 10.47                      | 38.81                       | 10.86                      |
| 25             | 35.68                    | 9.45                       | 35.67                         | 9.47                       | 35.42                       | 9.71                       |
| 30             | 31.63                    | 9.07                       | 31.62                         | 9.09                       | 31.47                       | 9.23                       |
| 35             | 27.50                    | 8.86                       | 27.49                         | 8.87                       | 27.37                       | 8.99                       |
| 40             | 23.42                    | 8.67                       | 23.42                         | 8.67                       | 23.30                       | 8.80                       |
| 45             | 19.41                    | 8.49                       | 19.41                         | 8.49                       | 19.30                       | 8.60                       |
| 50             | 15.54                    | 8.25                       | 15.54                         | 8.25                       | 15.46                       | 8.33                       |
| 55             | 11.93                    | 7.90                       | 11.93                         | 7.90                       | 11.87                       | 7.96                       |
| 60             | 8.74                     | 7.44                       | 8.74                          | 7.44                       | 8.73                        | 7.45                       |
| 65             | 6.15                     | 6.74                       | 6.15                          | 6.74                       | 6.15                        | 6.74                       |
| 70             | 4.14                     | 5.89                       | 4.14                          | 5.89                       | 4.14                        | 5.89                       |
| 75             | 2.62                     | 5.00                       | 2.62                          | 5.00                       | 2.63                        | 4.99                       |
| 80             | 1.53                     | 4.13                       | 1.53                          | 4.13                       | 1.57                        | 4.10                       |

|                |       |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 85             | 0.86  | 3.29  | 0.86  | 3.29  | 0.87  | 3.28  |
| 90             | 0.40  | 2.63  | 0.40  | 2.63  | 0.41  | 2.62  |
| 95             | 0.00  | 2.24  | 0.00  | 2.24  | 0.00  | 2.24  |
| <i>Mujeres</i> |       |       |       |       |       |       |
| 12             | 10.88 | 53.24 | 10.88 | 53.24 | 10.66 | 53.46 |
| 15             | 10.79 | 50.42 | 10.79 | 50.42 | 10.53 | 50.67 |
| 20             | 9.89  | 46.47 | 9.89  | 46.47 | 9.72  | 46.64 |
| 25             | 8.45  | 43.10 | 8.45  | 43.10 | 8.42  | 43.13 |
| 30             | 7.04  | 39.72 | 7.04  | 39.72 | 7.03  | 39.74 |
| 35             | 5.73  | 36.31 | 5.73  | 36.31 | 5.72  | 36.32 |
| 40             | 4.52  | 32.84 | 4.52  | 32.84 | 4.51  | 32.85 |
| 45             | 3.42  | 29.34 | 3.42  | 29.34 | 3.44  | 29.32 |
| 50             | 2.53  | 25.74 | 2.53  | 25.74 | 2.54  | 25.73 |
| 55             | 1.81  | 22.12 | 1.81  | 22.12 | 1.83  | 22.10 |
| 60             | 1.27  | 18.52 | 1.27  | 18.52 | 1.28  | 18.51 |
| 65             | 0.86  | 15.10 | 0.86  | 15.10 | 0.87  | 15.09 |
| 70             | 0.57  | 11.96 | 0.57  | 11.96 | 0.57  | 11.95 |
| 75             | 0.36  | 9.19  | 0.36  | 9.19  | 0.36  | 9.18  |
| 80             | 0.21  | 6.85  | 0.21  | 6.85  | 0.21  | 6.85  |
| 85             | 0.11  | 4.99  | 0.11  | 4.99  | 0.11  | 4.99  |
| 90             | 0.05  | 3.59  | 0.05  | 3.59  | 0.05  | 3.59  |
| 95             | 0.00  | 2.59  | 0.00  | 2.59  | 0.00  | 2.59  |

*Fuente:* columnas 5 y 6 del cuadro 1.4 para (1) y (2).

GRÁFICA 2.10

**México: proporción que representan los años netos de vida activa estimados por el método tradicional de las tasas, de los deducidos por el método directo, 1990**



Fuente: cuadro 2.12.

es decir, después de  $\eta$ . Aceptando el supuesto tradicional y haciendo  $n = \omega - x$ , por (2.30) o (2.38):

$$T_x^{ia} = 0 \quad \text{y} \quad T_x^{aa} = T_x^a$$

de donde, por (2.42) y aceptando la continuidad de la mortalidad en (2.45):

$$\begin{aligned} e_x^{aa} &= \frac{T_x^a}{l_x^a} & e_x^{ai} &= e_x - e_x^{aa} \\ e_x^{ia} &= 0 & e_x^{ii} &= e_x \end{aligned} \tag{2.50}$$

La utilidad de este resultado es clara: por (2.41) basta con acumular los años-persona vividos en la actividad ( ${}_n L_x^a$ ), para deducir las cuatro esperanzas de vida activa para todas las edades a partir de  $\eta$ , ya que seguramente se dispone de la esperanza de vida total ( $e_x$ ) en la tabla de vida de donde se extrae la ley de mortalidad. Conviene destacar que sólo bajo el supuesto tradicional y en un intervalo en que las proporciones de participación son monótonas decrecientes —se supone que no hay ingresos a la actividad—, la esperanza de vida activa para un activo es el simple cociente del tiempo vivido en la actividad dividido entre los activos.

ii)  $x < \eta$

Haciendo ahora  $n = \eta - x$ , por (2.27) o (2.36), (2.16) y (2.10):

$${}_{\eta-x} L_x^{ai} = 0 \quad {}_{\eta-x} p_x^{aa} = {}_{\eta-x} p_x = \frac{\ell_\eta}{\ell_x} \quad \text{y} \quad {}_{\eta-x} p_x^{ai} = 0$$

entonces, aplicando (2.44):

$$\begin{aligned} e_x^{ai} &= {}_{\eta-x} e_x^{ai} + {}_{\eta-x} p_x^{aa} e_\eta^{ai} + {}_{\eta-x} p_x^{ai} e_\eta^{ii} \\ &= 0 + \frac{\ell_\eta}{\ell_x} \left( e_\eta - \frac{T_\eta^a}{\ell_\eta^a} \right) + 0 = \frac{T_\eta}{\ell_x} - \frac{\ell_\eta T_\eta^a}{\ell_x \ell_\eta \alpha_\eta} \\ &= \frac{T}{\ell_x} \quad \text{con} \quad T = T_\eta - \frac{T_\eta^a}{\alpha_\eta} \end{aligned}$$

despejando en (2.40) y sustituyendo el último resultado:

$$T_x^{ii} = T_x^i - T_x^{ai} = T_x^i - \ell_x^a e_x^{ai} = T_x^i - T \alpha_x$$

y finalmente:

$$\begin{aligned} e_x^{ai} &= \frac{T}{\ell_x} & e_x^{aa} &= e_x - e_x^{ai} \\ e_x^{ii} &= \frac{T_x^i - T \alpha_x}{\ell_x^i} & e_x^{ia} &= e_x - e_x^{ii} \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\text{con } \mathcal{T} = T_{\eta} - \frac{T_{\eta}^a}{\alpha_{\eta}}$$

Habiendo obtenido el tiempo vivido acumulado en la actividad y en la inactividad ( $T_x^a$  y  $T_x^i$ ), basta ahora con determinar  $\mathcal{T}$  para obtener rápidamente las esperanzas de vida.

En el cuadro 2.13 se presenta el tiempo vivido acumulado para la tabla de vida activa de México en 1990. Para nuestros datos, tenemos que  $\eta$  es 35 años para hombres y 25 para mujeres. Aplicando (2.50) para los hombres de 65 años bajo el método de los eventos:

$$\begin{aligned} e_{65}^{aa} &= \frac{T_{65}^a}{l_{65}^a} = \frac{4,002,295}{418,174} = 9.57 \\ e_{65}^{ai} &= e_{65} - e_{65}^{aa} = 12.89 - 9.57 = 3.32 \\ e_{65}^{ia} &= 0 \\ e_{65}^{ii} &= e_{65} = 12.89 \end{aligned}$$

Y por (2.51):

$$\mathcal{T} = T_{35} - \frac{T_{35}^a}{\alpha_{35}} = 32,772,969 - \frac{24,779,358}{0.925998} = 6,013,345$$

de donde, a los 20 años de edad:

$$\begin{aligned} e_{20}^{ai} &= \frac{\mathcal{T}}{l_{20}} = \frac{6,013,345}{938,249} = 6.41 \\ e_{20}^{aa} &= e_{20} - e_{20}^{ai} = 49.67 - 6.41 = 43.26 \\ e_{20}^{ii} &= \frac{T_{20}^i - \mathcal{T}\alpha_{20}}{l_{20}^i} = \frac{9,821,683 - 6,013,345 \times 0.632139}{345,145} = 17.44 \\ e_{20}^{ia} &= e_{20} - e_{20}^{ii} = 49.67 - 17.44 = 32.23 \end{aligned}$$

Estos resultados coinciden con los valores del cuadro 2.10.

## 2.5. MORTALIDAD DIFERENCIAL

El supuesto de continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad económica nos ha permitido establecer las diferentes relaciones de la tabla de vida activa. En esta sección vamos a generalizar los dos enfoques —de eventos y de tasas— cuando se acepta que la mortalidad es diferente entre activos e inactivos. Asumiremos que se han construido tablas de mortalidad por condición de participación, de las cuales extraeremos las probabilidades de fallecer para los activos  ${}_nq_x^a$  y los inactivos  ${}_nq_x^i$ , las de supervivencia  ${}_np_x^{a\delta}$  y  ${}_np_x^{i\delta}$ , y las tasas de mortalidad  ${}_nm_x^{a\delta}$  y  ${}_nm_x^{i\delta}$ , donde el sobreíndice  $\delta$  indica que se refiere exclusivamente a la mortalidad, es decir, sin transiciones entre la actividad y la inactividad.

En lugar de la continuidad de la mortalidad, supondremos que una persona mantiene, a lo largo del intervalo genérico de  $n$  años, el riesgo de fallecer correspondiente al estado de presencia al inicio del periodo, supuesto que llamaremos de la permanencia de la mortalidad; así, los activos (inactivos) al inicio de un intervalo de edad mantendrán la mortalidad de los activos (inactivos) al cabo de todo el intervalo de edades, aunque pasen a ser inactivos (activos) durante los  $n$  años.<sup>10</sup> Habiendo aceptado este supuesto, es claro que la suma de los activos y los inactivos que sobrevivan al final del intervalo será igual al total de sobrevivientes:

---

<sup>10</sup>En la sección 3.3 se presenta el modelo donde se asume que la ley de mortalidad de activos en ningún momento actúa sobre los inactivos, ni la de los inactivos sobre los activos.

CUADRO 2.13

México: tiempo vivido acumulado en la tabla de vida activa, 1990

| Edad<br><i>x</i> | Método de los eventos:                                |   | Método de las tasas:                                  |   | Total<br><i>T<sub>x</sub></i> |
|------------------|---|---|---|---|-------------------------------|
|                  | actividad<br><i>T<sub>x</sub><sup>aa</sup></i><br>(1) | inactividad<br><i>T<sub>x</sub><sup>ai</sup></i><br>(2) | actividad<br><i>T<sub>x</sub><sup>ia</sup></i><br>(3) | inactividad<br><i>T<sub>x</sub><sup>ii</sup></i><br>(4) |                               |
| <i>Hombres</i>   |   |   |   |   |                               |
| 12               | 39,399,114  | 14,751,070  | 38,990,358  | 15,159,826  | 54,150,184                    |
| 15               | 39,062,940  | 12,251,005  | 38,610,161  | 12,703,784  | 51,313,945                    |
| 20               | 36,785,004  | 9,821,684   | 36,417,893  | 10,188,795  | 46,606,688                    |
| 25               | 33,140,764  | 8,795,966   | 32,914,948  | 9,021,782   | 41,936,730                    |
| 30               | 28,989,156  | 8,330,872   | 28,853,278  | 8,466,750   | 37,320,028                    |
| 35               | 24,779,358  | 7,993,613   | 24,672,430  | 8,100,541   | 32,772,971                    |
| 40               | 20,659,746  | 7,652,856   | 20,553,128  | 7,759,474   | 28,312,602                    |
| 45               | 16,670,085  | 7,288,177   | 16,576,715  | 7,381,547   | 23,958,262                    |
| 50               | 12,890,588  | 6,844,146   | 12,821,444  | 6,913,290   | 19,734,734                    |
| 55               | 9,434,866   | 6,243,535   | 9,384,701   | 6,293,700   | 15,678,401                    |
| 60               | 6,404,852   | 5,455,164   | 6,401,039   | 5,458,977   | 11,860,016                    |
| 65               | 4,002,295   | 4,387,091   | 4,003,083   | 4,386,303   | 8,389,386                     |
| 70               | 2,231,710   | 3,172,602   | 2,231,203   | 3,173,109   | 5,404,312                     |
| 75               | 1,048,552   | 2,000,555   | 1,052,932   | 1,996,175   | 3,049,107                     |
| 80               | 384,914   | 1,037,922   | 393,451   | 1,029,385   | 1,422,836                     |

|    |         |         |         |         |         |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 85 | 104,771 | 401,199 | 106,051 | 399,919 | 505,970 |
| 90 | 16,398  | 106,671 | 16,598  | 106,471 | 123,069 |
| 95 | 0       | 17,991  | 0       | 17,991  | 17,991  |

Mujeres

|    |            |            |            |            |            |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 12 | 10,387,910 | 50,827,751 | 10,174,826 | 51,040,835 | 61,215,661 |
| 15 | 10,284,466 | 48,068,985 | 10,041,340 | 48,312,111 | 58,353,451 |
| 20 | 9,405,628  | 44,186,787 | 9,241,012  | 44,351,403 | 53,592,415 |
| 25 | 8,003,670  | 40,842,134 | 7,978,459  | 40,867,345 | 48,845,804 |
| 30 | 6,645,396  | 37,472,564 | 6,629,960  | 37,488,000 | 44,117,960 |
| 35 | 5,369,830  | 34,044,917 | 5,360,253  | 34,054,494 | 39,414,747 |
| 40 | 4,199,144  | 30,545,315 | 4,193,493  | 30,550,966 | 34,744,459 |
| 45 | 3,146,806  | 26,972,625 | 3,160,977  | 26,958,454 | 30,119,431 |
| 50 | 2,285,562  | 23,273,051 | 2,298,782  | 23,259,831 | 25,558,613 |
| 55 | 1,599,664  | 19,491,852 | 1,612,310  | 19,479,206 | 21,091,516 |
| 60 | 1,074,256  | 15,690,035 | 1,084,043  | 15,680,248 | 16,764,291 |
| 65 | 685,647    | 11,969,565 | 690,508    | 11,964,704 | 12,655,212 |
| 70 | 404,042    | 8,482,423  | 406,260    | 8,480,205  | 8,886,465  |
| 75 | 210,499    | 5,413,608  | 211,324    | 5,412,783  | 5,624,107  |
| 80 | 90,179     | 2,966,768  | 90,859     | 2,966,088  | 3,056,947  |
| 85 | 28,795     | 1,298,053  | 28,909     | 1,297,939  | 1,326,848  |
| 90 | 5,326      | 409,157    | 5,347      | 409,136    | 414,483    |
| 95 | 0          | 80,921     | 0          | 80,921     | 80,921     |

Fuentes : cuadros 2.6 y 2.8.

$$\ell_x^a \cdot {}_n p_x^{a\delta} + \ell_x^i \cdot {}_n p_x^{i\delta} = \ell_{x+n} \quad (2.52)$$

de donde, dividiendo ambos lados entre  $\ell_x$ , por (2.2):

$$\alpha_x \cdot {}_n p_x^{a\delta} + {}_x \iota_x \cdot {}_n p_x^{i\delta} = {}_n p_x \quad (2.53)$$

esto es, que la probabilidad de sobrevivencia total es la media de las probabilidades de activos e inactivos, ponderadas por las proporciones instantáneas de participación al inicio del intervalo de edades.

La ecuación (2.53) parece una buena posibilidad para determinar las proporciones instantáneas; inspeccionemos si esto es cierto. Despejando  $\alpha_x$  tenemos:

$$\alpha_x = \frac{{}_n p_x - {}_n p_x^{i\delta}}{{}_n p_x^{a\delta} - {}_n p_x^{i\delta}} = \frac{{}_n q_x^i - {}_n q_x}{{}_n q_x^i - {}_n q_x^a} \quad (2.54)$$

Nuestro propósito es identificar la asociación que existe entre el cociente de las diferencias de probabilidades de fallecer, en el lado derecho de la ecuación anterior, y las proporciones de participación para los grupos de edad ( ${}_n A_{x-n}$  y  ${}_n A_x$ ) que bordean a  $\alpha_x$ .

Las tasas observadas de mortalidad total  ${}_n M_x$ , de activos  ${}_n M_x^{a\delta}$  y de inactivos  ${}_n M_x^{i\delta}$  deben guardar necesariamente la siguiente relación (análoga a 2.53):

$${}_n M_x = {}_n A_x \cdot {}_n M_x^{a\delta} + {}_n I_x \cdot {}_n M_x^{i\delta} \quad (2.55)$$

Asumamos que la tasa de mortalidad de inactivos es  $1+k$  veces la de activos, con  $k$  positiva (sobremortalidad de inactivos) o negativa (sobremortalidad de activos):

$${}_n M_x^{i\delta} = (1+k) \cdot {}_n M_x^{a\delta}$$

Despejando en (2.55) y por (1.3):

$$\begin{aligned}
 {}_nM_x^{a\delta} &= \frac{{}_nM_x}{{}_nA_x + (1+k) {}_nI_x} = \frac{{}_nM_x}{1+k {}_nI_x} \\
 {}_nM_x^{i\delta} &= \frac{{}_nM_x(1+k)}{1+k {}_nI_x}
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

Utilicemos la fórmula de Chiang (Keyfitz, 1977: 431) que permite convertir tasas de mortalidad en probabilidades:

$${}_nq_x = \frac{{}_n{}_nM_x}{1 + {}_ng_x {}_nM_x}$$

donde  ${}_ng_x = n - {}_nf_x$  y  ${}_nf_x$  son los años vividos a partir de la edad  $x$ , en promedio, por cada una de las defunciones ocurridas entre las edades  $x$  y  $x + n$ . El valor de  ${}_nf_x$  varía de cero a  $n$ ; es igual a cero si todas las defunciones  ${}_nd_x$  ocurren exactamente al inicio del intervalo (a la edad exacta  $x$ ), de tal manera que ninguna de ellas vive tiempo alguno a partir de ese momento; y es igual a  $n$  si todos y cada uno de los decesos acontecen al final del periodo (a la edad exacta  $x + n$ ). Al cociente  ${}_nf_x/n$  se le conoce como factor de separación, ya que con él se desagregan los decesos —en las generaciones más recientes y más antiguas—, cuando en las muertes de las estadísticas vitales no se distingue el año de nacimiento.

Si suponemos que el factor  ${}_ng_x$  es igual para activos e inactivos, por la fórmula de Chiang y (2.56) tenemos:

$$\begin{aligned}
 {}_nq_x^a &= \frac{{}_n{}_nM_x / (1+k {}_nI_x)}{1 + {}_ng_x {}_nM_x / (1+k {}_nI_x)} = \frac{{}_n{}_nM_x}{1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x} \\
 {}_nq_x^i &= \frac{{}_n{}_nM_x(1+k) / (1+k {}_nI_x)}{1 + {}_ng_x {}_nM_x(1+k) / (1+k {}_nI_x)} = \frac{{}_n{}_nM_x(1+k)}{1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x(1+k)}
 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} {}_nq_x^i - {}_nq_x &= {}_nM_x \left[ \frac{(1+k)}{1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x (1+k)} - \frac{1}{1+{}_ng_x {}_nM_x} \right] \\ &= {}_nM_x \left[ \frac{k {}_nA_x}{[1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x (1+k)] [1+{}_ng_x {}_nM_x]} \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} {}_nq_x^i - {}_nq_x^a &= {}_nM_x \left[ \frac{(1+k)}{1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x (1+k)} - \frac{1}{1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x} \right] \\ &= {}_nM_x \left[ \frac{k(1+k {}_nI_x)}{[1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x (1+k)] [1+k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x]} \right] \end{aligned}$$

de donde, el cociente del lado derecho en (2.54) es:

$$\frac{{}_nq_x^i - {}_nq_x}{{}_nq_x^i - {}_nq_x^a} = \frac{{}_nA_x (1 + k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x)}{(1 + k {}_nI_x)(1 + {}_ng_x {}_nM_x)}$$

y finalmente,

$$\alpha_x = \frac{{}_nA_x (1 + k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x)}{(1 + k {}_nI_x)(1 + {}_ng_x {}_nM_x)} \quad (2.57)$$

Analizamos primero el caso de un intervalo de edades donde las proporciones de participación son ascendentes ( $\alpha_x < {}_nA_x$ ); por (2.57):<sup>11</sup>

$$(1 + k {}_nI_x)(1 + {}_ng_x {}_nM_x) > 1 + k {}_nI_x + {}_ng_x {}_nM_x$$

---

<sup>11</sup>La desigualdad se mantiene porque tanto  $1 + k {}_nI_x$  como  $1 + {}_ng_x {}_nM_x$  son cantidades positivas, pues  $k > -1$ .

o bien,

$$k {}_nI_x {}_ng_x {}_nM_x > 0$$

y como  ${}_nI_x$ ,  ${}_ng_x$  y  ${}_nM_x$  son positivas,  $k$  debe ser positiva, con lo cual se concluye que (2.54) sólo se puede usar en un intervalo de proporciones de participación ascendentes cuando hay sobremortalidad de inactivos ( $k > 0$ ). De manera análoga se deduce que en un intervalo donde las proporciones descienden sólo se puede usar (2.54) cuando es mayor la mortalidad de los activos ( $-1 < k < 0$ ).

Las cifras del cuadro 2.1 muestran claramente que el riesgo de fallecer es indistintamente mayor en los activos o en los inactivos y que la sobremortalidad de cualquiera de ambos grupos de personas no se encuentra particularmente asociada a intervalos de participación ascendente o descente. Con base en esto, podemos concluir que (2.53) se puede usar para estimar la probabilidad de sobrevivencia (o de mortalidad) general a partir de las probabilidades específicas para activos e inactivos, pero que no es una buena opción para estimar las proporciones instantáneas de participación  $\alpha_x$ .

### 2.5.1 Probabilidades de transición y tiempo vivido

Suponiendo la permanencia de la mortalidad tenemos el equivalente a (2.11):

$${}_np_x^{aa} + {}_np_x^{ai} = {}_np_x^{a\delta} \quad \text{y} \quad {}_np_x^{ia} + {}_np_x^{ii} = {}_np_x^{i\delta} \quad (2.58)$$

y asumiendo la independencia estocástica entre los riesgos de fallecer y de moverse entre actividad e inactividad, la nueva versión para (2.10) es:

$$\begin{aligned}
 {}_n p_x^{aa} &= {}_n \hat{p}_x^{aa} {}_n p_x^{a\delta} & {}_n p_x^{ai} &= {}_n \hat{p}_x^{ai} {}_n p_x^{a\delta} \\
 {}_n p_x^{ia} &= {}_n \hat{p}_x^{ia} {}_n p_x^{i\delta} & {}_n p_x^{ii} &= {}_n \hat{p}_x^{ii} {}_n p_x^{i\delta}
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

Retomando las ecuaciones (2.12):

$$\begin{aligned}
 \ell_{x+n}^a &= \ell_x^a {}_n p_x^{aa} + \ell_x^i {}_n p_x^{ia} \\
 \ell_{x+n}^i &= \ell_x^a {}_n p_x^{ai} + \ell_x^i {}_n p_x^{ii}
 \end{aligned}$$

sustituyendo (2.59) y dividiendo ambos lados entre los sobrevivientes al inicio  $\ell_x$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_x {}_n \hat{p}_x^{aa} {}_n p_x^{a\delta} + \ell_x {}_n \hat{p}_x^{ia} {}_n p_x^{i\delta} &= \alpha_{x+n} {}_n p_x \\
 \alpha_x {}_n \hat{p}_x^{ai} {}_n p_x^{a\delta} + \ell_x {}_n \hat{p}_x^{ii} {}_n p_x^{i\delta} &= \ell_{x+n} {}_n p_x
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Suponiendo nuevamente que no hay retiros en los intervalos de edad donde las proporciones aumentan, ni ingresos en donde disminuyen:

i) Si  $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ :

$$\begin{aligned}
 {}_n \hat{p}_x^{aa} &= 1 & {}_n \hat{p}_x^{ai} &= 0 \\
 {}_n \hat{p}_x^{ia} &= \frac{\alpha_{x+n} {}_n p_x - \alpha_x {}_n p_x^{a\delta}}{\ell_x {}_n p_x^{i\delta}} & {}_n \hat{p}_x^{ii} &= \frac{\ell_{x+n} {}_n p_x}{\ell_x {}_n p_x^{i\delta}}
 \end{aligned}
 \tag{2.61}$$

ii) Si  $\alpha_{x+n} < \alpha_x$ :

$$\begin{aligned}
 {}_n \hat{p}_x^{aa} &= \frac{\alpha_{x+n} {}_n p_x}{\alpha_x {}_n p_x^{a\delta}} & {}_n \hat{p}_x^{ai} &= \frac{\ell_{x+n} {}_n p_x - \ell_x {}_n p_x^{i\delta}}{\alpha_x {}_n p_x^{a\delta}} \\
 {}_n \hat{p}_x^{ia} &= 0 & {}_n \hat{p}_x^{ii} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{2.62}$$

Bajo el mismo criterio con el que establecimos (2.52), dado que  ${}_nq_x^a/nm_x^{a\delta}$  y  ${}_nq_x^i/nm_x^{i\delta}$  son los años-persona vividos per cápita por cada activo o inactivo de edad  $x$  respectivamente, entonces:

$${}_nL_x = \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{nm_x^{a\delta}} + \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{nm_x^{i\delta}} \quad (2.63)$$

Mientras (2.19) prevalece, en lugar de (2.20), que requiere de la continuidad en la mortalidad, para la óptica prospectiva tenemos:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} + {}_nL_x^{ai} &= \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{nm_x^{a\delta}} \\ {}_nL_x^{ia} + {}_nL_x^{ii} &= \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{nm_x^{i\delta}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

### 2.5.2. Tiempo vivido, eventos y tasas: el enfoque de los eventos

Veamos por separado los intervalos ascendentes y descendentes.

i)  $\alpha_{x+n} > \alpha_x$

Dada la ausencia de retiros, los años-persona vividos entre  $x$  y  $x + n$  son:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{nm_x^{a\delta}} \\ {}_nL_x^{ai} &= 0 \\ {}_nL_x^{ia} &= {}_nL_x^a - {}_nL_x^{aa} = {}_nL_x n a_x - \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{nm_x^{a\delta}} \\ &= \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{nm_x^{i\delta}} n a_x - \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{nm_x^{a\delta}} n i_x \\ {}_nL_x^{ii} &= {}_nL_x^i = \left[ \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{nm_x^{a\delta}} + \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{nm_x^{i\delta}} \right] n i_x \end{aligned} \quad (2.65)$$

Las proporciones de tabla  ${}_n a_x$  pueden tomarse como iguales a las observadas  ${}_n A_x$ , y si los años-persona vividos

${}_nL_x^{ia}$  resultaran negativos, se podría tomar la media aritmética de las proporciones instantáneas  $(\alpha_x + \alpha_{x+n})/2$  para  ${}_na_x$  (véase 2.28). Es claro que la suma de los dos últimos renglones en (2.65) satisface la segunda igualdad en (2.64).

Por analogía con (2.53), las defunciones totales son:

$${}_nd_x = \ell_x^a {}_nq_x^a + \ell_x^i {}_nq_x^i \quad (2.66)$$

y las de los activos e inactivos:

$${}_nd_x^a = {}_nd_x {}_na_x \quad \text{y} \quad {}_nd_x^i = {}_nd_x {}_ni_x \quad (2.67)$$

Como las ecuaciones (2.26) no dependen de la continuidad de la mortalidad y no hay retiros, los ingresos son:

$${}_nH_x^{ia} = \ell_{x+n}^a - \ell_x^a + {}_nd_x {}_na_x \quad (2.68)$$

Las tasas de ingreso y de mortalidad se obtienen aplicando (2.23).

ii)  $\alpha_{x+n} < \alpha_x$

Ahora no hay ingresos y los años-persona vividos entre  $x$  y  $x + n$  son:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= {}_nL_x^a = \left[ \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{{}_nm_x^{a\delta}} + \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{{}_nm_x^{i\delta}} \right] {}_na_x \\ {}_nL_x^{ai} &= {}_nL_x^i - {}_nL_x^{ii} \\ &= \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{{}_nm_x^{a\delta}} {}_ni_x - \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{{}_nm_x^{i\delta}} {}_na_x \\ {}_nL_x^{ia} &= 0 \\ {}_nL_x^{ii} &= \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{{}_nm_x^{i\delta}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nuevamente, las proporciones de tabla  ${}_na_x$  se pueden hacer iguales a las observadas  ${}_nA_x$ , y si los años-persona

vivos  ${}_nL_x^{ai}$  resultaran negativos, se podría tomar la media aritmética de las proporciones instantáneas  $(\alpha_x + \alpha_{x+n})/2$  para  ${}_na_x$  (véase 2.31). Despejando ahora en la segunda ecuación en (2.26) tenemos los retiros:

$${}_nH_x^{ai} = \ell_{x+n}^i - \ell_x^i + {}_nd_x {}_ni_x \quad (2.70)$$

En ambos tipos de intervalos de edad, las esperanzas de vida se obtienen aplicando (2.44), pues no dependen de la continuidad de la mortalidad en la participación. Las esperanzas de vida parciales se determinan sustituyendo los resultados de (2.65) y (2.69) en las definiciones al final de (2.44).

### 2.5.3. Tiempo vivido, eventos y tasas: el enfoque de las tasas

i)  $\alpha_{x+n} > \alpha_x$

Retomemos la primera ecuación para intervalos ascendentes inmediata posterior a (2.34). Reemplazando la tasa instantánea de mortalidad total por la de los inactivos:

$${}_{y+\Delta y}p_x^{ii} = {}_yp_x^{ii} (1 - \mu_{x+y}^{ia} \Delta y - \mu_{x+y}^{i\delta} \Delta y)$$

siguiendo pasos análogos al caso de igual mortalidad llegamos a:

$${}_n\hat{p}_x^{ii} = \frac{{}_np_x^{ii}}{{}_np_x^{i\delta}} = e^{-\int_0^n \mu_{x+y}^{ia} dy}$$

suponiendo nuevamente que la tasa instantánea de ingreso permanece constante a lo largo del intervalo de  $n$  años:

$${}_n\hat{p}_x^{ii} = e^{-n {}_nm_x^{ia}}$$

y tomando logaritmo natural en ambos lados:

$${}_n m_x^{ia} = -\frac{\ln\{\hat{{}_n p_x^{ii}}\}}{n} \quad (2.71)$$

Por (2.61) podemos ver que es la tasa de ingreso bajo el criterio de continuidad de la mortalidad (2.35) más una corrección por la mortalidad diferencial:<sup>12</sup>

$${}_n m_x^{ia} = -\frac{\ln\left\{\frac{l_{x+n}}{l_x}\right\}}{n} - \frac{\ln\left\{\frac{{}_n p_x}{{}_n p_x^{i\delta}}\right\}}{n}$$

Calculemos los años-persona vividos en la inactividad entre  $x$  y  $x+n$  por los inactivos de edad  $x$ , de la definición matemática de tiempo vivido:

$${}_n L_x^{ia} = \int_0^n \ell_x^i y p_x^{ii} dy = \ell_x^i \int_0^n e^{-\int_0^y [\mu_{x+u}^{ia} + \mu_{x+u}^{i\delta}] du} dy$$

y suponiendo constancia en las tasas durante el intervalo de  $n$  años:

$$\begin{aligned} {}_n L_x^{ia} &= \ell_x^i \int_0^n e^{-y[{}_n m_x^{ia} + {}_n m_x^{i\delta}]} dy = \ell_x^i \frac{1 - e^{-n[{}_n m_x^{ia} + {}_n m_x^{i\delta}]}}{{}_n m_x^{ia} + {}_n m_x^{i\delta}} \\ &= \ell_x^i \frac{1 - e^{-n \hat{{}_n p_x^{ii}}}}{{}_n m_x^{ia} + {}_n m_x^{i\delta}} \end{aligned}$$

---

<sup>12</sup>Se puede ver que esta ecuación es una generalización de (2.35), pues si la mortalidad no es diferencial, como el logaritmo natural de uno es cero, tenemos la tasa de ingreso en (2.35).

el mismo resultado que en (2.36), reemplazando la tasa de mortalidad total por la de los inactivos. Como (2.64) no depende del enfoque de eventos o de tasas:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{{}_nm_x^{a\delta}} & {}_nL_x^{ai} &= 0 \\ {}_nL_x^{ii} &= \ell_x^i \frac{1-{}_np_x^{ii}}{{}_nm_x^{ia}+{}_nm_x^{i\delta}} & {}_nL_x^{ia} &= \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{{}_nm_x^{i\delta}} - {}_nL_x^{ii} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Como (2.19) y (2.23) no dependen del supuesto de continuidad de la mortalidad, a partir de ellas podemos obtener respectivamente el tiempo vivido en la inactividad y los ingresos, y las defunciones aplicando  ${}_nd_x^a = {}_nd_x {}_na_x$ , o bien despejado en (2.26).

ii)  $\alpha_x > \alpha_{x+n}$

Siguiendo pasos análogos al caso de intervalos ascendentes tenemos para las tasas de retiro de la actividad:

$${}_nm_x^{ai} = -\frac{\ell n\{n\hat{p}_x^{aa}\}}{n} \quad (2.73)$$

y para los años-persona vividos:

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= \ell_x^a \frac{1-{}_np_x^{aa}}{{}_nm_x^{ai}+{}_nm_x^{a\delta}} & {}_nL_x^{ai} &= \ell_x^a \frac{{}_nq_x^a}{{}_nm_x^{a\delta}} - {}_nL_x^{aa} \\ {}_nL_x^{ia} &= 0 & {}_nL_x^{ii} &= \ell_x^i \frac{{}_nq_x^i}{{}_nm_x^{i\delta}} \end{aligned} \quad (2.74)$$

En ambos tipos de intervalos de edad, las esperanzas de vida se obtienen aplicando (2.44), ya que esas ecuaciones no dependen del enfoque de eventos o de tasas. Las esperanzas de vida parciales se determinan sustituyendo los resultados de (2.72) y (2.74) en las definiciones al final de (2.44).



### 3. LA TABLA DE VIDA ACTIVA: EL ENFOQUE DE MOVIMIENTOS MÚLTIPLES

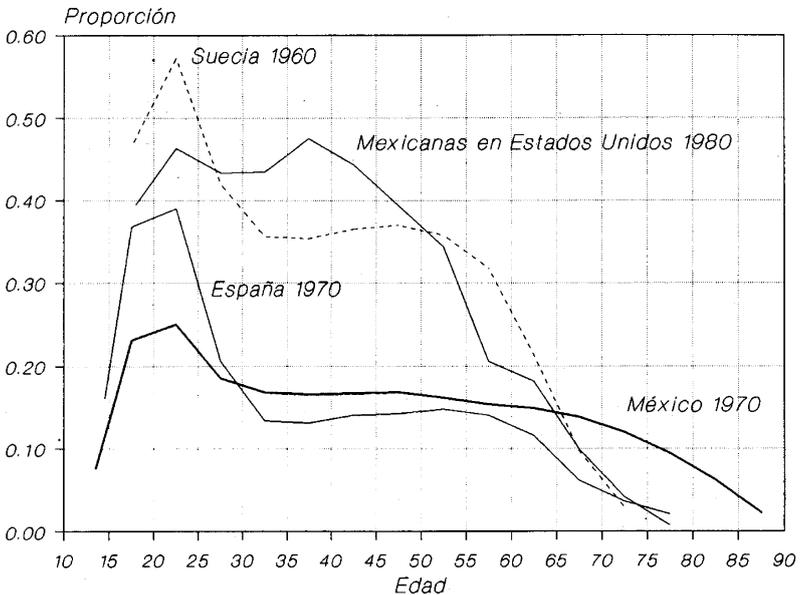
En los resultados obtenidos para México en el capítulo anterior, podemos ver que el supuesto fundamental del método tradicional para construir tablas de vida activa,<sup>1</sup> es aceptable casi exclusivamente en patrones unimodales masculinos, donde la ubicación del máximo en las edades centrales de participación (entre 30 y 40 años) hace que el supuesto tenga sentido: los ingresos sólo acontecen antes de la edad modal y los retiros únicamente después.

Al aplicar el enfoque tradicional a la pauta unimodal de la población femenina de México en 1990, debimos asumir que después de los 25 años de edad ninguna mujer ingresa a la actividad, supuesto que contradice la observación empírica, pues en las mujeres es más latente la ocurrencia simultánea de entradas y salidas de la actividad. Cabe preguntarse entonces por la verosimilitud del enfoque tradicional en patrones bimodales y hasta trimodales. Ejemplos de estas peculiares pautas de participación femenina se muestran en la gráfica 3.1,

---

<sup>1</sup>Los ingresos y los retiros de la actividad sólo ocurren en intervalos mutuamente excluyentes y exhaustivos del rango de edades de participación.

GRÁFICA 3.1  
Patrones bimodales de participación femenina



Fuentes : México 1970: IX Censo General de Población y Vivienda.

España 1970: Sáez (1975: 268).

Suecia 1960: Durand (1975: 192-193).

Mexicanas en Estados Unidos: U.S. Bureau of the Census, "Foreign born immigrants in U.S. 1980 Census of Housing and Population", tabulaciones inéditas 4 y 75.

donde consignamos sociedades que tienen diferentes patrones de inserción de la mujer en la actividad económica. En las cuatro pautas la primera moda se encuentra en el grupo 20-24 años; en cambio, mientras la segunda moda más joven (35-39 años) es para las mexicanas residentes en Estados Unidos en 1980, que emigraron entre 1975 y 1980, la más vieja (50-54 años) corresponde a la población femenina de España en 1970.

Si construyéramos las tablas de vida activa bajo el enfoque tradicional para esas cuatro pautas bimodales,

tendríamos patrones realmente inverosímiles donde se alternarían los ingresos y los retiros al menos dos veces. Por ejemplo, en el caso de las mexicanas en Estados Unidos habría sólo ingresos hasta los 25 años, únicamente retiros en el grupo 25–29, nuevamente sólo entradas entre 30 y 40 años, y exclusivamente salidas a partir del grupo 40–44.

