EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

IMPACTO DE UNA POLÍTICA FISCAL SOBRE LA DESIGUALDAD DEL INGRESO BAJO EQUILIBRIO PRESUPUESTARIO

LUIS ANTONIO ANDRADE ROSAS

PROMOCIÓN 2004-2006

ASESOR:

DR. JAIME SEMPERE CAMPELLO

2007

IMPACTO DE UNA POLITICA FISCAL SOBRE LA DESIGUALDAD DEL INGRESO BAJO EQUILIBRIO PRESUPUESTARIO

Por Luis Antonio Andrade Rosas[1],
Asesor Dr. Jaime Sempere,
COLMEX, julio 2006.

RESUMEN

En este trabajo se muestra el impacto de una política fiscal sobre la desigualdad del ingreso. Esta política fiscal contempla tanto la aplicación de impuestos como la de transferencias. La incorporación de transferencias es una forma de equilibrar el presupuesto, ya que antes de incorporarlas se desajusta el saldo presupuestal mediante la imposición de impuestos. Otras formas de equilibrar el presupuesto no se analizan en esta tesis. El resultado que se obtiene, resaltando en particular el análisis utilizado, es la condición que debe satisfacer la función de impuestos para mantener la desigualdad bajo equilibrio presupuestario. Cuando no existe equilibrio presupuestario, esto es, cuando sólo se utilizan impuestos como política fiscal, se tiene otra condición sobre la función de impuestos para mantener la desigualdad.

INTRODUCCIÓN

El efecto de la imposición de impuestos sobre la desigualdad es un tema interesante a estudiar. Levine y Singer (1970) analizan el impacto que tiene un impuesto al ingreso sobre la desigualdad y obtienen que la desigualdad se mantiene si y sólo si la función de impuestos es una combinación de impuestos proporcionales y de suma fija. Por su parte, Latham (1988) analiza también el impacto de un impuesto en el ingreso sobre la desigualdad. Uno de sus principales resultados es que el impacto en la desigualdad dependerá de la forma de la función de impuestos. En particular menciona que la función de impuestos debe de ser proporcional al ingreso para que la desigualdad en el ingreso, antes y después de impuestos, se mantenga. Sin embargo, cuando el gobierno aplica un impuesto sobre el ingreso de los consumidores, su impacto se reflejará tanto en el ingreso familiar como en el presupuesto público, y éste último efecto tendrá que ser considerado. Ninguno de los autores menciona que hacen con la recaudación y más aún no consideran el efecto sobre el presupuesto. El objetivo de este trabajo es analizar esta carencia de la literatura.

Una forma sencilla de modelar el efecto del cambio en el presupuesto es simplemente suponer que la recaudación se tira a la basura, otras formas mas realistas pueden consistir en plantear algunas formas de gasto de la recaudación adicional. La opción simple que se analiza, es suponer que el excedente presupuestario por parte del estado se reparte mediante transferencias equitativas para todos. De lo anterior, analizamos lo siguiente: ¿cuál es el impacto que tiene la imposición de impuestos en la desigualdad, cuando el presupuesto está equilibrado? La metodología para contestar esta pregunta es

[1] Agradezco la ayuda para la redacción y comentarios al Profesor Oscar Fernández, Samuel Vásquez y Yanin Caro.

considerar la función de ingreso disponible (incorporando impuestos y transferencias) por parte de los consumidores, al trabajar con esta función obtenemos una ecuación diferencial que al resolverla nos da la forma particular de las transferencias. Se procede a introducirlas en el ingreso, y finalmente se trabaja con éste último para ver el efecto del impuesto en la desigualdad.

Nuestro resultado es: para que la desigualdad en el ingreso se mantenga antes y después del equilibrio presupuestario la función de impuestos deberá ser una combinación lineal de impuestos proporcionales e impuestos de suma fija.

Dicho resultado es parecido al propuesto por Levine y Singer, sin embargo, estos autores llegan a este resultado mediante un ejemplo particular, y más aún, no encuentran la forma de las transferencias. Mientras que en este trabajo, además de calcular dichas transferencias, se hace un análisis de manera más general, es decir, los resultados se satisfacen para cualquier distribución de ingresos. Otros autores relacionados con este trabajo son: Kakwani (1977), el cual analiza el impacto de impuestos proporcionales sobre la desigualdad, en su modelo define una nueva función de distribución de ingresos cuando se incorporan estos impuestos. Dicha definición la utilizaremos en este trabajo. McGarry-Schoeni (1995), estudia el comportamiento de las transferencias en la riqueza, analizando la redistribución de recursos dentro de la familia; otros más como Pak-Wai Liu (1985) y Fei (1981), estudian diferentes funciones de recaudación y su impacto en el ingreso.

Este trabajo se divide en cinco secciones, en la primera definimos conceptos y herramientas. En la segunda, deducimos la forma analítica de la curva de Lorenz. En la tercera, explicamos brevemente el modelo sin equilibrio presupuestario. La cuarta sección se explica el análisis con equilibrio presupuestario, desglosando esta sección en tres apartados, en el primer apartado deducimos la forma analítica de estas transferencias. En el segundo apartado, antes de demostrar el resultado general, trabajamos con una función de distribución en particular para verificar si se cumplen los resultados a alcanzar. En el tercer apartado, mostramos nuestro resultado. En la quinta y última sección hacemos una breve conclusión, en la cual mencionamos las limitantes del trabajo.

I. CONCEPTOS BÁSICOS

El objetivo de esta sección es definir conceptos necesarios para nuestros propósitos. Gráficamente una curva de Lorenz es como se muestra en la figura (1), donde el eje de las abscisas mide la fracción de la población total que gana un ingreso y o menor a este, y el eje de las ordenadas mide la fracción del ingreso total ganado por la gente cuyo ingreso es y o menor. De la curva se desprende lo siguiente:

a) La diagonal es una curva de Lorenz, en donde no existe desigualdad, ya que a cada proporción de la población corresponde la misma proporción del ingreso.

b) La distribución será desigual a medida que su curva de Lorenz se aleje de la diagonal.

c) Si los ingresos están ordenados de menor a mayor (como es el caso de la figura 1) la curva de Lorenz de esta distribución estará por debajo de la diagonal, y por encima en caso de un orden de ingresos de mayor a menor.

A partir de las anteriores podemos encontrar condiciones necesarias y suficientes para definir una curva de Lorenz mediante la siguiente definición.