Surge entonces la necesidad de contar con métodos que permitan incorporar la ocurrencia simultánea de ingresos y retiros a lo largo de todo el rango etario de participación, haciendo así más realista la tabla de vida activa para ambos sexos. Hacemos la exposición de ese enfoque en este capítulo: en la primera sección presentamos la relación general entre las tasas de ingreso y de retiro y las probabilidades de transición, así como las fórmulas para los años-persona vividos; en la segunda, dos alternativas para estimar las probabilidades de transición a partir de proporciones de participación; finalmente, en la tercera y bajo un enfoque matricial, presentamos el modelo general de la relación entre las tasas de cambio y las probabilidades de transición, en el que retiramos el supuesto de continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad económica. A lo largo del capítulo utilizamos aquellas relaciones generales derivadas en el capítulo anterior donde no se utiliza el supuesto fundamental del enfoque tradicional.

### 3.1. RELACIÓN ENTRE TASAS Y PROBABILIDADES

#### 3.1.1. Tasas y probabilidades

Retomemos las tasas instantáneas de mortalidad ( $\mu_x$ ), de ingreso a la actividad ( $\mu_x^{ia}$ ) y de retiro ( $\mu_x^{ai}$ ) a la edad

exacta  $x$ , definidas en el apartado 2.3.2 del capítulo anterior, y consideremos un pequeño intervalo de tiempo —digamos  $\Delta y > 0$ — y la probabilidad de transición  ${}_y+\Delta y p_x^{ai}$ . El evento que un individuo esté en la actividad a la edad  $x$  y en la inactividad a la edad  $x+y+\Delta y$  podemos descomponerlo en cuatro subeventos de acuerdo a su situación a la edad  $x+y$  y los movimientos entre las edades  $x+y$  y  $x+y+\Delta y$  (Hoem y Fong, 1976: 69).

- i) Siendo activo a la edad  $x+y$  se retira, cuya probabilidad es:

$${}_y p_x^{aa} \mu_{x+y}^{ai} \Delta y$$

pues por (2.34)  $\mu_{x+y}^{ai} \Delta y$  se da la probabilidad de salir de la actividad en el intervalo  $\Delta y$ .

- ii) Encontrándose en la inactividad a la edad  $x+y$  permanece inactivo, cuya probabilidad es:

$${}_y p_x^{ai} (1 - \mu_{x+y}^{ia} \Delta y)$$

donde por (2.9)  $1 - \mu_{x+y}^{ia} \Delta y$  se da la probabilidad de no ingresar a la actividad en el intervalo  $\Delta y$ .

- iii) Siendo inactivo a la edad  $x+y$  fallece, cuya probabilidad es:

$${}_y p_x^{ai} \mu_{x+y} \Delta y$$

donde hemos asumido la continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad.

- iv) Siendo activo o inactivo a la edad  $x+y$  experimenta dos o más cambios dentro del intervalo  $\Delta y$ , incluyendo la posibilidad de terminar en el estado de muerte, cuya probabilidad es:

$$\phi(\Delta y) \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\phi(\Delta y)}{\Delta y} = 0$$

porque en un infinitésimo de tiempo (cuando  $\Delta y$  se acerca o tiende a cero) es imposible que una persona pueda efectuar más de un movimiento.

Estos cuatro subeventos son mutuamente excluyentes y exhaustivos del evento global actividad a la edad  $x$  e inactividad a la edad  $x + y + \Delta y$ , con lo cual la probabilidad buscada es la suma de las cuatro probabilidades respectivas:<sup>2</sup>

$${}_{y+\Delta y}p_x^{ai} = {}_yp_x^{aa} \mu_{x+y}^{ai} \Delta y + {}_yp_x^{ai} (1 - \mu_{x+y}^{ia} \Delta y - \mu_{x+y} \Delta y) + \phi(\Delta y)$$

o bien

$${}_{y+\Delta y}p_x^{ai} - {}_yp_x^{ai} = {}_yp_x^{aa} \mu_{x+y}^{ai} \Delta y - {}_yp_x^{ai} (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y}) \Delta y + \phi(\Delta y)$$

y dividiendo ambos lados entre  $\Delta y$ :

$$\frac{{}_{y+\Delta y}p_x^{ai} - {}_yp_x^{ai}}{\Delta y} = {}_yp_x^{aa} \mu_{x+y}^{ai} - {}_yp_x^{ai} (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y}) + \frac{\phi(\Delta y)}{\Delta y}$$

Dada la continuidad de la mortalidad en la participación, por (2.11) tenemos que  ${}_yp_x^{aa} = {}_yp_x - {}_yp_x^{ai}$ ; entonces, sustituyendo:

$$\frac{{}_{y+\Delta y}p_x^{ai} - {}_yp_x^{ai}}{\Delta y} = {}_yp_x \mu_{x+y}^{ai} - {}_yp_x^{ai} (\mu_{x+y}^{ai} + \mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y}) + \frac{\phi(\Delta y)}{\Delta y}$$

---

<sup>2</sup>Realmente se resta la de fallecer, porque las defunciones decrecientan el efectivo de la cohorte al cabo del periodo  $\Delta y$ .

de donde, tomando el límite cuando  $\Delta y$  tiende a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} {}_y+\Delta y p_x^{ai} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{{}_y+\Delta y p_x^{ai} - {}_y p_x^{ai}}{\Delta y} \\ &= {}_y p_x \mu_{x+y}^{ai} - {}_y p_x^{ai} (\gamma_{x+y} + \mu_{x+y}) \end{aligned}$$

con

$$\gamma_{x+y} = \mu_{x+y}^{ai} + \mu_{x+y}^{ia} \quad (3.1)$$

La solución a esta ecuación diferencial es (Hoem y Fong, 1976: 69):

$${}_n p_x^{ai} = \int_0^n {}_y p_x \mu_{x+y}^{ai} e^{-\int_y^n [\gamma_{x+u} + \mu_{x+u}] du} dy$$

pero por (2.33):

$$e^{-\int_y^n \mu_{x+u} du} = \frac{l_{x+n}}{l_{x+y}} = \frac{l_{x+n}/l_x}{l_{x+y}/l_x} = \frac{{}_n p_x}{{}_y p_x}$$

entonces,

$${}_n \hat{p}_x^{ai} = {}_n p_x \int_0^n \mu_{x+y}^{ai} e^{-\int_y^n \gamma_{x+u} du} dy$$

o bien, dada la continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad, por (2.10):

$${}_n \hat{p}_x^{ai} = \frac{{}_n \hat{p}_x^{ai}}{{}_n p_x} = \int_0^n \mu_{x+y}^{ai} e^{-\int_y^n \gamma_{x+u} du} dy$$

Si suponemos que las tasas instantáneas de ingreso y de retiro permanecen constantes a lo largo del intervalo de  $n$  años:

$$\mu_{x+y}^{ai} = {}_n m_x^{ai} \quad \text{y} \quad \mu_{x+y}^{ia} = {}_n m_x^{ia} \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq n$$

entonces,

$$\begin{aligned} {}_n \hat{p}_x^{ai} &= {}_n m_x^{ai} \int_0^n e^{-(n-y)n\gamma_x} dy \\ &= {}_n m_x^{ai} e^{-n n\gamma_x} \int_0^n e^{y n\gamma_x} dy \\ &= {}_n m_x^{ai} e^{-n n\gamma_x} \frac{e^{n n\gamma_x} - 1}{n\gamma_x} \end{aligned}$$

y finalmente,

$${}_n \hat{p}_x^{ai} = {}_n m_x^{ai} \frac{1 - e^{-n n\gamma_x}}{n\gamma_x} \quad (3.2)$$

Siguiendo pasos análogos tenemos que:

$${}_n \hat{p}_x^{ia} = {}_n m_x^{ia} \frac{1 - e^{-n n\gamma_x}}{n\gamma_x} \quad (3.3)$$

Sumando miembro a miembro las dos probabilidades puras de transición:

$$\begin{aligned} {}_n \hat{p}_x^{ai} + {}_n \hat{p}_x^{ia} &= \left[ \frac{1 - e^{-n n\gamma_x}}{n\gamma_x} \right] ({}_n m_x^{ai} + {}_n m_x^{ia}) \\ &= 1 - e^{-n n\gamma_x} \end{aligned}$$

pues  ${}_n m_x^{ai} + {}_n m_x^{ia} = n\gamma_x$ ; entonces:

$$n\gamma_x = -\frac{1}{n} \ln \left\{ 1 - {}_n \hat{p}_x^{ai} - {}_n \hat{p}_x^{ia} \right\}$$

y despejando en (3.2) y (3.3):

$${}_n m_x^{ai} = {}_n \hat{p}_x^{ai} {}_n B_x \quad y \quad {}_n m_x^{ia} = {}_n \hat{p}_x^{ia} {}_n B_x \quad (3.4)$$

$$\text{con} \quad {}_n B_x = \frac{{}_n \gamma_x}{1 - e^{-n \gamma_x}} = -\frac{1}{n} \frac{\ln \{1 - {}_n \hat{p}_x^{ai} - {}_n \hat{p}_x^{ia}\}}{{}_n \hat{p}_x^{ai} + {}_n \hat{p}_x^{ia}}$$

La utilidad de este último resultado es que a partir de las probabilidades puras de transición (por ejemplo las obtenidas de una encuesta retrospectiva) se obtienen las tasas de ingreso y de retiro. Las fórmulas (3.2), (3.3) y (3.4) constituyen el modelo general del método de las tasas que presentamos en el apartado 2.3.2; en efecto, bajo el enfoque tradicional, en un intervalo de edades ascendente ( $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ ), ante la ausencia de retiros  ${}_n m_x^{ai} = 0$  y por (3.2) también  ${}_n \hat{p}_x^{ai} = 0$ , con lo cual aplicando (3.4):

$$\begin{aligned} {}_n m_x^{ia} &= -\frac{1}{n} {}_n \hat{p}_x^{ia} \frac{\ln \{1 - {}_n \hat{p}_x^{ai} - {}_n \hat{p}_x^{ia}\}}{{}_n \hat{p}_x^{ai} + {}_n \hat{p}_x^{ia}} \\ &= -\frac{1}{n} {}_n \hat{p}_x^{ia} \frac{\ln \{1 - {}_n \hat{p}_x^{ia}\}}{{}_n \hat{p}_x^{ia}} \\ &= -\frac{\ln \{ {}_n \hat{p}_x^{ia} \}}{n} \end{aligned}$$

la igualdad (2.35). De manera similar, dada la ausencia de ingresos en un grupo de edades descendente, se llega a (2.37):

$${}_n m_x^{ai} = -\frac{\ln \{ {}_n \hat{p}_x^{aa} \}}{n}$$

### 3.1.2. Años-persona vividos

Sean para la cohorte de la tabla de vida activa:

$\ell_{x,x+n}^{aa}$  los activos a la edad  $x$  que sobreviven en la actividad a la edad  $x+n$ .

$\ell_{x,x+n}^{ai}$  los activos a la edad  $x$  que sobreviven en la inactividad a la edad  $x+n$ .

$\ell_{x,x+n}^{ia}$  los inactivos a la edad  $x$  que sobreviven en la actividad a la edad  $x+n$ .

$\ell_{x,x+n}^{ii}$  los inactivos a la edad  $x$  que sobreviven en la inactividad a la edad  $x+n$ .

cuyos valores están dados por:

$$\begin{aligned} \ell_{x,x+n}^{aa} &= \ell_x^a \, {}_n p_x^{aa} & \ell_{x,x+n}^{ai} &= \ell_x^a \, {}_n p_x^{ai} \\ \ell_{x,x+n}^{ia} &= \ell_x^i \, {}_n p_x^{ia} & \ell_{x,x+n}^{ii} &= \ell_x^i \, {}_n p_x^{ii} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Debido a que una persona no puede ser activa e inactiva al mismo tiempo (a la edad exacta  $x$  o cuando  $n=0$ ):

$$\ell_{x,x}^{aa} = \ell_x^a \quad \ell_{x,x}^{ai} = 0 \quad \ell_{x,x}^{ia} = 0 \quad \text{y} \quad \ell_{x,x}^{ii} = \ell_x^i$$

Recordando nuestras definiciones para los años-persona vividos al inicio de la sección 2.3 y aplicando el principio de la ecuación compensadora, tenemos que los activos a la edad  $x+n$  son los activos a la edad  $x$ , más los ingresos a la actividad, menos los retiros y menos las defunciones; es decir, asumiendo la continuidad de la mortalidad:

$$\begin{aligned} \ell_{x,x+n}^{aa} &= \ell_{x,x}^{aa} + {}_n L_x^{ai} \, {}_n m_x^{ia} - {}_n L_x^{aa} \, {}_n m_x^{ai} - {}_n L_x^{aa} \, {}_n m_x \\ &= \ell_x^a + {}_n L_x^{ai} \, {}_n m_x^{ia} - {}_n L_x^{aa} \left( {}_n m_x^{ai} + {}_n m_x \right) \end{aligned}$$

incorporando (2.20) [ ${}_n L_x^{aa} = {}_n L_x \alpha_x - {}_n L_x^{ai}$ ]:

$$\begin{aligned} \ell_x^a ({}_n p_x^{aa} - 1) &= {}_n L_x^{ai} ({}_n m_x^{ia} + {}_n m_x^{ai} + {}_n m_x) \\ &\quad - {}_n L_x \alpha_x ({}_n m_x^{ai} + {}_n m_x) \end{aligned}$$

y como por (2.23) y (2.2):

$${}_nL_x \alpha_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nm_x} \alpha_x = \ell_x \frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} \alpha_x = \ell_x^a \frac{{}_nq_x}{{}_nm_x}$$

por (2.8) y (2.11):

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{ai} &= \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} {}_nm_x^{ai} + {}_nq_x - 1 + {}_np_x^{aa}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \\ &= \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} {}_nm_x^{ai} - {}_np_x + {}_np_x^{aa}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \\ &= \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} {}_nm_x^{ai} - {}_np_x^{ai}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \end{aligned}$$

Utilizando (2.20):

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= {}_nL_x \alpha_x - {}_nL_x^{ai} \\ &= \ell_x^a \frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} - \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} {}_nm_x^{ai} - {}_np_x^{ai}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \\ &= \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} (n\gamma_x + {}_nm_x - {}_nm_x^{ai}) + {}_np_x^{ai}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \\ &= \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} ({}_nm_x^{ia} + {}_nm_x) + {}_np_x^{ai}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \end{aligned}$$

Siguiendo pasos análogos para los inactivos a la edad  $x$  tenemos la generalización de (2.39):

$$\begin{aligned} {}_nL_x^{aa} &= \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} ({}_nm_x^{ia} + {}_nm_x) + {}_np_x^{ai}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \\ {}_nL_x^{ai} &= \ell_x^a \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} {}_nm_x^{ai} - {}_np_x^{ai}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \\ {}_nL_x^{ia} &= \ell_x^i \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} {}_nm_x^{ia} - {}_np_x^{ia}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \\ {}_nL_x^{ii} &= \ell_x^i \frac{\frac{{}_nq_x}{{}_nm_x} ({}_nm_x^{ai} + {}_nm_x) + {}_np_x^{ia}}{n\gamma_x + {}_nm_x} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Retomemos nuestras definiciones de las esperanzas parciales de vida activa en (2.44) e incorporemos (3.6), entonces:

$$\begin{aligned}
 {}_n e_x^{aa} &= \frac{\frac{{}_n q_x}{{}_n m_x} ({}_n m_x^{ia} + {}_n m_x) + {}_n p_x^{ai}}{{}_n \gamma_x + {}_n m_x} \\
 {}_n e_x^{ai} &= \frac{\frac{{}_n q_x}{{}_n m_x} {}_n m_x^{ai} - {}_n p_x^{ai}}{{}_n \gamma_x + {}_n m_x} \\
 {}_n e_x^{ia} &= \frac{\frac{{}_n q_x}{{}_n m_x} {}_n m_x^{ia} - {}_n p_x^{ia}}{{}_n \gamma_x + {}_n m_x} \\
 {}_n e_x^{ii} &= \frac{\frac{{}_n q_x}{{}_n m_x} ({}_n m_x^{ai} + {}_n m_x) + {}_n p_x^{ia}}{{}_n \gamma_x + {}_n m_x}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

y con (2.44) obtenemos las esperanzas totales de vida activa ( $e_x^{aa}$ ,  $e_x^{ai}$ ,  $e_x^{ia}$  y  $e_x^{ii}$ ).

### 3.2. PROBABILIDADES A PARTIR DE PROPORCIONES DE PARTICIPACIÓN

Acceptando la continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad económica, si de alguna fuente de datos —por ejemplo una encuesta continua de empleo— disponemos de tasas de ingreso y de retiro de la actividad, entonces suponiendo que son iguales a las de la tabla de vida activa, basta con aplicar (3.2) y (3.3) para obtener las probabilidades de transición al estado puro y con ellas toda la tabla. Si de la fuente de datos podemos deducir las probabilidades de transición mediante preguntas retrospectivas, aplicando (3.4) obtenemos las tasas de movilidad y con ellas toda la tabla. ¿Qué podemos hacer cuando sólo disponemos de las proporciones de participación por edad? Dado que en (2.14) solamente tenemos una ecuación y dos incógnitas, una estrategia es buscar una segunda ecuación linealmente independiente

que nos permita obtener la solución, pues por un teorema del álgebra sabemos que “la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales simultáneas tenga solución única, es que el número de incógnitas sea igual al de ecuaciones linealmente independientes”.

Una alternativa es utilizar la primera ecuación en (2.14) para dos intervalos de edad sucesivos de la misma longitud:

$$\alpha_{x+n} = \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa} + l_x {}_n\hat{p}_x^{ia} \quad (3.8)$$

$$\alpha_{x+2n} = \alpha_{x+n} {}_n\hat{p}_x^{aa} + l_{x+n} {}_n\hat{p}_x^{ia}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} {}_n\hat{p}_x^{aa} &= \frac{\alpha_{x+n} l_{x+n} - \alpha_{x+2n} l_x}{\alpha_x - \alpha_{x+n}} \\ {}_n\hat{p}_x^{ia} &= \frac{\alpha_x \alpha_{x+2n} - \alpha_{x+n}^2}{\alpha_x - \alpha_{x+n}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Una posibilidad es asignar las probabilidades resultantes sólo al primero de ambos grupos de edades (de  $x$  a  $x+n$ ), del primero al antepenúltimo intervalos, y adoptar el enfoque tradicional para los dos últimos porque  ${}_n\hat{p}_{\theta-n}^{ia} = 0$ . Otra alternativa es dividir el intervalo genérico de  $n$  años en dos subintervalos de igual longitud  $n/2$  cada uno y definir por:

${}_n\rho_x^{aa}$  la probabilidad que un activo a la edad exacta  $x$  o  $x+n/2$  tiene de encontrarse en la actividad  $n/2$  años después, en ausencia de mortalidad.

${}_n\rho_x^{ai}$  la probabilidad que un activo a la edad exacta  $x$  o  $x+n/2$  tiene de encontrarse en la inactividad  $n/2$  años después, en ausencia de mortalidad.

${}_n\rho_x^{ia}$  la probabilidad que un inactivo a la edad exacta  $x$  o  $x + n/2$  tiene de encontrarse en la actividad  $n/2$  años después, en ausencia de mortalidad.

${}_n\rho_x^{ii}$  la probabilidad que un inactivo a la edad exacta  $x$  o  $x + n/2$  tiene de encontrarse en la inactividad  $n/2$  años después, en ausencia de mortalidad.

entonces, aplicando la primera ecuación en (2.14) para ambos semintervalos:

$$\begin{aligned}\alpha_{x+n/2} &= \alpha_x {}_n\rho_x^{aa} + \iota_x {}_n\rho_x^{ia} \\ \alpha_{x+n} &= \alpha_{x+n/2} {}_n\rho_x^{aa} + \iota_{x+n/2} {}_n\rho_x^{ia}\end{aligned}$$

¿Cómo obtener  $\alpha_{x+n/2}$ ? Simplemente asumiendo que es igual a la proporción observada para el intervalo, como en el supuesto (2.4) que utilizamos para determinar las proporciones instantáneas. Nuestro sistema de ecuaciones lineales simultáneas es ahora:

$$\begin{aligned}{}_nA_x &= \alpha_x {}_n\rho_x^{aa} + \iota_x {}_n\rho_x^{ia} \\ \alpha_{x+n} &= {}_nA_x {}_n\rho_x^{aa} + {}_nI_x {}_n\rho_x^{ia}\end{aligned}\tag{3.10}$$

cuya solución por analogía con (3.9) es:

$$\begin{aligned}{}_n\rho_x^{aa} &= \frac{{}_nA_x {}_nI_x - \alpha_{x+n} \iota_x}{\alpha_x - {}_nA_x} \\ {}_n\rho_x^{ia} &= \frac{\alpha_x \alpha_{x+n} - {}_nA_x^2}{\alpha_x - {}_nA_x}\end{aligned}$$

Juntando los dos semintervalos de edad:

$${}_n\hat{\rho}_x^{aa} = {}_n\rho_x^{aa} {}_n\rho_x^{aa} + {}_n\rho_x^{ai} {}_n\rho_x^{ia}$$

extendiendo (2.9) a las probabilidades del semintervalo:

$${}_n\rho_x^{aa} + {}_n\rho_x^{ai} = 1 \quad \text{y} \quad {}_n\rho_x^{ia} + {}_n\rho_x^{ii} = 1$$

usando las propiedades de cerradura (2.3) ( $\alpha_x + \iota_x = 1$ ) y (1.3) ( ${}_nA_x + {}_nI_x = 1$ ), y despejando en (2.9) y (2.14):

$$\begin{aligned} {}_n\hat{p}_x^{aa} &= \alpha_{x+n} + \iota_x \left( \frac{\alpha_{x+n} - {}_nA_x}{\alpha_x - {}_nA_x} \right)^2 \\ {}_n\hat{p}_x^{ai} &= 1 - {}_n\hat{p}_x^{aa} \\ {}_n\hat{p}_x^{ia} &= \frac{\alpha_{x+n} - \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa}}{\iota_x} \\ {}_n\hat{p}_x^{ii} &= 1 - {}_n\hat{p}_x^{ia} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Apliquemos la alternativa (3.9) a los grupos masculinos 15-19 y 20-24 de México en 1990 (cuadro 3.3):

$$\begin{aligned} {}_5\hat{p}_{15}^{aa} &= \frac{\alpha_{20} \iota_{20} - \alpha_{25} \iota_{15}}{\alpha_{15} - \alpha_{20}} \\ &= \frac{0.632139 \times 0.367861 - 0.839808 \times 0.744450}{0.255550 - 0.632139} \\ &= 1.042664 \end{aligned}$$

Un caso aberrante, porque una probabilidad debe ser menor o igual a uno; y al aplicar (3.11) al intervalo 40-44 femenino:

$$\begin{aligned} {}_5\hat{p}_{40}^{aa} &= \alpha_{45} + \iota_{40} \left( \frac{\alpha_{45} - {}_5A_{40}}{\alpha_{40} - {}_5A_{40}} \right)^2 \\ &= 0.208183 + 0.760901 \left( \frac{0.208183 - 0.227531}{0.239099 - 0.227531} \right)^2 \\ &= 2.336780 \end{aligned}$$

tenemos otra vez un caso aberrante. En los cuadros 3.1 y 3.2, se muestran los resultados que se obtienen al aplicar (3.9) y (3.11) respectivamente. Se podrá observar que sólo para los intervalos 20-29 y 25-34 masculinos y 15-24, 60-69 y 65-74 femeninos, la estimación es correcta

cuando se usan dos grupos quinquenales adyacentes; en cambio, la estimación es válida hasta en seis grupos masculinos y en siete femeninos (renglones con "Sí" en la columna 5 del cuadro 3.2), cuando se divide el grupo de edad en dos semintervalos de igual longitud. El problema es que en ninguna de ambas alternativas impusimos la restricción a las probabilidades  ${}_n\hat{p}_x^{aa}$  y  ${}_n\hat{p}_x^{ia}$  que caigan dentro de los límites entre los que pueden variar.

### 3.2.1. Rango de variación de las probabilidades

El valor de  ${}_nB_x$  existe si y sólo si el argumento del logaritmo natural en el numerador de (3.4) es positivo:

$$1 - {}_n\hat{p}_x^{ai} - {}_n\hat{p}_x^{ia} = {}_n\hat{p}_x^{aa} - {}_n\hat{p}_x^{ia} > 0$$

o bien,

$${}_n\hat{p}_x^{aa} > {}_n\hat{p}_x^{ia} = \frac{\alpha_{x+n} - \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa}}{l_x}$$

donde la igualdad se obtiene despejando  ${}_n\hat{p}_x^{ia}$  en la primera ecuación de (2.14); entonces,

$${}_n\hat{p}_x^{aa} (l_x + \alpha_x) > \alpha_{x+n}$$

o bien, por la condición de cerradura (2.3):

$${}_n\hat{p}_x^{aa} > \alpha_{x+n}$$

es decir,  $\alpha_{x+n}$  es la cota inferior. Despejando nuevamente  ${}_n\hat{p}_x^{ia}$  en la primera ecuación de (2.14), utilizando el primer principio de cerradura en (2.9) ( ${}_n\hat{p}_x^{aa} = 1 - {}_n\hat{p}_x^{ai}$ ):

$${}_n\hat{p}_x^{ia} = \frac{\alpha_{x+n} - \alpha_x (1 - {}_n\hat{p}_x^{ai})}{l_x} = \frac{\alpha_{x+n} - \alpha_x + \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{ai}}{l_x}$$

CUADRO 3.1

México: probabilidades de transición al estado puro estimadas mediante la liga de grupos quinquenales de edad adyacentes, 1990

| Rango de edad<br>$x, x+9$ | Activo a                                 |  | Inactivo a                               |  | ¿Estimación correcta? |
|---------------------------|--|--|--|--|-----------------------|
|                           | activo<br>$5\hat{p}_{x,x+5}^{aa}$<br>(1) | inactivo<br>$5\hat{p}_{x,x+5}^{ai}$<br>(2) | activo<br>$5\hat{p}_{x,x+5}^{ia}$<br>(3) | inactivo<br>$5\hat{p}_{x,x+5}^{ii}$<br>(4) |                       |
| <i>Hombres</i>            |  |  |  |  |                       |
| 15-24                     | 1.042664                                 | -0.042664                                  | 0.491217                                 | 0.508783                                   | No                    |
| 20-29                     | 0.968650                                 | 0.031350                                   | 0.618404                                 | 0.381596                                   | Sí                    |
| 25-34                     | 0.942176                                 | 0.057824                                   | 0.757198                                 | 0.242802                                   | Sí                    |
| 30-39                     | 0.894863                                 | 0.105137                                   | 1.250873                                 | -0.250873                                  | No                    |
| 35-44                     | 1.162993                                 | -0.162993                                  | -2.104288                                | 3.104288                                   | No                    |
| 40-49                     | 1.067463                                 | -0.067463                                  | -0.987386                                | 1.987386                                   | No                    |
| 45-54                     | 1.022197                                 | -0.022197                                  | -0.553348                                | 1.553348                                   | No                    |
| 50-59                     | 1.022225                                 | -0.022225                                  | -0.553538                                | 1.553538                                   | No                    |
| 55-64                     | 0.965353                                 | 0.034647                                   | -0.289587                                | 1.289587                                   | No                    |
| 60-69                     | 0.886344                                 | 0.113656                                   | -0.061296                                | 1.061296                                   | No                    |
| 65-74                     | 0.895980                                 | 0.104020                                   | -0.078627                                | 1.078627                                   | No                    |
| 70-79                     | 0.936156                                 | 0.063844                                   | -0.127288                                | 1.127288                                   | No                    |
| 75-84                     | 0.847508                                 | 0.152492                                   | -0.053214                                | 1.053214                                   | No                    |
| 80-89                     | 0.810563                                 | 0.189437                                   | -0.032719                                | 1.032719                                   | No                    |

---

| <i>Mujeres</i> |          |           |           |          |    |
|----------------|----------|-----------|-----------|----------|----|
| 15-24          | 0.554737 | 0.445263  | 0.208155  | 0.791845 | Sí |
| 20-29          | 0.112625 | 0.887375  | 0.347750  | 0.652250 | No |
| 25-34          | 1.354110 | -0.354110 | -0.162607 | 1.162607 | No |
| 30-39          | 1.120519 | -0.120519 | -0.072103 | 1.072103 | No |
| 35-44          | 1.285266 | -0.285266 | -0.130270 | 1.130270 | No |
| 40-49          | 1.118665 | -0.118665 | -0.077919 | 1.077919 | No |
| 45-54          | 0.892688 | 0.107312  | -0.018505 | 1.018505 | No |
| 50-59          | 0.862471 | 0.137529  | -0.012264 | 1.012264 | No |
| 55-64          | 0.791005 | 0.208995  | -0.000873 | 1.000873 | No |
| 60-69          | 0.757922 | 0.242078  | 0.003133  | 0.996867 | Sí |
| 65-74          | 0.790336 | 0.209664  | 0.000135  | 0.999865 | Sí |
| 70-79          | 0.851877 | 0.148123  | -0.004286 | 1.004286 | No |
| 75-84          | 0.880847 | 0.119153  | -0.005910 | 1.005910 | No |
| 80-89          | 0.915432 | 0.084568  | -0.007395 | 1.007395 | No |

---

*Nota:* el subíndice derecho en la nomenclatura de las probabilidades indica que se pueden aplicar a cualquiera de los dos grupos quinquenales de edad comprendidos.

## CUADRO 3.2

**México: probabilidades de transición al estado puro estimadas mediante división del grupo de edad en dos subintervalos, 1990**

| Rango de edad<br>$x, x+n-1$ | Activo a                              |   | Inactivo a                            |   | ¿Estimación correcta? |
|-----------------------------|---------------------------------------|---|---------------------------------------|---|-----------------------|
|                             | activo<br>${}_n\hat{p}_x^{aa}$<br>(1) | inactivo<br>${}_n\hat{p}_x^{ai}$<br>(2) | activo<br>${}_n\hat{p}_x^{ia}$<br>(3) | inactivo<br>${}_n\hat{p}_x^{ii}$<br>(4) |                       |
| <i>Hombres</i>              |                                       |   |                                       |   |                       |
| 12-14                       | 1.591953                              | -0.591953                               | 0.255550                              | 0.744450                                | No                    |
| 15-19                       | 0.945732                              | 0.054268                                | 0.524491                              | 0.475509                                | Sí                    |
| 20-24                       | 0.898989                              | 0.101011                                | 0.738111                              | 0.261889                                | Sí                    |
| 25-29                       | 0.920544                              | 0.079456                                | 0.870604                              | 0.129396                                | Sí                    |
| 30-34                       | 0.926012                              | 0.073988                                | 0.925850                              | 0.074150                                | Sí                    |
| 35-39                       | 64.590561                             | -63.590561                              | -795.785511                           | 796.785511                              | No                    |
| 40-44                       | 1.271772                              | -0.271772                               | -3.376096                             | 4.376096                                | No                    |
| 45-49                       | 1.254188                              | -0.254188                               | -2.777802                             | 3.777802                                | No                    |
| 50-54                       | 1.056957                              | -0.056957                               | -0.793150                             | 1.793150                                | No                    |
| 55-59                       | 1.276049                              | -0.276049                               | -1.731587                             | 2.731587                                | No                    |
| 60-64                       | 0.888900                              | 0.111100                                | -0.068680                             | 1.068680                                | No                    |
| 65-69                       | 0.847576                              | 0.152424                                | 0.008440                              | 0.991560                                | Sí                    |
| 70-74                       | 0.942993                              | 0.057007                                | -0.135568                             | 1.135568                                | No                    |

|                |          |           |           |          |    |
|----------------|----------|-----------|-----------|----------|----|
| 75-79          | 1.001011 | -0.001011 | -0.181481 | 1.181481 | No |
| 80-84          | 0.610018 | 0.389982  | 0.078533  | 0.921467 | Sí |
| 85-89          | 0.925253 | 0.074747  | -0.074747 | 1.074747 | No |
| <i>Mujeres</i> |          |           |           |          |    |
| 12-14          | 2.464327 | -1.464327 | 0.091809  | 0.908191 | No |
| 15-19          | 0.563606 | 0.436394  | 0.207259  | 0.792741 | Sí |
| 20-24          | 0.295357 | 0.704643  | 0.290053  | 0.709947 | Sí |
| 25-29          | 3.095052 | -2.095052 | -0.878284 | 1.878284 | No |
| 30-34          | 1.437416 | -0.437416 | -0.194884 | 1.194884 | No |
| 35-39          | 1.176299 | -0.176299 | -0.091797 | 1.091797 | No |
| 40-44          | 2.336780 | -1.336780 | -0.460688 | 1.460688 | No |
| 45-49          | 0.829784 | 0.170216  | -0.001967 | 1.001967 | No |
| 50-54          | 0.824281 | 0.175719  | -0.004376 | 1.004376 | No |
| 55-59          | 0.710316 | 0.289684  | 0.011989  | 0.988011 | Sí |
| 60-64          | 0.572430 | 0.427570  | 0.025591  | 0.974409 | Sí |
| 65-69          | 0.617494 | 0.382506  | 0.016119  | 0.983881 | Sí |
| 70-74          | 0.663984 | 0.336016  | 0.009212  | 0.990788 | Sí |
| 75-79          | 0.832602 | 0.167398  | -0.003205 | 1.003205 | No |
| 80-84          | 0.734338 | 0.265662  | 0.000381  | 0.999619 | Sí |
| 85-89          | 0.990243 | 0.009757  | -0.009757 | 1.009757 | No |

y despejando:

$${}_n\hat{p}_x^{ai} = \frac{\alpha_x - \alpha_{x+n} + l_x {}_n\hat{p}_x^{ia}}{\alpha_x}$$

Este resultado es particularmente importante, pues muestra que conforme una de las probabilidades de transición de cambio de estado (actividad-inactividad o inactividad-actividad) aumenta, la probabilidad en el sentido inverso también se incrementa, ya que en las dos igualdades ambas probabilidades tienen signo positivo. Podemos concluir que, en el método tradicional de construcción de tablas de vida activa, al suponer que en un intervalo sólo hay ingresos a la actividad o sólo hay retiros, pero no ocurren ambos simultáneamente, las probabilidades  ${}_n\hat{p}_x^{ai}$  y  ${}_n\hat{p}_x^{ia}$  alcanzan su valor mínimo. Si en un intervalo ascendente ( $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ ) aceptamos la presencia de retiros de la actividad, la probabilidad  ${}_n\hat{p}_x^{ai}$  es estrictamente mayor que cero y  ${}_n\hat{p}_x^{aa}$  estrictamente menor que uno. Si aceptamos ingresos a la actividad en un intervalo de edades descendente, la probabilidad  ${}_n\hat{p}_x^{ai}$  aumenta y es estrictamente mayor que su valor en (2.17):

$${}_n\hat{p}_x^{ai} > 1 - \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x}$$

de donde:

$${}_n\hat{p}_x^{aa} = 1 - {}_n\hat{p}_x^{ai} < \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x}$$

Podemos establecer entonces el intervalo de variación para  ${}_n\hat{p}_x^{aa}$ :

$$\alpha_{x+n} < {}_n\hat{p}_x^{aa} \leq \min \left\{ 1, \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x} \right\} = {}_n\Pi_x^{aa}$$

Siguiendo pasos análogos para las restantes tres probabilidades:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{x+n} &< {}_n\hat{p}_x^{aa} \leq \min \left\{ 1, \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x} \right\} = {}_n\Pi_x^{aa} \\
 {}_n\pi_x^{ai} &= \max \left\{ 0, 1 - \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x} \right\} \leq {}_n\hat{p}_x^{ai} < \iota_{x+n} \\
 {}_n\pi_x^{ia} &= \max \left\{ 0, 1 - \frac{\iota_{x+n}}{\iota_x} \right\} \leq {}_n\hat{p}_x^{ia} < \alpha_{x+n} \\
 \iota_{x+n} &< {}_n\hat{p}_x^{ii} \leq \min \left\{ 1, \frac{\iota_{x+n}}{\iota_x} \right\} = {}_n\Pi_x^{ii}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

La propuesta es estimar las probabilidades como una media ponderada de sus cotas:

$$\begin{aligned}
 {}_n\hat{p}_x^{aa} &= {}_n w_x^{aa} \alpha_{x+n} + (1 - {}_n w_x^{aa}) {}_n\Pi_x^{aa} & 0 \leq {}_n w_x^{aa} < 1 \\
 {}_n\hat{p}_x^{ai} &= {}_n w_x^{ai} {}_n\pi_x^{ai} + (1 - {}_n w_x^{ai}) \iota_{x+n} & 0 < {}_n w_x^{ai} \leq 1 \\
 {}_n\hat{p}_x^{ia} &= {}_n w_x^{ia} {}_n\pi_x^{ia} + (1 - {}_n w_x^{ia}) \alpha_{x+n} & 0 < {}_n w_x^{ia} \leq 1 \\
 {}_n\hat{p}_x^{ii} &= {}_n w_x^{ii} \iota_{x+n} + (1 - {}_n w_x^{ii}) {}_n\Pi_x^{ii} & 0 \leq {}_n w_x^{ii} < 1
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Tomemos la probabilidad de activo a activo para un intervalo ascendente, donde la cota superior  ${}_n\Pi_x^{aa}$  vale uno:

$${}_n w_x^{aa} = \frac{1 - {}_n\hat{p}_x^{aa}}{1 - \alpha_{x+n}} = \frac{{}_n\hat{p}_x^{ai}}{\iota_{x+n}}$$

y para la probabilidad de inactivo a activo, siendo la cota inferior en un intervalo ascendente  ${}_n\pi_x^{ia} = 1 - \iota_{x+n}/\iota_x$ :

$${}_n w_x^{ia} = \frac{\alpha_{x+n} - {}_n\hat{p}_x^{ia}}{\alpha_{x+n} - 1 + \frac{\iota_{x+n}}{\iota_x}} = \frac{\iota_x \alpha_{x+n} - \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ia}}{-\iota_x \iota_{x+n} + \iota_{x+n}}$$

Por la primera igualdad en (2.14):

$${}_n w_x^{ia} = \frac{\iota_x \alpha_{x+n} - \alpha_{x+n} + \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa}}{\iota_{x+n} \alpha_x} = \frac{{}_n\hat{p}_x^{aa} - \alpha_{x+n}}{\iota_{x+n}}$$

de donde

$$1 - {}_n w_x^{ia} = \frac{l_{x+n} + \alpha_{x+n} - n\hat{p}_x^{aa}}{l_x + n} = \frac{n\hat{p}_x^{ai}}{l_{x+n}} = {}_n w_x^{aa}$$

es decir, que los ponderadores para las probabilidades de transición activo-activo e inactivo-activo son recíprocos respecto de uno. El lector puede probar fácilmente que:

$$\begin{aligned} {}_n w_x^{aa} = {}_n w_x^{ii} &= 1 - {}_n w_x^{ai} = 1 - {}_n w_x^{ia} \\ {}_n w_x^{ai} = {}_n w_x^{ia} &= 1 - {}_n w_x^{aa} = 1 - {}_n w_x^{ii} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esta conclusión es válida incluso para un intervalo descendente ( $\alpha_x > \alpha_{x+n}$ ). En efecto, dado que la cota superior para la probabilidad de activo a activo es  $\alpha_{x+n}/\alpha_x$ :

$${}_n w_x^{aa} = \frac{\alpha_{x+n} - n\hat{p}_x^{aa} \alpha_x}{\alpha_{x+n} - \alpha_{x+n} \alpha_x} = \frac{\alpha_{x+n} - n\hat{p}_x^{aa} \alpha_x}{\alpha_{x+n} l_x} = \frac{n\hat{p}_x^{ia}}{\alpha_{x+n}}$$

y dado que la cota inferior es cero para la probabilidad de inactivo a activo:

$$n\hat{p}_x^{ia} = (1 - {}_n w_x^{ia}) \alpha_{x+n}$$

entonces:

$$1 - {}_n w_x^{ia} = \frac{n\hat{p}_x^{ia}}{\alpha_{x+n}} = {}_n w_x^{aa}$$

Como a partir de la edad  $\theta$  nadie es activo:

$${}_n p_{\theta-n}^{aa} = {}_n p_{\theta-n}^{ia} = 0 \quad \text{y} \quad {}_n p_{\theta-n}^{ai} = {}_n p_{\theta-n}^{ii} = 1$$

concluimos que:

$${}_n w_{\theta-n}^{aa} = {}_n w_{\theta-n}^{ii} = 0 \quad \text{y} \quad {}_n w_{\theta-n}^{ai} = {}_n w_{\theta-n}^{ia} = 1 \quad (3.15)$$

es decir, tenemos que adoptar forzosamente el método tradicional para el último intervalo de edades. Realmente, por la construcción de (3.12), bajo el enfoque tradicional los ponderadores deben ser nulos para las probabilidades activo-activo e inactivo-inactivo y unitarios para activo-inactivo e inactivo-activo.

Habiendo partido de (3.4) para determinar el mínimo de  ${}_n\hat{p}_x^{aa}$  y  ${}_n\hat{p}_x^{ii}$  y el máximo de  ${}_n\hat{p}_x^{ai}$  y  ${}_n\hat{p}_x^{ia}$ , es claro que ninguna de las probabilidades puede alcanzar esas cotas, pues el logaritmo de cero no está definido; entonces los ponderadores  ${}_n w_x^{aa}$  y  ${}_n w_x^{ii}$  nunca pueden ser iguales a uno, ni  ${}_n w_x^{ai}$  y  ${}_n w_x^{ia}$  iguales a cero. Sin embargo, conforme  ${}_n\hat{p}_x^{aa}$  se acerca a  $\alpha_{x+n}$ , las probabilidades de activo-inactivo e inactivo-activo se aproximan a su máximo, es decir, nos acercamos progresivamente al caso de la mayor ocurrencia posible de ingresos y de retiros entre las edades  $x$  y  $x+n$ . Dada la construcción exponencial en (3.2) y (3.3), las tasas de ingreso y de retiro pueden aumentar tanto como sea posible:

$$\lim_{{}_n\hat{p}_x^{aa} \rightarrow \alpha_{x+n}} {}_n m_x^{ai} = \lim_{{}_n\hat{p}_x^{aa} \rightarrow \alpha_{x+n}} {}_n m_x^{ia} = \infty$$

Si bien pareciera que una tasa nunca debe exceder la unidad, esto no es cierto bajo la óptica exponencial, pues una tasa de ingreso a la actividad mayor que uno significa que un inactivo realiza en promedio más de  $n$  entradas en el intervalo de  $n$  años, y de la misma manera para un activo con una tasa de salida superior a uno. No obstante, tasas de ingreso o de retiro que exceden la unidad, bien pueden estar reflejando una movilidad poco realista. En el cuadro 3.3, se muestra el valor del ponderador  ${}_n w_x^{aa}$  a partir del cual las tasas de ingreso o de retiro superan

## CUADRO 3.3

**México: valor mínimo del ponderador  
de la probabilidad activo a activo ( ${}_n w_x^{aa}$ ),  
para que las tasas de ingreso o las  
de retiro sean iguales a uno, 1990**

| Edad<br>$x, x+n-1$ | Hombres<br>${}_n w_x^{aa}$ | Mujeres<br>${}_n w_x^{aa}$ |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|
| 12-14              | 0.97670                    | 0.96003                    |
| 15-19              | 0.99926                    | 0.99834                    |
| 20-24              | 0.99402                    | 0.99908                    |
| 25-29              | 0.99234                    | 0.99899                    |
| 30-34              | 0.99466                    | 0.99877                    |
| 35-39              | 0.99558                    | 0.99847                    |
| 40-44              | 0.99593                    | 0.99792                    |
| 45-49              | 0.99662                    | 0.99708                    |
| 50-54              | 0.99757                    | 0.99622                    |
| 55-59              | 0.99868                    | 0.99531                    |
| 60-64              | 0.99952                    | 0.99458                    |
| 65-69              | 0.99987                    | 0.99406                    |
| 70-74              | 0.99988                    | 0.99357                    |
| 75-79              | 0.99946                    | 0.99299                    |
| 80-84              | 0.99856                    | 0.99226                    |
| 85-89              | 0.99718                    | 0.99110                    |

la unidad. Se puede ver que esos valores están muy cercanos a uno, y salvo el primer grupo de edades exceden 0.99.

En el cuadro 3.4, se muestran los valores de los ponderadores para aquellos intervalos de edad donde la estimación mediante (3.9) o (3.11) es correcta, es decir, para aquellos renglones de los cuadros 3.1 y 3.2 donde en la columna (5) aparece la palabra "Sí". Es difícil aceptar que estos ponderadores sean adecuados, considerando, por un lado, que la mayor parte en las primeras edades

implican altas tasas de ingreso a la actividad, incluso superiores a la unidad en el grupo 30-34 masculino (véase cuadro 3.3); y por otro, que en las edades avanzadas, los ponderadores femeninos serían muy bajos cuando se tomaran intervalos decenales (3.9), o muy altos con la división de los grupos en subintervalos (3.11), y en los masculinos, el aumento del grupo 65-69 al 80-84 bajo la alternativa de la partición de los grupos no parece adecuado.

### 3.2.2. Aplicación al caso de México en 1990

En el único patrón por edad de tasas de ingreso de que disponemos, para los hombres de Dinamarca por edad desplegada durante el periodo 1972-1974, la mayor propensión de entradas es de 0.6357 a los 18 años, con un máximo local (cima) de 0.4994 a los 30 años (Willekens, 1980: 574). Estos valores están muy por debajo de la unidad, como se puede ver en la gráfica 3.2, donde además agregamos las tasas de retiro y los ponderadores  $n w_x^{aa}$ .<sup>3</sup> Se podrá notar que todos los ponderadores son inferiores a 0.5, e incluso sólo a los 16 años superan 0.4, y de los 18 a los 23 y en el pico de los 32 a los 34 exceden 0.3, es decir, que la intensidad del intercambio entre actividad e inactividad en Dinamarca, se acerca más al mínimo de movimientos (enfoque tradicional) que al máximo.

Si bien los patrones de inserción de la población en

---

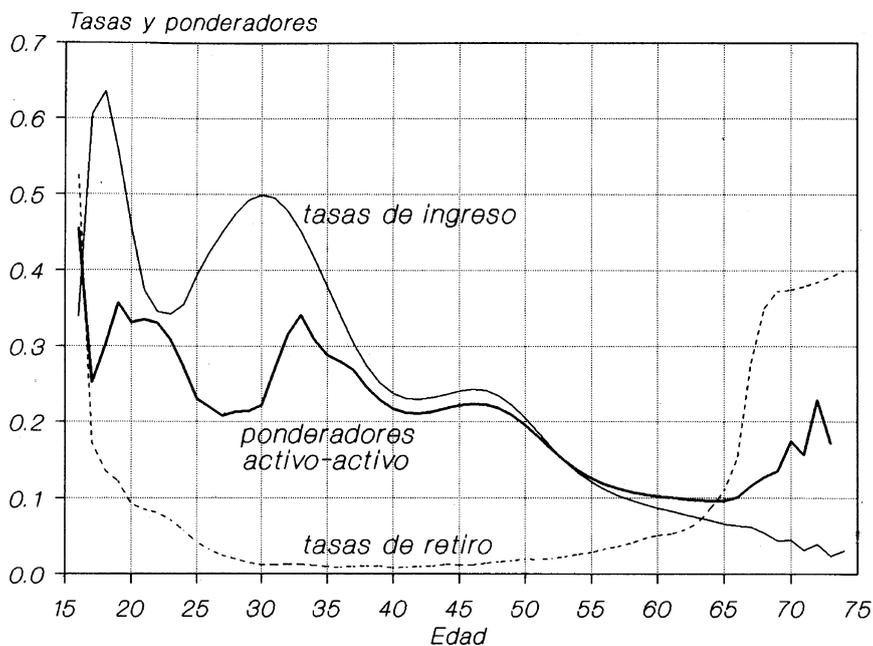
<sup>3</sup>En el caso de Dinamarca las tasas de cambio de estado son los datos iniciales. Mediante (3.2) y (3.3) obtuvimos las probabilidades, y despejando en (3.13), los ponderadores.

CUADRO 3.4

México: ponderadores para la probabilidad activo a activo ( ${}_n w_x^{aa}$ ) cuando es correcta la estimación mediante la solución a dos ecuaciones simultáneas, 1990

| Rango de edad<br>$x, x+4$ | Hombres                          |                            |                               | Mujeres                          |                            |                               |
|---------------------------|----------------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
|                           | intervalo decenal para el grupo: |                            | división en dos subintervalos | intervalo decenal para el grupo: |                            | división en dos subintervalos |
|                           | primero                          | segundo                    |                               | primero                          | segundo                    |                               |
|                           | ${}_5 w_x^{aa}$<br>(1)           | ${}_5 w_{x+5}^{aa}$<br>(2) | ${}_5 w_x^{aa}$<br>(3)        | ${}_5 w_x^{aa}$<br>(4)           | ${}_5 w_{x+5}^{aa}$<br>(5) | ${}_5 w_x^{aa}$<br>(6)        |
| 15-19                     |                                  |                            | 0.14752                       | 0.58585                          | 0.62830                    | 0.57418                       |
| 20-24                     | 0.19570                          | 0.35846                    | 0.63056                       |                                  |                            | 0.99431                       |
| 25-29                     | 0.66118                          | 0.78139                    | 0.90853                       |                                  |                            |                               |
| 30-34                     |                                  |                            | 0.99981                       |                                  |                            |                               |
| 35-39                     |                                  |                            |                               |                                  |                            |                               |
| 40-44                     |                                  |                            |                               |                                  |                            |                               |
| 45-49                     |                                  |                            |                               |                                  |                            |                               |
| 50-54                     |                                  |                            |                               |                                  |                            |                               |
| 55-59                     |                                  |                            |                               |                                  |                            | 0.11101                       |
| 60-64                     |                                  |                            |                               | 0.03701                          | 0.04674                    | 0.30232                       |
| 65-69                     |                                  |                            | 0.01541                       | 0.00202                          | 0.00255                    | 0.24050                       |
| 70-74                     |                                  |                            |                               |                                  |                            | 0.17350                       |
| 75-79                     |                                  |                            |                               |                                  |                            |                               |
| 80-84                     |                                  |                            | 0.29284                       |                                  |                            | 0.01246                       |
| 85-89                     |                                  |                            |                               |                                  |                            |                               |

GRÁFICA 3.2  
**Dinamarca: tasas de ingreso y de retiro masculinas  
 y ponderadores activo a activo, 1972-1974**



Fuente: Willekens, 1980: 574.

la actividad económica deben ser diferentes entre México y Dinamarca, decidimos usar la experiencia del país europeo como guía para la selección de los ponderadores en nuestro ejemplo de México en 1990:

1. Supusimos que a partir de los 75 años, siendo una edad avanzada, ya nadie ingresa a la actividad, es decir, aceptamos el enfoque tradicional, con lo cual  ${}_5w_x^{aa} = 0$  para los grupos 75-79, 80-84 y 85-89.
2. Con base en los resultados del cuadro 3.4, adoptamos el punto medio del rango de variación para to-

dos los grupos de edad hasta el 35-39 ( ${}_5w_x^{aa} = 0.5$ ), considerando que es el rango de edades donde debe ocurrir la mayor movilidad.

3. Interpolamos linealmente respecto a la edad entre  ${}_5w_{35}^{aa} = 0.5$  y  ${}_5w_{75}^{aa} = 0$  para obtener los ponderadores de los grupos 40-44 a 70-74.

Considerando la experiencia de Dinamarca, pudiera pensarse que la selección de 0.5 para los ponderadores hasta los 40 años propiciaría un alto volumen de transiciones; esto, sin embargo, no ocurrió; las tasas de ingreso resultaron inferiores a las danesas en casi todas las edades. La máxima fue de 0.273678 en el grupo 20-24 masculino, y la más grande de retiro fue de 0.218893 en el grupo 12-14 femenino, como se puede ver en el cuadro 3.8 y en la gráfica 3.3.

En el cuadro 3.5, se presentan la estimación de las probabilidades de transición sin mortalidad y el factor  ${}_nB_x$ , y en el cuadro 3.6, las probabilidades con mortalidad. Tomemos como ejemplo el grupo 50-54 femenino. Aplicando la primera igualdad en (3.13):

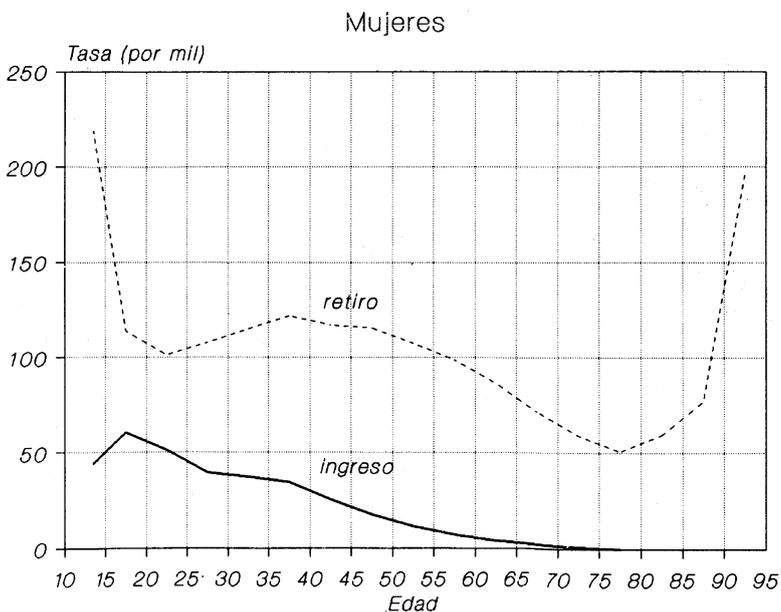
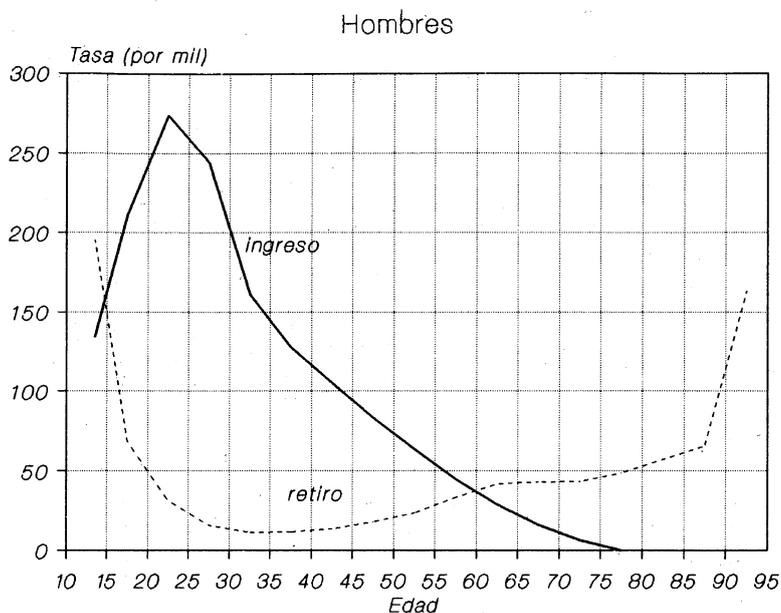
$$\begin{aligned} {}_5\hat{p}_{50}^{aa} &= {}_5w_{50}^{aa} \alpha_{55} + (1 - {}_5w_{50}^{aa}) \frac{\alpha_{55}}{\alpha_{50}} \\ &= 0.3125 \times 0.137482 + 0.6875 \times 0.803096 \\ &= 0.595091 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} {}_5\hat{p}_{50}^{ai} &= 1 - {}_5\hat{p}_{50}^{aa} = 1 - 0.595091 = 0.404909 \\ {}_5\hat{p}_{50}^{ai} &= \frac{\alpha_{55} - \alpha_{50} {}_5\hat{p}_{50}^{aa}}{l_{50}} \end{aligned}$$

GRÁFICA 3.3

México: tasas de ingreso y de retiro en la tabla de vida activa, 1990  
(método de movimientos múltiples con proporciones)



Fuente: cuadro 3.8.

CUADRO 3.5

México: probabilidades de transición al estado puro y factor  ${}_nB_x$  para el cálculo de las tasas de ingreso y de retiro, 1990 (método de estados múltiples con proporciones)

| Rango de edad<br>$x, x+n-1$ | Activo a activo:                |                                   |                                     |   | Activo a inactivo<br>${}_n\hat{p}_x^{ai}$ | Inactivo a:                           |   | Factor<br>${}_nB_x$ |
|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---|---|---------------------------------------|---|---------------------|
|                             | mínimo<br>$\alpha_{x+n}$<br>(1) | máximo<br>${}_n\Pi_x^{aa}$<br>(2) | ponderador<br>${}_nw_x^{aa}$<br>(3) | definitiva<br>${}_n\hat{p}_x^{aa}$<br>(4) |   | activo<br>${}_n\hat{p}_x^{ia}$<br>(6) | inactivo<br>${}_n\hat{p}_x^{ii}$<br>(7) |                     |
| <i>Hombres</i>              |                                 |                                   |                                     |   |   |                                       |   |                     |
| 12-14                       | 0.255550                        | 1.000000                          | 0.5000                              | 0.627775                                  | 0.372225                                  | 0.255550                              | 0.744450                                | 0.52474             |
| 15-19                       | 0.632139                        | 1.000000                          | 0.5000                              | 0.816070                                  | 0.183930                                  | 0.569001                              | 0.430999                                | 0.37137             |
| 20-24                       | 0.839808                        | 1.000000                          | 0.5000                              | 0.919904                                  | 0.080096                                  | 0.702170                              | 0.297830                                | 0.38976             |
| 25-29                       | 0.912544                        | 1.000000                          | 0.5000                              | 0.956272                                  | 0.043728                                  | 0.683298                              | 0.316702                                | 0.35718             |
| 30-34                       | 0.925998                        | 1.000000                          | 0.5000                              | 0.962999                                  | 0.037001                                  | 0.539920                              | 0.460080                                | 0.29820             |
| 35-39                       | 0.921208                        | 0.994827                          | 0.5000                              | 0.958018                                  | 0.041982                                  | 0.460604                              | 0.539396                                | 0.27790             |
| 40-44                       | 0.905558                        | 0.983011                          | 0.4375                              | 0.949126                                  | 0.050874                                  | 0.396182                              | 0.603818                                | 0.26507             |
| 45-49                       | 0.873400                        | 0.964488                          | 0.3750                              | 0.930330                                  | 0.069670                                  | 0.327525                              | 0.672475                                | 0.25487             |
| 50-54                       | 0.822733                        | 0.941989                          | 0.3125                              | 0.904721                                  | 0.095279                                  | 0.257104                              | 0.742896                                | 0.24658             |
| 55-59                       | 0.742893                        | 0.902958                          | 0.2500                              | 0.862942                                  | 0.137058                                  | 0.185723                              | 0.814277                                | 0.24150             |
| 60-64                       | 0.642700                        | 0.865131                          | 0.1875                              | 0.823425                                  | 0.176575                                  | 0.120506                              | 0.879494                                | 0.23732             |
| 65-69                       | 0.547752                        | 0.852268                          | 0.1250                              | 0.814203                                  | 0.185797                                  | 0.068469                              | 0.931531                                | 0.23077             |
| 70-74                       | 0.455216                        | 0.831062                          | 0.0625                              | 0.807571                                  | 0.192429                                  | 0.028451                              | 0.971549                                | 0.22600             |

|       |          |          |        |           |          |          |          |         |
|-------|----------|----------|--------|-----------|----------|----------|----------|---------|
| 75-79 | 0.356809 | 0.783823 | 0.0000 | 0.783823* | 0.216177 | 0.000000 | 1.000000 | 0.22535 |
| 80-84 | 0.268171 | 0.751582 | 0.0000 | 0.751582* | 0.248418 | 0.000000 | 1.000000 | 0.22991 |
| 85-89 | 0.193425 | 0.721273 | 0.0000 | 0.721273* | 0.278727 | 0.000000 | 1.000000 | 0.23445 |
| 90-94 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0000 | 0.000000  | 1.000000 | 0.000000 | 1.000000 |         |

*Mujeres*

|       |          |          |        |           |          |          |          |         |
|-------|----------|----------|--------|-----------|----------|----------|----------|---------|
| 12-14 | 0.091809 | 1.000000 | 0.5000 | 0.545905  | 0.454095 | 0.091809 | 0.908191 | 0.48204 |
| 15-19 | 0.239975 | 1.000000 | 0.5000 | 0.619987  | 0.380013 | 0.201559 | 0.798441 | 0.29962 |
| 20-24 | 0.291326 | 1.000000 | 0.5000 | 0.645663  | 0.354337 | 0.179446 | 0.820554 | 0.28592 |
| 25-29 | 0.279252 | 0.958555 | 0.5000 | 0.618904  | 0.381096 | 0.139626 | 0.860374 | 0.28248 |
| 30-34 | 0.260939 | 0.934422 | 0.5000 | 0.597681  | 0.402319 | 0.130470 | 0.869530 | 0.28566 |
| 35-39 | 0.239099 | 0.916301 | 0.5000 | 0.577700  | 0.422300 | 0.119549 | 0.880451 | 0.28811 |
| 40-44 | 0.208183 | 0.870699 | 0.4375 | 0.580848  | 0.419152 | 0.091080 | 0.908920 | 0.27980 |
| 45-49 | 0.171190 | 0.822304 | 0.3750 | 0.578136  | 0.421864 | 0.064196 | 0.935804 | 0.27390 |
| 50-54 | 0.137482 | 0.803096 | 0.3125 | 0.595091  | 0.404909 | 0.042963 | 0.957037 | 0.26524 |
| 55-59 | 0.107996 | 0.785531 | 0.2500 | 0.616147  | 0.383853 | 0.026999 | 0.973001 | 0.25755 |
| 60-64 | 0.084647 | 0.783798 | 0.1875 | 0.652707  | 0.347293 | 0.015871 | 0.984129 | 0.24851 |
| 65-69 | 0.067024 | 0.791800 | 0.1250 | 0.701203  | 0.298797 | 0.008378 | 0.991622 | 0.23894 |
| 70-74 | 0.053098 | 0.792220 | 0.0625 | 0.746025  | 0.253975 | 0.003319 | 0.996681 | 0.23122 |
| 75-79 | 0.041174 | 0.775450 | 0.0000 | 0.775450* | 0.224550 | 0.000000 | 1.000000 | 0.22651 |
| 80-84 | 0.030602 | 0.743218 | 0.0000 | 0.743218* | 0.256782 | 0.000000 | 1.000000 | 0.23114 |
| 85-89 | 0.020845 | 0.681163 | 0.0000 | 0.681163* | 0.318837 | 0.000000 | 1.000000 | 0.24085 |
| 90-94 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0000 | 0.000000  | 1.000000 | 0.000000 | 1.000000 |         |

\* Para estos grupos se adoptó el enfoque tradicional.

**CUADRO 3.6**  
**México: probabilidades de transición y sobrevivencia, 1990**  
**(método de estados múltiples con proporciones)**

| Rango de edad<br>$x, x+n-1$ | Sobrevivencia<br>${}_n p_x$<br>(1) | Activo a:                        |                                    | Inactivo a:                      |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
|                             |                                    | activo<br>${}_n p_x^{aa}$<br>(2) | inactivo<br>${}_n p_x^{ai}$<br>(3) | activo<br>${}_n p_x^{ia}$<br>(4) | inactivo<br>${}_n p_x^{ii}$<br>(5) |
| <i>Hombres</i>              |                                    |                                  |                                    |                                  |                                    |
| 12-14                       | 0.997539                           | 0.626230                         | 0.371309                           | 0.254921                         | 0.742618                           |
| 15-19                       | 0.993705                           | 0.810933                         | 0.182773                           | 0.565419                         | 0.428286                           |
| 20-24                       | 0.990377                           | 0.911052                         | 0.079325                           | 0.695413                         | 0.294964                           |
| 25-29                       | 0.986783                           | 0.943633                         | 0.043150                           | 0.674267                         | 0.312516                           |
| 30-34                       | 0.982995                           | 0.946624                         | 0.036372                           | 0.530739                         | 0.452256                           |
| 35-39                       | 0.978753                           | 0.937663                         | 0.041090                           | 0.450818                         | 0.527935                           |
| 40-44                       | 0.973444                           | 0.923921                         | 0.049523                           | 0.385661                         | 0.587783                           |
| 45-49                       | 0.965974                           | 0.898674                         | 0.067300                           | 0.316380                         | 0.649593                           |
| 50-54                       | 0.953132                           | 0.862319                         | 0.090813                           | 0.245054                         | 0.708078                           |
| 55-59                       | 0.927312                           | 0.800217                         | 0.127095                           | 0.172223                         | 0.755088                           |
| 60-64                       | 0.887419                           | 0.730723                         | 0.156696                           | 0.106940                         | 0.780479                           |
| 65-69                       | 0.827990                           | 0.674152                         | 0.153838                           | 0.056692                         | 0.771298                           |
| 70-74                       | 0.742829                           | 0.599887                         | 0.142942                           | 0.021134                         | 0.721695                           |

|                |          |          |          |          |          |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 75-79          | 0.627789 | 0.492076 | 0.135714 | 0.000000 | 0.627789 |
| 80-84          | 0.485513 | 0.364903 | 0.120610 | 0.000000 | 0.485513 |
| 85-89          | 0.332596 | 0.239892 | 0.092703 | 0.000000 | 0.332596 |
| 90-94          | 0.197906 | 0.000000 | 0.197906 | 0.000000 | 0.197906 |
| <i>Mujeres</i> |          |          |          |          |          |
| 12-14          | 0.998662 | 0.545174 | 0.453488 | 0.091687 | 0.906976 |
| 15-19          | 0.997345 | 0.618341 | 0.379004 | 0.201024 | 0.796321 |
| 20-24          | 0.996554 | 0.643438 | 0.353116 | 0.178827 | 0.817727 |
| 25-29          | 0.995487 | 0.616110 | 0.379376 | 0.138996 | 0.856491 |
| 30-34          | 0.994010 | 0.594100 | 0.399909 | 0.129688 | 0.864322 |
| 35-39          | 0.991847 | 0.572990 | 0.418857 | 0.118575 | 0.873272 |
| 40-44          | 0.988532 | 0.574187 | 0.414345 | 0.090036 | 0.898496 |
| 45-49          | 0.983305 | 0.568484 | 0.414821 | 0.063124 | 0.920180 |
| 50-54          | 0.974943 | 0.580180 | 0.394763 | 0.041887 | 0.933057 |
| 55-59          | 0.961040 | 0.592142 | 0.368898 | 0.025947 | 0.935093 |
| 60-64          | 0.935883 | 0.610858 | 0.325026 | 0.014854 | 0.921030 |
| 65-69          | 0.894969 | 0.627555 | 0.267414 | 0.007498 | 0.887471 |
| 70-74          | 0.830714 | 0.619734 | 0.210981 | 0.002757 | 0.827958 |
| 75-79          | 0.734466 | 0.569542 | 0.164924 | 0.000000 | 0.734466 |
| 80-84          | 0.600764 | 0.446499 | 0.154265 | 0.000000 | 0.600764 |
| 85-89          | 0.437880 | 0.298268 | 0.139612 | 0.000000 | 0.437880 |
| 90-94          | 0.274376 | 0.000000 | 0.274376 | 0.000000 | 0.274376 |

$$= \frac{0.137482 - 0.171190 \times 0.595091}{0.828810} = 0.042963$$

$${}_5\hat{p}_{50}^{ii} = 1 - {}_5\hat{p}_{50}^{ia} = 1 - 0.042963 = 0.957037$$

y con (3.4):

$${}_5B_{50} = -\frac{1}{5} \frac{\ln \{1 - {}_5\hat{p}_{50}^{ai} - {}_5\hat{p}_{50}^{ia}\}}{{}_5\hat{p}_{50}^{ai} + {}_5\hat{p}_{50}^{ia}}$$

$$= -\frac{1}{5} \frac{\ln \{1 - 0.404909 - 0.042963\}}{0.404909 + 0.042963} = 0.26524$$

Todos estos valores se pueden localizar en el renglón correspondiente del cuadro 3.5.

Aplicando (3.4) obtenemos las tasas de ingreso y de retiro:

$${}_5m_{50}^{ia} = {}_5\hat{p}_{50}^{ia} {}_5B_{50} = 0.042963 \times 0.26524 = 0.011396$$

$${}_5m_{50}^{ai} = {}_5\hat{p}_{50}^{ai} {}_5B_{50} = 0.404909 \times 0.26524 = 0.107399$$

valores que se muestran en el renglón correspondiente del cuadro 3.8.

Mediante (3.6) obtenemos los años-persona vividos:

$${}_5L_{50}^{aa} = \ell_{50}^a \frac{{}_5q_{50} ({}_5m_{50}^{ia} + {}_5m_{50}) + {}_5p_{50}^{ai}}{{}_5\gamma_{50} + {}_5m_{50}}$$

$$= 154,760 \frac{(0.025057/0.005071)(0.011396+0.005071)+0.394763}{0.118795+0.005071}$$

$$= 594,889$$

$${}_5L_{50}^{ai} = \ell_{50}^a \frac{{}_5q_{50} {}_5m_{50}^{ai} - {}_5p_{50}^{ai}}{{}_5\gamma_{50} + {}_5m_{50}}$$

$$= 154,760 \frac{(0.025057/0.005071) \times 0.107399 - 0.394763}{0.118795+0.005071}$$

$$= 169,833$$

$${}_5L_{50}^{ia} = \ell_{50}^i \frac{{}_5q_{50} {}_5m_{50}^{ia} - {}_5p_{50}^{ia}}{{}_5\gamma_{50} + {}_5m_{50}}$$

$$= 749,267 \frac{(0.025057/0.005071) \times 0.011396 - 0.041887}{0.118795+0.005071}$$

$$= 87,244$$

$$\begin{aligned}
 {}_5L_{50}^{ii} &= \ell_{50}^i \frac{{}_5q_{50}({}_5m_{50}^{ai} + {}_5m_{50}) + {}_5p_{50}^{ia}}{{}_5m_{50}} \\
 &= 749,267 \frac{{}_5\gamma_{50} + {}_5m_{50}}{(0.025057/0.005071)(0.107399 + 0.005071) + 0.041887} \\
 &= 3,615,131
 \end{aligned}$$

de donde, los años-persona vividos en la actividad y en la inactividad de acuerdo con (2.19) son:

$$\begin{aligned}
 {}_5L_{50}^a &= {}_5L_{50}^{aa} + {}_5L_{50}^{ia} = 594,889 + 87,244 \\
 &= 682,133 \\
 {}_5L_{50}^i &= {}_5L_{50}^{ii} + {}_5L_{50}^{ia} = 169,833 + 3,615,131 \\
 &= 3,784,964
 \end{aligned}$$

En el cuadro 3.7 se presentan los años-persona vividos.

Despejando en (2.23) obtenemos los ingresos y los retiros:

$$\begin{aligned}
 {}_5H_{50}^{ia} &= {}_5L_{50}^i {}_5m_{50}^{ia} = 3,784,964 \times 0.011396 = 43,132 \\
 {}_5H_{50}^{ai} &= {}_5L_{50}^a {}_5m_{50}^{ai} = 682,133 \times 0.107399 = 73,261
 \end{aligned}$$

y las defunciones de activos e inactivos:

$$\begin{aligned}
 {}_5d_{50}^a &= {}_5L_{50}^a {}_5m_{50} = 682,133 \times 0.005071 = 3,459 \\
 {}_5d_{50}^i &= {}_5L_{50}^i {}_5m_{50} = 3,784,964 \times 0.005071 = 19,193
 \end{aligned}$$

Los eventos y las tasas se muestran en el cuadro 3.8, y las tasas de ingreso y de retiro en la gráfica 3.3.

Cabe preguntarse por la veracidad de los perfiles que exhiben las tasas que hemos estimado. El único patrón de contraste de que disponemos es el de los varones daneses 1972–1974. Comparando las gráficas 3.2 y 3.3, a simple vista podemos concluir que la pauta en las tasas de retiro estimadas para México en 1990 es prácticamente igual que para el país europeo; no obstante, en las tasas

**CUADRO 3.7**  
**México: años-persona vividos por la cohorte de la tabla de vida activa, 1990**  
**(métodos de estados múltiples con proporciones)**

| Rango de edad<br>$x, x+n-1$ | Un activo de edad $x$ en la:    |                                   |                                 | Un inactivo de edad $x$ en la:  |                                   |                                 | Actividad<br>$nL_x^a$<br>(7) | Inactividad<br>$nL_x^i$<br>(8) |
|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
|                             | actividad<br>$nL_x^{aa}$<br>(1) | inactividad<br>$nL_x^{ai}$<br>(2) | total<br>$nL_x \alpha_x$<br>(3) | actividad<br>$nL_x^{ia}$<br>(4) | inactividad<br>$nL_x^{ii}$<br>(5) | total<br>$nL_x \alpha_x$<br>(6) |                              |                                |
| <i>Hombres</i>              |                                 |                                   |                                 |                                 |                                   |                                 |                              |                                |
| 12-14                       | 0                               | 0                                 | 0                               | 421,054                         | 2,415,185                         | 2,836,239                       | 421,054                      | 2,415,185                      |
| 15-19                       | 1,067,403                       | 135,537                           | 1,202,940                       | 1,221,450                       | 2,282,867                         | 3,504,317                       | 2,288,853                    | 2,418,404                      |
| 20-24                       | 2,805,041                       | 147,022                           | 2,952,063                       | 750,042                         | 967,853                           | 1,717,895                       | 3,555,083                    | 1,114,875                      |
| 25-29                       | 3,774,667                       | 102,478                           | 3,877,145                       | 305,450                         | 434,107                           | 739,557                         | 4,080,117                    | 536,585                        |
| 30-34                       | 4,061,910                       | 87,478                            | 4,149,388                       | 122,336                         | 275,333                           | 397,669                         | 4,184,246                    | 362,811                        |
| 35-39                       | 4,033,804                       | 96,490                            | 4,130,294                       | 84,601                          | 245,474                           | 330,075                         | 4,118,405                    | 341,964                        |
| 40-44                       | 3,899,497                       | 111,757                           | 4,011,254                       | 74,438                          | 268,648                           | 343,086                         | 3,973,935                    | 380,405                        |
| 45-49                       | 3,680,626                       | 144,025                           | 3,824,651                       | 70,612                          | 328,265                           | 398,877                         | 3,751,238                    | 472,290                        |
| 50-54                       | 3,362,052                       | 180,749                           | 3,542,801                       | 70,698                          | 442,834                           | 513,532                         | 3,432,750                    | 623,583                        |
| 55-59                       | 2,912,415                       | 229,095                           | 3,141,510                       | 66,888                          | 609,987                           | 676,875                         | 2,979,303                    | 839,082                        |
| 60-64                       | 2,337,632                       | 240,676                           | 2,578,308                       | 56,846                          | 835,476                           | 892,322                         | 2,394,478                    | 1,076,152                      |
| 65-69                       | 1,732,091                       | 186,416                           | 1,918,507                       | 38,191                          | 1,028,376                         | 1,066,567                       | 1,770,282                    | 1,214,792                      |
| 70-74                       | 1,162,047                       | 128,022                           | 1,290,069                       | 15,628                          | 1,049,508                         | 1,065,136                       | 1,177,675                    | 1,177,530                      |
| 75-79                       | 659,480                         | 80,825                            | 740,305                         | 0                               | 885,966                           | 885,966                         | 659,480                      | 966,791                        |
| 80-84                       | 287,401                         | 39,745                            | 327,146                         | 0                               | 589,720                           | 589,720                         | 287,401                      | 629,465                        |

|          |        |        |         |   |         |         |        |         |
|----------|--------|--------|---------|---|---------|---------|--------|---------|
| 85-89    | 89,452 | 13,231 | 102,683 | 0 | 280,218 | 280,218 | 89,452 | 293,449 |
| 90-94    | 16,598 | 3,727  | 20,325  | 0 | 84,753  | 84,753  | 16,598 | 88,480  |
| 95 o más | 0      | 0      | 0       | 0 | 17,991  | 17,991  | 0      | 17,991  |

*Mujeres*

|          |           |         |           |         |           |           |           |           |
|----------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 12-14    | 0         | 0       | 0         | 148,536 | 2,713,674 | 2,862,210 | 148,536   | 2,713,674 |
| 15-19    | 342,160   | 94,948  | 437,108   | 498,174 | 3,825,754 | 4,323,928 | 840,334   | 3,920,702 |
| 20-24    | 911,982   | 227,085 | 1,139,067 | 364,224 | 3,243,320 | 3,607,544 | 1,276,206 | 3,470,405 |
| 25-29    | 1,083,151 | 294,193 | 1,377,344 | 262,199 | 3,088,301 | 3,350,500 | 1,345,350 | 3,382,494 |
| 30-34    | 1,016,165 | 297,217 | 1,313,382 | 248,771 | 3,141,060 | 3,389,831 | 1,264,936 | 3,438,277 |
| 35-39    | 928,406   | 290,255 | 1,218,661 | 232,727 | 3,218,900 | 3,451,627 | 1,161,133 | 3,509,155 |
| 40-44    | 846,989   | 258,850 | 1,105,839 | 178,999 | 3,340,190 | 3,519,189 | 1,025,988 | 3,599,040 |
| 45-49    | 727,392   | 222,094 | 949,486   | 128,544 | 3,482,788 | 3,611,332 | 855,936   | 3,704,882 |
| 50-54    | 594,889   | 169,833 | 764,722   | 87,244  | 3,615,131 | 3,702,375 | 682,133   | 3,784,964 |
| 55-59    | 470,837   | 124,078 | 594,915   | 54,752  | 3,677,558 | 3,732,310 | 525,589   | 3,801,636 |
| 60-64    | 360,967   | 82,798  | 443,765   | 31,253  | 3,634,061 | 3,665,314 | 392,220   | 3,716,859 |
| 65-69    | 268,416   | 50,598  | 319,014   | 15,342  | 3,434,391 | 3,449,733 | 283,758   | 3,484,989 |
| 70-74    | 189,500   | 29,155  | 218,655   | 5,303   | 3,038,400 | 3,043,703 | 194,803   | 3,067,555 |
| 75-79    | 120,464   | 15,846  | 136,310   | 0       | 2,430,850 | 2,430,850 | 120,464   | 2,446,696 |
| 80-84    | 61,951    | 9,285   | 71,236    | 0       | 1,658,863 | 1,658,863 | 61,951    | 1,668,148 |
| 85-89    | 23,562    | 4,358   | 27,920    | 0       | 884,445   | 884,445   | 23,562    | 888,803   |
| 90-94    | 5,347     | 1,606   | 6,953     | 0       | 326,609   | 326,609   | 5,347     | 328,215   |
| 95 o más | 0         | 0       | 0         | 0       | 80,921    | 80,921    | 0         | 80,921    |