Definición1 (Propiedades de la Curva de Lorenz): Una distribución de ingresos se representa por una curva de Lorenz si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

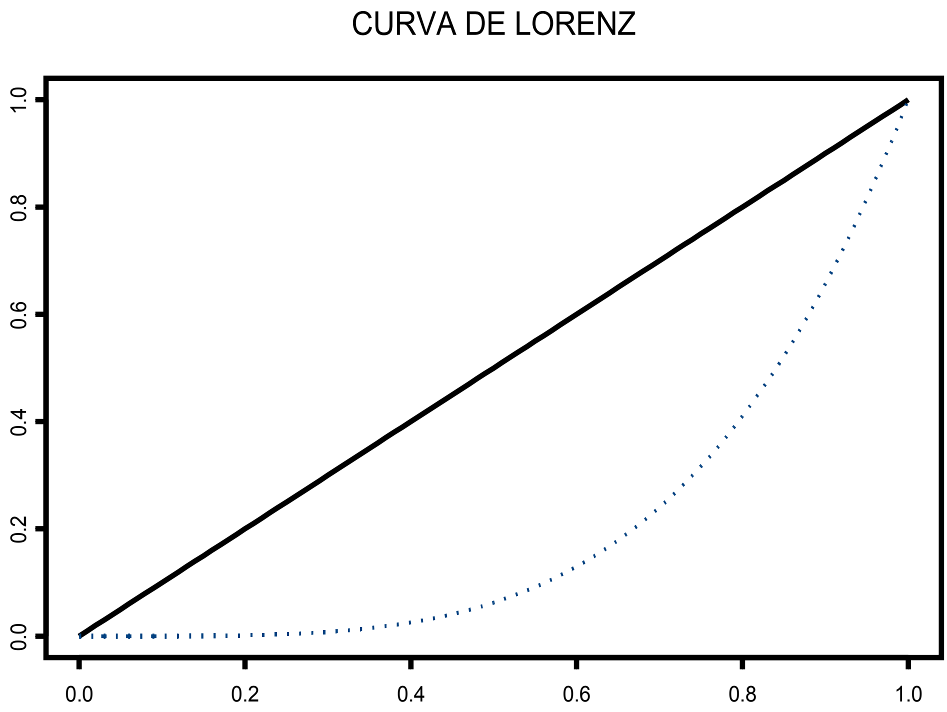

FIGURA 1 *La curva punteada corresponde a la representación gráfica de una Curva de Lorenz.*

A1: En el nivel inferior de ordenación de ingresos de la población, la distribución de ingresos es cero.

A2: En el nivel superior de ordenación de ingresos de la población, la distribución de ingresos es uno.

A3: Si la ordenación de ingresos de la población es de menor a mayor (de mayor a menor), la distribución de ingresos siempre será creciente (decreciente). Esto es, la derivada de la distribución de ingresos con respecto al nivel de ordenación de ingresos de la población, es positiva (negativa).

A4: Si la ordenación de ingresos de la población es de menor a mayor (de mayor a menor), la distribución de ingresos siempre será convexa (cóncava). Esto es, la segunda derivada de la distribución del ingreso con respecto al nivel de ordenación de ingresos de la población, es positiva (negativa).

Para medir el impacto de la política fiscal utilizaremos las siguientes definiciones.

Definición2.- Una distribución de ingresos, representada por una curva de Lorenz, se dice que domina en sentido de Lorenz a otra distribución si su curva de Lorenz está más cerca de la diagonal y éstas no se cortan. (Figura 2).

Definición3.- Una distribución de ingresos, representada por una curva de Lorenz, se dice que es equivalente en el sentido de Lorenz (L.E.) a otra distribución si su curva de Lorenz es la misma.

Las anteriores definiciones son útiles para medir el cambio o la permanencia en la desigualdad (que es nuestro propósito) cuando se aplica una política fiscal (un impuesto, una transferencia, o ambas).

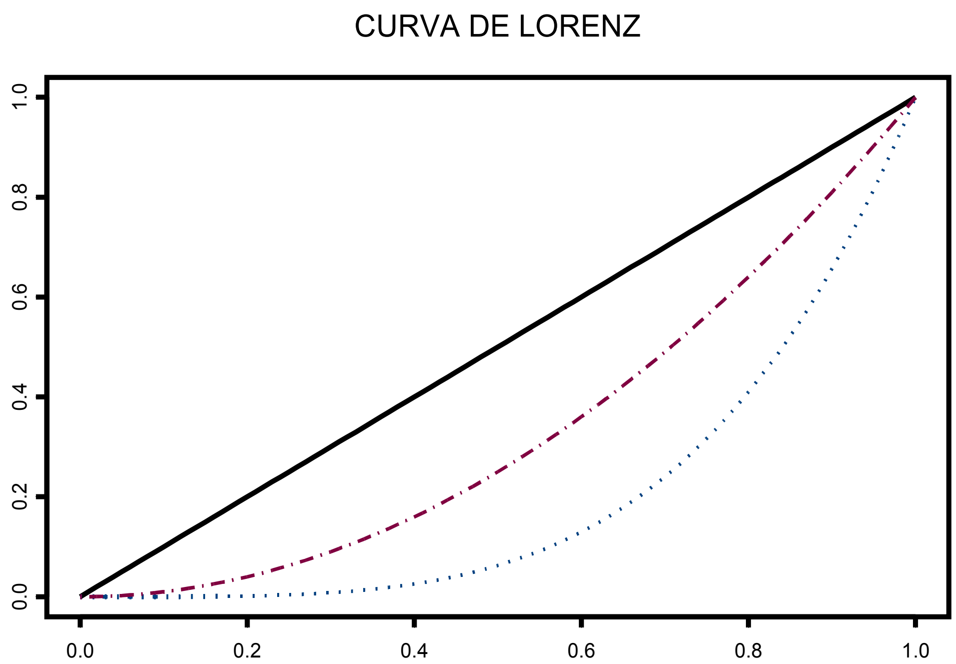

FIGURA2. *En ésta se muestra que la curva de puntos más gruesos yace completamente dentro de la curva de Lorenz menos gruesa, así domina en el sentido de Lorenz a ésta última.*

II. DEDUCCIÓN ANÁLITICA DE LA CURVA DE LORENZ

En esta sección con base en la notación que se muestra deducimos la forma analítica de la curva de Lorenz. Así, sean:

y : Ingreso antes de impuestos, con $y \in [0, \infty]$,

$f(y)$: Densidad del ingreso,

$f(y)\,dy$: Número de personas que ganan un ingreso en el rango $(y, y + dy)$,

$x(y) = y - t(y)$: ingreso disponible, diferenciable al menos una vez.

Algunos supuestos de esta función de impuestos son:

(B1) $$x(y) > 0, \qquad \forall\ y \in [0, \infty].$$

Lo anterior indica que no existen funciones de ingresos negativas después de impuestos.

(B2)[2] $$x'(y) > 0, \qquad \forall\ y \in (0, \infty)$$

$t(y)$: Función de impuestos, creciente con respecto a y,

N : Número total de personas que obtiene un ingreso y,

μ : Media de la distribución de ingresos antes de impuestos, esto es

$$\mu = \frac{\int_0^\infty sf(s)ds}{N}. \qquad (1)$$

$g(y)$: Fracción de la población total que gana y o menos,

$$g(y) = \frac{\int_0^y f(s)ds}{N} \qquad (2)$$

$h(y)$: Fracción del ingreso total ganado por la gente cuyo ingreso es y o menos,

$$h(y) = \frac{\int_0^y sf(s)ds}{\int_0^z sf(s)ds} = \frac{\int_0^y sf(s)ds}{N\mu}. \qquad (3)$$

La relación entre $g(y)$ y $h(y)$ es la curva de Lorenz. La tarea correspondiente es encontrar la relación $h(g)$, para ello citamos el siguiente Lema.