## CUADRO 3.8

México: eventos y tasas de eventualidad en la tabla de vida activa,  
1990 (método de estados múltiples con proporciones)

| Rango<br>de edad<br>x,x+n-1 | Ingresos<br>${}_nH_x^{ia}$<br>(1) | Retiros<br>${}_nH_x^{ai}$<br>(2) | Defunciones:                  |                                 |                           | Tasas:                           |                                 |                            |
|-----------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
|                             |                                   |                                  | activos<br>${}_nd_x^a$<br>(3) | inactivos<br>${}_nd_x^i$<br>(4) | total<br>${}_nd_x$<br>(5) | ingreso<br>${}_nm_x^{ia}$<br>(6) | retiro<br>${}_nm_x^{ai}$<br>(7) | muerte<br>${}_nm_x$<br>(8) |
| <i>Hombres</i>              |                                   |                                  |                               |                                 |                           |                                  |                                 |                            |
| 12-14                       | 323,870                           | 82,241                           | 346                           | 1,983                           | 2,329                     | 0.134097                         | 0.195321                        | 0.000821                   |
| 15-19                       | 511,035                           | 156,344                          | 2,890                         | 3,053                           | 5,943                     | 0.211311                         | 0.068307                        | 0.001263                   |
| 20-24                       | 305,117                           | 110,983                          | 6,873                         | 2,156                           | 9,029                     | 0.273678                         | 0.031218                        | 0.001933                   |
| 25-29                       | 130,958                           | 63,726                           | 10,854                        | 1,427                           | 12,281                    | 0.244057                         | 0.015619                        | 0.002660                   |
| 30-34                       | 58,415                            | 46,168                           | 14,348                        | 1,244                           | 15,592                    | 0.161006                         | 0.011034                        | 0.003429                   |
| 35-39                       | 43,771                            | 48,048                           | 17,683                        | 1,468                           | 19,151                    | 0.128000                         | 0.011667                        | 0.004294                   |
| 40-44                       | 39,948                            | 53,589                           | 21,381                        | 2,047                           | 23,428                    | 0.105015                         | 0.013485                        | 0.005380                   |
| 45-49                       | 39,425                            | 66,610                           | 25,953                        | 3,268                           | 29,221                    | 0.083476                         | 0.017757                        | 0.006919                   |
| 50-54                       | 39,533                            | 80,649                           | 32,902                        | 5,977                           | 38,879                    | 0.063397                         | 0.023494                        | 0.009585                   |
| 55-59                       | 37,635                            | 98,614                           | 44,843                        | 12,629                          | 57,472                    | 0.044852                         | 0.033100                        | 0.015051                   |
| 60-64                       | 30,776                            | 100,339                          | 56,949                        | 25,595                          | 82,544                    | 0.028598                         | 0.041904                        | 0.023784                   |
| 65-69                       | 19,195                            | 75,903                           | 66,373                        | 45,546                          | 111,919                   | 0.015801                         | 0.042876                        | 0.037493                   |
| 70-74                       | 7,571                             | 51,215                           | 69,278                        | 69,269                          | 138,547                   | 0.006430                         | 0.043488                        | 0.058826                   |
| 75-79                       | 0                                 | 32,126                           | 60,403                        | 88,551                          | 148,954                   | 0.000000                         | 0.048714                        | 0.091592                   |

|                |         |         |        |         |         |          |          |          |
|----------------|---------|---------|--------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 80-84          | 0       | 16,415  | 40,517 | 88,739  | 129,256 | 0.000000 | 0.057115 | 0.140976 |
| 85-89          | 0       | 5,845   | 19,018 | 62,390  | 81,408  | 0.000000 | 0.065348 | 0.212608 |
| 90-94          | 0       | 2,707   | 5,140  | 27,400  | 32,540  | 0.000000 | 0.163092 | 0.309675 |
| 95 o más       |         |         |        | 8,029   | 8,029   |          |          | 0.446279 |
| <i>Mujeres</i> |         |         |        |         |         |          |          |          |
| 12-14          | 120,096 | 32,514  | 66     | 1,211   | 1,277   | 0.044256 | 0.218893 | 0.000446 |
| 15-19          | 236,775 | 95,680  | 447    | 2,084   | 2,531   | 0.060391 | 0.113859 | 0.000532 |
| 20-24          | 178,058 | 129,296 | 881    | 2,396   | 3,277   | 0.051308 | 0.101313 | 0.000690 |
| 25-29          | 133,412 | 144,831 | 1,217  | 3,060   | 4,277   | 0.039442 | 0.107653 | 0.000905 |
| 30-34          | 128,143 | 145,373 | 1,520  | 4,131   | 5,651   | 0.037270 | 0.114925 | 0.001202 |
| 35-39          | 120,867 | 141,273 | 1,901  | 5,744   | 7,645   | 0.034443 | 0.121668 | 0.001637 |
| 40-44          | 91,720  | 120,328 | 2,366  | 8,300   | 10,666  | 0.025485 | 0.117280 | 0.002306 |
| 45-49          | 65,143  | 98,901  | 2,881  | 12,468  | 15,349  | 0.017583 | 0.115547 | 0.003365 |
| 50-54          | 43,132  | 73,261  | 3,459  | 19,193  | 22,652  | 0.011396 | 0.107399 | 0.005071 |
| 55-59          | 26,435  | 51,961  | 4,171  | 30,167  | 34,338  | 0.006954 | 0.098862 | 0.007935 |
| 60-64          | 14,660  | 33,850  | 5,184  | 49,125  | 54,309  | 0.003944 | 0.086305 | 0.013217 |
| 65-69          | 6,976   | 20,259  | 6,269  | 76,992  | 83,261  | 0.002002 | 0.071394 | 0.022092 |
| 70-74          | 2,354   | 11,440  | 7,172  | 112,931 | 120,103 | 0.000767 | 0.058724 | 0.036815 |
| 75-79          | 0       | 6,127   | 7,344  | 149,152 | 156,496 | 0.000000 | 0.050862 | 0.060961 |
| 80-84          | 0       | 3,677   | 6,188  | 166,628 | 172,816 | 0.000000 | 0.059353 | 0.099888 |
| 85-89          | 0       | 1,809   | 3,775  | 142,405 | 146,180 | 0.000000 | 0.076791 | 0.160221 |
| 90-94          | 0       | 1,049   | 1,325  | 81,303  | 82,628  | 0.000000 | 0.196185 | 0.247714 |
| 95 o más       |         |         |        | 31,244  | 31,244  |          |          | 0.386105 |

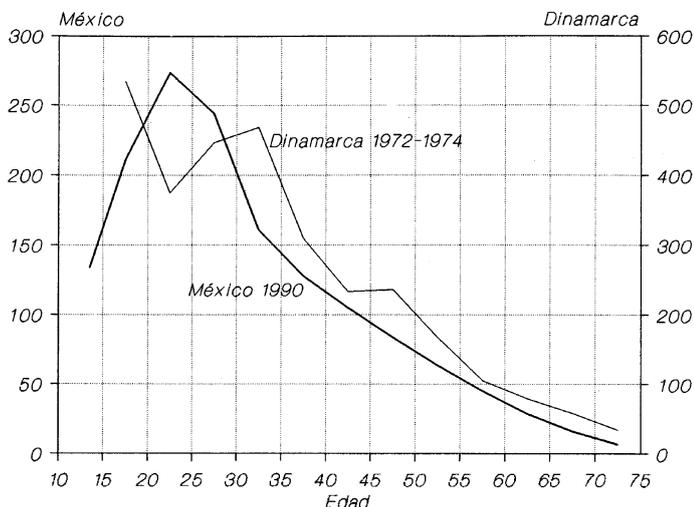
de ingreso hay una clara diferencia: la de Dinamarca es trimodal y la de México unimodal; aunque el tercer “pico” danés, poco después de los 45 años, bien puede ser reflejo de algún hecho coyuntural.

Es probable que la diferencia no sea tan marcada si en lugar de edades individuales consideramos las tasas para Dinamarca por grupos. En la gráfica 3.4 se hace el contraste por grupos, pudiendo observar que la primera moda danesa ha desaparecido y en su lugar se tiene para el grupo 16–19 años el máximo absoluto de las tasas de ingreso; y si dejamos de lado el “pico” del grupo 45–49 años, ambas pautas son unimodales. El máximo diez años más joven en México refleja de alguna manera la menor escolaridad promedio de la PEA mexicana; y la curva monótona ascendente en México en los primeros años de la vida laboral, en lugar del descenso en Dinamarca, indica la inserción más precoz en la actividad económica en los varones mexicanos. En efecto, si tomamos los 15 años como la mínima edad para trabajar en México, transfiriendo la PEA de 12–14 años a la censada en el grupo 15–19, la tasa de ingreso masculina para el segundo grupo habría sido de 0.29025 (o 290.25 por mil), es decir, la máxima en todo el rango etario de participación. Podemos concluir entonces que nuestras estimaciones son razonablemente correctas.

En la gráfica 3.5, se muestra la desviación relativa de las proporciones de participación deducidas de la tabla de movimientos múltiples respecto a las observadas. Igual que en el método de las tasas del enfoque tradicional (gráfica 2.6), se tiene poca distorsión, excepto en el grupo 12–14. Si bien pudiera pensarse que la sobrestimación en el primer intervalo de edades se debe a haber tomado

GRÁFICA 3.4

Tasas de ingreso masculinas en México, 1990 y Dinamarca, 1972-1974

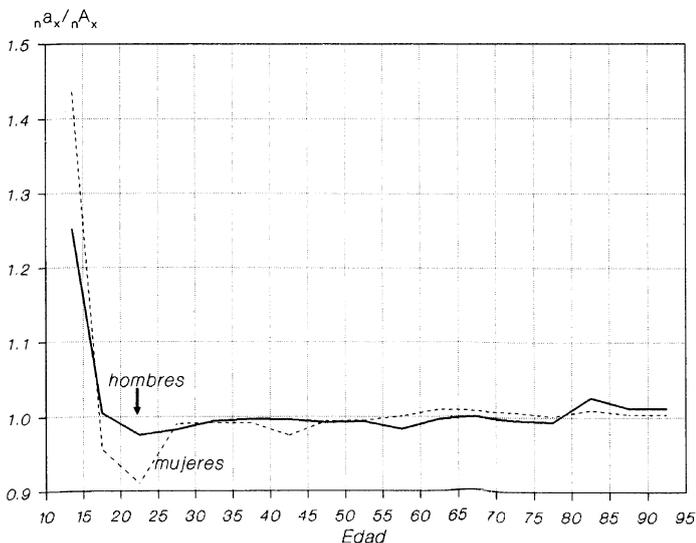


Fuentes : México, cuadro 3.8.

Dinamarca, promedios por grupo de las tasas por edades individuales de Willekens (1980: 574)

GRÁFICA 3.5

México: desviación relativa de las proporciones de participación deducidas de la tabla de movimientos múltiples respecto de las proporciones observadas, 1990



Fuente: cuadros 1.1 y 3.7.

los ponderadores  ${}_3w_{12}^{aa}$  iguales a un medio, revisando la gráfica 2.6, correspondiente al enfoque tradicional y por ende para  ${}_3w_{12}^{aa} = 0$ , concluimos que el sesgo obedece al particular patrón de inserción en la actividad económica en México en 1990 y no tanto a la selección del ponderador. Incluso, la gráfica 2.7 avala esta afirmación, pues al haber tomado nula la proporción instantánea de activos a los 12 años, se tiene la menor sobrestimación posible de la proporción para el grupo 12-14.

En el cuadro 3.9 y en la gráfica 3.6, se muestran las esperanzas de vida activa bajo el enfoque de movimientos múltiples. Igual que en las tasas de movilidad, al asumir la presencia simultánea de ingresos y de retiros de la actividad, podemos observar cambios realmente significativos en las esperanzas de vida, cuando se comparan con las obtenidas mediante el enfoque tradicional (cuadros 2.10 y 2.11 y gráfica 2.8).

En los activos, la ocurrencia de retiros en los primeros años de vida propicia, por un lado, una disminución en la vida media activa bajo la óptica de movimientos múltiples hasta los 70 años, en mujeres incluso a menos de la mitad hasta los 35 años;<sup>4</sup> y por otro, el consecuente aumento en la vida inactiva futura: en hombres, pasando de una pauta escasamente ascendente hasta los 40 años por el método tradicional, a un patrón monótono decreciente en todo el rango de edades; y en mujeres, a más del doble a los 12 y 15 años, y superior a 1.5 veces hasta los 35.

En los inactivos, la presencia de ingresos a partir de la edad modal de participación causa el efecto in-

---

<sup>4</sup>Recuérdese que a partir de los 75 años adoptamos el enfoque tradicional.

verso: en hombres, un drástico achatamiento del patrón por edad en la vida media inactiva, donde el marcado “pico” a los 30 y 35 años del enfoque tradicional desaparece, y se traslada de manera mucho más suave a los 45 años, además de un notable aumento en la vida activa para un inactivo a partir de los 25 años, cuyo perfil es prácticamente el mismo que para la esperanza de vida activa de un activo; y en mujeres, la esperanza de vida inactiva es inferior hasta los 70 años, desapareciendo el ascenso hasta los 20 años del patrón en el enfoque tradicional, y el patrón de la vida activa futura exhibe un descenso más suave.

En la gráfica 3.7, se presentan los porcentajes de la vida restante que un activo o un inactivo esperan pasar en la actividad, contrastados con el porcentaje correspondiente a los años netos de vida activa del capítulo 1. Es interesante anotar, al comparar con la gráfica 2.9, el acercamiento a los años netos en hombres cuando se asume la ocurrencia simultánea de ingresos y retiros, sobre todo en la vida activa para un activo de los 20 a los 40 años de edad, y la proximidad en mujeres en la vida activa para una inactiva, mientras el peculiar perfil en el porcentaje de la vida restante que ha de pasar en la actividad una activa, es mucho más marcado bajo el enfoque de movimientos múltiples.

En el cuadro 3.10, se comparan los años netos derivados de la tabla de movimientos múltiples, con los calculados de manera directa (cuadro 1.4); y en la gráfica 3.8, la proporción que los primeros representan de los segundos. Los resultados son prácticamente iguales a los obtenidos con el método tradicional, por lo que se puede mencionar nuevamente que el error de menos de 3% es despreciable.

**CUADRO 3.9**  
**México: esperanzas de vida activa, 1990**  
**(método de movimientos múltiples con proporciones)**

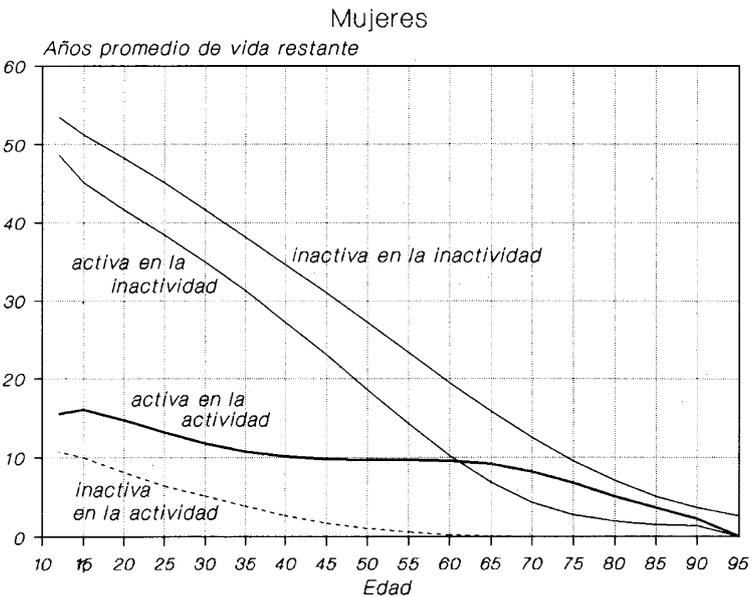
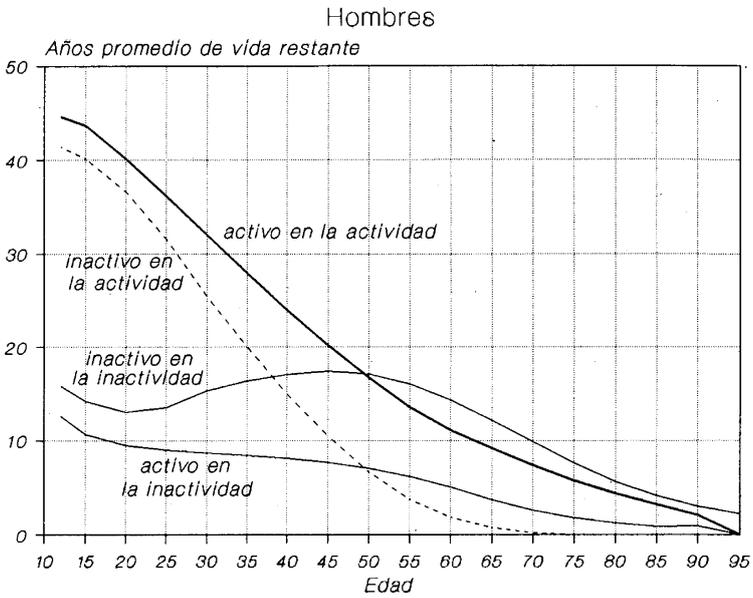
| Edad<br><i>x</i> | Para un activo de edad <i>x</i> en la:                |   |   | Para un inactivo de edad <i>x</i> en la:              |   |   | Total<br><i>e<sub>x</sub></i> |
|------------------|---|---|---|---|---|---|-------------------------------|
|                  | actividad<br><i>e<sub>x</sub><sup>aa</sup></i><br>(1) | inactividad<br><i>e<sub>x</sub><sup>ai</sup></i><br>(2) | % actividad<br>$\frac{e_x^{aa}}{e_x} \times 100$<br>(3) | actividad<br><i>e<sub>x</sub><sup>ia</sup></i><br>(4) | inactividad<br><i>e<sub>x</sub><sup>ii</sup></i><br>(5) | % actividad<br>$\frac{e_x^{ia}}{e_x} \times 100$<br>(6) |                               |
| <i>Hombres</i>   |   |   |   |   |   |   |                               |
| 12               | 44.62   | 12.59   | 78.0  | 41.39   | 15.82   | 72.4  | 57.21                         |
| 15               | 43.70   | 10.65   | 80.4  | 40.14   | 14.21   | 73.9  | 54.35                         |
| 20               | 40.17   | 9.50  | 80.9  | 36.63   | 13.04   | 73.7  | 49.67                         |
| 25               | 36.15   | 8.98  | 80.1  | 31.59   | 13.55   | 70.0  | 45.13                         |
| 30               | 32.03   | 8.67  | 78.7  | 25.40   | 15.30   | 62.4  | 40.70                         |
| 35               | 27.94   | 8.42  | 76.8  | 20.01   | 16.35   | 55.0  | 36.36                         |
| 40               | 23.98   | 8.11  | 74.7  | 15.03   | 17.06   | 46.8  | 32.09                         |
| 45               | 20.20   | 7.70  | 72.4  | 10.50   | 17.40   | 37.6  | 27.90                         |
| 50               | 16.71   | 7.08  | 70.2  | 6.69  | 17.10   | 28.1  | 23.79                         |
| 55               | 13.60   | 6.23  | 68.6  | 3.79  | 16.04   | 19.1  | 19.83                         |
| 60               | 11.10   | 5.07  | 68.6  | 1.85  | 14.33   | 11.4  | 16.18                         |
| 65               | 9.16  | 3.73  | 71.1  | 0.73  | 12.17   | 5.6   | 12.89                         |
| 70               | 7.41  | 2.63  | 73.8  | 0.19  | 9.85  | 1.9   | 10.03                         |
| 75               | 5.78  | 1.84  | 75.9  | 0.00  | 7.62  | 0.0   | 7.62                          |

|    |      |      |      |      |      |     |      |
|----|------|------|------|------|------|-----|------|
| 80 | 4.39 | 1.27 | 77.5 | 0.00 | 5.66 | 0.0 | 5.66 |
| 85 | 3.24 | 0.91 | 78.2 | 0.00 | 4.15 | 0.0 | 4.15 |
| 90 | 2.12 | 0.92 | 69.7 | 0.00 | 3.03 | 0.0 | 3.03 |
| 95 | 0.00 | 0.00 |      | 0.00 | 2.24 |     | 2.24 |

*Mujeres*

|    |       |       |      |       |       |      |       |
|----|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|
| 12 | 15.53 | 48.59 | 24.2 | 10.69 | 53.43 | 16.7 | 64.12 |
| 15 | 16.08 | 45.12 | 26.3 | 9.99  | 51.21 | 16.3 | 61.20 |
| 20 | 14.72 | 41.64 | 26.1 | 8.11  | 48.25 | 14.4 | 56.36 |
| 25 | 13.14 | 38.41 | 25.5 | 6.43  | 45.12 | 12.5 | 51.55 |
| 30 | 11.80 | 34.97 | 25.2 | 5.13  | 41.63 | 11.0 | 46.77 |
| 35 | 10.73 | 31.30 | 25.5 | 3.91  | 38.13 | 9.3  | 42.03 |
| 40 | 10.13 | 27.23 | 27.1 | 2.71  | 34.65 | 7.3  | 37.36 |
| 45 | 9.74  | 23.02 | 29.7 | 1.76  | 31.00 | 5.4  | 32.76 |
| 50 | 9.67  | 18.60 | 34.2 | 1.06  | 27.21 | 3.7  | 28.27 |
| 55 | 9.65  | 14.28 | 40.3 | 0.58  | 23.35 | 2.4  | 23.93 |
| 60 | 9.56  | 10.23 | 48.3 | 0.27  | 19.52 | 1.4  | 19.79 |
| 65 | 9.13  | 6.83  | 57.2 | 0.11  | 15.86 | 0.7  | 15.96 |
| 70 | 8.17  | 4.36  | 65.2 | 0.03  | 12.50 | 0.2  | 12.53 |
| 75 | 6.75  | 2.79  | 70.8 | 0.00  | 9.54  | 0.0  | 9.54  |
| 80 | 5.10  | 1.96  | 72.2 | 0.00  | 7.06  | 0.0  | 7.06  |
| 85 | 3.63  | 1.47  | 71.2 | 0.00  | 5.10  | 0.0  | 5.10  |
| 90 | 2.25  | 1.39  | 61.9 | 0.00  | 3.64  | 0.0  | 3.64  |
| 95 | 0.00  | 0.00  |      | 0.00  | 2.59  |      | 2.59  |

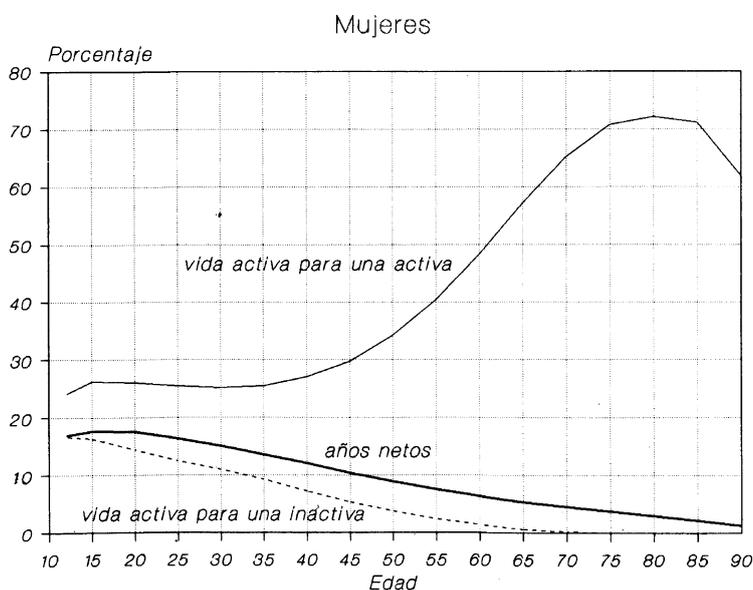
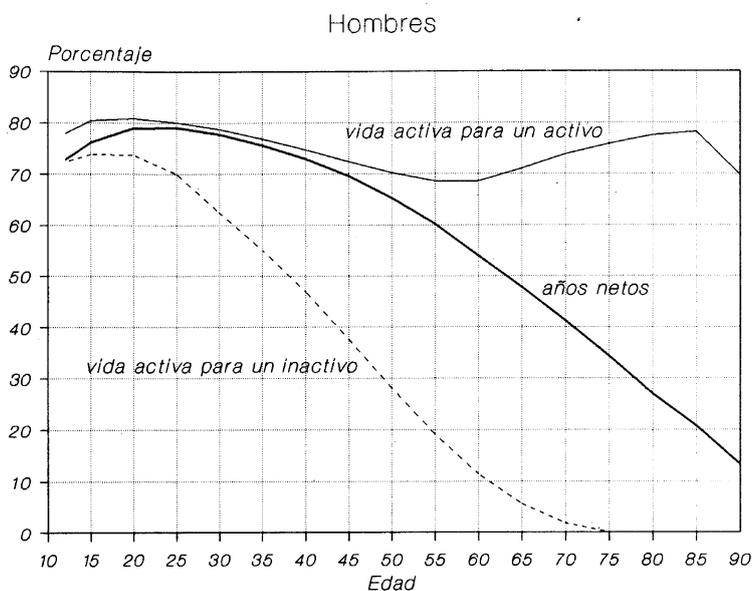
**GRÁFICA 3.6**  
**México: esperanzas de vida activa, 1990**  
**(método de movimientos múltiples con proporciones)**



Fuente: cuadro 3.9

GRÁFICA 3.7

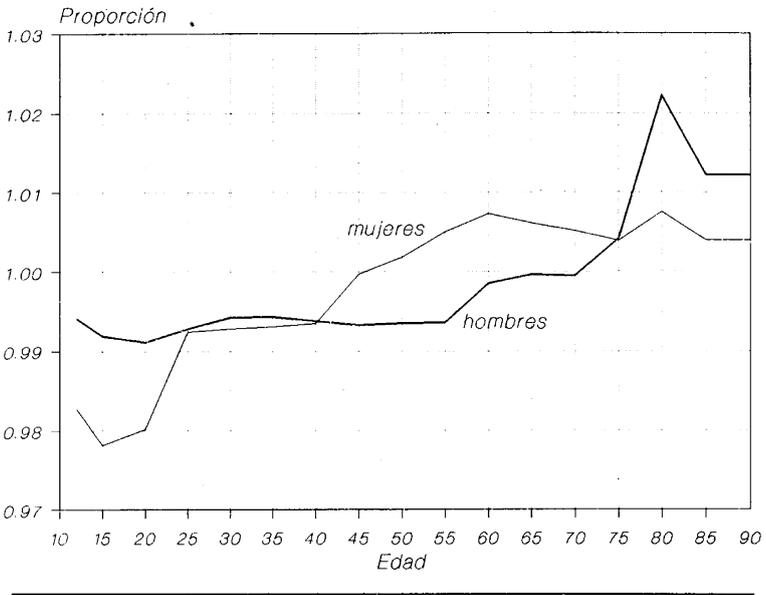
**México: porcentaje de la vida restante que una persona espera pasar en la actividad, 1990  
(método de movimientos múltiples con proporciones)**



Fuente: columna (7) del cuadro 1.4 y columnas (3) y (6) del cuadro 3.9.

GRÁFICA 3.8

México: proporción que los años netos de vida activa estimados por el método de movimientos múltiples representan de los deducidos por el método directo, 1990



Fuente: cuadro 3.10.

### 3.2.3. Asignación biproporcional iterativa

El sistema de ecuaciones lineales (2.14) se puede acomodar en un arreglo bivariado, tomando al estado de presencia al inicio del intervalo genérico de  $n$  años como una variable, y al estado de presencia al final como la otra:

| Estado final | Estado inicial              |                        |                |
|--------------|-----------------------------|------------------------|----------------|
|              | actividad                   | inactividad            | suma           |
| actividad    | $\alpha_x n \hat{p}_x^{aa}$ | $l_x n \hat{p}_x^{ia}$ | $\alpha_{x+n}$ |
| inactividad  | $\alpha_x n \hat{p}_x^{ai}$ | $l_x n \hat{p}_x^{ii}$ | $l_{x+n}$      |
| suma         | $\alpha_x$                  | $l_x$                  | 1              |

Es claro que los marginales renglón se satisfacen por las ecuaciones básicas (2.14), y los columna por la propiedad de cerradura (2.9).

Tomemos un intervalo donde las proporciones instantáneas aumentan y adoptemos el enfoque tradicional. En este caso  ${}_n\hat{p}_x^{ai} = 0$  y el nuevo arreglo es:

| Estado final | Estado inicial |                           |                |
|--------------|----------------|---------------------------|----------------|
|              | actividad      | inactividad               | suma           |
| actividad    | $\alpha_x$     | $\alpha_{x+n} - \alpha_x$ | $\alpha_{x+n}$ |
| inactividad  | 0              | $l_{x+n}$                 | $l_{x+n}$      |
| suma         | $\alpha_x$     | $l_x$                     | 1              |

Es decir, en ausencia de mortalidad, los ingresos a la actividad per cápita son simplemente  $\alpha_{x+n} - \alpha_x$ .

En la parte previa de esta sección, lo que hemos venido haciendo es fijar arbitrariamente un factor  ${}_n\kappa_x$  — estrictamente positivo— que aumenta los ingresos y los retiros en la misma magnitud:

$$\alpha_x < \alpha_{x+n}:$$

| Estado final | Estado inicial   |   |                |
|--------------|--|---|----------------|
|              | actividad  | inactividad   | suma           |
| actividad    | $(1 + {}_n\kappa_x) \alpha_x$<br>$- {}_n\kappa_x \alpha_{x+n}$ | $(1 + {}_n\kappa_x)$<br>$\times (\alpha_{x+n} - \alpha_x)$        | $\alpha_{x+n}$ |
| inactividad  | ${}_n\kappa_x (\alpha_{x+n} - \alpha_x)$                       | $1 + {}_n\kappa_x \alpha_x$<br>$-(1 + {}_n\kappa_x) \alpha_{x+n}$ | $l_{x+n}$      |
| suma         | $\alpha_x$   | $l_x$   | 1              |

El saldo neto (ingresos menos retiros) per cápita se mantiene igual  $\alpha_{x+n} - \alpha_x$ , satisfaciendo una propiedad fundamental de la tabla de vida activa: el aumento en la

CUADRO 3.10  
**México: años netos de vida activa e inactiva  
 por el método directo y el de movimientos múltiples, 1990**

| Edad<br>$x$    | Directo:                 |                            | De movimientos múltiples: |                            |
|----------------|--------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
|                | activa<br>$e_x^a$<br>(1) | inactiva<br>$e_x^i$<br>(2) | activa<br>$e_x^a$<br>(3)  | inactiva<br>$e_x^i$<br>(4) |
| <i>Hombres</i> |                          |                            |                           |                            |
| 12             | 41.64                    | 15.57                      | 41.39                     | 15.82                      |
| 15             | 41.38                    | 12.96                      | 41.05                     | 13.30                      |
| 20             | 39.22                    | 10.46                      | 38.87                     | 10.80                      |
| 25             | 35.68                    | 9.45                       | 35.42                     | 9.71                       |
| 30             | 31.63                    | 9.07                       | 31.45                     | 9.25                       |
| 35             | 27.50                    | 8.86                       | 27.35                     | 9.01                       |
| 40             | 23.42                    | 8.67                       | 23.27                     | 8.82                       |
| 45             | 19.41                    | 8.49                       | 19.28                     | 8.62                       |
| 50             | 15.54                    | 8.25                       | 15.44                     | 8.35                       |
| 55             | 11.93                    | 7.90                       | 11.86                     | 7.97                       |
| 60             | 8.74                     | 7.44                       | 8.72                      | 7.45                       |
| 65             | 6.15                     | 6.74                       | 6.15                      | 6.74                       |
| 70             | 4.14                     | 5.89                       | 4.14                      | 5.89                       |
| 75             | 2.62                     | 5.00                       | 2.63                      | 4.99                       |
| 80             | 1.53                     | 4.13                       | 1.57                      | 4.10                       |

|                |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| 85             | 0.86  | 3.29  | 0.87  | 3.28  |
| 90             | 0.40  | 2.63  | 0.41  | 2.62  |
| 95             | 0.00  | 2.24  | 0.00  | 2.24  |
| <i>Mujeres</i> |       |       |       |       |
| 12             | 10.88 | 53.24 | 10.69 | 53.43 |
| 15             | 10.79 | 50.42 | 10.55 | 50.65 |
| 20             | 9.89  | 46.47 | 9.70  | 46.66 |
| 25             | 8.45  | 43.10 | 8.38  | 43.16 |
| 30             | 7.04  | 39.72 | 6.99  | 39.77 |
| 35             | 5.73  | 36.31 | 5.69  | 36.35 |
| 40             | 4.52  | 32.84 | 4.49  | 32.87 |
| 45             | 3.42  | 29.34 | 3.42  | 29.34 |
| 50             | 2.53  | 25.74 | 2.53  | 25.74 |
| 55             | 1.81  | 22.12 | 1.82  | 22.11 |
| 60             | 1.27  | 18.52 | 1.28  | 18.51 |
| 65             | 0.86  | 15.10 | 0.87  | 15.09 |
| 70             | 0.57  | 11.96 | 0.57  | 11.95 |
| 75             | 0.36  | 9.19  | 0.36  | 9.18  |
| 80             | 0.21  | 6.85  | 0.21  | 6.85  |
| 85             | 0.11  | 4.99  | 0.11  | 4.99  |
| 90             | 0.05  | 3.59  | 0.05  | 3.59  |
| 95             | 0.00  | 2.59  | 0.00  | 2.59  |

*Fuente:* columnas (5) y (6) del cuadro 1.4 para (1) y (2).

proporción de activos sólo puede ser resultado de la diferencia de entradas menos salidas de la actividad.

Un esquema similar se tiene para el caso de un intervalo de edad donde descienden las proporciones de participación:

$$\alpha_x > \alpha_{x+n}:$$

| Estado final | Estado inicial   |   |                |
|--------------|--|---|----------------|
|              | actividad  | inactividad   | suma           |
| actividad    | $(1 + {}_n\kappa_x) \alpha_{x+n}$<br>$- {}_n\kappa_x \alpha_x$ | ${}_n\kappa_x (\alpha_x - \alpha_{x+n})$                          | $\alpha_{x+n}$ |
| inactividad  | $(1 + {}_n\kappa_x)$<br>$\times (\alpha_x - \alpha_{x+n})$     | $1 + {}_n\kappa_x \alpha_{x+n}$<br>$-(1 + {}_n\kappa_x) \alpha_x$ | $l_{x+n}$      |
| suma         | $\alpha_x$   | $l_x$   | 1              |

Ahora la diferencia de retiros menos ingresos se mantiene igual a  $\alpha_x - \alpha_{x+n}$ .<sup>5</sup>

Además hay una relación directa entre  ${}_n\kappa_x$  y  ${}_nw_x^{aa}$ . En efecto, para un intervalo ascendente:

$$\begin{aligned} {}_n\hat{p}_x^{aa} &= \frac{(1 + {}_n\kappa_x) \alpha_x - {}_n\kappa_x \alpha_{x+n}}{\alpha_x} \\ &= 1 + {}_n\kappa_x - {}_n\kappa_x \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x} \\ &= {}_nw_x^{aa} \alpha_{x+n} + 1 - {}_nw_x^{aa} \end{aligned}$$

y despejando:

<sup>5</sup>El saldo neto, definido como ingresos menos retiros, es siempre igual a  $\alpha_{x+n} - \alpha_x$ , independientemente del tipo de intervalo de edad. Cuando este último es descendente, el saldo es negativo y va de acuerdo con la disminución en la fracción de activos.

$$\begin{aligned}
 {}_n\kappa_x &= {}_n w_x^{aa} \alpha_x \frac{1-\alpha_{x+n}}{\alpha_{x+n}-\alpha_x} && \text{para } \alpha_x < \alpha_{x+n} \\
 {}_n\kappa_x &= {}_n w_x^{aa} \alpha_{x+n} \frac{1-\alpha_x}{\alpha_x-\alpha_{x+n}} && \text{para } \alpha_x > \alpha_{x+n}
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

El lector puede deducir fácilmente la segunda igualdad.

¿Cuáles son los valores de  ${}_n\kappa_x$  implícitos en la selección de los ponderadores  ${}_n w_x^{aa}$  del cuadro 3.5? La respuesta aparece en el cuadro 3.11. Es claro que el factor  ${}_n\kappa_x$  está determinado casi totalmente por la diferencia en las proporciones instantáneas de participación al inicio y al final del intervalo de  $n$  años, y no tanto por el ponderador  ${}_n w_x^{aa}$ . Un rasgo interesante es que el factor  ${}_n\kappa_x$  es mayor para las mujeres en todos los grupos de edad. Una alternativa pudiera ser el asumir iguales fracciones para ambos sexos del saldo neto per cápita, en lugar de ponderadores: tomar los factores masculinos —reduciendo a dos el del grupo 35–39—, despejar  ${}_n w_x^{aa}$  en (3.16) y repetir todos los cálculos de la subsección anterior. El lector interesado puede llevar a cabo este ejercicio.

El objetivo que perseguimos en esta subsección no es la fijación arbitraria de los factores  ${}_n\kappa_x$ , sino la estimación de las probabilidades de transición con base en las proporciones instantáneas de participación y el procedimiento de asignación biproporcional iterativa. Este algoritmo presupone conocidos los marginales de los arreglos y valores iniciales para las celdas del mismo, cuyos verdaderos valores nos son desconocidos. Este es nuestro caso, pues la información que conocemos es precisamente la de las proporciones instantáneas de participación. El arreglo inicial es:

CUADRO 3.11  
**México: fracción del saldo neto per cápita  ${}_nK_x$   
 asociado al ponderador  ${}_nw_x^{aa}$ , 1990**

| Rango de edad<br>$x, x+n-1$ | Hombres           |                              |                                      | Mujeres           |                              |                                      |
|-----------------------------|-------------------|------------------------------|--------------------------------------|-------------------|------------------------------|--------------------------------------|
|                             | tipo de intervalo | ponderador<br>${}_nw_x^{aa}$ | fracción del saldo neto<br>${}_nK_x$ | tipo de intervalo | ponderador<br>${}_nw_x^{aa}$ | fracción del saldo neto<br>${}_nK_x$ |
|                             | (1)               | (2)                          | (3)                                  | (4)               | (5)                          | (6)                                  |
| 12-14                       | ascendente        | 0.5000                       | 0.00000                              | ascendente        | 0.5000                       | 0.00000                              |
| 15-19                       | ascendente        | 0.5000                       | 0.12481                              | ascendente        | 0.5000                       | 0.23547                              |
| 20-24                       | ascendente        | 0.5000                       | 0.24381                              | ascendente        | 0.5000                       | 1.65588                              |
| 25-29                       | ascendente        | 0.5000                       | 0.50489                              | descendente       | 0.5000                       | 8.19524                              |
| 30-34                       | ascendente        | 0.5000                       | 2.50957                              | descendente       | 0.5000                       | 5.13496                              |
| 35-39                       | descendente       | 0.5000                       | 7.11609                              | descendente       | 0.5000                       | 4.04547                              |
| 40-44                       | descendente       | 0.4375                       | 1.99462                              | descendente       | 0.4375                       | 2.24167                              |
| 45-49                       | descendente       | 0.3750                       | 0.96186                              | descendente       | 0.3750                       | 1.37408                              |
| 50-54                       | descendente       | 0.3125                       | 0.64242                              | descendente       | 0.3125                       | 1.05637                              |
| 55-59                       | descendente       | 0.2500                       | 0.41236                              | descendente       | 0.2500                       | 0.78978                              |
| 60-64                       | descendente       | 0.1875                       | 0.30923                              | descendente       | 0.1875                       | 0.60633                              |
| 65-69                       | descendente       | 0.1250                       | 0.25766                              | descendente       | 0.1250                       | 0.43514                              |
| 70-74                       | descendente       | 0.0625                       | 0.13905                              | descendente       | 0.0625                       | 0.22233                              |

Fuente: columnas (3) del cuadro 3.5 para (2) y (5).

| Estado final | Estado inicial          |                         |                |
|--------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
|              | actividad               | inactividad             | suma           |
| actividad    | ${}_n\hat{E}_x^{aa(o)}$ | ${}_n\hat{E}_x^{ia(o)}$ | $\alpha_{x+n}$ |
| inactividad  | ${}_n\hat{E}_x^{ai(o)}$ | ${}_n\hat{E}_x^{ii(o)}$ | $\iota_{x+n}$  |
| suma         | $\alpha_x$              | $\iota_x$               | 1              |

Donde las  $\hat{E}$  expresan las transiciones per cápita en ausencia de mortalidad, y el sobreíndice (o) indica que es el arreglo inicial. Igualando celda a celda con nuestro primer arreglo, tenemos una posibilidad para el arreglo inicial:

$${}_n\hat{E}_x^{aa(o)} = \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{aa(o)} \quad {}_n\hat{E}_x^{ai(o)} = \alpha_x {}_n\hat{p}_x^{ai(o)}$$

$${}_n\hat{E}_x^{ia(o)} = \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ia(o)} \quad {}_n\hat{E}_x^{ii(o)} = \iota_x {}_n\hat{p}_x^{ii(o)}$$

El procedimiento consiste en distribuir proporcionalmente las celdas del arreglo inicial al marginal conocido para cada columna; y después, distribuir proporcionalmente las celdas del arreglo resultante a cada marginal renglón. El procedimiento se repite hasta que, después del prorrateo por renglón, los marginales columna del arreglo resultante coinciden con los marginales conocidos; es decir, si consideramos ambos ajustes —por columna y por renglón— como una sola iteración, el proceso se detiene cuando al cabo de  $k$  iteraciones se satisface, para un número deseado de decimales:

$${}_n\hat{E}_x^{aa(k)} + {}_n\hat{E}_x^{ai(k)} = \alpha_x \quad {}_n\hat{E}_x^{ia(k)} + {}_n\hat{E}_x^{ii(k)} = \iota_x \quad (3.17)$$

Con la intención de evitar algún grado de arbitrariedad, para aplicar este algoritmo adoptaremos alguna de las soluciones a los dos sistemas de ecuaciones simultáneas. De los resultados del cuadro 3.4, creemos que los

valores más apropiados corresponden a los grupos 20-24 masculino y 15-19 femenino de la división en dos subintervalos. Tomemos el grupo 25-29 de los hombres de México en 1990, y supongamos que hay una estrecha relación entre las probabilidades de dos grupos sucesivos de edad, es decir, tomemos como probabilidades iniciales las del grupo 20-24 años del cuadro 3.2. Así, nuestro arreglo inicial es:

$$\begin{aligned} {}_5\hat{E}_{25}^{aa(o)} &= 0.839808 \times 0.898989 = 0.754978 \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ai(o)} &= 0.839808 \times 0.101011 = 0.084830 \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ia(o)} &= 0.160192 \times 0.738111 = 0.118239 \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ii(o)} &= 0.160192 \times 0.261889 = 0.041952 \end{aligned}$$

Debido a la manera como calculamos estos valores, ya satisfacen los marginales columna, pero no los renglón:

$$\begin{aligned} {}_5\hat{E}_{25}^{aa(o)} + {}_5\hat{E}_{25}^{ia(o)} &= 0.754978 + 0.118239 = 0.873218 \\ &\neq 0.912544 = \alpha_{30} \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ai(o)} + {}_5\hat{E}_{25}^{ii(o)} &= 0.084830 + 0.041952 = 0.126782 \\ &\neq 0.087456 = \iota_{30} \end{aligned}$$

Necesitamos entonces proporcionarlos a los marginales renglón:

$$\begin{aligned} {}_5\hat{E}_{25}^{aa(1)} &= 0.754978 \times (0.912544/0.873218) = 0.788979 \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ai(1)} &= 0.084830 \times (0.087456/0.126782) = 0.058517 \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ia(1)} &= 0.118239 \times (0.912544/0.873218) = 0.123564 \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ii(1)} &= 0.041952 \times (0.087456/0.126782) = 0.028939 \end{aligned}$$

pero ahora no satisfacen los marginales columna:

$$\begin{aligned} {}_5\hat{E}_{25}^{aa(1)} + {}_5\hat{E}_{25}^{ai(1)} &= 0.788979 + 0.058517 = 0.847496 \\ &\neq 0.839804 = \alpha_{25} \\ {}_5\hat{E}_{25}^{ia(1)} + {}_5\hat{E}_{25}^{ii(1)} &= 0.123564 + 0.028939 = 0.152504 \\ &\neq 0.160192 = \iota_{25} \end{aligned}$$

Estas cantidades deben ser proporcionadas nuevamente por columna y luego por renglón. El procedimiento completo se ilustra en la gráfica 3.9, donde se puede ver que se requirieron tan sólo cuatro iteraciones para alcanzar la convergencia a seis decimales.

Partiendo de las probabilidades de los grupos 20–24 masculino y 15–19 femenino obtenidas con el procedimiento de división en semintervalos (cuadro 3.2), se aplicó el algoritmo de asignación biproporcional iterativa, tomando como probabilidades iniciales las del grupo de edad anterior obtenidas por asignación biproporcional. En ambos sexos se mantuvo el enfoque tradicional a partir de los 75 años, y para el grupo 15–19 masculino se adoptaron las probabilidades originales del 20–24 (las del cuadro 3.2). Para el primer intervalo de edades 12–14 no se puede aplicar la asignación biproporcional iterativa porque al marginal columna  $\alpha_{12}$  lo hicimos igual a cero. Para ese grupo tomamos el mismo ponderador  ${}_n w_x^{aa}$  obtenido para el 15–19. Los resultados se presentan en el cuadro 3.12.

Se podrá ver que en todas las edades los ponderadores  ${}_n w_x^{aa}$  son altos, lo cual implica altos valores de ingresos y de retiros en la tabla de vida activa y por ende de sus tasas. En la gráfica 3.10, se presenta el número de

**GRÁFICA 3.9**  
**México: asignación biproporcional iterativa**  
**para estimar las probabilidades de transición masculinas**  
**del grupo de edad 25-29 años, 1990**

**Prorrateso por columna**

*Primera iteración*

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.754978       | 0.118239 | 0.873218 |
| inactivo     | 0.084830       | 0.041952 | 0.126782 |
| suma         | 0.839808       | 0.160192 | 1.000000 |

**Prorrateso por renglón**

*Primera iteración*

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.788979       | 0.123564 | 0.912544 |
| inactivo     | 0.058517       | 0.028939 | 0.087456 |
| suma         | 0.847496       | 0.152504 | 1.000000 |

*Segunda iteración*

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.781822       | 0.129793 | 0.911616 |
| inactivo     | 0.057986       | 0.030398 | 0.088384 |
| suma         | 0.839808       | 0.160192 | 1.000000 |

*Segunda iteración*

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.782618       | 0.129926 | 0.912544 |
| inactivo     | 0.057377       | 0.030079 | 0.087456 |
| suma         | 0.839995       | 0.160005 | 1.000000 |

*Tercera iteración*

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.782444       | 0.130077 | 0.912521 |
| inactivo     | 0.057364       | 0.030114 | 0.087479 |
| suma         | 0.839808       | 0.160192 | 1.000000 |

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.782463       | 0.130081 | 0.912544 |
| inactivo     | 0.057350       | 0.030107 | 0.087456 |
| suma         | 0.839813       | 0.160187 | 1.000000 |

*Cuarta iteración*

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.782459       | 0.130084 | 0.912543 |
| inactivo     | 0.057349       | 0.030107 | 0.087457 |
| suma         | 0.839808       | 0.160192 | 1.000000 |

| Estado final | Estado inicial |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|
|              | activo         | inactivo | suma     |
| activo       | 0.782459       | 0.130084 | 0.912544 |
| inactivo     | 0.057349       | 0.030107 | 0.087456 |
| suma         | 0.839808       | 0.160192 | 1.000000 |

CUADRO 3.12

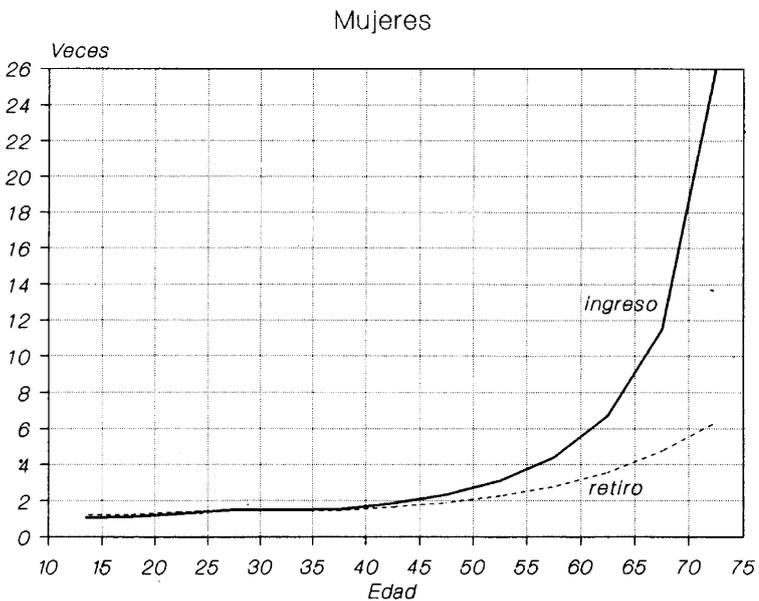
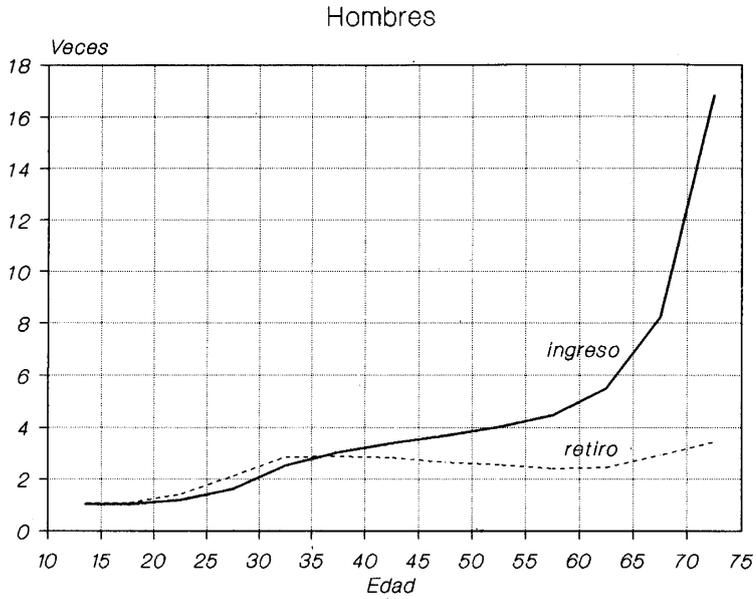
México: probabilidades de transición al estado puro y tasas de movilidad mediante asignación biproporcional iterativa, 1990

| Rango de edad<br>$x, x+n-1$ | Iteraciones<br>$k$ | Fracción del saldo neto<br>$\kappa$ | Ponderador<br>${}_n w_x^{aa}$ | Probabilidades                           |  | Factor<br>${}_n B_x$ | Tasas de:                  |                           |
|-----------------------------|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------|--|--|----------------------|----------------------------|---------------------------|
|                             |                    |                                     |                               | activo a activo<br>${}_n \hat{p}_x^{aa}$ | inactivo a activo<br>${}_n \hat{p}_x^{ia}$ |                      | ingreso<br>${}_n m_x^{ia}$ | retiro<br>${}_n m_x^{ai}$ |
|                             | (1)                | (2)                                 | (3)                           | (4)                                      | (5)  | (6)                  | (7)                        | (8)                       |
| <i>Hombres</i>              |                    |                                     |                               |  |  |                      |                            |                           |
| 12-14                       | 0                  | 0.0000                              | 0.52129                       | 0.611928                                 | 0.255550                                   | 0.53435              | 0.136554                   | 0.207367                  |
| 15-19                       | 5                  | 0.1301                              | 0.52129                       | 0.808239                                 | 0.571689                                   | 0.37765              | 0.215900                   | 0.072419                  |
| 20-24                       | 0                  | 0.3075                              | 0.63056                       | 0.898989                                 | 0.738111                                   | 0.43548              | 0.321434                   | 0.043988                  |
| 25-29                       | 4                  | 0.7885                              | 0.78083                       | 0.931712                                 | 0.812055                                   | 0.48234              | 0.391687                   | 0.032938                  |
| 30-34                       | 3                  | 4.3449                              | 0.86567                       | 0.935939                                 | 0.822275                                   | 0.49067              | 0.403468                   | 0.031433                  |
| 35-39                       | 3                  | 12.4906                             | 0.87763                       | 0.930217                                 | 0.808481                                   | 0.47956              | 0.387716                   | 0.033465                  |
| 40-44                       | 3                  | 3.9107                              | 0.85777                       | 0.916575                                 | 0.776756                                   | 0.45744              | 0.355320                   | 0.038162                  |
| 45-49                       | 4                  | 2.1097                              | 0.82251                       | 0.889567                                 | 0.718384                                   | 0.42591              | 0.305969                   | 0.047035                  |
| 50-54                       | 4                  | 1.6006                              | 0.77862                       | 0.849133                                 | 0.640598                                   | 0.39614              | 0.253766                   | 0.059764                  |
| 55-59                       | 5                  | 1.1966                              | 0.72547                       | 0.786837                                 | 0.538945                                   | 0.37089              | 0.199892                   | 0.079061                  |
| 60-64                       | 5                  | 1.1293                              | 0.68477                       | 0.712817                                 | 0.440100                                   | 0.35731              | 0.157251                   | 0.102613                  |
| 65-69                       | 5                  | 1.3847                              | 0.67179                       | 0.647699                                 | 0.367973                                   | 0.35374              | 0.130166                   | 0.124623                  |

|                |   |         |         |          |          |         |          |          |
|----------------|---|---------|---------|----------|----------|---------|----------|----------|
| 70-74          | 5 | 1.4866  | 0.66822 | 0.579913 | 0.304186 | 0.35576 | 0.108218 | 0.149451 |
| <i>Mujeres</i> |   |         |         |          |          |         |          |          |
| 12-14          | 0 | 0.0000  | 0.57418 | 0.478532 | 0.091809 | 0.51638 | 0.047408 | 0.269274 |
| 15-19          | 0 | 0.2704  | 0.57418 | 0.563606 | 0.207259 | 0.32062 | 0.066452 | 0.139918 |
| 20-24          | 4 | 2.0484  | 0.61853 | 0.561666 | 0.205967 | 0.32087 | 0.066088 | 0.140646 |
| 25-29          | 6 | 10.5714 | 0.64497 | 0.520423 | 0.180110 | 0.32679 | 0.058858 | 0.156720 |
| 30-34          | 5 | 6.6251  | 0.64510 | 0.499959 | 0.168332 | 0.33028 | 0.055597 | 0.165152 |
| 35-39          | 5 | 5.2588  | 0.64996 | 0.476146 | 0.155405 | 0.33481 | 0.052032 | 0.175393 |
| 40-44          | 5 | 3.3494  | 0.65369 | 0.437617 | 0.136088 | 0.34329 | 0.046718 | 0.193060 |
| 45-49          | 5 | 2.4405  | 0.66603 | 0.388644 | 0.114017 | 0.35633 | 0.040627 | 0.217841 |
| 50-54          | 5 | 2.3414  | 0.69264 | 0.342065 | 0.095225 | 0.37151 | 0.035377 | 0.244426 |
| 55-59          | 5 | 2.2863  | 0.72371 | 0.295191 | 0.078158 | 0.39024 | 0.030500 | 0.275041 |
| 60-64          | 4 | 2.4540  | 0.75887 | 0.253231 | 0.064237 | 0.41086 | 0.026392 | 0.306816 |
| 65-69          | 4 | 2.7604  | 0.79296 | 0.217083 | 0.053147 | 0.43257 | 0.022990 | 0.338666 |
| 70-74          | 4 | 2.9267  | 0.82274 | 0.184112 | 0.043686 | 0.45675 | 0.019954 | 0.372660 |

GRÁFICA 3.10

México: número de veces que las tasas estimadas por asignación biproporcional iterativa representan de las calculadas, fijando los ponderadores  $nW_x^{ga}$ , 1990



veces que las tasas de movilidad por asignación biproportional iterativa representan de las calculadas fijando los ponderadores  ${}_n w_x^{aa}$  (cuadro 3.8). El distanciamiento es bastante claro: en hombres a partir de 30 años las nuevas tasas son más del doble que las anteriores, y en mujeres la duplicación se inicia en los 45 años.

El procedimiento de asignación biproportional iterativa también reviste cierto grado de arbitrariedad, al igual que la fijación de los ponderadores  ${}_n w_x^{aa}$ , pues el resultado de la convergencia depende del arreglo inicial. Por ejemplo, si en un intervalo de edades donde aumentan las proporciones instantáneas de participación deseamos el enfoque tradicional, basta con hacer:

$${}_n \hat{E}_x^{aa(o)} = {}_n \hat{E}_x^{ia(o)} = {}_n \hat{E}_x^{ii(o)} = 1 \quad \text{y} \quad {}_n \hat{E}_x^{ai(o)} = 0$$

para llegar al resultado deseado. En cambio, si tomamos todos los elementos del arreglo inicial iguales a 1, después de la primera iteración alcanzamos la convergencia como:

| <i>Prorrateso por columna</i> |                |             |                      |
|-------------------------------|----------------|-------------|----------------------|
| Estado final                  | Estado inicial |             |                      |
|                               | activo         | inactivo    | suma                 |
| activo                        | $\alpha_x/2$   | $\iota_x/2$ | $\alpha_x + \iota_x$ |
| inactivo                      | $\alpha_x/2$   | $\iota_x/2$ | $\alpha_x + \iota_x$ |
| suma                          | $\alpha_x$     | $\iota_x$   | 1                    |

| <i>Prorrateso por renglón</i> |                         |                        |                |
|-------------------------------|-------------------------|------------------------|----------------|
| Estado final                  | Estado inicial          |                        |                |
|                               | activo                  | inactivo               | suma           |
| activo                        | $\alpha_x \alpha_{x+n}$ | $\iota_x \alpha_{x+n}$ | $\alpha_{x+n}$ |
| inactivo                      | $\alpha_x \iota_{x+n}$  | $\iota_x \iota_{x+n}$  | $\iota_{x+n}$  |
| suma                          | $\alpha_x$              | $\iota_x$              | 1              |

Lo que nos muestra la independencia estocástica entre los estados de presencia al inicio y al final del intervalo de  $n$  años; esto es, que la probabilidad de ser activo (inactivo) al final del periodo no depende del estado (actividad o inactividad) donde se encontraba la persona, al inicio, pues:

$${}_n\hat{p}_x^{aa} = \frac{{}_n\hat{E}_x^{aa}}{\alpha_x} = \alpha_{x+n} = \frac{{}_n\hat{E}_x^{ia}}{\iota_x} = {}_n\hat{p}_x^{ia}$$

$${}_n\hat{p}_x^{ai} = \frac{{}_n\hat{E}_x^{ai}}{\alpha_x} = \iota_{x+n} = \frac{{}_n\hat{E}_x^{ii}}{\iota_x} = {}_n\hat{p}_x^{ii}$$

Este supuesto de independencia estocástica no parece correcto cuando en una tabla de vida activa pretendemos representar la realidad. Podemos concluir entonces que es más fácil y adecuado fijar arbitrariamente los ponderadores  ${}_n w_x^{aa}$  o las fracciones  ${}_n \kappa_x$ , que el arreglo inicial para la asignación biproporcional iterativa.

### 3.3. EL MODELO GENERAL DE MOVIMIENTOS MÚLTIPLES

En la primera sección de este capítulo, al construir el modelo de movimientos múltiples, supusimos la continuidad de la mortalidad en la participación. En esta sección, mediante el álgebra de matrices, incorporaremos la posibilidad de una mortalidad diferencial; además, mostraremos algunos algoritmos que permiten convertir información empírica de ingresos y retiros de la actividad económica, en tasas o probabilidades de una tabla de vida activa.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>En esta sección se usa el álgebra de matrices. Al lector no familiarizado con ella, o que no la recuerde, se le sugiere consultar un libro elemental de álgebra lineal.

Tomemos un periodo de tiempo  $dy$  tan pequeño que, al cabo de él, sólo puede ocurrir un movimiento (ingreso, retiro o muerte) o ninguno. Desde una óptica prospectiva para el intervalo  $dy$ , los activos a la edad exacta  $x$  e inactivos a la edad  $x + y$  se pueden dividir en tres subconjuntos: quienes al cabo de los  $dy$  años permanecen en la inactividad, quienes ingresan a la actividad, y quienes fallecen; es decir:

$$\ell_{x,x+y}^{ai} = \ell_{x,x+y,x+y+dy}^{aai} + \ell_{x,x+y}^{ai} \mu_{x+y}^{ia} dy + \ell_{x,x+y}^{ai} \mu_{x+y}^{i\delta} dy$$

y despejando:

$$\ell_{x,x+y,x+y+dy}^{aai} = \ell_{x,x+y}^{ai} (1 - \mu_{x+y}^{ia} - \mu_{x+y}^{i\delta}) dy$$

donde  $\ell_{x,x+y}^{ai}$  son los activos a la edad  $x$  que sobreviven en la inactividad a la edad  $x + y$ , definidos al inicio de la subsección 3.1.2,  $\ell_{x,x+y,x+y+dy}^{aai}$  quienes además permanecen inactivos  $dy$  años después, y  $\mu_{x+y}^{ia}$  y  $\mu_{x+y}^{i\delta}$  son las tasas instantáneas de ingreso y de muerte en la inactividad respectivamente.

Desde una óptica retrospectiva, los activos a la edad  $x$  que sobreviven en la inactividad a la edad  $x + y + dy$  son los activos y los inactivos en  $x + y$  que sobreviven en la inactividad:

$$\ell_{x,x+y+dy}^{ai} = \ell_{x,x+y}^{aa} \mu_{x+y}^{ai} dy + \ell_{x,x+y}^{ai} (1 - \mu_{x+y}^{ia} dy - \mu_{x+y}^{i\delta} dy)$$

donde  $\mu_{x+y}^{ai}$  son las tasas instantáneas de retiro de la actividad.

Despejando y dividiendo ambos lados entre  $dy$ :

$$\frac{\ell_{x,x+y+dy}^{ai} - \ell_{x,x+y}^{ai}}{dy} = \ell_{x,x+y}^{aa} \mu_{x+y}^{ai} - \ell_{x,x+y}^{ai} (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y}^{i\delta})$$

que es la ecuación diferencial de Kolmogorov:

$$\frac{\partial}{\partial y} \ell_{x,x+y}^{ai} = \ell_{x,x+y}^{aa} \mu_{x+y}^{ai} - \ell_{x,x+y}^{ai} (\mu_{x+y}^{ia} + \mu_{x+y}^{i\delta})$$

La generalización a los cuatro casos posibles ( $\ell_{x,x+y}^{aa}$ ,  $\ell_{x,x+y}^{ai}$ ,  $\ell_{x,x+y}^{ia}$ ,  $\ell_{x,x+y}^{ii}$ ), se puede condensar en una ecuación diferencial matricial (Willekens, 1980: 568-69):

$$\frac{\partial}{\partial y} \ell_{x,x+y} = -\mu_{x+y} \ell_{x,x+y} \quad (3.18)$$

con:

$$\mu_{x+y} = \begin{pmatrix} \mu_{x+y}^{a\delta} + \mu_{x+y}^{ai} & -\mu_{x+y}^{ia} \\ -\mu_{x+y}^{ai} & \mu_{x+y}^{i\delta} + \mu_{x+y}^{ia} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\ell_{x,x+y} = \begin{pmatrix} \ell_{x,x+y}^{aa} & \ell_{x,x+y}^{ai} \\ \ell_{x,x+y}^{ai} & \ell_{x,x+y}^{ii} \end{pmatrix}$$

Por analogía con el modelo exponencial de una tabla de mortalidad (2.33), la solución parece ser:

$$\ell_{x,x+n} = \exp \left[ \int_0^n \mu_{x+y} dy \right] \ell_{x,x} \quad (3.20)$$

donde  $\ell_{x,x}$  es una matriz diagonal cuyos términos son  $\ell_x^a$  y  $\ell_x^i$ , pues como dijimos en la subsección 3.1.2, una persona no puede ser activa e inactiva al mismo tiempo

—a la edad exacta  $x$ —, y por lo tanto  $\ell_{x,x}^{ia} = \ell_{x,x}^{ia} = 0$ . No obstante, (3.20) es válida sólo cuando las tasas instantáneas permanecen invariantes al cabo de los  $n$  años (Nour y Suchindran, 1984: 327):

$$\mu_{x+t} = {}_n m_x \quad 0 \leq t \leq n$$

con:

$${}_n m_x = \begin{pmatrix} {}_n m_x^{a\delta} + {}_n m_x^{ai} & -{}_n m_x^{ia} \\ -{}_n m_x^{ai} & {}_n m_x^{i\delta} + {}_n m_x^{ia} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Definamos la matriz de probabilidades de transición:

$${}_n P_x = \begin{pmatrix} {}_n p_x^{aa} & {}_n p_x^{ai} \\ {}_n p_x^{ai} & {}_n p_x^{ii} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

entonces, la ecuación matricial:

$$\ell_{x,x+n} = {}_n P_x \ell_{x,x} \quad (3.23)$$

claramente satisface las igualdades (3.5). Postmultiplicando ambos lados por la inversa de  $\ell_{x,x}$ :

$${}_n P_x = \ell_{x,x+n} \ell_{x,x}^{-1}$$

y sustituyendo en (3.20) con tasas invariantes al cabo de los  $n$  años:

$${}_n P_x = e^{-n} {}_n m_x \quad (3.24)$$

que constituye el modelo general de movimientos múltiples. Esta última ecuación es similar a (2.33) para la tabla de mortalidad.

¿Cómo se obtiene la exponencial de una matriz? Mediante la extensión de la conocida expansión en serie de potencias para escalares (Gantmacher, 1959: 113):

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{A}^i = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \dots \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

Cuando de alguna fuente de datos se dispone de tasas de movilidad, con (3.24) se pueden obtener las probabilidades de transición, bajo el supuesto de que las tasas observadas son iguales a las de la tabla de vida activa. Si en cambio, de preguntas retrospectivas se obtienen probabilidades de transición, "despejando" en (3.24) se pueden determinar las tasas de movilidad:

$${}_n \mathbf{m}_x = -\frac{1}{n} \ell n \{ {}_n \mathbf{P}_x \} \quad (3.26)$$

con (Gantmacher, 1959: 113):<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \ell n \{ \mathbf{A} \} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} (\mathbf{A} - \mathbf{I})^i \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 + \frac{1}{3} (\mathbf{A} - \mathbf{I})^3 \pm \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

Descompongamos la matriz de tasas  ${}_n \mathbf{m}_x$  en dos matrices: una para las tasas de cambio y otra para las de mortalidad:

$${}_n \mathbf{m}_x = {}_n \widehat{\mathbf{m}}_x + {}_n \mathbf{m}_x^{\delta} \quad (3.28)$$

<sup>7</sup>Las igualdades (3.25) y (3.27) satisfacen la conocida propiedad de las funciones inversas:

$$e^{\ell n \{ \mathbf{A} \}} = \ell n \{ e^{\mathbf{A}} \} = \mathbf{I}$$

con:

$${}_n \widehat{\mathbf{m}}_x = \begin{pmatrix} {}_n m_x^{ai} & -{}_n m_x^{ia} \\ -{}_n m_x^{ai} & {}_n m_x^{ia} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$${}_n \mathbf{m}_x^\delta = \begin{pmatrix} {}_n m_x^{a\delta} & 0 \\ 0 & {}_n m_x^{i\delta} \end{pmatrix}$$

Aparentemente (3.24) se puede reescribir como:

$${}_n \mathbf{P}_x = e^{-n {}_n \widehat{\mathbf{m}}_x - n {}_n \mathbf{m}_x^\delta} = {}_n \widehat{\mathbf{P}}_x {}_n \mathbf{P}_x^\delta \quad (3.30)$$

con:

$${}_n \widehat{\mathbf{P}}_x = e^{-n {}_n \widehat{\mathbf{m}}_x} = \begin{pmatrix} {}_n \hat{p}_x^{aa} & {}_n \hat{p}_x^{ai} \\ {}_n \hat{p}_x^{ai} & {}_n \hat{p}_x^{ii} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$${}_n \mathbf{P}_x^\delta = e^{-n {}_n \mathbf{m}_x^\delta} = \begin{pmatrix} {}_n p_x^{a\delta} & 0 \\ 0 & {}_n p_x^{i\delta} \end{pmatrix}$$

Sin embargo, este resultado es correcto si y sólo si las matrices conmutan, es decir,

$${}_n \mathbf{P}_x = {}_n \widehat{\mathbf{P}}_x {}_n \mathbf{P}_x^\delta = {}_n \mathbf{P}_x^\delta {}_n \widehat{\mathbf{P}}_x$$

lo cual no es cierto; pues mientras

$${}_n \mathbf{P}_x = {}_n \widehat{\mathbf{P}}_x {}_n \mathbf{P}_x^\delta = \begin{pmatrix} {}_n \hat{p}_x^{aa} {}_n p_x^{a\delta} & {}_n \hat{p}_x^{ai} {}_n p_x^{i\delta} \\ {}_n \hat{p}_x^{ai} {}_n p_x^{a\delta} & {}_n \hat{p}_x^{ii} {}_n p_x^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

satisface el supuesto de permanencia de la mortalidad (2.59),

$${}_n P_x = {}_n P_x^\delta \widehat{P}_x = \begin{pmatrix} {}_n \hat{p}_x^{aa} & {}_n p_x^{a\delta} & {}_n \hat{p}_x^{ai} & {}_n p_x^{a\delta} \\ {}_n \hat{p}_x^{ai} & {}_n p_x^{i\delta} & {}_n \hat{p}_x^{ii} & {}_n p_x^{i\delta} \end{pmatrix}$$

requiere un supuesto alternativo difícil de aceptar: la ley de mortalidad que experimenta una persona a lo largo del intervalo de  $n$  años, es la del estado de presencia al final del periodo. De estos dos últimos resultados, podemos concluir que el único caso razonable para que (3.30) sea correcta, es cuando se supone la continuidad de la mortalidad en la participación, o sea, cuando el riesgo de fallecer en todas las edades es el mismo para activos e inactivos:

$${}_n p_x^{a\delta} = {}_n p_x^{i\delta} = {}_n p_x$$

Si aceptamos la continuidad de la mortalidad, las igualdades en el lado izquierdo de (3.31) son equivalentes a (3.2) y (3.3); y si “despejamos”:

$${}_n \widehat{m}_x = -\frac{1}{n} \ln \{ {}_n \widehat{P}_x \} \quad (3.33)$$

arroja los mismos resultados que (3.4).<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>Una amplia discusión del modelo general de tablas de vida de estados múltiples, se encuentra en la primera sección del capítulo 9 de Namboodiri y Suchindran (1987).

**3.3.1. Años-persona vividos con mortalidad diferencial**

En la subsección 3.1.2, desarrollamos las ecuaciones para determinar el tiempo vivido bajo la óptica de estados múltiples, suponiendo continuidad de la mortalidad en la participación. Al igual que en la última sección del capítulo anterior, donde lo hicimos para el enfoque tradicional, aquí obtenemos las relaciones que permiten incorporar la mortalidad diferencial en el cálculo de los años-persona vividos.

Retomemos nuestras definiciones de sobrevivientes según condición de participación (activo e inactivo) al inicio y al final de un intervalo de edades. De acuerdo con la ecuación del balance demográfico, podemos establecer:

$$\begin{aligned}
 \ell_{x,x+n}^{aa} &= \ell_{x,x}^{aa} + {}_nL_x^{ai} {}_n m_x^{ia} - {}_nL_x^{aa} {}_n m_x^{ai} - {}_nL_x^{aa} {}_n m_x^{a\delta} \\
 \ell_{x,x+n}^{ai} &= \ell_{x,x}^{ai} + {}_nL_x^{aa} {}_n m_x^{ai} - {}_nL_x^{ai} {}_n m_x^{ia} - {}_nL_x^{ai} {}_n m_x^{i\delta} \\
 \ell_{x,x+n}^{ia} &= \ell_{x,x}^{ia} + {}_nL_x^{ii} {}_n m_x^{ia} - {}_nL_x^{ia} {}_n m_x^{ai} - {}_nL_x^{ia} {}_n m_x^{a\delta} \\
 \ell_{x,x+n}^{ii} &= \ell_{x,x}^{ii} + {}_nL_x^{ia} {}_n m_x^{ai} - {}_nL_x^{ii} {}_n m_x^{ia} - {}_nL_x^{ii} {}_n m_x^{i\delta}
 \end{aligned}$$

que se puede condensar en forma matricial como:

$$\ell_{x,x+n} = \ell_{x,x} - {}_n m_x {}_n L_x \tag{3.34}$$

con:

$${}_n L_x = \begin{pmatrix} {}_n L_x^{aa} & {}_n L_x^{ia} \\ {}_n L_x^{ai} & {}_n L_x^{ii} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Despejando en (3.34):<sup>9</sup>

$${}_n m_x {}_n L_x = \ell_{x,x} - \ell_{x,x+n}$$

incorporando (3.23):

$${}_n m_x {}_n L_x = [\mathbf{I} - {}_n P_x] \ell_{x,x}$$

y premultiplicando ambos lados por la inversa de la matriz de tasas:

$${}_n L_x = {}_n m_x^{-1} [\mathbf{I} - {}_n P_x] \ell_{x,x} \quad (3.36)$$

Siendo  $\ell_{x,x}$  una matriz diagonal con elementos  $\ell_x^a$  y  $\ell_x^i$ , la operación matricial:

$${}_n e_x = {}_n L_x \ell_{x,x}^{-1}$$

con:

$${}_n e_x = \begin{pmatrix} {}_n e_x^{aa} & {}_n e_x^{ia} \\ {}_n e_x^{ai} & {}_n e_x^{ii} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

satisface claramente las definiciones de esperanza de vida parcial en (2.44). Postmultiplicando ambos lados de (3.36) por la inversa de  $\ell_{x,x}$ :

$${}_n e_x = {}_n m_x^{-1} [\mathbf{I} - {}_n P_x] \quad (3.38)$$

Una vez determinadas las esperanzas de vida parciales, se pueden evaluar las totales a cualquier edad apli-

---

<sup>9</sup>En esta igualdad se puede ver una clara analogía con la conocida propiedad de una tabla de mortalidad:

$${}_n m_x {}_n L_x = {}_n d_x = \ell_x - \ell_{x+n}$$

cando de manera recursiva las ecuaciones (2.44), que de manera compacta se pueden escribir en forma matricial como:

$$e_x = {}_n e_x + e_{x+n} {}_n P_x \quad (3.39)$$

donde:

$$e_x = \begin{pmatrix} e_x^{aa} & e_x^{ia} \\ e_x^{ai} & e_x^{ii} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

### 3.3.2. Estimación a partir de datos observados

La construcción de una tabla de vida activa a partir del modelo general (3.24), presupone la disponibilidad de tasas de cambio ( ${}_n m_x^{ia}$  y  ${}_n m_x^{ai}$ ), para cuya obtención se requiere de un registro continuo de población que dé cuenta de todos los ingresos, los retiros y las defunciones ocurridos durante un cierto periodo de tiempo. En la mayoría de los países que cuentan con un registro continuo de población, la participación en la actividad económica no forma parte de las variables contenidas en la base de datos, de modo que, igual que en muchos de los países que no cuentan con un registro continuo de población, esa información se recoge a través de encuestas continuas de empleo por muestreo.

Esas encuestas de hogares son “continuas” en el sentido que se hacen dos o más visitas —trimestral, semestral o anualmente— a la misma vivienda. Del contraste de la condición (activo o inactivo) de cada individuo en dos entrevistas sucesivas, se determinan los ingresos y los retiros de la actividad; no obstante, en estricto sentido, ese tipo de datos corresponde realmente a probabilidades de transición (estados de presencia al inicio y

al final del periodo), y no tanto a cambios bajo el enfoque de tasas (entradas y salidas de la actividad), pues la ocurrencia de dos o más movimientos entre estados es factible en cualquier intervalo de tiempo finito y discreto, por pequeño que sea.