Lema 1: la relación $h(g)$ es una curva de Lorenz y se define

$$h(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y s\ dg(s). \qquad (4)$$

---

[2] $x'(y)$ no es necesario definirla en la cota superior de $x(y)$ ya que sólo necesitamos que sea una vez diferenciable, durante todo su intervalo.

Demostración: Sólo se demostrará[3] que (4) cumple con las propiedades A1-A4. En efecto,

A1: $h(0) = \frac{1}{\mu}\int_0^0 s\ dg(s) = 0$,

la última igualdad se sigue ya que el área de la curva en un punto es cero.

A2: $h(z) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty s\ dg(s) = \frac{1}{N\mu}\int_0^\infty s\ f(s)ds = \frac{N\mu}{N\mu} = 1$,

A3: aplicando el teorema fundamental del cálculo a (4) se tiene,

$$\frac{dh(y)}{dg(y)} = \frac{y}{\mu} \geq 0,$$

De hecho sólo es cero cuando el ingreso toma valor de cero, en los demás puntos se cumple la desigualdad estricta, esto es, la anterior se cumple porque $y \in [0, Z]$ y $\mu > 0$.

A4: Para la convexidad, derivemos la anterior con respecto a $g(y)$, esto es

$$\frac{d^2h(y)}{dg(y)^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dy}{dg(y)},$$

y como $\frac{dy}{dg(y)} = \frac{N}{f(y)}$, por lo que

$$\frac{d^2h(y)}{dg(y)^2} = \frac{1}{\mu}\frac{N}{f(y)} > 0.$$

Es positiva porque $N > 0$, $\mu > 0$ y $f(y) > 0$. ***QED.***

III. EL MODELO SIN EQUILIBRIO PRESUPUESTARIO

Antes de desarrollar este modelo (Latham 1988) necesitamos incorporar más información. Inicialmente, se tiene que cuando dos curvas de Lorenz correspondientes a dos distribuciones no se cortan, una distribución del ingreso puede obtenerse de la otra mediante un conjunto de transferencias puras, ya sean regresivas o progresivas. De lo anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 4: (Kakwani (1977)) Sea $w(y)$ una función de ingresos diferenciable tal que $w(y) > 0$. Si la media $E[w(y)]$ existe, entonces se define

[3] Atkinson (1970) demuestra que esta relación define analíticamente la curva de Lorenz.

$$h_1[w(y)] = \frac{1}{E[w(y)]}\int_0^z w(s)dg(s), \qquad (5)$$

y la relación dada por (5) entre $h_1[w(y)]$ y $g(y)$ es llamada *curva de concentración* de la función $w(y)$, y es una nueva curva de Lorenz. Concentración en el sentido que vuelve a distribuir el ingreso.

La función de impuestos con la que trabajaremos, y la cual facilitará nuestro análisis, es de la siguiente forma[4]

$$\eta(y) = \frac{x'(y)y}{x(y)}, \qquad (6)$$

donde $x'(y)$ es el ingreso disponible marginal. Los supuestos (B1) y (B2) indican que $\eta(y) > 0, \forall\ y \in (0,z)$.

Para una función particular de impuesto $t_i(y)$ dada, el ingreso después de impuestos es $x_i(y) = y - t_i(y)$. La media de la distribución del ingreso después de impuestos es

$$\mu_i = \frac{1}{N}\int_0^\infty x_i(s)f(s)ds. \qquad (7)$$

La recaudación obtenida está dada por

$$T_i = \int_0^\infty t_i(s)f(s)ds = N(\mu - \mu_i).$$

Consideremos la función de distribución de ingresos después de impuestos,

$$h_i(y) = \frac{1}{\mu_i}\int_0^y x_i(s)dg(s), \qquad (8)$$

la anterior es una curva de concentración en el sentido de Kakwani (definición 4) ya que cumple las hipótesis de esta definición. En efecto, μ_i existe, $x_i(y) = y - t_i(y)$ es diferenciable y positiva por lo supuestos B1 y B2.

Por otro lado, sabemos del supuesto B2 que $x(y)$ es creciente, lo cual intuitivamente implica que la ordenación de ingresos antes de impuestos se preserva una vez aplicados éstos. Por lo que (8) define implícitamente una curva de Lorenz después de impuestos. Verifiquemos que (8) cumple con las propiedades A1-A4.

[4] En algunos textos esta función se llama medida de progresión residual.

A1: $h_i(0) = \dfrac{1}{\mu_i}\int_0^0 x_i(s)dg(s) = 0$.

A2: $h_i(z) = \dfrac{1}{\mu_i}\int_0^\infty x_i(s)dg(s)$, sustituyendo $dg(y) = \dfrac{f(y)}{N}dy$,

$h_i(z) = \dfrac{1}{N\mu_i}\int_0^\infty x_i(s)f(s)ds = 1$, donde la última igualdad se sigue de (7).

A3: derivemos (8) con respecto a $g(y)$,

$$\frac{dh_i(y)}{dg(y)} = \frac{d\dfrac{1}{\mu_i}\int_0^y x_i(s)\,dg(s)}{dg(y)} = \frac{x_i(y)}{\mu_i} > 0,$$

la anterior se debe al supuesto B1.

A4: Para la convexidad, volvamos a derivar con respecto a $g(y)$,

$\dfrac{d^2h_i(y)}{dg(y)^2} = \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{dx_i(y)}{dg(y)}$, resolvamos la derivada del segundo miembro, esto es,

$\dfrac{dx_i(y)}{dg(y)} = \dfrac{dx_i(y)}{dy}\dfrac{dy}{dg(y)} = x_i'(y)\dfrac{N}{f(y)}$,

la última igualdad se obtiene por $\dfrac{dg(y)}{dy} = \dfrac{f(y)}{N}$, que al invertirla tenemos $\dfrac{dy}{dg(y)} = \dfrac{N}{f(y)}$. Finalmente sustituyendo se tiene,

$$\frac{d^2h_i(y)}{dg(y)^2} = \frac{N}{\mu_i}\frac{x_i'(y)}{f(y)} > 0,$$

Se sigue la última desigualdad por el supuesto B2. Por lo tanto (8) define una curva de Lorenz.

Sean β y α^i las distribuciones de ingresos antes y después de impuestos t_i respectivamente. Con lo anterior tenemos las versiones analíticas de las definiciones 2 y 3 respectivamente.

Definición 5: α^i domina en el sentido de Lorenz (L.D.) a β si $h_i(y) > h(y), \forall\ y \in (0,\infty)$.

Definición 6: α^i es equivalente en el sentido de Lorenz (L.E.) a β si $h_i(y) = h(y), \forall\ y \in (0, \infty)$.

Una condición necesaria y suficiente, para que se dé la LE en dos distribuciones de ingreso, cuando no existe equilibrio presupuestario, se ve en el siguiente Lema.

Lema 2: α^i L.E. β si y sólo si $\eta_i(y) = 1, \forall\ y \in (0, z)$.

Aplicando el Lema 2, tenemos el resultado central de esta sección contenido en el siguiente Teorema, que describe la forma funcional de los impuestos para que la desigualdad se mantenga.

Teorema 1: La desigualdad en el ingreso bajo un cierto equilibrio presupuestario, cuando no hay impuestos ni transferencias, se mantiene cuando se desajusta este equilibrio, al incorporar impuestos en la función de ingresos, si y sólo si la función de impuestos es proporcional al ingreso.

Demostración. De la hipótesis y por la definición 3 tenemos que α^i L.E. β. Por otra parte, aplicando el Lema 2 se tiene $\eta_i(y) = 1$, dada la definición de $\eta(y)$ en (6)

$$\frac{dx_i(y)y}{x(y)} = 1 \Rightarrow \frac{dx_i(y)}{x(y)} = \frac{dy}{y} \Rightarrow In\, x_i(y) = In\, y + c$$, así

$$x_i(y) = \lambda y, \text{ con } \lambda = e^c > 0.$$

Como $x_i(y) = y - t_i(y)$, tenemos:

$t_i(y) = (1 - \lambda)y$. ***QED***

El teorema anterior es un resultado dado por Latham (1988), cuya demostración no se incluye.

IV. ANALISIS CON EQUILIBRIO PRESUPUESTARIO

IV.1 FORMA ANÁLITICA DE LAS TRANSFERENCIAS

Cuando se aplican impuestos a la función de ingresos, se desajusta el presupuesto, para equilibrar éste incorporaremos transferencias. Por simplicidad modelamos las transferencias iguales para todos.

Sean

$T(y)$: Función de Recaudación, la cual se supone continua y al menos una vez diferenciable.

$$x_T(y) = y - t(y) + \frac{T(y)}{N} \quad : \qquad (9)$$

Función de ingresos después de impuestos $t(y)$ y transferencias.

$$\mu_T = \frac{\int_0^z x_T(y) f(y) dy}{N} \quad : \qquad (10)$$

Media de la distribución de ingresos después de impuestos y transferencias.

Supongamos, al igual que en la sección anterior,

(C1) $\qquad x_{iT}(y) > 0, \qquad \forall\ y \in [0, z].$

Y

(C2) $\qquad x'_{iT}(y) > 0, \qquad \forall\ y \in (0, z).$

Supongamos también que el número N_1 de personas, que inicialmente ganaban un ingreso $y_i \in (y - \delta, y + \delta)$, es igual al número N_2 de personas, que finalmente ganan un ingreso en el intervalo transformado $x_T \in (x_T(y) - \delta, x_T(y) + \delta)$. Por lo anterior, afirmamos que el número N de personas que tomamos en (10) se mantiene, es decir, antes de impuestos y transferencias como después de éstos N es el mismo.

Por otro lado, sean $t_i(y)$ una función de impuesto y $T_i(y)$ las transferencias dadas, donde el subíndice indica el tipo de función de impuestos a aplicarse, con estas funciones el ingreso después de impuestos y transferencias es:

$$x_{iT}(y) = y - t_i(y) + \frac{T_i(y)}{N}.$$

Sea γ^{iT} la distribución del ingreso después de impuestos y transferencias con media[5],

$$\mu_{iT} = \frac{1}{N} \int_0^z x_{iT}(s) f(s) ds. \qquad (11)$$

Definidas los anteriores conceptos, precedamos a encontrar uno de los resultados principales de este trabajo: la forma analítica de las transferencias. Primero obtengamos la recaudación:

[5] Aquí tomamos a z como el ingreso máximo, en vez de ∞ como se hizo en la sección anterior, los resultados con los dos ingresos máximos son similares.

$$T_i(y) = \int_0^{z} t_i(y) f(y) dy = \int_0^{z} \left(y - x_{iT}(y) + \frac{T_i(y)}{N} \right) f(y) dy \ ,$$

aplicando el TFC, la linealidad de la integral y transponiendo:

$$\int_0^{z} \frac{dT_i(y)}{dy} dy - \frac{1}{N} \int_0^{z} f(y) T_i(y) dy = \int_0^{z} (y - x_{iT}(y)) f(y) dy$$

otra vez por la linealidad de la integral, la ecuación (1) y (11):

$$\int_0^{z} \left(T_i'(y) - \frac{1}{N} f(y) T_i(y) \right) dy = \int_0^{z} (y - x_{iT}(y)) f(y) dy = N(\mu - \mu_{iT}),$$

derivando la anterior con respecto a y ,

$$T_i'(y) - \frac{1}{N} f(y) T(y) = 0 \ . \qquad (12)$$

Dado que el término $N(\mu - \mu_{iT})$ es constante, debido a que son promedios considerados y en particular números, la derivada con respecto al ingreso de estas diferencias de medias es cero. La ecuación (12) es una ecuación diferencial separable de primer orden, que se puede resolver fácilmente. En efecto:

$$T_i'(y) = \frac{1}{N} f(y) T(y) \Rightarrow \quad \frac{dT_i(y)}{dy} = \frac{1}{N} f(y) T_i(y) \text{, separando,}$$

$$\frac{dT_i(y)}{T_i(y)} = \frac{1}{N} f(y) dy \text{, al integrar}$$

$$In\, T_i(y) = \frac{1}{N} \int_0^{z} f(y) dy = \frac{1}{N} \text{. Finalmente,}$$

$$T_i(y) = e^{\frac{1}{N}} . \qquad (13)$$

Por lo tanto, la función de las transferencias se obtiene al repartirse las transferencias entre el total de los agentes. Finalmente, sustituyendo (13) en (9), tenemos:

$$x_{iT}(y) = y - t_i(y) + \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N} . \qquad (14)$$

IV.2 EJEMPLO

Una vez dada la forma de las transferencias y la nueva función de ingresos disponible, mostramos el siguiente ejemplo como preliminar de nuestro resultado general. Nos apoyamos en una distribución de ingresos exponencial, primero analizamos que pasa antes de impuestos y transferencias, y, después analizamos la incorporación de estos.