También dentro del esquema de probabilidades de transición, se encuentran las preguntas por la situación (activo o inactivo) de la persona en una fecha fija previa, contenidas en encuestas realizadas generalmente por muestreo. Un ejemplo de este tipo de datos se tiene en el "módulo de migración" de la *Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares* (ENIGH), levantada en México en 1983 y 1989 por el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, donde se preguntó por la condición del individuo uno (sólo en 1989) y cinco años antes de la entrevista. Al comparar la situación previa con la actual (captada en las características de los ocupantes de la vivienda), se deducen directamente las transiciones entre actividad e inactividad. Desafortunadamente, ningún dato de ambos módulos de migración fue procesado por el INEGI; así, a continuación sólo presentamos las fórmulas que permiten convertir ese tipo de datos en medidas de la tabla de vida activa. Debido a que la información de las encuestas continuas de empleo y de preguntas retrospectivas corresponde a probabilidades de transición, los métodos se aplican por igual en ambos casos.

Iniciemos con el caso más simple, suponiendo la continuidad de la mortalidad en la participación en la actividad. Tomemos a la población de un grupo de  $n$  años de edad, digamos entre las edades  $x$  y  $x + n$  al tiempo  $t$  —el momento de la encuesta—, y asumamos que la

pregunta retrospectiva (la situación en la visita anterior en una encuesta continua) corresponde a la condición de la persona  $h$  años antes, cuando al tiempo  $t - h$  se encontraba entre las edades  $x - h$  y  $x - h + n$ . Mediante la comparación de la situación en los dos momentos, la población entrevistada se puede clasificar en cuatro subgrupos:

${}_nN_{x-h}^{aa}(t - h, t)$  los activos al momento de la encuesta que eran activos  $h$  años antes.

${}_nN_{x-h}^{ai}(t - h, t)$  los inactivos al momento de la encuesta que eran activos  $h$  años antes.

${}_nN_{x-h}^{ia}(t - h, t)$  los activos al momento de la encuesta que eran inactivos  $h$  años antes.

${}_nN_{x-h}^{ii}(t - h, t)$  los inactivos al momento de la encuesta que eran inactivos  $h$  años antes.

Con estos datos no se pueden obtener directamente las probabilidades de transición  $\hat{p}$ , pues se refieren a transiciones entre dos edades exactas, y nuestras observaciones corresponden a transiciones entre dos grupos de edades cumplidas. Definamos las probabilidades "perspectivas" de transición al estado puro:

${}_n\hat{S}_{x-h}^{aa}(t - h, t)$  probabilidad que un activo entre las edades  $x - h$  y  $x - h + n$  al tiempo  $t - h$ , tiene de estar en la actividad  $h$  años después.

${}_n\hat{S}_{x-h}^{ai}(t - h, t)$  probabilidad que un activo entre las edades  $x - h$  y  $x - h + n$  al tiempo  $t - h$ , tiene de estar en la inactividad  $h$  años después.

${}_n\widehat{S}_{x-h}^{ia}(t-h, t)$  probabilidad que un inactivo entre las edades  $x-h$  y  $x-h+n$  al tiempo  $t-h$ , tiene de estar en la actividad  $h$  años después.

${}_n\widehat{S}_{x-h}^{ii}(t-h, t)$  probabilidad que un inactivo entre las edades  $x-h$  y  $x-h+n$  al tiempo  $t-h$ , tiene de estar en la inactividad  $h$  años después.

Reciben el nombre de “perspectivas” porque son del mismo tipo de las que se usan al hacer proyecciones de población. Estas probabilidades se calculan como:

$$\begin{aligned} {}_n\widehat{S}_{x-h}^{aa}(t-h, t) &= \frac{{}_nN_{x-h}^{aa}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^{aa}(t-h, t) + {}_nN_{x-h}^{ai}(t-h, t)} \\ {}_n\widehat{S}_{x-h}^{ai}(t-h, t) &= \frac{{}_nN_{x-h}^{ai}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^{aa}(t-h, t) + {}_nN_{x-h}^{ai}(t-h, t)} \\ {}_n\widehat{S}_{x-h}^{ia}(t-h, t) &= \frac{{}_nN_{x-h}^{ia}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^{ia}(t-h, t) + {}_nN_{x-h}^{ii}(t-h, t)} \\ {}_n\widehat{S}_{x-h}^{ii}(t-h, t) &= \frac{{}_nN_{x-h}^{ii}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^{ia}(t-h, t) + {}_nN_{x-h}^{ii}(t-h, t)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Definamos la matriz de probabilidades perspectivas de transición al estado puro como:

$${}_n\widehat{\mathbf{S}}_{x-h}(t-h, t) = \begin{pmatrix} {}_n\widehat{S}_{x-h}^{aa}(t-h, t) & {}_n\widehat{S}_{x-h}^{ai}(t-h, t) \\ {}_n\widehat{S}_{x-h}^{ai}(t-h, t) & {}_n\widehat{S}_{x-h}^{ii}(t-h, t) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Si consideramos sólo la variación respecto al tiempo,

podemos obtener las tasas centradas a mitad del periodo, con una expresión equivalente a (3.33):

$${}_nM_{x-h/2} = -\frac{1}{h} \ell n \{ {}_nS_{x-h}(t-h, t) \} \quad (3.43)$$

La letra mayúscula  $M$  indica que las tasas son observadas, a diferencia de la minúscula  $m$  que se refiere a las tasas de la tabla. El criterio de estimación (3.43) se ilustra gráficamente en la gráfica 3.11.

En la mayoría de los casos seguramente necesitaremos las tasas para el intervalo de  $n$  años que comienza a la edad  $x$ , y no el que inicia en  $x - h/2$ . La estimación de las tasas para el intervalo deseado se puede obtener mediante interpolación lineal (o geométrica si se prefiere) entre dos grupos de edades sucesivos. Digamos que los intervalos de edad son de longitudes  $n$  y  $r$ , y supongamos que las tasas del grupo son iguales a las instantáneas para la edad media:

$$\hat{\mu}_{x+n/2} = {}_n\widehat{M}_x$$

Interpolando linealmente sobre la edad en las tasas instantáneas, las tasas para los intervalos que inician a la edad  $x$  son:

$${}_n\widehat{M}_x = \frac{r+n-h}{r+n} {}_n\widehat{M}_{x-h/2} + \frac{h}{r+n} {}_r\widehat{M}_{x+n-h/2} \quad (3.44)$$

$${}_r\widehat{M}_x = \frac{2n-h}{r+n} {}_n\widehat{M}_{x-h/2} + \frac{r+h-n}{r+n} {}_r\widehat{M}_{x+n-h/2}$$

Si suponemos que las tasas observadas y las de la tabla son iguales, aplicando el lado izquierdo de (3.31) se obtienen las probabilidades, y a partir de ambas medidas se elabora completa la tabla de vida activa.



tasas del intervalo que inicia a la edad  $x$ . La elección de (3.43) o (3.44) dependerá de cada situación particular.

Un caso especial es el primer grupo de edades al momento de la encuesta, digamos entre las edades  $\beta$  y  $\beta + n$ . La solución parece ser (3.43) haciendo  $x = \beta$ ; sin embargo, es válida sólo si  $h$  es menor que  $n$ , pues de lo contrario ( $h \geq n$ ), al inicio del periodo todos los miembros del primer grupo de edades son inactivos,  ${}_nN_{x-h}^{aa}(t-h, t) = {}_nN_{x-h}^{ai}(t-h, t) = 0$ , y las probabilidades  ${}_n\hat{S}_{x-h}^{aa}(t-h, t)$  y  ${}_n\hat{S}_{x-h}^{ai}(t-h, t)$  no existen, pues la división entre cero no está definida al aplicar (3.41). Tenemos dos posibles alternativas para determinar las tasas:

- Hacer las preguntas retrospectivas sólo a los mayores de  $\beta + h$  años, y con algún tipo de extrapolación arbitraria estimar las tasas para los menores de esa edad.
- En lugar de la pregunta para una fecha previa, solicitar la condición de participación en la actividad de la persona al momento de su cumpleaños  $\beta$ .

Si se dispone de los datos de la segunda alternativa, las probabilidades de transición, de la edad exacta  $\beta$  — durante los  $h$  años previos a la encuesta— al grupo de edades entre  $\beta$  y  $\beta + h$  al momento de la entrevista, se obtiene de manera similar a las de los demás grupos en (3.41). Denotemos por  ${}_h\hat{s}_\beta$  la matriz que contiene a esas probabilidades, con la misma estructura que la definición (3.42). En este caso, la generación  $h$ -anual está expuesta en promedio sólo  $h/2$  años, y por extensión de la primera igualdad del lado izquierdo en (3.31):

$${}_h\widehat{\mathbf{s}}_\beta = e^{-h/2} {}_h\widehat{\mathcal{M}}_\beta$$

o bien,

$${}_h\widehat{\mathcal{M}}_\beta = -\frac{2}{h} \ln\{{}_h\widehat{\mathbf{s}}_\beta\} \quad (3.45)$$

Hemos utilizado  $\mathcal{M}$  en lugar de  $\mathbf{M}$ , para indicar que se extrae sólo de la mitad del intervalo de  $h$  años, según se ilustra en la gráfica 3.12.

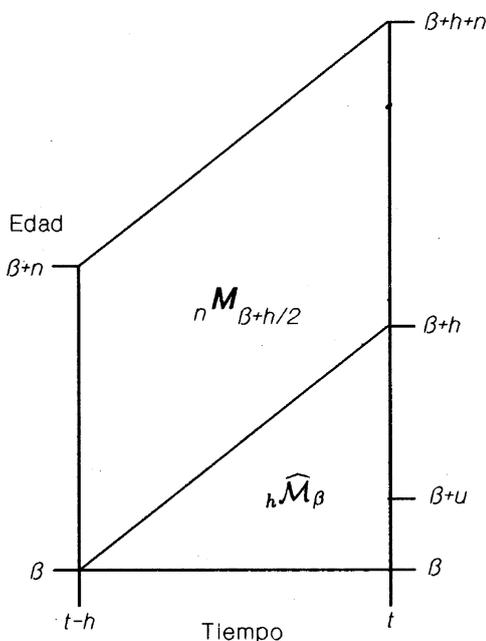
Las tasas para el primer intervalo de edades se pueden obtener también mediante interpolación lineal sobre las tasas asociadas a las probabilidades perspectivas de los dos primeros grupos. Como las tasas  ${}_h\widehat{\mathcal{M}}_\beta$  ocurren durante todo el triángulo en el diagrama de Lexis de la gráfica 3.12, la edad media es aquella que divide en dos partes iguales el área del triángulo, es decir,  $\beta + u$  con  $u = (1 - \sqrt{2}/2)h$ , según se muestra en el lado derecho de la gráfica 3.12. El resultado de la interpolación lineal es:

$${}_h\widehat{\mathcal{M}}_\beta = \frac{n}{(\sqrt{2}-1)h+n} {}_h\widehat{\mathcal{M}}_\beta + \frac{(\sqrt{2}-1)h}{(\sqrt{2}-1)h+n} {}_h\widehat{\mathcal{M}}_{\beta+h/2} \quad (3.46)$$

Consideremos ahora el caso de distinta mortalidad entre activos e inactivos. Analicemos primero la información de una encuesta continua de ocupación. En la *Encuesta Nacional de Empleo Urbano* (ENEU) de México, donde se realizan cinco visitas trimestrales domiciliarias sucesivas, de la segunda a la quinta se pregunta la razón por la cual una persona ya no vive en la vivienda, pudiendo contabilizar de esa manera, para el trimestre previo, las defunciones ocurridas entre quienes eran activos o inactivos.

GRÁFICA 3.12

**Diagrama de Lexis que muestra la estimación de las tasas de cambio a partir de probabilidades perspectivas para el primer grupo de edades**



Denotemos ahora por  ${}_nN_{x-h}^{aa}(t-h, t)$  y  ${}_nN_{x-h}^{ai}(t-h, t)$  los activos al tiempo  $t-h$  que sobrevivieron en la actividad y en la inactividad respectivamente  $h$  años después. Sean  ${}_nN_{x-h}^a(t-h)$  todos los activos en  $t-h$ , que además de los sobrevivientes anteriores, incluye a quienes fallecieron durante los  $h$  años. Utilizando una nomenclatura similar para los inactivos al inicio del periodo, las probabilidades perspectivas de transición con mortalidad son:

$${}_nS_{x-h}^{aa}(t-h, t) = \frac{{}_nN_{x-h}^{aa}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^a(t-h)}$$

$$\begin{aligned}
 {}_nS_{x-h}^{ai}(t-h, t) &= \frac{{}_nN_{x-h}^{ai}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^a(t-h)} \\
 {}_nS_{x-h}^{ia}(t-h, t) &= \frac{{}_nN_{x-h}^{ia}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^i(t-h)} \\
 {}_nS_{x-h}^{ii}(t-h, t) &= \frac{{}_nN_{x-h}^{ii}(t-h, t)}{{}_nN_{x-h}^i(t-h)}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Definiendo la matriz de probabilidades perspectivas con mortalidad diferencial  ${}_nS_{x-h}(t-h, t)$  de la misma manera que  ${}_n\tilde{S}_{x-h}(t-h, t)$  en (3.42), podemos aplicar (3.43) y (3.44) para obtener las matrices de tasas  ${}_nM_{x-h}$  y construir la tabla de vida activa.

No obstante, el monto de las defunciones puede ser bajo por problemas de representatividad inherentes al tamaño de la muestra, de modo que las pautas de mortalidad por edad que se obtengan para activos e inactivos sean incorrectas; necesitamos recurrir entonces a las estadísticas vitales y a los censos de población. La incorporación del riesgo de fallecer es ahora indistinta para preguntas retrospectivas o para encuestas continuas de empleo, pues la mortalidad ya no se extrae de la misma fuente de datos de donde se obtienen las probabilidades perspectivas de transición.

Asumamos que ya hemos construido las tablas de mortalidad correspondientes a activos e inactivos, y que de ellas hemos obtenido las probabilidades perspectivas de sobrevivencia:

$${}_nS_{x-h}^{a\delta} = \frac{{}_nL_x^{a\delta}}{{}_nL_{x-h}^{a\delta}} \qquad {}_nS_{x-h}^{i\delta} = \frac{{}_nL_x^{i\delta}}{{}_nL_{x-h}^{i\delta}} \tag{3.48}$$

$${}_h S_{\beta}^{a\delta} = \frac{{}_h L_{\beta}^{a\delta}}{{}_h \ell_{\beta}^{a\delta}} \qquad {}_h S_{\beta}^{i\delta} = \frac{{}_h L_{\beta}^{i\delta}}{{}_h \ell_{\beta}^{i\delta}}$$

Si aceptamos el supuesto de permanencia de la mortalidad, la extensión de (3.32) a probabilidades perspectivas es:

$$\begin{aligned} {}_n S_x &= {}_n \widehat{S}_x {}_n S_x^{\delta} \\ &= \begin{pmatrix} {}_n \widehat{S}_{x-h}^{aa} {}_n S_{x-h}^{a\delta} & {}_n \widehat{S}_{x-h}^{ai} {}_n S_{x-h}^{i\delta} \\ {}_n \widehat{S}_{x-h}^{ai} {}_n S_{x-h}^{a\delta} & {}_n \widehat{S}_{x-h}^{ii} {}_n S_{x-h}^{i\delta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_n S_{x-h}^{aa} & {}_n S_{x-h}^{ai} \\ {}_n S_{x-h}^{ai} & {}_n S_{x-h}^{ii} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

y podemos aplicar de (3.43) a (3.46) con matrices de probabilidades y de tasas con mortalidad.

En el caso de una encuesta continua de empleo, buscando evitar fluctaciones aleatorias y, sobre todo, los comunes problemas de representatividad inherentes al tamaño de la muestra, conviene estimar las probabilidades de transición con o sin mortalidad para el conjunto de varios periodos interentrevistas. La estrategia es sumar, dentro de cada grupo de edades, todas las transiciones ocurridas durante todos los intervalos interentrevistas que abarque el lapso considerado (uno, dos o tres años), y formar un "intervalo promedio" único. Este procedimiento fue el que siguieron Hoem y Fong (1976) al estimar las tasas de movilidad de Dinamarca para el trienio 1972-1974, que usamos en la segunda sección de este capítulo.



#### 4. APLICACIONES DE LA TABLA DE VIDA ACTIVA

Igual que otras tablas de eventualidad, la de vida activa ofrece algunas aplicaciones adicionales al cálculo de las esperanzas de vida activa. En este capítulo examinaremos dos:

- El movimiento de la población económicamente activa en un año o periodo determinado.
- Proyecciones de las poblaciones económicamente activa e inactiva.

La estimación de los flujos de ingresos, de retiros y de defunciones, a partir de la población censada y las tasas de cambio de la tabla de vida activa, ha sido utilizada por diferentes autores (Camisa, 1960: 59; Durand y Miller, 1969: 34-35; Elizaga, 1979: 385-387; Rincón, 1977: 29-31); en cambio, el método que se propone aquí para estimar el volumen futuro de la PEA apenas ha sido usado (Willekens, 1980: 583-585), debido fundamentalmente a la escasa explotación que se ha hecho de las encuestas continuas de empleo, para extraer de ellas las transiciones implícitas en la comparación de dos visitas domiciliarias sucesivas.

## 4.1. MOVIMIENTO DE LA PEA EN UN PERIODO DETERMINADO

Recordando que una tasa expresa el promedio anual per cápita de eventos, al multiplicarla por los años-persona vividos por la población durante un periodo determinado, obtenemos los eventos ocurridos durante ese intervalo de tiempo. Generalmente, por la falta de calidad en las estadísticas vitales, es difícil determinar los años-persona vividos, siendo entonces costumbre suponer que el tiempo vivido durante un año se aproxima con bastante precisión mediante la población media del año.

Retomemos nuestra notación para las poblaciones económicamente activa ( ${}_nPEA_x$ ) e inactiva ( ${}_nPEI_x$ ) del capítulo 1, y de las tasas de ingreso ( ${}_nm_x^{ia}$ ) y de retiro ( ${}_nm_x^{ai}$ ) del capítulo 2. De acuerdo al procedimiento mencionado en el párrafo anterior, los ingresos, los retiros y los decesos ocurridos durante el año alrededor del censo son:

$$\begin{aligned} {}_n\mathcal{H}_x^{ia} &= {}_nPEI_x {}_nm_x^{ia} & {}_n\mathcal{H}_x^{ai} &= {}_nPEA_x {}_nm_x^{ai} \\ {}_n\mathcal{D}_x^a &= {}_nPEA_x {}_nm_x^{a\delta} & {}_n\mathcal{D}_x^i &= {}_nPEI_x {}_nm_x^{i\delta} \end{aligned} \quad (4.1)$$

En el cuadro 4.1, se muestran los resultados de la aplicación al caso de México en 1990, utilizando las tasas del enfoque de movimientos múltiples. Estos resultados, no obstante, deben ser tomados con cierta reserva, pues las tasas de cambio se dedujeron ligando por edad las proporciones de participación en un momento dado en el tiempo, y no de la observación empírica de ingresos y de retiros, o de transiciones entre la actividad y la inactividad, ocurridos durante un periodo.

Al asumir que las tasas de movilidad son iguales a las correspondientes a 1990, suponemos que las proporciones de participación censadas  ${}_nA_x$  eran las mismas cinco años antes;<sup>1</sup> de ese modo, las proporciones instantáneas de participación  $\alpha_x$  –obtenidas con la igualdad (2.6)– corresponden a la generación quinquenal entre las edades  $x$  y  $x + 5$  al momento del censo, y la tabla de vida activa es de “momento”, pues reproduce la experiencia del lustro previo al recuento poblacional.<sup>2</sup> Como corolario, se supone que las tasas de ingreso y de retiro también permanecen constantes a lo largo del lustro.

El supuesto de invariabilidad en las proporciones de participación es razonable en el caso masculino, ya que en ese género los cambios son pequeños en el largo plazo entre los 20 y 50 años de edad; en cambio, el supuesto no es tan adecuado en las mujeres, pues en México, igual que en todos los países de América Latina, la participación femenina en la actividad económica ha ido en continuo ascenso en casi todo el rango de edades durante la segunda mitad del presente siglo.

Un procedimiento alternativo al supuesto de constancia en el tiempo de las  ${}_nA_x$ , consiste en acumular –respecto a la edad– el incremento o decremento en las proporciones de participación de cada cohorte entre dos censos de población sucesivos, de modo que se tiene un patrón de proporciones por edad para la cohorte ficticia o sintética del periodo intercensal. Este procedimiento,

---

<sup>1</sup>Porque trabajamos con grupos quinquenales de edad, excepto el primero (12–14).

<sup>2</sup>La interpretación de las tablas de cohorte ficticia o sintética se discutió al inicio de la sección 1.2.

## CUADRO 4.1

**México: movimiento de la población económicamente activa, 1990**  
**(tasas del método de movimientos múltiples con proporciones)**

| Rango de edad<br>$x, x+n-1$ | Población censada: |                      | Tasas de:               |                        |                             | Eventos:                 |                         |                      |
|-----------------------------|--------------------|----------------------|-------------------------|------------------------|-----------------------------|--------------------------|-------------------------|----------------------|
|                             | activa<br>$nPEA_x$ | inactiva<br>$nPEI_x$ | ingreso<br>$n m_x^{ia}$ | retiro<br>$n m_x^{ai}$ | muerte<br>$n m_x^{a\delta}$ | ingresos<br>$n H_x^{ia}$ | retiros<br>$n H_x^{ai}$ | muertes<br>$n D_x^a$ |
|                             | (1)                | (2)                  | (3)                     | (4)                    | (5)                         | (6)=<br>(2) x (3)        | (7)=<br>(1) x (4)       | (8)=<br>(1) x (5)    |
| <i>Hombres</i>              |                    |                      |                         |                        |                             |                          |                         |                      |
| 12-14                       | 374,456            | 2,784,760            | 0.134097                | 0.195321               | 0.000821                    | 373,429                  | 73,139                  | 307                  |
| 15-19                       | 2,303,407          | 2,456,485            | 0.211311                | 0.068307               | 0.001263                    | 519,082                  | 157,338                 | 2,908                |
| 20-24                       | 2,917,079          | 821,049              | 0.273678                | 0.031218               | 0.001933                    | 224,703                  | 91,066                  | 5,640                |
| 25-29                       | 2,743,273          | 307,322              | 0.244057                | 0.015619               | 0.002660                    | 75,004                   | 42,846                  | 7,297                |
| 30-34                       | 2,387,469          | 191,267              | 0.161006                | 0.011034               | 0.003429                    | 30,795                   | 26,343                  | 8,187                |
| 35-39                       | 2,047,353          | 163,212              | 0.128000                | 0.011667               | 0.004294                    | 20,891                   | 23,886                  | 8,790                |
| 40-44                       | 1,562,217          | 142,796              | 0.105015                | 0.013485               | 0.005380                    | 14,996                   | 21,067                  | 8,405                |
| 45-49                       | 1,299,860          | 152,713              | 0.083476                | 0.017757               | 0.006919                    | 12,748                   | 23,081                  | 8,993                |
| 50-54                       | 989,839            | 172,036              | 0.063397                | 0.023494               | 0.009585                    | 10,907                   | 23,255                  | 9,487                |
| 55-59                       | 729,149            | 189,715              | 0.044852                | 0.033100               | 0.015051                    | 8,509                    | 24,135                  | 10,975               |
| 60-64                       | 532,978            | 236,939              | 0.028598                | 0.041904               | 0.023784                    | 6,776                    | 22,334                  | 12,676               |
| 65-69                       | 336,694            | 230,947              | 0.015801                | 0.042876               | 0.037493                    | 3,649                    | 14,436                  | 12,624               |
| 70-74                       | 197,945            | 196,086              | 0.006430                | 0.043488               | 0.058826                    | 1,261                    | 8,608                   | 11,644               |
| 75-79                       | 113,377            | 164,458              | 0.000000                | 0.048714               | 0.091592                    | 0                        | 5,523                   | 10,384               |

|       |        |         |          |          |          |   |       |       |
|-------|--------|---------|----------|----------|----------|---|-------|-------|
| 80-84 | 54,943 | 124,877 | 0.000000 | 0.057115 | 0.140976 | 0 | 3,138 | 7,746 |
| 85-89 | 22,918 | 76,381  | 0.000000 | 0.065348 | 0.212608 | 0 | 1,498 | 4,873 |
| 90-94 | 5,933  | 32,088  | 0.000000 | 0.163092 | 0.309675 | 0 | 968   | 1,837 |

*Mujeres*

|       |           |           |          |          |          |         |         |       |
|-------|-----------|-----------|----------|----------|----------|---------|---------|-------|
| 12-14 | 113,619   | 3,030,136 | 0.044256 | 0.218893 | 0.000446 | 134,102 | 24,870  | 51    |
| 15-19 | 905,322   | 3,999,189 | 0.060391 | 0.113859 | 0.000532 | 241,515 | 103,079 | 481   |
| 20-24 | 1,208,327 | 2,882,708 | 0.051308 | 0.101313 | 0.000690 | 147,905 | 122,419 | 834   |
| 25-29 | 963,555   | 2,390,362 | 0.039442 | 0.107653 | 0.000905 | 94,281  | 103,730 | 872   |
| 30-34 | 761,802   | 2,047,081 | 0.037270 | 0.114925 | 0.001202 | 76,294  | 87,550  | 915   |
| 35-39 | 593,717   | 1,774,834 | 0.034443 | 0.121668 | 0.001637 | 61,131  | 72,237  | 972   |
| 40-44 | 407,908   | 1,384,849 | 0.025485 | 0.117280 | 0.002306 | 35,292  | 47,839  | 941   |
| 45-49 | 286,895   | 1,232,392 | 0.017583 | 0.115547 | 0.003365 | 21,669  | 33,150  | 966   |
| 50-54 | 189,154   | 1,042,762 | 0.011396 | 0.107399 | 0.005071 | 11,883  | 20,315  | 959   |
| 55-59 | 118,459   | 857,161   | 0.006954 | 0.098862 | 0.007935 | 5,960   | 11,711  | 940   |
| 60-64 | 79,574    | 761,826   | 0.003944 | 0.086305 | 0.013217 | 3,005   | 6,868   | 1,052 |
| 65-69 | 46,029    | 569,981   | 0.002002 | 0.071394 | 0.022092 | 1,141   | 3,286   | 1,017 |
| 70-74 | 25,688    | 407,308   | 0.000767 | 0.058724 | 0.036815 | 313     | 1,508   | 946   |
| 75-79 | 14,670    | 298,331   | 0.000000 | 0.050862 | 0.060961 | 0       | 746     | 894   |
| 80-84 | 7,877     | 214,135   | 0.000000 | 0.059353 | 0.099888 | 0       | 468     | 787   |
| 85-89 | 3,245     | 122,906   | 0.000000 | 0.076791 | 0.160221 | 0       | 249     | 520   |
| 90-94 | 849       | 52,319    | 0.000000 | 0.196185 | 0.247714 | 0       | 167     | 210   |

Fuentes : columnas (2) y (3) del cuadro 1.1 para (1) y (2); columnas (6), (7) y (8) del cuadro 3.8 para (3), (4) y (5).

si bien ha dado buenos resultados con el incremento de las paridades medias en el estudio de la fecundidad, en el caso de la PEA presenta la desventaja de que, al cambiar las definiciones y las estrategias para captar el concepto entre los censos, es común tener niveles altos o bajos de participación. Por ejemplo, en los hombres de México, la participación que se deriva de la mezcla de los censos de 1980 y 1990 es baja, por una mayor intensidad en el censo de 1980 en todas las edades, incluso en aquellas (25-44) donde el cambio en el tiempo es casi nulo.

Si aceptamos las tasas de movilidad estimadas con los datos del censo de 1990, en el cuadro 4.2 presentamos el movimiento total de la PEA, para cada sexo por separado y bajo los enfoques tradicional y de movimientos múltiples.<sup>3</sup>

La proximidad en el volumen del cambio neto ( $CN^a = \mathcal{H}^{ia} - \mathcal{H}^{ai} - \mathcal{D}^a$ ) bajo las dos ópticas (4.8% mayor en hombres y 6% menor en mujeres en el caso de estados múltiples), refleja que las estimaciones han sido hechas con los mismos datos. En cambio, la diferencia es muy marcada en los ingresos y los retiros:<sup>4</sup> con la ocurrencia simultánea de los eventos, en mujeres las entradas son casi el triple y las salidas 8.6 veces más; y en hombres, 63% y 6.4 veces superiores respectivamente. El

---

<sup>3</sup>Los totales de las columnas (6) a (8) del cuadro 4.1 corresponden a las cifras para movimientos múltiples del cuadro 4.2; de un cuadro similar, que el lector puede elaborar, se obtuvieron los totales para el método de las tasas del enfoque tradicional (cuadro 2.9).

<sup>4</sup>Las defunciones son iguales en los dos métodos, porque en ambos hemos supuesto que la mortalidad es la misma para activos e inactivos.

CUADRO 4.2

México: movimiento total de la población económicamente activa según dos métodos de estimación de las tasas de cambio, 1990

| Sexo           | Método                | Medida  | Ingresos<br>$\mathcal{H}^{ia}$<br>(1) | Retiros<br>$\mathcal{H}^{ai}$<br>(2) | Muertes<br>$\mathcal{D}^a$<br>(3) | Cambio neto<br>$CN^a$<br>(4)=<br>(1)-(2)-(3) | Razón de<br>reemplazo<br>$RR$<br>(5) |
|----------------|-----------------------|---------|---------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|--|--------------------------------------|
| <i>Hombres</i> | tradicional           | eventos | 800,375                               | 88,255                               | 132,773                           | 579,347                                      | 4.00                                 |
|                |                       | tasas   | 43.0                                  | 4.7                                  | 7.1                               | 31.1   |                                      |
|                | movimientos múltiples | eventos | 1,302,750                             | 562,661                              | 132,773                           | 607,316                                      | 1.87                                 |
|                |                       | tasas   | 70.0                                  | 30.2                                 | 7.1                               | 32.6   |                                      |
| <i>Mujeres</i> | tradicional           | eventos | 280,054                               | 74,260                               | 13,357                            | 192,437                                      | 3.00                                 |
|                |                       | tasas   | 48.9                                  | 13.0                                 | 2.3                               | 33.6   |                                      |
|                | movimientos múltiples | eventos | 834,491                               | 640,192                              | 13,357                            | 180,942                                      | 1.27                                 |
|                |                       | tasas   | 145.7                                 | 111.8                                | 2.3                               | 31.6   |                                      |

Nota: tasas por cada mil personas económicamente activas.

mayor impacto en los retiros, bajo el método tradicional, es consecuencia de asumir que las salidas de la actividad ocurren sólo en el intervalo de edades donde hay menos población económicamente activa en ambos sexos y donde disminuye de manera continua la intensidad en la participación, condición necesaria para la ocurrencia exclusiva de retiros en el método tradicional.

En el cuadro 4.2, también se incluyen las tasas brutas de crecimiento de la PEA mexicana en 1990 en tanto por mil,<sup>5</sup> calculadas como:

$$\begin{aligned}
 M^{ia} &= \frac{H^{ia}}{PEA} & M^{ai} &= \frac{H^{ai}}{PEA} \\
 M^{a\delta} &= \frac{D^a}{PEA} & r^a &= M^{ia} - M^{ai} - M^{a\delta}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

donde  $r^a$  denota la tasa bruta de crecimiento de la PEA, que como podemos ver fue de poco más de 3% en 1990. Este indicador es de particular importancia, pues expresa en términos relativos la demanda de nuevos empleos (casi 800 mil en 1990) que deberá crear la economía. Si la economía es incapaz de satisfacer esa demanda, sobreviene el desempleo, o bien el subempleo, concebido éste como un número de horas trabajadas per cápita inferior a una norma preestablecida, o bien, como la fracción de la PEA ocupada en actividades de menor calificación que la alcanzada en la educación formal e informal.

---

<sup>5</sup>No decimos "tasas refinadas" (véase sección 1.1) porque, aunque se refieren sólo a la población de 12 años o más, en el denominador se considera a toda la población (activa) expuesta al riesgo.

Otra medida que se incluye en el cuadro 4.2 es la llamada "razón de reemplazo", que se define como el cociente que resulta de dividir las entradas entre las salidas (suma de retiros y de defunciones de activos):

$$RR = \frac{\mathcal{H}^{ia}}{\mathcal{H}^{ai} + \mathcal{D}^a} \quad (4.3)$$

Este valor expresa la proporción por la que aumenta anualmente la PEA por cada persona que ha dejado de trabajar, por retiro o por muerte. Es interesante que, en ambos sexos, bajo el enfoque de movimientos múltiples la razón de reemplazo se reduce a menos de la mitad, debido al notable aumento en los retiros en el denominador del cociente.

#### 4.2. PROYECCIONES DE LA PEA

Dos son los métodos demográficos disponibles para proyectar la población económicamente activa:

- Aplicar a una población total previamente proyectada, por sexo y grupos de edad, previsiones de las proporciones de participación.
- La extensión del procedimiento de las componentes demográficas al esquema de movimientos múltiples.

El primero de estos métodos consiste de la extrapolación, para cada edad y sexo por separado, de las proporciones de participación en dos o más censos, como funciones matemáticas del tiempo, o bien, como funciones de variables que cambian con el tiempo (Naciones Unidas, 1970). Además de los problemas inherentes a

modelos de tipo lineal (valores negativos de  ${}_nA_x$  en algunas edades en el largo plazo), también en curvas de tipo multiplicativo es común que, conforme avanza el tiempo, el patrón de participación por edad exhiba perfiles inadecuados, porque la estimación se hace de manera independiente para cada grupo de edad.

El método generalizado de las componentes demográficas, en cambio, requiere de la proyección de las tasas de ingreso y de retiro por edad y sexo, además de las previsiones de la fecundidad y de la mortalidad. La estimación de las futuras propensiones de entrar y salir de la actividad puede ser sencilla: reducir paulatinamente las tasas de ingreso en los jóvenes (antes de los 20 años) y en los viejos (60 años o más), y aumentar progresivamente las de entrada en las edades adultas jóvenes (20-30 años) y las de retiro en la tercera edad; de esta manera estarán acordes, por un lado, con una política que busque satisfacer una mayor demanda de educación media superior y superior, y por otro, con programas de mayor cobertura de los sistemas de jubilación.

Dado que las proporciones de participación son producto del movimiento de la PEA (ingresos, retiros y muertes), mientras en el primero de los métodos se proyecta el resultado, con el de componentes demográficas de estados múltiples se prevén los insumos; además de que es más sencillo evaluar con el segundo el impacto de políticas encaminadas al aumento en la oferta de empleo. Como la extrapolación de las proporciones de participación no es una aplicación de la tabla de vida activa, en esta sección sólo presentamos el enfoque de movimientos múltiples; al lector interesado en el primero de los métodos se le remite a Naciones Unidas (1970).

### 4.2.1. Probabilidades perspectivas de sobrevivencia

Habiendo definido las probabilidades perspectivas de sobrevivencia ( ${}_nS_x^{aa}$ ,  ${}_nS_x^{ai}$ ,  ${}_nS_x^{ia}$  y  ${}_nS_x^{aa}$ ) en la subsección 3.3.2, las igualdades equivalentes a (2.12) para grupos quinquenales de edad son, al cabo de un periodo de  $n$  años, de igual longitud que los grupos de edad:

$$\begin{aligned} {}_nPEA_{x+n}(t+n) &= {}_nPEA_x(t) {}_nS_x^{aa}(t, t+n) \\ &\quad + {}_nPEI_x(t) {}_nS_x^{ia}(t, t+n) \\ {}_nPEI_{x+n}(t+n) &= {}_nPEA_x(t) {}_nS_x^{ai}(t, t+n) \\ &\quad + {}_nPEI_x(t) {}_nS_x^{ii}(t, t+n) \end{aligned} \tag{4.4}$$

El problema se reduce a determinar las probabilidades perspectivas de sobrevivencia.

Las igualdades (3.47) y (3.49) son una primera alternativa; no obstante, si se usan en proyecciones de población, no debe perderse de vista que, construidas sobre la base de la comparación de la condición (activo o inactivo) de las personas al inicio y al final del periodo, se requieren previsiones de proporciones de participación, con lo cual la aplicación del modelo generalizado de las componentes demográficas (3.4) carece de sentido, pues se reduce a utilizar el primero de los métodos.

Otra alternativa es proyectar las probabilidades de transición perspectivas, o bien sus tasas de cambio asociadas (subsección 3.3.2). Ante el supuesto de independencia estocástica, es más sencillo hacer las previsiones futuras de las tasas, ya que se proyectan por separado las de ingreso, retiro, mortalidad de activos, mortalidad de inactivos y fecundidad de activas y de inactivas. Una vez

establecidas las tasas de movilidad futuras, el problema se reduce a convertirlas en probabilidades perspectivas de transición. Como el supuesto de continuidad de la mortalidad en la participación es un caso particular del modelo general, en la exposición que sigue asumiremos una mortalidad diferencial.

La conversión de tasas en probabilidades puede hacerse de dos maneras:

- Con los años-persona vividos en la tabla de vida activa.
- Asumiendo el modelo exponencial.

La probabilidad perspectiva de sobrevivencia extraída de una tabla de mortalidad es el conocido cociente:

$${}_nS_x = \frac{{}_nL_{x+n}}{{}_nL_x} \quad (4.5)$$

la extensión a la tabla de vida activa pareciera ser simplemente:

$${}_nS_x(t, t+n) = {}_nL_{x+n} {}_nL_x^{-1}$$

que, sin embargo, no es cierta; pues el aumento en el monto de los activos en la tabla puede arrojar –de hecho lo hace– el aberrante caso de probabilidades mayores que uno y negativas. Usar la ecuación anterior equivale a querer estimar  ${}_n p_x^{aa}$  como el cociente de los sobrevivientes activos en dos edades sucesivas:

$${}_n p_x^{aa} = \frac{\ell_{x+n}^a}{\ell_x^a} = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x} = {}_n p_x \frac{\alpha_{x+n}}{\alpha_x}$$

donde claramente podemos ver que no es cierta en un intervalo ascendente ( $\alpha_{x+n} > \alpha_x$ ), pues el cociente de

las  $\alpha$  –mayor que uno– bien puede propiciar que al multiplicarlo por la probabilidad de sobrevivencia pura, el resultado exceda la unidad. Realmente la ecuación anterior sólo vale en un intervalo descendente bajo el enfoque tradicional.

Así como controlamos la edad para obtener correctamente  ${}_n p_x^{aa}$  al despejar en (3.5):

$${}_n p_x^{aa} = \frac{\ell_{x,x+n}^{aa}}{\ell_x^a}$$

de la misma manera debemos controlar la edad en las probabilidades perspectivas. Definamos por:

${}_n L_{x,x+n}^{aa}$  los años-persona vividos en la actividad entre las edades  $x+n$  y  $x+2n$ , por quienes eran activos a la edad exacta  $x$ .