Sea $f(y) = Ke^{-\alpha y}$ una distribución exponencial de ingresos con K constante y α el parámetro de la distribución. Calculemos el número total de personas N que obtiene un ingreso y, la media de la distribución μ, la fracción de la población total que gana y o menos $g(y)$ y finalmente la curva de Lorenz $h(y)$. Esto es,

$$N = \int_0^\infty Ke^{-\alpha s} ds = -\frac{K}{\alpha} e^{-\alpha y}\Big|_0^\infty = \frac{K}{\alpha}, \qquad (15)$$

La media se calcula mediante:

$$\mu = \frac{\int_0^\infty sf(s)ds}{N} = \frac{K}{N}\int_0^\infty se^{-\alpha s}ds,$$

Resolvamos integral por partes, esto es, sean

$$u = s,\ du = ds \text{ y } dv = e^{-\alpha s},\quad v = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha s},$$

Así:

$$\mu = \frac{K}{N}\left[-\frac{s}{\alpha}e^{-\alpha s}\Big|_o^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha s}ds\right] = \frac{K}{N}\left[-\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha y}\Big|_o^\infty\right] = -\frac{K}{N}\frac{1}{\alpha^2}(0-1) = \frac{K}{N}\frac{1}{\alpha^2},$$

de (15) $\alpha = \frac{K}{N}$, sustituyendo tenemos,

$$\mu = \frac{1}{\alpha}. \qquad (16)$$

Por otro lado,

$$g(y) = \frac{\int_0^y f(s)ds}{N} = \frac{K\int_0^y e^{-\alpha s}ds}{N} = -\frac{K}{\alpha N}e^{-\alpha s}\Big|_o^y = 1 - e^{-\alpha y}. \qquad (17)$$

donde la última igualdad se desprende de (15). Por último encontremos la curva de Lorenz,

$$h(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y s\, dg(s) = \alpha\int_0^y s\, dg(s),$$

la última igualdad sale de (17). Por otra parte, como $\frac{dy}{dg(y)} = \frac{N}{f(y)}$,

$$h(y)=\frac{\alpha}{N}\int_0^y sf(s)ds=\frac{\alpha}{N}\int_0^y sKe^{-\alpha s}ds=\frac{\alpha K}{N}\left[-\frac{s}{\alpha}e^{-\alpha s}\Big|_o^y-\tfrac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha s}\Big|_0^y\right]$$

$$=\alpha^2\left[-\frac{y}{\alpha}e^{-\alpha y}-\tfrac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha y}+\tfrac{1}{\alpha^2}\right]=1-\alpha\ ye^{-\alpha y}-e^{-\alpha y}=1-e^{-\alpha y}(1+\alpha\ y)$$

Por lo tanto,

$$h(y)=1-e^{-\alpha y}(1+\alpha\ y)\,. \qquad (18)$$

Sin embargo, recordemos que (18) no es una función directamente de y sino de $g(y)$, por lo que despejamos de (17) el valor de y en términos de $g(y)$,

$$g(y)=1-e^{-\alpha y}\Rightarrow -\alpha\ y=In(1-g(y))\Rightarrow y=-\frac{1}{\alpha}In(1-g(y))$$

Sustituyendo la anterior en (18) tenemos,

$$h(y)=1-e^{-\alpha\left[-\frac{1}{\alpha}In(1-g(y))\right]}\left(1+\alpha\left[-\frac{1}{\alpha}In(1-g(y))\right]\right)=1-(1-g(y))(1-In(1-g(y)),$$

finalmente,

$$h(g(y))=g(y)+(1-g(y))In(1-g(y))\,. \qquad (19)$$

Ahora, una vez dada la forma analítica de la curva de Lorenz, nos apoyamos en el programa S-PLUS[6] que nos arroja la curva de Lorenz para una distribución exponencial de parámetro (.5)[7], que se ve en la figura 3.

Incorporemos ahora transferencias e impuestos, es decir, cuando el saldo lo equilibramos de otra forma. El ingreso después de impuestos y transferencias es:

$$x_{iT}(y)=y-t_i(y)+\frac{e^{\frac{1}{N}}}{N} \qquad (20)$$

y los impuestos

$$t_i(y)=(1-\lambda)y+\frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}\,. \qquad (21)$$

[6] Ver anexo para el programa.

[7] El parámetro es cualquier número menor a 1, ya que la media de la distribución es $\mu=\frac{1}{\alpha}$.

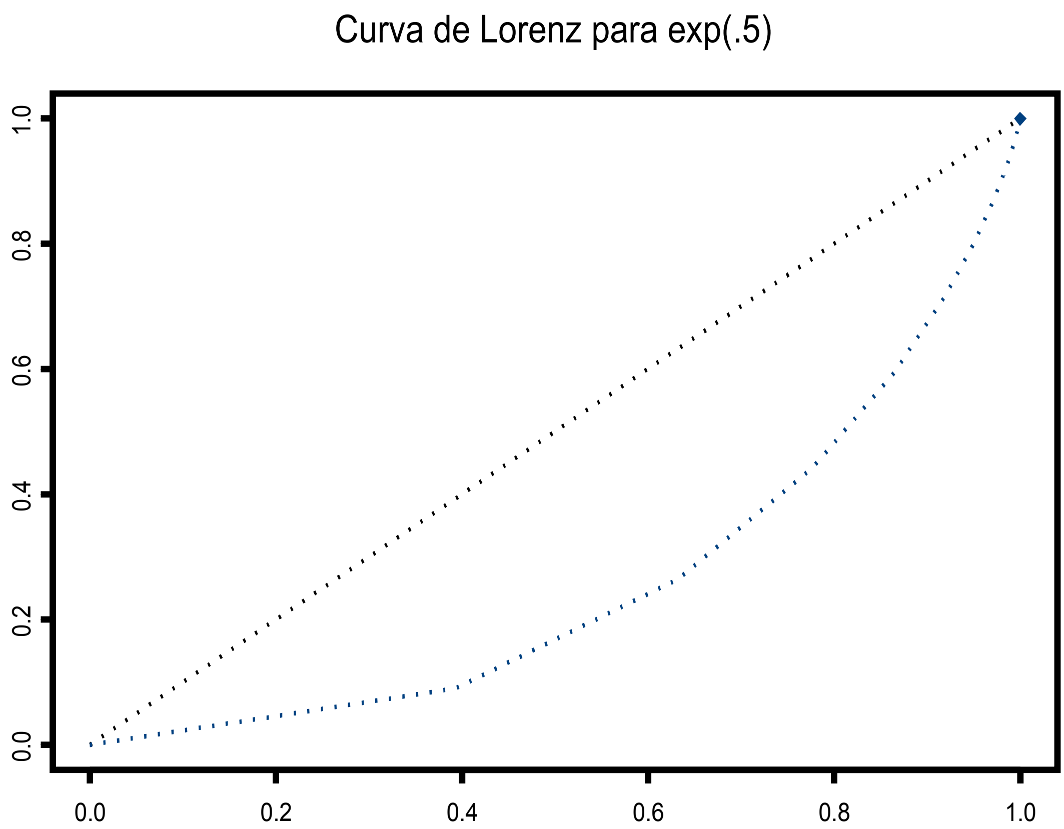

FIGURA 3. Curva de Lorenz para una distribución exponencial de parámetro 0.5.

Antes de continuar, reduzcamos nuestra distribución de ingreso exponencial en términos de parámetros conocidos. Esto es, sabemos de (15) que $K = \alpha N$, sustituyendo esta expresión en la función de distribución,

$$f(y) = \alpha \, N e^{-\alpha y}. \qquad (22)$$

Así con ayuda de (20), (21) y (22) analizaremos el efecto de la forma del impuesto sobre ésta función de distribución exponencial[8].

Después de impuestos y transferencias, el número de personas que inicialmente ganaba un ingreso en un intervalo alrededor de y es igual al número de personas que finalmente ganan un ingreso en el intervalo transformado alrededor del ingreso después de impuestos y transferencias dado por (20), esto es

$$\begin{aligned} f(y)dy &= f(x_{iT}(y))d(x_{iT}) \\ &= f(y - t_i(y) + e^{\frac{1}{N}}/N)d(y - t_i(y) + e^{\frac{1}{N}}/N) \end{aligned}$$

Sustituyendo (21)

[8] Levine y Singer calculan el área bajo la curva de Lorenz con ésta función de distribución.

$$f(y)dy = f(\lambda\ y)d(\lambda\ y) = f(\lambda\ y)\lambda\ dy,$$

de la anterior y (22), la distribución exponencial después de ingresos y transferencias es:

$$f(x_{iT}(y)) = f(\lambda\ y) = \frac{1}{\lambda}\alpha\ Ne^{-\alpha\ y}\ . \qquad (23)$$

Con esta distribución de ingresos después de la política fiscal, calculemos, μ, $g(y)$ y finalmente la curva de Lorenz $h(g(y))$,

$$\mu = \frac{\int_0^\infty sf(x_{iT}(s))ds}{N} = \frac{N}{\lambda N}\int_0^\infty s\alpha\ e^{-\alpha\ s}ds = \frac{1}{\lambda}\left[-se^{-\alpha\ s}\Big|_o^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha\ s}ds\right], \qquad (24)$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left[0 - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\ y}\Big|_o^\infty\right] = \frac{1}{\lambda}\left[0 + \frac{1}{\alpha}\right] = \frac{1}{\lambda\ \alpha}$$

donde en la segunda igualdad se sustituyo (23) y en la tercera se integró por partes.

Por otro lado,

$$g(y) = \frac{\int_0^y f(x_{iT}(s))ds}{N} = \frac{\alpha\ N\int_0^y e^{-\alpha\ s}ds}{\lambda\ N} \qquad (25)$$
$$= -\frac{1}{\lambda}e^{-\alpha\ s}\Big|_o^y = \frac{1-e^{-\alpha\ y}}{\lambda}$$

Ahora,

$$h(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y s\ dg(s) = \lambda\,\alpha\int_0^y s\ dg(s),$$ sustituyendo $\frac{dy}{dg(y)} = \frac{N}{f(y)}$ y (24),

$$h(y) = \frac{\alpha\,\lambda}{N}\int_0^y sf(x_{iT}(s))ds = \frac{\alpha\,\lambda}{N}\int_0^y s\alpha\ N\frac{1}{\lambda}e^{-\alpha\ s}ds = \alpha^2\left[-\frac{s}{\alpha}e^{-\alpha\ s}\Big|_o^y - \tfrac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha s}\Big|_0^y\right]$$
$$= \alpha^2\left[-\frac{y}{\alpha}e^{-\alpha\ y} - \tfrac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha\ y} + \tfrac{1}{\alpha^2}\right] = 1-\alpha\ ye^{-\alpha\ y} - e^{-\alpha\ y} = 1-e^{-\alpha\ y}(1+\alpha\ y)$$

Esto es,

$$h(y) = 1-e^{-\alpha\ y}(1+\alpha\ y)\ . \qquad (26)$$

Nótese que la ecuación (26) es la misma que (18). Por lo que analíticamente se demuestra que la desigualdad antes y después de impuestos y transferencias se mantiene, dada la función de impuestos en (21), que es lo que se quería mostrar.

Sin embargo, recuérdese que (26) depende de $g(y)$, y como ésta cambio veamos que sucede geométricamente. Primero despejemos en (25) el valor de y en términos de $g(y)$, esto es,

$$g(y) = \frac{1 - e^{-\alpha y}}{\lambda} \Rightarrow -\alpha y = In(1 - \lambda g(y)) \Rightarrow y = -\frac{1}{\alpha} In(1 - \lambda g(y))$$

Sustituyendo la anterior en (26) tenemos,

$$h(y) = 1 - e^{-\alpha\left[-\frac{1}{\alpha}In(1-\lambda g(y))\right]}\left(1 + \alpha\left[-\frac{1}{\alpha}In(1 - \lambda g(y))\right]\right) = 1 - (1 - \lambda g(y))(1 - In(1 - \lambda g(y))$$

,

por lo tanto,

$$h(g(y)) = \lambda g(y) + (1 - \lambda g(y))In(1 - \lambda g(y)). \qquad (27)$$

Hacemos un programa similar para graficar esta función (ver apéndice), así,

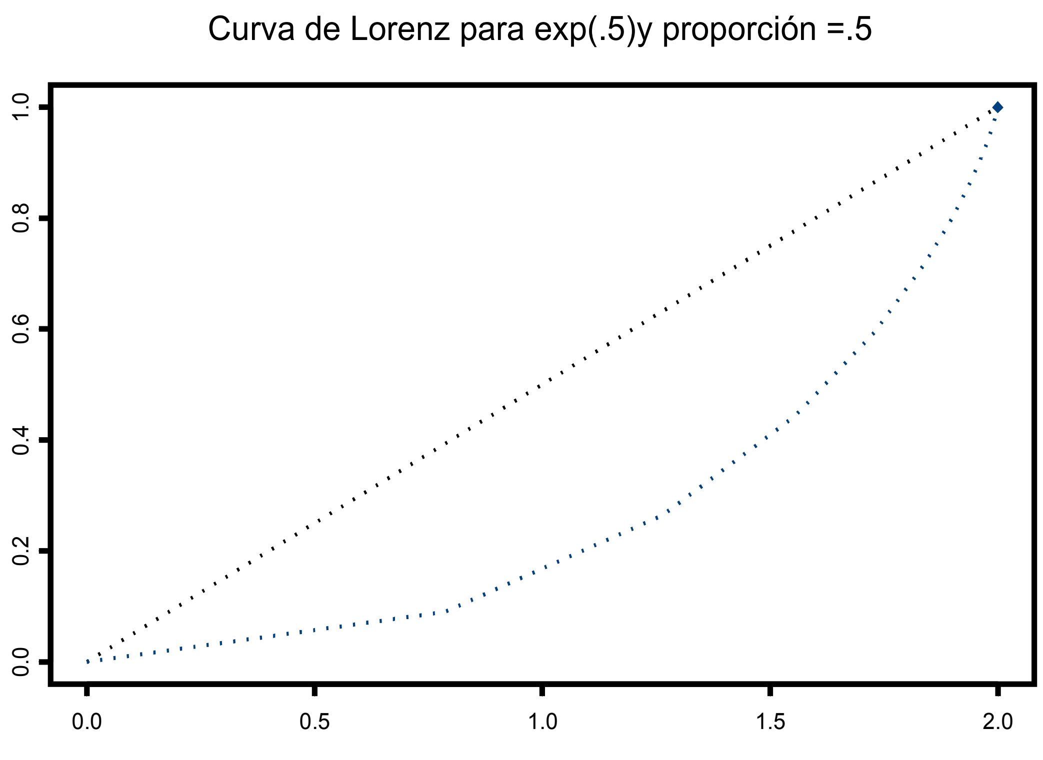

FIGURA 4.