${}_n L_{x,x+n}^{ai}$  los años-persona vividos en la inactividad entre las edades  $x+n$  y  $x+2n$ , por quienes eran activos a la edad exacta  $x$ .

${}_n L_{x,x+n}^{ia}$  los años-persona vividos en la actividad entre las edades  $x+n$  y  $x+2n$ , por quienes eran inactivos a la edad exacta  $x$ .

${}_n L_{x,x+n}^{ii}$  los años-persona vividos en la inactividad entre las edades  $x+n$  y  $x+2n$ , por quienes eran inactivos a la edad exacta  $x$ .

Por el supuesto markoviano (inicio del capítulo 2), las esperanzas parciales de vida  ${}_n e_{x+n}^{aa}$  y  ${}_n e_{x+n}^{ai}$  corresponden a cualquier activo de edad  $x+n$ , y  ${}_n e_{x+n}^{ia}$  y  ${}_n e_{x+n}^{ii}$  a cualquier inactivo; por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 {}_nL_{x,x+n}^{aa} &= \ell_{x,x+n}^{aa} {}_n e_{x+n}^{aa} + \ell_{x,x+n}^{ai} {}_n e_{x+n}^{ia} \\
 {}_nL_{x,x+n}^{ai} &= \ell_{x,x+n}^{aa} {}_n e_{x+n}^{ai} + \ell_{x,x+n}^{ai} {}_n e_{x+n}^{ii} \\
 {}_nL_{x,x+n}^{ia} &= \ell_{x,x+n}^{ia} {}_n e_{x+n}^{aa} + \ell_{x,x+n}^{ii} {}_n e_{x+n}^{ia} \\
 {}_nL_{x,x+n}^{ii} &= \ell_{x,x+n}^{ia} {}_n e_{x+n}^{ai} + \ell_{x,x+n}^{ii} {}_n e_{x+n}^{ii}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si definimos la matriz:

$${}_n\mathbf{L}_{x,x+n} = \begin{pmatrix} {}_nL_{x,x+n}^{aa} & {}_nL_{x,x+n}^{ai} \\ {}_nL_{x,x+n}^{ai} & {}_nL_{x,x+n}^{ii} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

es claro que, por las definiciones (3.19) y (3.37), la ecuación matricial:

$${}_n\mathbf{L}_{x,x+n} = {}_n e_{x+n} \boldsymbol{\ell}_{x,x+n} \tag{4.8}$$

satisface las igualdades (3.6).

El equivalente a (3.5) en el modelo de movimientos múltiples es entonces:

$${}_n\mathbf{S}_x(t, t+n) = {}_n\mathbf{L}_{x,x+n} {}_n\mathbf{L}_x^{-1} \tag{4.9}$$

pero, por la ecuación previa a (3.37):

$${}_n\mathbf{L}_x^{-1} = \boldsymbol{\ell}_{x,x}^{-1} e_x^{-1}$$

que si sustituimos junto con (3.23) y (3.8) en (3.9):

$${}_n\mathbf{S}_x(t, t+n) = {}_n e_{x+n} {}_n\mathbf{P}_x \boldsymbol{\ell}_{x,x} \boldsymbol{\ell}_{x,x}^{-1} e_x^{-1}$$

o bien,

$${}_n\mathbf{S}_x(t, t+n) = {}_n e_{x+n} {}_n\mathbf{P}_x e_x^{-1} \tag{4.10}$$

por la conocida propiedad de la matriz inversa:

$$\ell_{x,x} \ell_{x,x}^{-1} = \mathbf{I}$$

En el caso de las personas que nacen durante el periodo de  $n$  años, la estimación es:

$${}_n s_0(t, t+n) = {}_n \mathbf{L}_n [{}_n \ell_0^{-1}] = \frac{1}{n} {}_n e_0 \quad (4.11)$$

con:

$$\frac{1}{n} {}_n e_0 = \begin{pmatrix} \frac{{}_n q_0^{a\delta}}{{}_n m_0^{a\delta}} & 0 \\ 0 & \frac{{}_n q_0^{i\delta}}{{}_n m_0^{i\delta}} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Los ceros se deben a la ausencia de ingresos y de retiros en los primeros años de vida.

Bajo el enfoque tradicional, mediante razonamientos análogos a los seguidos en la sección 2.2, se pueden obtener las probabilidades perspectivas de sobrevivencia, sin necesidad de construir la tabla de vida activa. En efecto, cuando se supone igual mortalidad para activos e inactivos, el equivalente a (2.16) y (2.17) es:

i)  ${}_n A_{x+n} > {}_n A_x$ :

$$\begin{aligned} {}_n \hat{S}_x^{aa} &= 1 & {}_n \hat{S}_x^{ia} &= \frac{{}_n A_{x+n} - {}_n A_x}{{}_n I_x} \\ {}_n \hat{S}_x^{ai} &= 0 & {}_n \hat{S}_x^{ii} &= \frac{{}_n I_{x+n}}{{}_n I_x} \end{aligned} \quad (4.13)$$

ii)  ${}_n A_{x+n} < {}_n A_x$ :

$${}_n \hat{S}_x^{aa} = \frac{{}_n A_{x+n}}{{}_n A_x} \quad {}_n \hat{S}_x^{ia} = 0$$

$${}_n\hat{S}_x^{ai} = \frac{{}_nA_x - {}_nA_{x+n}}{{}_nA_x} \quad {}_n\hat{S}_x^{ii} = 1 \tag{4.14}$$

y al incorporar la mortalidad:

$$\begin{aligned} {}_nS_x^{aa} &= {}_n\hat{S}_x^{aa} {}_nS_x & {}_nS_x^{ia} &= {}_n\hat{S}_x^{ia} {}_nS_x \\ {}_nS_x^{ai} &= {}_n\hat{S}_x^{ai} {}_nS_x & {}_nS_x^{ii} &= {}_n\hat{S}_x^{ii} {}_nS_x \end{aligned} \tag{4.15}$$

Y cuando se supone diferente mortalidad, el equivalente a (2.61) y (2.62) para probabilidades perspectivas es:

i)  ${}_nA_{x+n} > {}_nA_x$ :

$$\begin{aligned} {}_n\hat{S}_x^{aa} &= 1 & {}_n\hat{S}_x^{ia} &= \frac{{}_nA_{x+n} {}_nS_x - {}_nA_x {}_nS_x^{a\delta}}{{}_nI_x {}_nS_x^{i\delta}} \\ {}_n\hat{S}_x^{ai} &= 0 & {}_n\hat{S}_x^{ii} &= \frac{{}_nI_x + {}_nS_x}{{}_nI_x {}_nS_x^{i\delta}} \end{aligned} \tag{4.16}$$

ii)  ${}_nA_{x+n} < {}_nA_x$ :

$$\begin{aligned} {}_n\hat{S}_x^{aa} &= \frac{{}_nA_{x+n} {}_nS_x}{{}_nA_x {}_nS_x^{a\delta}} & {}_n\hat{S}_x^{ia} &= 0 \\ {}_n\hat{S}_x^{ai} &= \frac{{}_nI_x + {}_nS_x - {}_nI_x {}_nS_x^{i\delta}}{{}_nA_x {}_nS_x^{a\delta}} & {}_n\hat{S}_x^{ii} &= 1 \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde:

$${}_nS_x = {}_nA_x {}_nS_x^{a\delta} + {}_nI_x {}_nS_x^{i\delta} \tag{4.18}$$

y las probabilidades con mortalidad son:

$$\begin{aligned} {}_nS_x^{aa} &= {}_n\hat{S}_x^{aa} {}_nS_x^{a\delta} & {}_nS_x^{ia} &= {}_n\hat{S}_x^{ia} {}_nS_x^{i\delta} \\ {}_nS_x^{ai} &= {}_n\hat{S}_x^{ai} {}_nS_x^{a\delta} & {}_nS_x^{ii} &= {}_n\hat{S}_x^{ii} {}_nS_x^{i\delta} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Tomemos los grupos de edad 40-44 y 45-49 femeninos de México en 1990. Aplicando (3.7) a las probabilidades

y a las tasas de los cuadros 3.6 y 3.8 respectivamente, las matrices de esperanzas parciales de vida para ambos grupos y la de probabilidades para el primero son:

$${}_5e_{40} = \begin{pmatrix} 3.808802 & 0.252960 \\ 1.164126 & 4.719968 \end{pmatrix}$$

$${}_5e_{45} = \begin{pmatrix} 3.800439 & 0.176573 \\ 1.160341 & 4.784208 \end{pmatrix}$$

$${}_5P_{40} = \begin{pmatrix} 0.574187 & 0.090036 \\ 0.414345 & 0.898496 \end{pmatrix}$$

de donde:<sup>6</sup>

$${}_5e_{40}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.266922 & -0.014305 \\ -0.065833 & 0.215394 \end{pmatrix}$$

y aplicando (3.10):

$${}_5S_{40} = {}_n e_{45} {}_n P_{40} {}_n e_{40}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.569025 & 0.075612 \\ 0.417092 & 0.910506 \end{pmatrix}$$

Se podrá notar que en ambas columnas:

$${}_5S_{40}^{aa} + {}_5S_{40}^{ai} = 0.569025 + 0.417092 = 0.986117$$

$${}_5S_{40}^{ia} + {}_5S_{40}^{ii} = 0.075612 + 0.910506 = 0.986117$$

---

<sup>6</sup>Recuérdese que en el caso de una matriz de orden 2:

$$\text{si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ entonces } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

donde  $D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$  es el determinante de la matriz.

se satisface la probabilidad perspectiva extraída de la tabla de mortalidad (cuadro B.1):

$${}_5S_{40} = \frac{{}_5L_{45}}{{}_nL_{40}} = \frac{4,560,818}{4,625,028} = 0.986117$$

evidencia de que suponemos continuidad de la mortalidad. Los resultados para todos los grupos de edad se reproducen en el cuadro 4.3, donde hicimos iguales a cero las tasas de ingreso y de retiro para los grupos 0-4 y 5-9.

Es necesario transformar las tasas del grupo trienal 12-14 en las del quinquenal 10-14, para poder determinar las probabilidades perspectivas del 5-9 al 10-14 y de éste al 15-19. Se pueden conservar las mismas probabilidades al estado puro, ya que al estimarlas no intervino la longitud del intervalo de edad; basta entonces sólo con hacer  $n = 5$  para obtener el valor de  ${}_5B_{10}$  en (3.4). Las tasas son:

Para hombres:

$${}_5m_{10}^{ia} = 0.080458 \quad {}_5m_{10}^{ai} = 0.117193 \quad {}_5m_{10} = 0.000748$$

Para mujeres:

$${}_5m_{10}^{ia} = 0.026554 \quad {}_5m_{10}^{ai} = 0.131336 \quad {}_5m_{10} = 0.000439$$

y las matrices de probabilidades perspectivas de sobrevivencia para el grupo 5-9:

$${}_5S_5^m = \begin{pmatrix} 0.781214 & 0.147960 \\ 0.215513 & 0.848767 \end{pmatrix}$$

$${}_5S_5^f = \begin{pmatrix} 0.741693 & 0.051743 \\ 0.255924 & 0.945874 \end{pmatrix}$$

Los sobreíndices  $m$  y  $f$  se refieren al sexo masculino y femenino respectivamente.

Debido a que no hay población activa en el grupo 5-9, las probabilidades  ${}_5S_5^{aa}$  y  ${}_5S_5^{ai}$  pueden tomar cualquier valor entre cero y uno (con  ${}_nS_x^{aa} + {}_nS_x^{ai} = {}_nS_x^{ad}$ ), sin que esto afecte los volúmenes de activos e inactivos del grupo 10-14 cinco años después; en cambio, por la continuidad de la mortalidad, las proporciones de participación del grupo 10-14 al final del lustro están determinadas por las probabilidades para los inactivos al inicio:

Para hombres:

$${}_5A_{10} = {}_5S_5^{ai} / {}_5S_5 = 0.147960 / 0.996726 = 0.148446$$

Para mujeres:

$${}_5A_{10} = {}_5S_5^{ai} / {}_5S_5 = 0.051743 / 0.997617 = 0.054704$$

es decir, más del doble que las observadas en 1990 (en el cuadro 4.5, 0.071589 y 0.022026 respectivamente). Con base en el comportamiento por edad de la columna (7) del cuadro 4.5, donde se compara el cambio en las proporciones de participación de 1990 a 1995 a partir del grupo 15-19, asumimos que la reducción en la proporción  ${}_5A_{10}$  al cabo del lustro será la misma que para el grupo inmediato posterior:

Para hombres:

$$\begin{aligned} {}_5A_{10}(1995) &= 0.9546 \times {}_5A_{10}(1990) \\ &= 0.9546 \times 0.071589 = 0.068341 \end{aligned}$$

Para mujeres:

$$\begin{aligned} {}_5A_{10} &= 0.8853 \times {}_5A_{10}(1990) \\ &= 0.8853 \times 0.022026 = 0.019499 \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones (2.16) y (2.17) del modelo tradicional, obtuvimos las probabilidades perspectivas del grupo 5-9 al 10-14 con  ${}_5A_5 = 0$  y  ${}_5I_5 = 1$ . Los resultados se muestran en el cuadro 4.3.

El método exponencial consiste en una simple extensión del modelo general de estados múltiples (3.24) de la tabla de vida activa. En el diagrama de Lexis de la gráfica 4.1 se puede ver que, entre las edades cumplidas  $x$  y  $x+n$  y el aniversario  $x+n$ , donde inciden las tasas observadas  ${}_nM_x$ , transcurre la mitad del periodo ( $n/2$ ), mientras entre el aniversario  $x+n$  y el grupo de edades  $x+n$  a  $x+2n$ , donde actúan las tasas  ${}_nM_{x+n}$ , transcurre la mitad restante. Entonces, por la extensión de (3.24):

$${}_nS_x(t, t+n) = e^{-(n/2)[{}_nM_{x+n}M_{x+n}]} \quad (4.20)$$

donde, la matriz  ${}_nS_x$  se define en (3.49).

En el caso de las personas que nacen durante el periodo de  $n$  años, la estimación se reduce al triángulo superior de la gráfica 4.1 (del "aniversario" 0 al grupo de edades entre 0 y  $n$ ):

$${}_nS_0(t, t+n) = e^{-(n/2){}_nM_0} \quad (4.21)$$

No obstante, esta igualdad no ofrece resultados satisfactorios, pues es el intervalo de la vida donde menos se cumple el supuesto de constancia —respecto a la edad—

en el riesgo de fallecer (la tasa); como alternativa se debe usar (4.11).

De la misma manera, tampoco es buena la estimación de las probabilidades del primero al segundo grupos de edad  $[_nS_n(t, t+n)]$  con (4.20), pues también intervienen las tasas de mortalidad de los primeros  $n$  años de vida. Una posibilidad es ligar dos segmentos, de acuerdo al diagrama de Lexis de la gráfica 4.1:

1. Del grupo entre las edades 0 y  $n$  años al aniversario  $n$ , con el enfoque de las esperanzas parciales:

$${}_n \ell_{n,n} {}_n L_0^{-1} = {}_n {}_n P_0 \ell_0 \ell_0^{-1} {}_n e_0^{-1} = {}_n {}_n P_0 {}_n e_0^{-1}$$

2. Del aniversario  $n$  al grupo entre las edades  $n$  y  $2n$  años, con el modelo exponencial:

$$e^{-(n/2)} {}_n M_n$$

Juntando ambas probabilidades:

$${}_n S_n = {}_n \exp [-(n/2) {}_n M_n] {}_n P_0 {}_n e_0^{-1} \tag{4.22}$$

Si se quieren aplicar las ecuaciones (4.20) –para  $x < \beta$ – y (4.21), dado que aún no hay activos en esas edades, se deben hacer iguales a cero las tasas de ingreso y de retiro en (4.21). Como los enfoques de los eventos y de las tasas parten de las mismas probabilidades de transición en el método tradicional, las mismas ecuaciones (4.13) a (4.19) se aplican en el modelo exponencial; el único cambio es en el cálculo de las probabilidades de sobrevivencia de la tabla de mortalidad, que se obtienen con el modelo exponencial. En el cuadro 4.4, se muestran los resultados

## CUADRO 4.3

**México: probabilidades de perspectivas de sobrevivencia, 1990**  
**(método de las esperanzas de vida parciales)**

| Edad<br>$x, x+4$ | Activo a:                       |                                   | Inactivo a:                     |                                   | Total<br>${}_5S_x$ |
|------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|--------------------|
|                  | activo<br>${}_5S_x^{aa}$<br>(1) | inactivo<br>${}_5S_x^{ai}$<br>(2) | activo<br>${}_5S_x^{ia}$<br>(3) | inactivo<br>${}_5S_x^{ii}$<br>(4) |                    |
| <i>Hombres</i>   |                                 |                                   |                                 |                                   |                    |
| Nacimiento*      | 0.957354                        | 0.000000                          | 0.000000                        | 0.957354                          | 0.957354           |
| 0-4              | 0.991492                        | 0.000000                          | 0.000000                        | 0.991492                          | 0.991492           |
| 5-9              | 0.996726                        | 0.000000                          | 0.068117                        | 0.928609                          | 0.996726           |
| 10-14            | 0.751323                        | 0.243761                          | 0.437210                        | 0.557875                          | 0.995085           |
| 15-19            | 0.875275                        | 0.116801                          | 0.641626                        | 0.350451                          | 0.992077           |
| 20-24            | 0.929782                        | 0.058816                          | 0.694846                        | 0.293752                          | 0.988598           |
| 25-29            | 0.943747                        | 0.041166                          | 0.621788                        | 0.363125                          | 0.984912           |
| 30-34            | 0.941262                        | 0.039673                          | 0.495935                        | 0.485000                          | 0.980935           |
| 35-39            | 0.929973                        | 0.046257                          | 0.420898                        | 0.555331                          | 0.976230           |
| 40-44            | 0.910220                        | 0.059738                          | 0.352474                        | 0.617484                          | 0.969958           |
| 45-49            | 0.879652                        | 0.080762                          | 0.281542                        | 0.678872                          | 0.960414           |
| 50-54            | 0.830158                        | 0.111180                          | 0.207796                        | 0.733543                          | 0.941339           |
| 55-59            | 0.764755                        | 0.144172                          | 0.138296                        | 0.770631                          | 0.908926           |
| 60-64            | 0.702892                        | 0.157203                          | 0.081048                        | 0.779048                          | 0.860096           |
| 65-69            | 0.639231                        | 0.149762                          | 0.037912                        | 0.751081                          | 0.788994           |
| 70-74            | 0.550421                        | 0.140080                          | 0.009565                        | 0.680936                          | 0.690501           |
| 75-79            | 0.435799                        | 0.127985                          | 0.000000                        | 0.563784                          | 0.563784           |
| 80-84            | 0.311244                        | 0.106375                          | 0.000000                        | 0.417619                          | 0.417619           |

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 85-89    | 0.169306 | 0.105120 | 0.000000 | 0.274426 | 0.274426 |
| 90-94    | 0.000000 | 0.158333 | 0.000000 | 0.158333 | 0.158333 |
| 95 o más | 0.000000 | 0.081383 | 0.000000 | 0.081383 | 0.081383 |

*Mujeres*

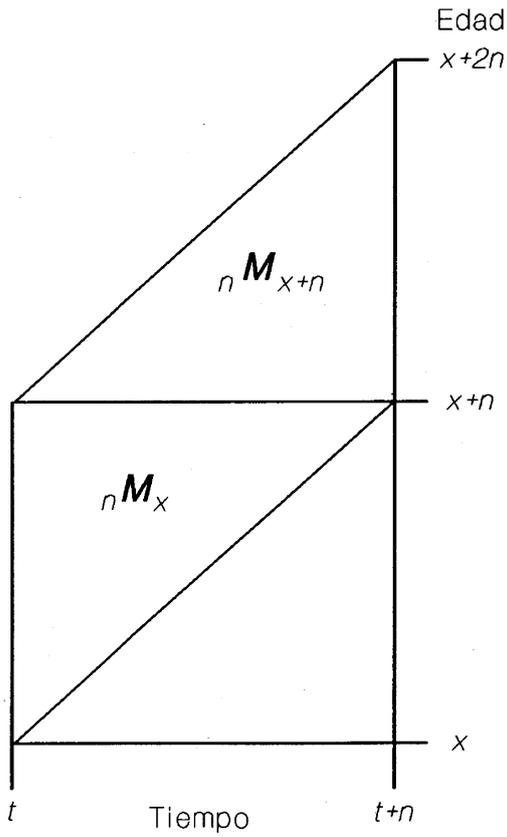
|             |          |          |          |          |          |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Nacimiento* | 0.964060 | 0.000000 | 0.000000 | 0.964060 | 0.964060 |
| 0-4         | 0.992421 | 0.000000 | 0.000000 | 0.992421 | 0.992421 |
| 5-9         | 0.997617 | 0.000000 | 0.019452 | 0.978165 | 0.997617 |
| 10-14       | 0.590692 | 0.406929 | 0.153390 | 0.844230 | 0.997621 |
| 15-19       | 0.628055 | 0.368921 | 0.190909 | 0.806067 | 0.996976 |
| 20-24       | 0.627094 | 0.368950 | 0.157050 | 0.838994 | 0.996044 |
| 25-29       | 0.604888 | 0.389900 | 0.133377 | 0.861412 | 0.994789 |
| 30-34       | 0.583186 | 0.409818 | 0.123157 | 0.869847 | 0.993003 |
| 35-39       | 0.570723 | 0.419585 | 0.103528 | 0.886780 | 0.990309 |
| 40-44       | 0.569025 | 0.417092 | 0.075612 | 0.910506 | 0.986117 |
| 45-49       | 0.571817 | 0.407631 | 0.052010 | 0.927439 | 0.979449 |
| 50-54       | 0.584297 | 0.384392 | 0.033560 | 0.935129 | 0.968689 |
| 55-59       | 0.599935 | 0.349653 | 0.020229 | 0.929359 | 0.949588 |
| 60-64       | 0.618431 | 0.298744 | 0.011083 | 0.906092 | 0.917176 |
| 65-69       | 0.624802 | 0.240833 | 0.005025 | 0.860610 | 0.865635 |
| 70-74       | 0.598432 | 0.188471 | 0.001267 | 0.785636 | 0.786903 |
| 75-79       | 0.514267 | 0.159668 | 0.000000 | 0.673935 | 0.673935 |
| 80-84       | 0.380328 | 0.147020 | 0.000000 | 0.527348 | 0.527348 |
| 85-89       | 0.203597 | 0.162004 | 0.000000 | 0.365601 | 0.365601 |
| 90-94       | 0.000000 | 0.217979 | 0.000000 | 0.217979 | 0.217979 |
| 95 o más    | 0.000000 | 0.112930 | 0.000000 | 0.112930 | 0.112930 |

\* Se refiere a las probabilidades desde el nacimiento hasta el grupo 0-4 años (580).

## GRÁFICA 4.1

**Diagrama de Lexis que muestra la estimación de las probabilidades perspectivas de sobrevivencia a partir de las tasas de cambio**

---



de la aplicación al caso de México en 1990, usando las tasas del enfoque de estados múltiples (cuadro 3.8).<sup>7</sup>

En la gráfica 4.2, se ilustra el excedente proporcional de las probabilidades calculadas por el modelo exponencial respecto a las obtenidas con las esperanzas parciales. Llama la atención la escasa diferencia en ambos sexos, excepto entre 10 y 20 años en la transición de activo a inactivo, y en las dos de los activos del grupo 80-84 en ambos sexos.

Además de la mortalidad y las transiciones entre la actividad y la inactividad, dos variables adicionales determinan el crecimiento y la estructura de una población: la migración y la natalidad. La primera podemos incorporarla mediante tasas de migración neta, como un decremento en la diagonal principal de la matriz  ${}_n m_x$  en (3.21) si hay ganancia por migración, o incremento si hay pérdida; si se aplican las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.7), se disminuye o aumenta respectivamente la tasa de mortalidad  ${}_n m_x$ , y con esta nueva tasa "ajustada" se vuelven a calcular las probabilidades de sobrevivencia y de transición con mortalidad, caso en el que  ${}_n p_x$  puede ser mayor que uno por una fuerte ganancia migratoria.

Debido a que todas las personas nacen económicamente inactivas, una posibilidad es utilizar los nacimientos previamente proyectados, ya que todos son inactivos;

---

<sup>7</sup>No ejemplificamos su cálculo, pues en la aplicación de (3.25) se requiere elevar a varias potencias la matriz. Los valores del cuadro 4.4 se obtuvieron en una microcomputadora, deteniendo el proceso cuando, a partir de una potencia de la matriz, la evaluación no se modificaba en las primeras seis decimales en las cuatro probabilidades.

**CUADRO 4.4**  
**México: probabilidades perspectivas de sobrevivencia, 1990**  
**(método exponencial)**

| Edad<br>$x, x+4$ | Activo a:                       |                                   | Inactivo a:                     |                                   | Total<br>${}_5S_x$ |
|------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|--------------------|
|                  | activo<br>${}_5S_x^{aa}$<br>(1) | inactivo<br>${}_5S_x^{ai}$<br>(2) | activo<br>${}_5S_x^{ia}$<br>(3) | inactivo<br>${}_5S_x^{ii}$<br>(4) |                    |
| <i>Hombres</i>   |                                 |                                   |                                 |                                   |                    |
| Nacimiento*      | 0.957354                        | 0.000000                          | 0.000000                        | 0.957354                          | 0.957354           |
| 0-4              | 0.991674                        | 0.000000                          | 0.000000                        | 0.991674                          | 0.991674           |
| 5-9              | 0.766047                        | 0.230347                          | 0.158144                        | 0.838250                          | 0.996394           |
| 10-14            | 0.725541                        | 0.269444                          | 0.423804                        | 0.571181                          | 0.994985           |
| 15-19            | 0.862305                        | 0.129737                          | 0.632213                        | 0.359829                          | 0.992042           |
| 20-24            | 0.926563                        | 0.062018                          | 0.685553                        | 0.303029                          | 0.988582           |
| 25-29            | 0.944752                        | 0.040140                          | 0.610049                        | 0.374843                          | 0.984892           |
| 30-34            | 0.942215                        | 0.038664                          | 0.492243                        | 0.488635                          | 0.980879           |
| 35-39            | 0.930882                        | 0.045224                          | 0.418969                        | 0.557137                          | 0.976106           |
| 40-44            | 0.911445                        | 0.058275                          | 0.351590                        | 0.618130                          | 0.969721           |
| 45-49            | 0.880637                        | 0.078945                          | 0.281081                        | 0.678500                          | 0.959581           |
| 50-54            | 0.831239                        | 0.109029                          | 0.208544                        | 0.731723                          | 0.940268           |
| 55-59            | 0.765323                        | 0.142154                          | 0.139210                        | 0.768267                          | 0.907477           |
| 60-64            | 0.702561                        | 0.155406                          | 0.081384                        | 0.776582                          | 0.857966           |
| 65-69            | 0.637381                        | 0.148621                          | 0.038255                        | 0.747746                          | 0.786002           |
| 70-74            | 0.546315                        | 0.140257                          | 0.009781                        | 0.676791                          | 0.686571           |
| 75-79            | 0.429131                        | 0.129973                          | 0.000000                        | 0.559104                          | 0.559104           |
| 80-84            | 0.304186                        | 0.108958                          | 0.000000                        | 0.413143                          | 0.413143           |

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 85-89    | 0.153077 | 0.117902 | 0.000000 | 0.270979 | 0.270979 |
| 90-94    | 0.000000 | 0.155812 | 0.000000 | 0.155812 | 0.155812 |
| 95 o más | 0.000000 | 0.081383 | 0.000000 | 0.081383 | 0.081383 |

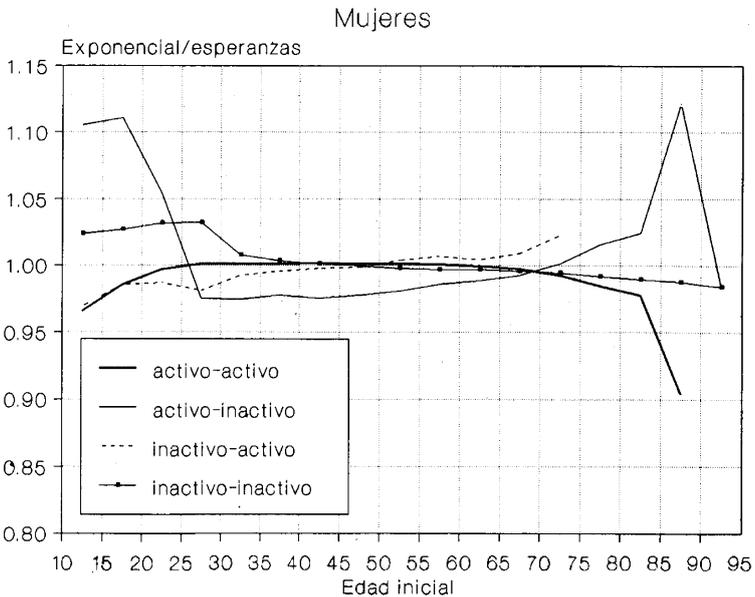
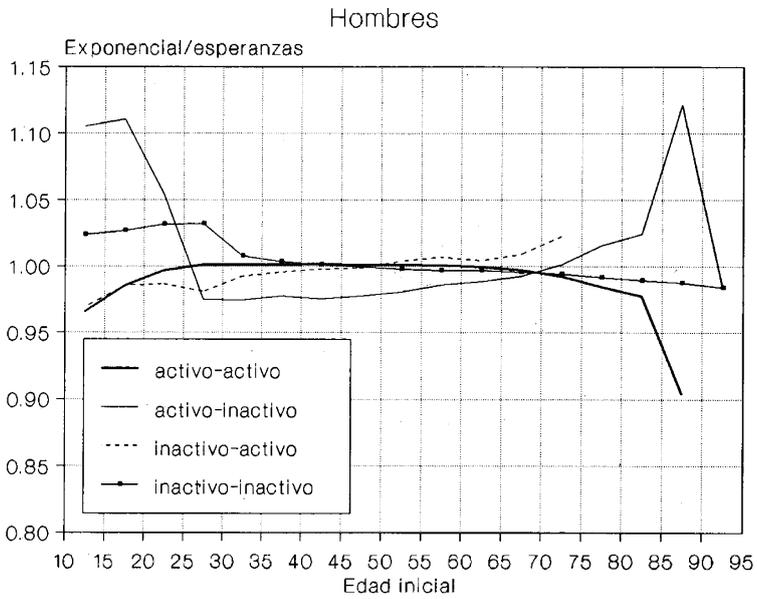
*Mujeres*

|             |          |          |          |          |          |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Nacimiento* | 0.964060 | 0.000000 | 0.000000 | 0.964060 | 0.964060 |
| 0-4         | 0.992598 | 0.000000 | 0.000000 | 0.992598 | 0.992598 |
| 5-9         | 0.726845 | 0.270589 | 0.054708 | 0.942726 | 0.997434 |
| 10-14       | 0.582148 | 0.415428 | 0.147308 | 0.850268 | 0.997576 |
| 15-19       | 0.630539 | 0.366411 | 0.190209 | 0.806741 | 0.996950 |
| 20-24       | 0.629844 | 0.366177 | 0.159023 | 0.836998 | 0.996021 |
| 25-29       | 0.605035 | 0.389713 | 0.134314 | 0.860434 | 0.994749 |
| 30-34       | 0.583490 | 0.409439 | 0.124103 | 0.868826 | 0.992929 |
| 35-39       | 0.573543 | 0.416647 | 0.104494 | 0.885697 | 0.990191 |
| 40-44       | 0.571334 | 0.414587 | 0.076689 | 0.909232 | 0.985921 |
| 45-49       | 0.574207 | 0.404923 | 0.052632 | 0.926498 | 0.979130 |
| 50-54       | 0.586069 | 0.381938 | 0.033978 | 0.934030 | 0.968007 |
| 55-59       | 0.601406 | 0.347087 | 0.020427 | 0.928066 | 0.948493 |
| 60-64       | 0.619288 | 0.296222 | 0.011169 | 0.904342 | 0.915511 |
| 65-69       | 0.624186 | 0.238876 | 0.005084 | 0.857979 | 0.863063 |
| 70-74       | 0.595642 | 0.187502 | 0.001313 | 0.781831 | 0.783144 |
| 75-79       | 0.507803 | 0.161096 | 0.000000 | 0.668899 | 0.668899 |
| 80-84       | 0.371341 | 0.150562 | 0.000000 | 0.521903 | 0.521903 |
| 85-89       | 0.182268 | 0.178385 | 0.000000 | 0.360653 | 0.360653 |
| 90-94       | 0.000000 | 0.214101 | 0.000000 | 0.214101 | 0.214101 |
| 95 o más    | 0.000000 | 0.112930 | 0.000000 | 0.112930 | 0.112930 |

\* Se refiere a las probabilidades desde el nacimiento hasta el grupo 0-4 años (550).

GRÁFICA 4.2

México: excedente proporcional de las probabilidades calculadas por el modelo exponencial respecto a las obtenidas con las esperanzas parciales, 1990



Fuente: cuadros 4.3 y 4.4.

otra alternativa, indudablemente más atractiva, es aplicar tasas de fecundidad diferenciales por condición de participación, previamente proyectadas, a los años-persona vividos por las mujeres activas e inactivas en el rango de edades reproductivas. Denotemos por  ${}_nF_x^a(t, t + h)$  y  ${}_nF_x^i(t, t + h)$  las tasas de fecundidad para las mujeres activas e inactivas, respectivamente, entre las edades  $x$  y  $x + n$  durante el intervalo de  $h$  años, y por  ${}_nK_x^{a,f}(t, t + h)$  y  ${}_nK_x^{i,f}(t, t + h)$  a los años-persona vividos, donde el sobreíndice  $f$  indica el sexo femenino. Si  $b$  y  $c$  son las edades que delimitan el intervalo reproductivo femenino, el total de nacimientos ocurridos entre  $t$  y  $t + h$  es:

$$B(t, t + h) = \sum_{x=b}^{c-n} \left[ {}_nF_x^a(t, t + h) {}_nK_x^{a,f}(t, t + h) + {}_nF_x^i(t, t + h) {}_nK_x^{i,f}(t, t + h) \right] \quad (4.23)$$

El índice de la sumatoria se incrementa de  $n$  en  $n$ . Este volumen de nacimientos se separa por sexo con la proporción de masculinidad  $\kappa$  al nacer:

$$\begin{aligned} B^m(t, t + h) &= \kappa B(t, t + h) \quad y \\ B^f(t, t + h) &= (1 - \kappa) B(t, t + h) \\ &= B(t, t + h) - B^m(t, t + h) \end{aligned}$$

El sobreíndice  $m$  indica el sexo masculino. Es común asumir, de acuerdo a la evidencia empírica, que nacen 105 varones por cada 100 mujeres, entonces  $\kappa = 105/205 = 0.5122$ . Como todos nacen inactivos, y seguramente el periodo  $h$  es menor que la edad mínima de participación  $\beta$ , entonces:

$$\begin{aligned} {}_h PEA_0(t+h) &= 0 \quad y, \\ {}_h PEI_0(t+n) &= B(t, t+h) {}_n s_0^{ii}(t, t+h) \quad h \leq \beta \end{aligned} \quad (4.24)$$

que se aplica para cada sexo por separado.

Sólo resta determinar los años-persona vividos. Por analogía con (1.9):

$${}_n K_x(t, t+h) = \int_0^h {}_n P_x(t+y) dy \quad (4.25)$$

Como no disponemos de una serie tan detallada de decesos y migraciones que nos permita reconstruir el movimiento de la población al cabo de los  $h$  años, es común aproximar la integral anterior con la media aritmética o geométrica de las poblaciones al inicio y al final del periodo:

$$\begin{aligned} {}_n K_x(t, t+h) &\doteq \frac{h}{2} [{}_n P_x(t) + {}_n P_x(t+h)] \quad \text{o} \\ {}_n K_x(t, t+h) &\doteq h \sqrt{{}_n P_x(t) {}_n P_x(t+h)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

o bien, asumiendo crecimiento exponencial:

$${}_n P_x(t+y) = {}_n P_x(t) e^{y {}_n r_x(t, t+h)} \quad (4.27)$$

y resolviendo la integral en (3.25):

$${}_n K_x(t, t+h) = {}_n P_x(t) \left[ \frac{e^{h {}_n r_x(t, t+h)} - 1}{{}_n r_x(t, t+h)} \right] \quad (4.28)$$

donde  ${}_n r_x(t, t+h)$  es la tasa de crecimiento de la población entre las edades  $x$  y  $x+n$ , y que se obtiene al despejar en (4.27):

$${}_n r_x(t, t+h) = \frac{1}{h} \ell n \left\{ \frac{{}_n P_x(t+h)}{{}_n P_x(t)} \right\}$$

Las ecuaciones (4.25) a (4.28) se extienden directamente a los activos y a los inactivos, colocando los sobreíndices  $a$  o  $i$  respectivamente.

En estricto sentido demográfico, el modelo de crecimiento exponencial (4.27) satisface la definición de tasa; pero no la expansión temporal de las medias (4.26) (véanse subsecciones 2.3.2 y 3.1.1). No obstante, la diferencia proporcional entre el producto de  $h$  por la media geométrica y el modelo exponencial es despreciable en un caso práctico. Por ejemplo, en el caso extremo de una alta tasa de crecimiento de 4% y un periodo de hasta 20 años, el tiempo vivido calculado con la media geométrica es apenas 2.6% inferior al obtenido con el modelo exponencial; en cambio, al aplicar la media aritmética la subestimación es de 5.3% respecto al exponencial.

#### 4.2.2. Proyección de la PEA de México, 1990-1995

Asumamos que las condiciones contenidas en la tabla de vida activa de movimientos múltiples de México en 1990, se mantendrán constantes durante el lustro siguiente. Este supuesto lo hacemos porque nuestro objetivo es ilustrar el procedimiento de proyección, y no los diferentes algoritmos disponibles para proyectar la mortalidad, la fecundidad, la migración y el movimiento entre actividad e inactividad. Asumamos también ausencia de migraciones, y de acuerdo con la costumbre demográfica utilizemos las probabilidades perspectivas deducidas de las esperanzas parciales de vida (cuadro 4.3).