La gráfica de la figura 4 es la misma función de distribución exponencial con parámetro .5 y una proporción del ingreso .5, al compararla con la gráfica 3 vemos que también la desigualdad se mantiene geométricamente.

IV.3 FORMA ANALITICA DE LA FUNCIÓN DE IMPUESTOS

En este apartado se analizan de manera general (para cualquier función de distribución de ingresos) las condiciones que debe cumplir la función impuestos. para mantener la desigualdad bajo equilibrio presupuestario, objetivo final de este trabajo. Para esto consideremos,

$$h_{iT}(y) = \frac{1}{\mu_{iT}} \int_0^y x_{iT} \; dg(s). \qquad (28)$$

Por la definición de Kakwani, ésta es una curva de concentración. Y sigue definiendo una distribución de ingresos de Lorenz por el supuesto C2, que dice que la función de distribución de ingresos después de impuestos y transferencias es creciente. Ahora verifiquemos que (28) cumple las propiedades A1-A4,

A1: $h_{iT}(0) = \frac{1}{\mu_{iT}} \int_0^0 x_{iT} \; dg(s) = 0$,

A2: $h_i(z) = \frac{1}{\mu_{iT}} \int_0^z x_{iT} \; dg(s),$ sabemos que $\frac{dg(y)}{dy} = \frac{f(y)}{N} \Rightarrow dg(s) = \frac{f(s)}{N} ds$,

sustituyendo, $h_i(z) = \frac{1}{N\mu_{iT}} \int_0^z x_{iT}(s) \; f(s) ds = \frac{N\mu_{iT}}{N\mu_{it}} = 1,$

A3: Derivemos (15) con respecto a $g(y)$,

$$\frac{dh_i(y)}{dg(y)} = \frac{d \frac{1}{\mu_{iT}} \int_0^y x_{iT}(s) \; dg(s)}{dg(y)} = \frac{x_{iT}(y)}{\mu_{iT}} > 0, \qquad (29)$$

la anterior se debe al supuesto C1.

A4: Para la convexidad, derivamos (29) con respecto a $g(y)$,

$\frac{d^2 h_i(y)}{dg(y)^2} = \frac{1}{\mu_{iT}} \frac{dx_{iT}(y)}{dg(y)}$, resolvamos,

$\frac{dx_{iT}(y)}{dg(y)} = \frac{dx_{iT}(y)}{dy} \frac{dy}{dg(y)} = x'_{iT}(y) \frac{dy}{dg(y)}$,

Sabemos que

$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{f(y)}{N}$, invirtiendo ésta tenemos $\frac{dy}{dg(y)} = \frac{N}{f(y)}$, así

$$\frac{d^2 h_{iT}(y)}{dg(y)^2} = \frac{N}{\mu_{iT}} \frac{x'_{iT}(y)}{f(y)} > 0 ,$$

Se sigue la última desigualdad por el supuesto C2.

Procedamos a construir algunos resultados que serán de gran utilidad.

Sea

$$J(y) = \int_0^y t_i(s) f(s) ds , \qquad (30)$$

la recaudación hasta el valor y. Con el apoyo de (30), construimos el siguiente Lema, que da condiciones para que la desigualdad se mantenga.

Lema 3: γ^{iT} L.E. β si y sólo si $J(y) = \frac{e^{1/N}}{N}\left[(N-1)h_{iT}(y) + F(y)\right], \forall\ y \in (0,z)$.

Demostración. Primeramente, de $x_{iT}(y) = y - t_i(y) + \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}$, tenemos

$$\int_0^Z x_{iT}(s) f(s) ds = \int_0^Z \left(s - t_i(s) + \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N} \right) f(s) ds = N\mu - e^{\frac{1}{N}} + \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N} = N\mu + \frac{1-N}{N} e^{\frac{1}{N}}, \text{ así}$$

$$N\mu_{iT} = N\mu + \frac{1-N}{N} e^{\frac{1}{N}}, \text{ por lo que}$$

$$\mu = \mu_{iT} - \frac{1-N}{N^2} e^{\frac{1}{N}} . \qquad (31)$$

Por otro lado, como γ^{iT} L.E. β esto implica de la definición 6 que

$$\frac{1}{\mu_{iT}} \int_0^y x_{iT}(s)\, dg(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^y s\, dg(s) ,$$

transponiendo tenemos, $\mu \int_0^y x_{iT}(s)\, dg(s) = \mu_{iT} \int_0^y s\, dg(s)$,

de (31) se tiene,

$$\left(\mu_{iT} - \frac{1-N}{N^2} e^{\frac{1}{N}}\right) \int_0^y x_{iT}(s)\, dg(s) = \mu_{iT} \int_0^y s\, dg(s) ,$$

reacomodando términos,

$$-\frac{1-N}{N^2} e^{\frac{1}{N}} \int_0^y x_{iT}(s)\, dg(s) = \mu_{iT} \int_0^y (s - x_{iT}(s))\, dg(s) ,$$

utilizando $y - x_{iT}(y) = t_i(y) - \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}$ y al despejar μ_{iT} de la anterior se tiene,

$$-\frac{1-N}{N^2} e^{\frac{1}{N}} h_{iT} = \int_0^y t_i(s)\, dg(s) - \frac{1}{N} e^{\frac{1}{N}} \int_0^y dg(s) =$$

$$\frac{1}{N}\int_0^y t_i(s)\, f(s)ds - \frac{1}{N^2} e^{\frac{1}{N}} \int_0^y f(s)ds = \frac{J(y)}{N} - \frac{e^{\frac{1}{N}} F(y)}{N^2}$$

La anterior se siguió aplicando $dg(y) = \frac{f(y)dy}{N}$. Por último al despejar de la anterior

$$J(y) = \frac{e^{1/N}}{N}\left[(N-1)h_{iT}(y) + F(y)\right] \qquad \textbf{\textit{Q.E.D.}}$$

El siguiente Teorema, que es análogo al Teorema 1, sigue dando condiciones para que se mantenga la desigualdad.

Teorema 2. γ_{iT} L.E. β si y sólo si $\eta_i(y) = 1, \forall\ y \in (0, z)$.

Demostración:

$\Rightarrow]$

Demostremos primero que, si γ_{iT} L.E. β entonces $\eta_i(y) = 1, \forall\ y \in (0, z)$.

Dado que γ_{iT} L.E. β por el lema 3 se sigue que,

$J(y) = \frac{e^{1/N}}{N}\left[(N-1)h_{iT}(y) + F(y)\right]$, derivando con respecto a $g(y)$

$$J'(y) = \frac{e^{1/N}}{N}\left[(N-1)h'_{iT}(y) + N\right], \qquad (32)$$

el segundo término del último miembro es debido al siguiente análisis,

$$F(y) = \int_0^y f(y)dy \text{, como } dg(y) = \frac{f(y)dy}{N},$$

sustituyendo en la anterior se tiene $F(y) = N\int_0^y dg(s)$,

al derivar con respecto a $g(y)$ se tiene $\frac{dF(y)}{d(g(y))} = N$, lo último por el TFC.