A partir de nuestros datos de los cuadros 1.1 y 4.3, mediante (4.4) tenemos que la población femenina activa e inactiva en 1995, entre los 25 y 30 años de edad es:

$$\begin{aligned}
 {}_5PEA_{25}(1995) &= {}_5PEA_{20}(1990) {}_5S_{20}^{aa}(1990, 1995) \\
 &\quad + {}_5PEI_{20}(1990) {}_5S_{20}^{ia}(1990, 1995) \\
 &= 1,208,327 \times 0.627094 \\
 &\quad + 2,882,708 \times 0.157050 \\
 &= 1,210,462 \\
 {}_5PEI_{25}(1995) &= {}_5PEA_{20}(1990) {}_5S_{20}^{ai}(1990, 1995) \\
 &\quad + {}_5PEI_{20}(1990) {}_5S_{20}^{ii}(1990, 1995) \\
 &= 1,208,327 \times 0.368950 \\
 &\quad + 2,882,708 \times 0.838994 \\
 &= 2,864,387
 \end{aligned}$$

Los resultados se reproducen en las columnas (4) y (5) del cuadro 4.5. Por (4.26) los años-persona para las activas del mismo grupo de edad son:

$$\begin{aligned}
 {}_5K_{25}^a(1990, 1995) &= 5 \sqrt{{}_5P_{25}^a(1990) {}_5P_{25}^a(1995)} \\
 &= 5 \sqrt{963,555 \times 1,210,462} \\
 &= 5,399,877
 \end{aligned}$$

Valor que se muestra en la cuarta columna del cuadro 4.6.

En el mismo cuadro 4.6, se incluyen las tasas de fecundidad y el cálculo de los nacimientos ocurridos durante el periodo 1990–1995. Asumiendo un índice de masculinidad al nacer de 105, los volúmenes de nacimientos por sexo son:

$$B^m(t, t + h) = 0.5122 \times 11,160,577 = 5,716,393$$

$$B^f(t, t + h) = 0.4878 \times 11,160,577 = 5,444,184$$

Finalmente, la población menor de 5 años de edad en 1995, inactiva en su totalidad, es:

$$\begin{aligned} {}_5PEI_0^m(1995) &= B^m(1990, 1995) {}_n s_0^{ii,m}(1990, 1995) \\ &= 5,716,393 \times 0.957354 = 5,472,611 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_5PEI_0^f(1995) &= B^f(1990, 1995) {}_n s_0^{ii,f}(1990, 1995) \\ &= 5,444,184 \times 0.964060 = 5,248,523 \end{aligned}$$

Los resultados se muestran en la columna (5) del cuadro 4.5.

En el cuadro 4.7, se ilustra el movimiento total de la población económicamente activa durante el quinquenio de proyección; calculado de la misma manera que para 1990 en el cuadro 4.1, pero reemplazando la población por los años-persona vividos. Se puede ver que las tasas brutas son casi las mismas que para 1990 (cuadro 4.2), ligeramente mayores la de crecimiento total (o cambio neto) de la PEA y la razón de reemplazo en ambos sexos. Esta escasa diferencia se debe al poco cambio en la estructura por edad de la PEA (ecuación 1.5), como se puede ver en el cuadro 4.5.

Si asumimos crecimiento exponencial, las tasas de crecimiento de la PEA son:

$$\begin{aligned} r^{a,m}(1990, 1995) &= 1000 \times \frac{1}{5} \ln \left\{ \frac{PEA^m(1995)}{PEA^m(1990)} \right\} \\ &= 200 \times \ln \left\{ \frac{21,637,041}{18,618,890} \right\} = 30.0 \end{aligned}$$

CUADRO 4.5

México: proyección de la población económicamente activa e inactiva, 1990-1995

| Edad<br>$x, x+4$ | Población en 1990:           |                                |  | Población en 1995:           |                                |  | Cociente de<br>proporciones<br>$\frac{{}_5A_x(1995)}{{}_5A_x(1990)}$<br>(7) = $\frac{(6)}{(3)}$ |
|------------------|------------------------------|--------------------------------|--|------------------------------|--------------------------------|--|---|
|                  | activa<br>${}_5PEA_x$<br>(1) | inactiva<br>${}_5PEI_x$<br>(2) | proporción<br>${}_5A_x$<br>(3) = $\frac{(1)}{(1)+(2)}$ | activa<br>${}_5PEA_x$<br>(4) | inactiva<br>${}_5PEI_x$<br>(5) | proporción<br>${}_5A_x$<br>(6) = $\frac{(4)}{(4)+(5)}$ |   |
| <i>Hombres</i>   |                              |                                |  |                              |                                |  |   |
| 0-4              | 0                            | 5,450,623*                     |  | 0                            | 5,472,611                      |  |   |
| 5-9              | 0                            | 5,338,285                      |  | 0                            | 5,404,247                      |  |   |
| 10-14            | 374,456                      | 4,856,202                      | 0.071589   | 363,630                      | 4,957,179                      | 0.068341   | 0.9546  |
| 15-19            | 2,303,407                    | 2,456,485                      | 0.483920   | 2,404,517                    | 2,800,432                      | 0.461967   | 0.9546  |
| 20-34            | 2,917,079                    | 821,049                        | 0.780358   | 3,592,259                    | 1,129,918                      | 0.760721   | 0.9748  |
| 25-39            | 2,743,273                    | 307,322                        | 0.899258   | 3,282,751                    | 412,755                        | 0.888309   | 0.9878  |
| 30-34            | 2,387,469                    | 191,267                        | 0.925829   | 2,780,044                    | 224,525                        | 0.925272   | 0.9994  |
| 35-39            | 2,047,353                    | 163,212                        | 0.926167   | 2,342,091                    | 187,482                        | 0.925884   | 0.9997  |
| 40-44            | 1,562,217                    | 142,796                        | 0.916249   | 1,972,678                    | 185,341                        | 0.914115   | 0.9977  |
| 45-49            | 1,299,860                    | 152,713                        | 0.894867   | 1,472,293                    | 181,498                        | 0.890253   | 0.9948  |
| 50-54            | 989,839                      | 172,036                        | 0.851932   | 1,186,419                    | 208,652                        | 0.850436   | 0.9982  |
| 55-59            | 729,149                      | 189,715                        | 0.793533   | 857,472                      | 236,246                        | 0.783997   | 0.9880  |
| 60-64            | 532,978                      | 236,939                        | 0.692254   | 583,857                      | 251,323                        | 0.699079   | 1.0099  |
| 65-69            | 336,694                      | 230,947                        | 0.593146   | 393,829                      | 268,373                        | 0.594726   | 1.0027  |
| 70-74            | 197,945                      | 196,086                        | 0.502359   | 223,981                      | 223,884                        | 0.500108   | 0.9955  |
| 75-79            | 113,377                      | 164,458                        | 0.408073   | 110,829                      | 161,250                        | 0.407341   | 0.9982  |
| 80-84            | 54,943                       | 124,877                        | 0.305544   | 49,410                       | 107,229                        | 0.315439   | 1.0324  |
| 85-89            | 22,918                       | 76,381                         | 0.230798   | 17,101                       | 57,996                         | 0.227719   | 0.9867  |
| 90-94            | 5,933                        | 32,088                         | 0.156045   | 3,880                        | 23,370                         | 0.142385   | 0.9125  |

|                |            |            |          |            |            |          |        |
|----------------|------------|------------|----------|------------|------------|----------|--------|
| 95 o más       | 0          | 22,161     |          | 0          | 7,824      |          |        |
| Total          | 18,618,890 | 21,325,642 | 0.466119 | 21,637,041 | 22,502,135 | 0.490200 | 1.0517 |
| <i>Mujeres</i> |            |            |          |            |            |          |        |
| 0-4            | 0          | 5,285,821* |          | 0          | 5,248,523  |          |        |
| 5-9            | 0          | 5,223,949  |          | 0          | 5,245,761  |          |        |
| 10-14          | 113,619    | 5,044,815  | 0.022026 | 101,618    | 5,109,883  | 0.019499 | 0.8853 |
| 15-19          | 905,322    | 3,999,189  | 0.184590 | 840,940    | 4,305,221  | 0.163411 | 0.8853 |
| 20-34          | 1,208,327  | 2,882,708  | 0.295360 | 1,332,075  | 3,557,605  | 0.272426 | 0.9224 |
| 25-39          | 963,555    | 2,390,362  | 0.287292 | 1,210,462  | 2,864,387  | 0.297057 | 1.0340 |
| 30-34          | 761,802    | 2,047,081  | 0.271212 | 901,662    | 2,434,776  | 0.270247 | 0.9964 |
| 35-39          | 593,717    | 1,774,834  | 0.250667 | 696,383    | 2,092,846  | 0.249669 | 0.9960 |
| 40-44          | 407,908    | 1,384,849  | 0.227531 | 522,593    | 1,823,003  | 0.222798 | 0.9792 |
| 45-49          | 286,895    | 1,232,392  | 0.188835 | 336,820    | 1,431,048  | 0.190523 | 1.0089 |
| 50-54          | 189,154    | 1,042,762  | 0.153545 | 228,148    | 1,259,916  | 0.153319 | 0.9985 |
| 55-59          | 118,459    | 857,161    | 0.121419 | 145,517    | 1,047,826  | 0.121941 | 1.0043 |
| 60-64          | 79,574     | 761,826    | 0.094573 | 88,407     | 838,030    | 0.095427 | 1.0090 |
| 65-69          | 46,029     | 569,981    | 0.074721 | 57,655     | 714,057    | 0.074711 | 0.9999 |
| 70-74          | 25,688     | 407,308    | 0.059326 | 31,623     | 501,617    | 0.059304 | 0.9996 |
| 75-79          | 14,670     | 298,331    | 0.046869 | 15,889     | 324,837    | 0.046633 | 0.9950 |
| 80-84          | 7,877      | 214,135    | 0.035480 | 7,544      | 203,398    | 0.035763 | 1.0080 |
| 85-89          | 3,245      | 122,906    | 0.025723 | 2,996      | 114,082    | 0.025590 | 0.9948 |
| 90-94          | 849        | 52,319     | 0.015968 | 661        | 45,460     | 0.014332 | 0.8975 |
| 95 o más       | 0          | 34,695     |          | 0          | 11,590     |          |        |
| Total          | 5,726,690  | 35,627,424 | 0.138479 | 6,520,993  | 39,173,866 | 0.142707 | 1.0305 |

\* Población de 0, 1 y 2 años corregida por subenumeración censal.

CUADRO 4.6  
**México: cálculo de los nacimientos ocurridos, 1990-1995**

| Edad<br>$x, x+4$ | Tasas de fecundidad para: |                      |                        | Tiempo vivido por: |                    | Nacimientos<br>${}_5B_x$ |
|------------------|---------------------------|----------------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------------|
|                  | total <sup>a</sup>        | activas <sup>b</sup> | inactivas <sup>b</sup> | activas            | inactivas          |                          |
|                  | ${}_5F_x$<br>(1)          | ${}_5F_x^a$<br>(2)   | ${}_5F_x^i$<br>(3)     | ${}_5K_x^a$<br>(4) | ${}_5K_x^i$<br>(5) |                          |
| 15-19            | 0.05366                   | 0.02746              | 0.05917                | 4,362,687          | 20,746,923         | 1,347,421                |
| 20-24            | 0.16488                   | 0.07609              | 0.20005                | 6,343,466          | 16,012,133         | 3,685,881                |
| 25-29            | 0.15822                   | 0.06980              | 0.19471                | 5,399,877          | 13,083,312         | 2,924,417                |
| 30-34            | 0.11921                   | 0.08341              | 0.13250                | 4,143,935          | 11,162,643         | 1,824,710                |
| 35-39            | 0.07827                   | 0.04787              | 0.08842                | 3,215,021          | 9,636,460          | 1,005,941                |
| 40-44            | 0.03303                   | 0.01468              | 0.03836                | 2,308,516          | 7,944,470          | 338,667                  |
| 45-49            | 0.00409                   | 0.00177              | 0.00464                | 1,554,284          | 6,640,053          | 33,540                   |
| Total            | 3.06 <sup>c</sup>         | 1.61 <sup>c</sup>    | 3.59 <sup>c</sup>      |                    |                    | 11,160,577               |

<sup>a</sup> Proyectadas en el Centro de Estudios en Población y Salud, Secretaría de Salud.

<sup>b</sup> Deducidas de las historias individuales de la Encuesta Nacional de Fecundidad y Salud y ajustadas proporcionalmente, de tal manera que en cada grupo de edad satisfagan:

$${}_5F_x = {}_5F_x^a {}_5A_x + {}_5F_x^i {}_5I_x$$

donde las proporciones  ${}_5A_x$  y  ${}_5I_x$  corresponden a los años-persona vividos de las columnas (4) y (5).

<sup>c</sup> Tasa global de fecundidad.

**CUADRO 4.7**  
**México: movimiento total de la población económicamente activa,**  
**1990-1995**

| Sexo           | Medida  | Años-<br>persona<br>$K^a$<br>(1) | Ingresos<br>$\mathcal{H}^{ia}$<br>(2) | Retiros<br>$\mathcal{H}^{ai}$<br>(3) | Muertes<br>$\mathcal{D}^a$<br>(4) | Cambio<br>neto<br>$CN^a$<br>(5)=<br>(2)-(3)-(4) | Razón de<br>reemplazo<br>$RR$<br>(6) |
|----------------|---------|----------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|---|--------------------------------------|
| <i>Hombres</i> | eventos | 100,305,597                      | 7,100,123                             | 2,822,141                            | 698,218                           | 3,579,764                                       | 2.02                                 |
|                | tasas   |                                  | 70.8                                  | 28.1                                 | 7.0                               | 35.7  |                                      |
| <i>Mujeres</i> | eventos | 30,513,866                       | 4,453,885                             | 3,356,535                            | 71,501                            | 1,025,849                                       | 1.30                                 |
|                | tasas   |                                  | 146.0                                 | 110.0                                | 2.3                               | 33.6  |                                      |

*Nota:* tasas por cada mil años-persona vividos en la actividad económica.

$$\begin{aligned}r^{a,f}(1990, 1995) &= 1000 \times \frac{1}{5} \ln \left\{ \frac{PEA^f(1995)}{PEA^f(1990)} \right\} \\ &= 200 \times \ln \left\{ \frac{6,520,993}{5,726,690} \right\} = 26.0\end{aligned}$$

Es decir, 5.7 y 7.6 puntos al millar mayores, respectivamente, que al calcularlas con el movimiento de la PEA. Esta disminución se debe a que, mientras en los totales del cuadro 4.2 se consideran tasas de crecimiento de la PEA diferenciales por edad, pues se suman columnas similares a las tres últimas del cuadro 4.1, al aplicar el crecimiento exponencial a la población total, se asume implícitamente que las tasas son iguales para todas las edades, de modo que es nulo el efecto de la estructura por edad de la PEA en la tasa bruta.





A. AJUSTE DE LA PARTICIPACIÓN EN LA ACTIVIDAD  
EN EL CENSO DE MÉXICO DE 1990

En el cuadro A.1, se reproduce la información captada por el censo de población de México de 1990, acerca de la participación en la actividad económica durante la semana previa a la enumeración (5 a 9 de marzo). Un primer aspecto salta a la vista: la presencia de personas que no especificaron —o para quienes un tercero no declaró— su “condición de actividad” (columna 4). Siendo escasa la proporción en casi todos los grupos de edad (columna 5), los dos últimos son la excepción; se distribuyó proporcionalmente esa no respuesta para cada grupo de edad y sexo por separado. Los resultados se muestran en las columnas (6) y (7).

En la columna (8) y en la gráfica A.1, se presentan las proporciones de participación  ${}_n A_x$ , definidas en la sección 1.1. Es bastante claro que a partir de los 90 años se rompe la tendencia decreciente. Consideramos que difícilmente una persona mayor de 95 años puede mantenerse económicamente activa; así, supusimos que a partir de los 95 años nadie es activo, y por ende, igualamos a cero las proporciones de participación de los grupos 95–99 y 100 o más. Con base en la inspección visual de la gráfica A.1, extrapolamos linealmente las proporciones de los intervalos 80–84 y 85–89 para estimar la del grupo 90–94:

$${}_5 \hat{A}_{90} = 2 {}_5 A_{85} - {}_5 A_{80}$$

## CUADRO A.1

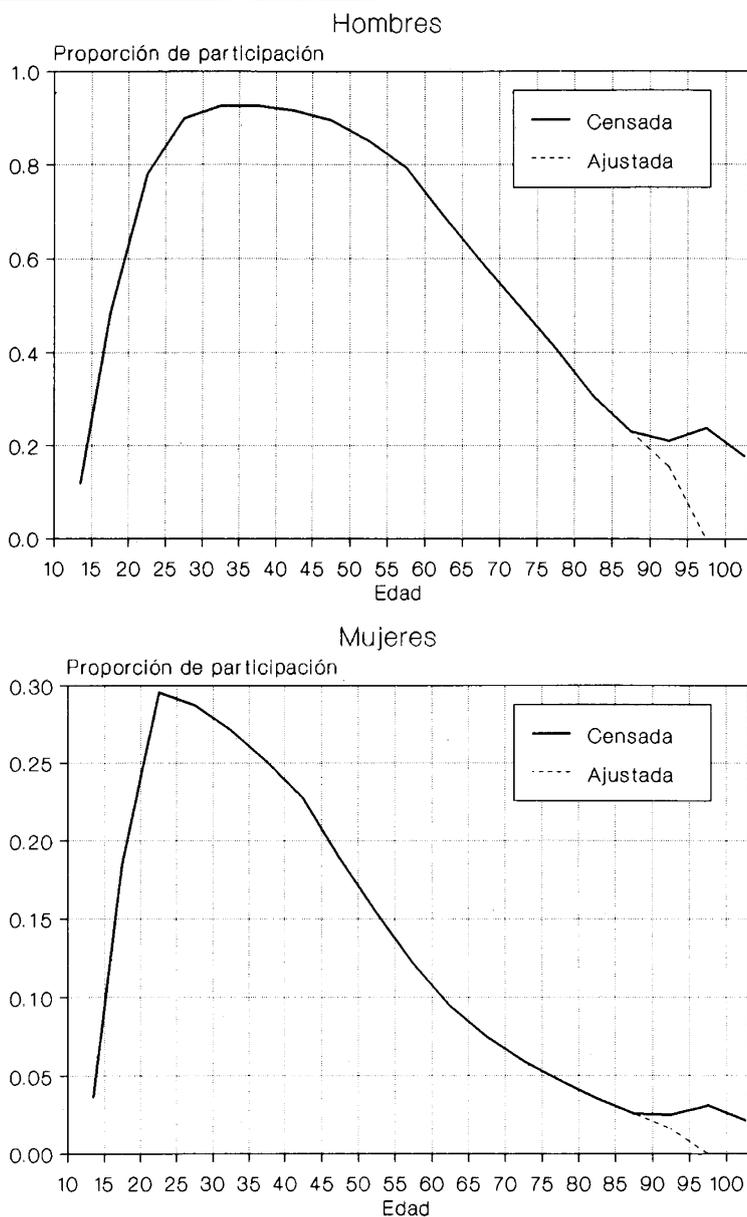
### México: participación en la actividad económica, censo de 1990

| Rango de edad  | Población censada: |               |                 |                        | Porcentaje no especificado<br>(5) = $100 \times \frac{(4)}{(1)}$ | Población estimada |                 | Proporción participación en la actividad<br>(8) = $\frac{(6)}{(1)}$ |
|----------------|--------------------|---------------|-----------------|------------------------|--|--------------------|-----------------|---|
|                | total<br>(1)       | activa<br>(2) | inactiva<br>(3) | no especificado<br>(4) |  | activa<br>(6)      | inactiva<br>(7) |   |
| <i>Hombres</i> |                    |               |                 |                        |  |                    |                 |   |
| 12-14          | 3,159,216          | 351,651       | 2,615,160       | 192,405                | 6.1  | 374,456            | 2,784,760       | 0.118528  |
| 15-19          | 4,759,892          | 2,239,342     | 2,388,163       | 132,387                | 2.8  | 2,303,407          | 2,456,485       | 0.483920  |
| 20-24          | 3,738,128          | 2,882,025     | 811,182         | 44,921                 | 1.2  | 2,917,079          | 821,049         | 0.780358  |
| 25-29          | 3,050,595          | 2,724,910     | 305,265         | 20,420                 | 0.7  | 2,743,273          | 307,322         | 0.899258  |
| 30-34          | 2,578,736          | 2,375,366     | 190,297         | 13,073                 | 0.5  | 2,387,469          | 191,267         | 0.925829  |
| 35-39          | 2,210,565          | 2,037,646     | 162,438         | 10,481                 | 0.5  | 2,047,353          | 163,212         | 0.926167  |
| 40-44          | 1,705,013          | 1,554,465     | 142,087         | 8,461                  | 0.5  | 1,562,217          | 142,796         | 0.916249  |
| 45-49          | 1,452,573          | 1,293,409     | 151,955         | 7,209                  | 0.5  | 1,299,860          | 152,713         | 0.894867  |
| 50-54          | 1,161,875          | 983,837       | 170,993         | 7,045                  | 0.6  | 989,839            | 172,036         | 0.851932  |
| 55-59          | 918,864            | 723,624       | 188,278         | 6,962                  | 0.8  | 729,149            | 189,715         | 0.793533  |
| 60-64          | 769,917            | 527,802       | 234,638         | 7,477                  | 1.0  | 532,978            | 236,939         | 0.692254  |
| 65-69          | 567,641            | 332,424       | 228,018         | 7,199                  | 1.3  | 336,694            | 230,947         | 0.593146  |
| 70-74          | 394,031            | 194,286       | 192,462         | 7,283                  | 1.8  | 197,945            | 196,086         | 0.502359  |
| 75-79          | 277,835            | 110,762       | 160,664         | 6,409                  | 2.3  | 113,377            | 164,458         | 0.408073  |
| 80-84          | 179,820            | 53,232        | 120,989         | 5,599                  | 3.1  | 54,943             | 124,877         | 0.305544  |
| 85-89          | 99,299             | 21,893        | 72,964          | 4,442                  | 4.5  | 22,918             | 76,381          | 0.230798  |
| 90-94          | 38,021             | 7,647         | 28,598          | 1,776                  | 4.7  | 8,022              | 29,999          | 0.210989  |

|                |           |           |           |         |      |           |           |          |
|----------------|-----------|-----------|-----------|---------|------|-----------|-----------|----------|
| 95-99          | 15,069    | 3,257     | 10,411    | 1,401   | 9.3  | 3,591     | 11,478    | 0.238304 |
| 100 o más      | 7,092     | 1,117     | 5,148     | 827     | 11.7 | 1,264     | 5,828     | 0.178229 |
| <i>Mujeres</i> |           |           |           |         |      |           |           |          |
| 12-14          | 3,143,755 | 107,794   | 2,874,795 | 161,166 | 5.1  | 113,619   | 3,030,136 | 0.036141 |
| 15-19          | 4,904,511 | 880,436   | 3,889,258 | 134,817 | 2.7  | 905,322   | 3,999,189 | 0.184590 |
| 20-24          | 4,091,035 | 1,190,523 | 2,840,232 | 60,280  | 1.5  | 1,208,327 | 2,882,708 | 0.295360 |
| 25-29          | 3,353,917 | 953,312   | 2,364,952 | 35,653  | 1.1  | 963,555   | 2,390,362 | 0.287292 |
| 30-34          | 2,808,883 | 754,825   | 2,028,333 | 25,725  | 0.9  | 761,802   | 2,047,081 | 0.271212 |
| 35-39          | 2,368,551 | 588,567   | 1,759,438 | 20,546  | 0.9  | 593,717   | 1,774,834 | 0.250667 |
| 40-44          | 1,792,757 | 404,366   | 1,372,825 | 15,566  | 0.9  | 407,908   | 1,384,849 | 0.227531 |
| 45-49          | 1,519,287 | 284,309   | 1,221,284 | 13,694  | 0.9  | 286,895   | 1,232,392 | 0.188835 |
| 50-54          | 1,231,916 | 187,289   | 1,032,478 | 12,149  | 1.0  | 189,154   | 1,042,762 | 0.153545 |
| 55-59          | 975,620   | 117,138   | 847,600   | 10,882  | 1.1  | 118,459   | 857,161   | 0.121419 |
| 60-64          | 841,400   | 78,492    | 751,466   | 11,442  | 1.4  | 79,574    | 761,826   | 0.094573 |
| 65-69          | 616,010   | 45,289    | 560,813   | 9,908   | 1.6  | 46,029    | 569,981   | 0.074721 |
| 70-74          | 432,996   | 25,119    | 398,284   | 9,593   | 2.2  | 25,688    | 407,308   | 0.059326 |
| 75-79          | 313,001   | 14,293    | 290,655   | 8,053   | 2.6  | 14,670    | 298,331   | 0.046869 |
| 80-84          | 222,012   | 7,613     | 206,950   | 7,449   | 3.4  | 7,877     | 214,135   | 0.035480 |
| 85-89          | 126,151   | 3,096     | 117,255   | 5,800   | 4.6  | 3,245     | 122,906   | 0.025723 |
| 90-94          | 53,168    | 1,256     | 48,974    | 2,938   | 5.5  | 1,329     | 51,839    | 0.024996 |
| 95-99          | 22,620    | 640       | 20,157    | 1,823   | 8.1  | 696       | 21,924    | 0.030769 |
| 100 o más      | 12,075    | 231       | 10,610    | 1,234   | 10.2 | 257       | 11,818    | 0.021284 |

*Fuentes* : INEGI (1992): 299-315 (cuadro 26), para las columnas (1) a (4) de las edades 12 a 64 años.  
 Tabulación inédita del INEGI, para las columnas (1) a (4) de 65 años o más de edad.

**GRÁFICA A.1**  
**México: proporciones de participación en la actividad,**  
**censadas y ajustadas, 1990**



Fuente: cuadro A.1

La población económicamente activa para este último grupo de edades participación se obtuvo despejando en (1.2):

$${}_5\widehat{PEA}_{90} = {}_5P_{90} {}_5\widehat{A}_{90}$$

Los resultados se reproducen en las primeras cuatro columnas del cuadro 1.1, y el comportamiento por edad se incluye en el gráfica A.1. Los ajustes realizados implican una reducción de 6,944 hombres activos (2,089 del grupo 90-94 y los 3,591 y 1,264 de los intervalos 95-99 y 100 o más, respectivamente) y de 1,433 mujeres (480, 696 y 257), una disminución insignificante de apenas 0.04% de la PEA masculina censada (18,625,834), y de 0.03% de la femenina (5,728,123).



## B. TABLAS DE MORTALIDAD, 1990

En el cuadro B.1, se presentan las tablas abreviadas de mortalidad por sexo para 1990, obtenidas recientemente por Gómez de León y Partida (1993). El significado de las columnas es:

${}_nq_x$  Probabilidad que un sobreviviente a la edad  $x$  tiene de fallecer entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

${}_nm_x$  Tasa de mortalidad entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

$l_x$  Sobrevivientes a la edad exacta  $x$  en la cohorte de la tabla.

${}_nd_x$  Defunciones entre las edades  $x$  y  $x + n$  en la cohorte de la tabla.

${}_nL_x$  Años-persona vividos por la cohorte de la tabla entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

$T_x$  Años-persona vividos a partir de la edad  $x$ .

$e_x$  Esperanza de vida a la edad  $x$ .

CUADRO B.1 México: tablas abreviadas de mortalidad por sexo, 1990

| $x, x+n-1$     | ${}_nq_x$<br>(1) | ${}_nm_x$<br>(2) | $l_x$<br>(3) | ${}_nd_x$<br>(4) | ${}_nL_x$<br>(5) | $T_x$<br>(6) | $e_x$<br>(7) |
|----------------|------------------|------------------|--------------|------------------|------------------|--------------|--------------|
| <i>Hombres</i> |                  |                  |              |                  |                  |              |              |
| 0-0            | 0.038105         | 0.039377         | 1,000,000    | 38105            | 967,689          | 65,577,291   | 65.58        |
| 1-4            | 0.011287         | 0.002843         | 961,895      | 10,857           | 3,819,078        | 64,609,603   | 67.17        |
| 5-9            | 0.003476         | 0.000697         | 951,038      | 3,306            | 4,746,064        | 60,790,525   | 63.92        |
| 10-11          | 0.001278         | 0.000639         | 947,732      | 1,211            | 1,894,277        | 56,044,460   | 59.14        |
| 12-14          | 0.002461         | 0.000821         | 946,521      | 2,329            | 2,836,239        | 54,150,184   | 57.21        |
| 15-19          | 0.006295         | 0.001263         | 944,192      | 5,943            | 4,707,257        | 51,313,944   | 54.35        |
| 20-24          | 0.009623         | 0.001933         | 938,249      | 9,029            | 4,669,958        | 46,606,687   | 49.67        |
| 25-29          | 0.013217         | 0.002660         | 929,220      | 12,281           | 4,616,702        | 41,936,729   | 45.13        |
| 30-34          | 0.017005         | 0.003429         | 916,938      | 15,592           | 4,547,057        | 37,320,027   | 40.70        |
| 35-39          | 0.021247         | 0.004294         | 901,346      | 19,151           | 4,460,369        | 32,772,969   | 36.36        |
| 40-44          | 0.026556         | 0.005380         | 882,196      | 23,428           | 4,354,340        | 28,312,600   | 32.09        |
| 45-49          | 0.034026         | 0.006919         | 858,768      | 29,221           | 4,223,528        | 23,958,260   | 27.90        |
| 50-54          | 0.046868         | 0.009585         | 829,547      | 38,879           | 4,056,333        | 19,734,733   | 23.79        |
| 55-59          | 0.072688         | 0.015051         | 790,668      | 57,472           | 3,818,385        | 15,678,400   | 19.83        |
| 60-64          | 0.112581         | 0.023784         | 733,196      | 82,544           | 3,470,630        | 11,860,015   | 16.18        |
| 65-69          | 0.172010         | 0.037493         | 650,652      | 111,919          | 2,985,074        | 8,389,385    | 12.89        |
| 70-74          | 0.257171         | 0.058826         | 538,733      | 138,547          | 2,355,205        | 5,404,311    | 10.03        |
| 75-79          | 0.372211         | 0.091592         | 400,187      | 148,954          | 1,626,271        | 3,049,106    | 7.62         |
| 80-84          | 0.514487         | 0.140976         | 251,233      | 129,256          | 916,866          | 1,422,835    | 5.66         |
| 85-89          | 0.667404         | 0.212608         | 121,977      | 81,408           | 382,901          | 505,970      | 4.15         |
| 90-94          | 0.802094         | 0.309677         | 40,569       | 32,540           | 105,078          | 123,069      | 3.03         |
| 95-99          | 0.899258         | 0.433966         | 8,029        | 7,220            | 16,637           | 17,991       | 2.24         |

| 100 o más      | 1.000000 | 0.597376 | 809       | 809     | 1,354     | 1,354      | 1.67  |
|----------------|----------|----------|-----------|---------|-----------|------------|-------|
| <i>Mujeres</i> |          |          |           |         |           |            |       |
| 0-0            | 0.031381 | 0.032247 | 1,000,000 | 31,381  | 973,142   | 72,729,919 | 72.73 |
| 1-4            | 0.010619 | 0.002674 | 968,619   | 10,285  | 3,847,157 | 71,756,776 | 74.08 |
| 5-9            | 0.002938 | 0.000588 | 958,334   | 2,815   | 4,783,741 | 67,909,619 | 70.86 |
| 10-11          | 0.000857 | 0.000429 | 955,519   | 819     | 1,910,217 | 63,125,878 | 66.06 |
| 12-14          | 0.001338 | 0.000446 | 954,700   | 1,277   | 2,862,210 | 61,215,661 | 64.12 |
| 15-19          | 0.002655 | 0.000532 | 953,423   | 2,531   | 4,761,036 | 58,353,450 | 61.20 |
| 20-24          | 0.003446 | 0.000690 | 950,892   | 3,277   | 4,746,611 | 53,592,415 | 56.36 |
| 25-29          | 0.004513 | 0.000905 | 947,615   | 4,277   | 4,727,844 | 48,845,803 | 51.55 |
| 30-34          | 0.005990 | 0.001202 | 943,338   | 5,651   | 4,703,213 | 44,117,959 | 46.77 |
| 35-39          | 0.008153 | 0.001637 | 937,687   | 7,645   | 4,670,288 | 39,414,746 | 42.03 |
| 40-44          | 0.011468 | 0.002306 | 930,042   | 10,666  | 4,625,028 | 34,744,458 | 37.36 |
| 45-49          | 0.016695 | 0.003365 | 919,376   | 15,349  | 4,560,818 | 30,119,430 | 32.76 |
| 50-54          | 0.025057 | 0.005071 | 904,027   | 22,652  | 4,467,097 | 25,558,612 | 28.27 |
| 55-59          | 0.038960 | 0.007935 | 881,375   | 34,338  | 4,327,225 | 21,091,514 | 23.93 |
| 60-64          | 0.064117 | 0.013217 | 847,037   | 54,309  | 4,109,079 | 16,764,289 | 19.79 |
| 65-69          | 0.105031 | 0.022092 | 792,728   | 83,261  | 3,768,747 | 12,655,210 | 15.96 |
| 70-74          | 0.169286 | 0.036815 | 709,467   | 120,103 | 3,262,358 | 8,886,463  | 12.53 |
| 75-79          | 0.265534 | 0.060961 | 589,365   | 156,496 | 2,567,160 | 5,624,105  | 9.54  |
| 80-84          | 0.399236 | 0.099888 | 432,868   | 172,816 | 1,730,099 | 3,056,946  | 7.06  |
| 85-89          | 0.562120 | 0.160221 | 260,052   | 146,180 | 912,365   | 1,326,847  | 5.10  |
| 90-94          | 0.725624 | 0.247714 | 113,872   | 82,628  | 333,562   | 414,482    | 3.64  |
| 95-99          | 0.858284 | 0.368809 | 31,244    | 26,816  | 72,709    | 80,921     | 2.59  |
| 100 o más      | 1.000000 | 0.539234 | 4,428     | 4,428   | 8,211     | 8,211      | 1.85  |

Fuente: Gómez de León y Partida (1993).



## BIBLIOGRAFÍA

- Burden, R. L. y J. D. Faires (1988), *Análisis numérico*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Camisa, Z. (1969), *Argentina: aspectos demográficos de la población económicamente activa, 1974 y 1960-1980*, Serie C 87, Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile.
- Cervera, M. y V. Partida (1977), *Tablas de vida económicamente activa para la República mexicana, Serie Estudios 2*, Centro Nacional de Información y Estadísticas del Trabajo, Secretaría del Trabajo, México.
- Coale, A. J. y P. Demeny con B. Vaughan (1982), *Regional model life tables and stable populations*, Second Edition, Academic Press, Nueva York.
- Durand, J. D. (1948), *The labor force in the United States, 1890-1960*, Social Science Research Council, Nueva York.
- Durand, J. D. (1975), *The labor force in economic development. A comparison of international census data, 1946-1966*, Princeton University Press, Princeton.
- Durand, J. D. y A. Miller (1969), *Métodos de análisis de los datos censales relativos a las actividades econó-*

- micas de la población, Estudios Demográficos núm 43*, Naciones Unidas, Nueva York.
- Elizaga, J. C. (1979), *Dinámica y economía de la población*, Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile.
- Gantmacher, F. R. (1959), *The theory of matrices*, vol. 1, Chelsea, Nueva York.
- Gómez de León, J. y V. Partida (1993), "Cien años de mortalidad en México, una reconstrucción y proyección demográfica: 1930-2030", *Cuadernos de Trabajo del CEPS DT 3-1993*, Centro de Estudios en Población y Salud, Secretaría de Salud, México.
- Hoem, J. M. (1975), "The construction of increment-decrement life tables: a comment on articles by R. Schoen and V. Nelson", *Demography* 12, pp. 661-665.
- Hoem, J. M. y M. S. Fong (1976), *A markov chain model of working life tables: a new method for the construction of tables of working life*, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, Copenhagen, WP-2.
- Hoem, J. M. y U. F. Jensen (1982), "Multistate life tables: a probabilist critique", en K. C. Land y A. Rogers (eds.), *Multidimensional Mathematical Demography*, Academic Press, Nueva York, pp. 155-264.
- INEGI (1992), *Estados Unidos Mexicanos. XI Censo General de Población y Vivienda, Resumen General*, México.
- Keyfitz, N. (1977), *Introduction to the mathematics of population with revisions*, Addison-Wesley, Reading.

- Naciones Unidas (1970), *Manual V. Métodos para preparar proyecciones de la población económicamente activa*, Estudios Demográficos núm. 46, Nueva York.
- Naciones Unidas (1982), *Niveles y tendencias de la mortalidad a partir de 1950*, Nueva York.
- Namboodiri, K. y C. M. Suchindran (1987), *Life table techniques and their applications*, Academic Press, Orlando.
- Nour, E. y C. M. Suchindran (1984), "The construction of multi-states life tables: comments on the article by Willekens *et al.*", *Population Studies* 38, pp. 325-328.
- Rincón, M. (1977), *Tablas de vida activa*, Serie B 1008, Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile.
- Rogers, A. (1975), *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley, Nueva York.
- Rogers, A. y J. Ledent (1976), "Increment-Decrement life tables: a comment", *Demography* 13, pp. 287-290.
- Sáez, A. (1975), *Población y actividad económica en España*, Siglo XXI, Madrid.
- Schoen, R. (1975), "Constructing increment-decrement life tables", *Demography* 12, pp. 313-324.
- Schoen, R. y Land, K. C. (1979), "A general algorithm for estimating a Markov-generated increment-decrement life tables with applications to marital-status patterns", *Journal of the American Statistical Association* 74, pp. 761-776.
- Schoen, R. y Nelson, V. E. (1974), "Marriage, divorce and mortality: a life table analysis", *Demography* 11, pp. 267-290.

- Somoza, J. (1970), *Tablas de vida activa*, Serie B 26, Centro Latinoamericano de Demografía, Santiago de Chile.
- United Nations (1962), *Demographic aspects of manpower. Report 1. Sex and Age Patterns of Participation in Economic Activities*, *Population Studies* núm 33, Nueva York.
- Willekens, F. J. (1980), "Multistate analysis: tables of working life", *Environment and Planning A* 12, pp. 563-588.
- Wolfbein, S. L. (1949), "The length of Working Life", *Population Studies* 3, pp. 286-294.

La energía humana dedicada a la actividad económica en una sociedad se puede cuantificar bajo dos enfoques alternativos: desde el punto de vista colectivo, como el monto total de horas dedicadas a ella por el conjunto de la población económicamente activa; desde una óptica individual, como la parte de su vida que una persona espera dedicar a la actividad económica. Este segundo enfoque se concreta mediante la esperanza de vida activa, un indicador que se desprende de un modelo de corte demográfico, que de manera genérica se denomina *Tabla de vida activa*.

En este libro se presentan los diversos algoritmos disponibles en la actualidad para elaborar ese tipo de tablas. La exposición transcurre bajo una perspectiva didáctica: el grado de complejidad aumenta conforme se avanza en la descripción de los procedimientos y se eleva su nivel de refinamiento. A lo largo de la exposición se ha tenido especial cuidado en ejemplificar los distintos métodos con las proporciones (tasas) de participación en la actividad por edad, es decir, con los datos más fáciles de obtener.