Ahora, encontremos los valores de $J'(y)$ y de $h'_{iT}(y)$.

Como $J(y) = \int_0^y t_i(s)f(s)ds = N\int_0^y t_i(s)dg(s) = N\int_0^y (s - x_{iT} + \frac{e^{1/N}}{N})dg(y)$.
Al derivar con respecto a $g(y)$ la anterior

$$J'(y) = N\left[y - x_{iT}(y) + \frac{e^{1/N}}{N}\right]. \qquad (33)$$

Por otra parte,

$$h'_{iT}(y) = \left[\frac{1}{\mu_{iT}}\int_0^y x_{iT}(s)dg(s)\right]^{l} = \frac{1}{\mu_{iT}}x_{iT}(y). \qquad (34)$$

Sustituyendo (33) y (34) en (32),

$N\left[y - x_{iT}(y) + \frac{e^{1/N}}{N}\right] = \frac{e^{1/N}}{N}\left[\frac{N-1}{\mu_{iT}}x_{iT}(y) + N\right]$, transponiendo

$\left(-N - \frac{N-1}{\mu_{iT}}\frac{e^{1/N}}{N}\right)x_{iT}(y) = e^{1/N} - e^{1/N} - Ny$, sea $A = -N - \frac{N-1}{\mu_{iT}}\frac{e^{1/N}}{N}$, por lo tanto

$$Ax_{iT}(y) = -Ny. \qquad (35)$$

Por otro lado al derivar ambos miembros de (32)

$$J''(y) = \frac{e^{1/N}}{N}(N-1)h''_{iT}(y) \cdot \qquad (36)$$

Por lo que procedemos a encontrar estas segundas derivadas,

$J''(y) = N\frac{d}{g(y)}\left[y - x_{iT}(y) + \frac{e^{1/N}}{N}\right] = N\left[\frac{dy}{dg(y)} - \frac{dx_{iT}(y)}{dg(y)}\right]$, de $dg(y) = \frac{f(y)dy}{N}$

tenemos, $\frac{dy}{dg(y)} = \frac{N}{f(y)}$ y

$$\frac{dx_{iT}}{dg(y)} = \frac{dx_{iT}}{dy}\frac{dy}{dg(y)} = \frac{Nx'_{iT}}{f(y)}, \qquad (37)$$

así,

$$J''(y) = N\left(\frac{N}{f(y)} - \frac{Nx'_{iT}(y)}{f(y)} \right) = \frac{N^2}{f(y)}\left[1 - x'_{iT}(y)\right]. \qquad (38)$$

Ahora, derivando (34) con respecto a $g(y)$

$$h''_{iT}(y) = \frac{N}{\mu_{iT}} \frac{x'_{iT}(y)}{f(y)}, \qquad (39)$$

donde la igualdad se desprende de (37). Sustituyendo (38) y (39) en (36),

$\frac{N^2}{f(y)}\left[1 - x'_{iT}(y)\right] = \frac{e^{1/N}}{N}(N-1)\frac{N}{\mu_{iT}}\frac{x'_{iT}(y)}{f(y)}$, reduciendo la anterior,

$N\left[1 - x'_{iT}(y)\right] = \frac{e^{1/N}}{N\mu_{iT}}(N-1)x'_{iT}(y)$, al reacomodar términos

$\left(-N - \frac{N-1}{\mu_{iT}}\frac{e^{1/N}}{N} \right)x'_{iT}(y) = -N$, notar que el término entre paréntesis es el mismo que $A = -N - \frac{N-1}{\mu_{iT}}\frac{e^{1/N}}{N}$ en la ecuación (35), por tanto

$$Ax'_{iT}(y) = -N. \qquad (40)$$

De (35) tenemos $A = \frac{-Ny}{x_{iT}(y)}$, sustituyendo en (40)

$\frac{-Ny}{x_{iT}(y)}x'_{iT}(y) = -N$, por lo tanto $\frac{yx'_{iT}(y)}{x_{iT}(y)} = 1$, esto es,

$$\eta_i(y) = 1. \; \textbf{\textit{QED}}$$

$\Leftarrow]$

Supongamos que $\eta_i(y) = 1$, esto es

$\frac{dx_{iT}(y)}{dy}\frac{y}{x_{iT}(y)} = 1$, separando variables,

$\frac{dx_{iT}(y)}{x_{iT}(y)} = \frac{dy}{y}$, resolviendo esta sencilla ecuación diferencial tenemos

$In\, x_{iT}(y) = In\, y + c$,

por lo tanto $x_{iT}(y) = \lambda\, y$, donde $\lambda = e^{c} > 0$ y, como μ_{iT} y μ son ambas positivas, sin pérdida de generalidad podemos definir: $\lambda = \frac{\mu_{iT}}{\mu} > 0$, así

$$x_{iT}(y) = \frac{\mu_{iT}}{\mu} y,$$

multiplicando ambos miembros por $f(y)$ e integrando de 0 a y,

$$N\mu \int_0^y x_{iT}(s)\, dg(s) = N\mu_{iT} \int_0^y s\, dg(s),$$

por lo tanto $h_{iT}(y) = h(y)$, de la definición (7) se tiene γ_{iT} L.E. β ***Q.E.D.***

Llegamos a nuestro resultado central: La desigualdad se mantiene si y sólo si la función de impuestos es una combinación lineal de impuestos proporcionales e impuestos de suma fija, el cual citamos en el siguiente Colorario.

Colorario 1: la desigualdad en el ingreso antes de la política fiscal, aplicación de impuestos y transferencias, se mantiene después de esta política fiscal si y sólo si la función de impuestos es una combinación de impuestos proporcionales e impuestos de suma fija.

Demostración. Al mantenerse la desigualdad, tenemos que γ_{iT} L.E. β. Por el Teorema 2 se sigue que $\eta_i(y) = 1$, lo cual implica

$$\frac{dx_{iT}(y) y}{x_{iT}(y)} = 1 \Rightarrow \frac{dx_{iT}(y)}{x_{iT}(y)} = \frac{dy}{y} \Rightarrow In\, x_{iT}(y) = In\, y + c,$$

al integrar la anterior $x_{iT}(y) = \lambda\, y$, como $x_{iT}(y) = y - t_i(y) + \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}$, sustituyendo

$$y - t_i(y) + \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N} = \lambda y, \text{ luego } t_i(y) = (1-\lambda)y + \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}$$

Donde el impuesto de suma fija es la transferencia dada a los individuos. ***QED.***

Notar que este resultado es contrario al resultado mostrado en la sección anterior, en donde el presupuesto no estaba equilibrado. Por lo que se concluye que cuando el presupuesto se equilibra, con base en transferencias, ya no se requiere que la función de impuestos sea sólo proporcional al ingreso para que la desigualdad se mantenga.

V. CONCLUSIÓN

En este trabajo mostramos condiciones sobre la función de impuestos que se requieren para mantener la desigualdad en el ingreso, que se tenía antes de esta aplicación de impuestos. la forma de estos impuestos es una combinación de impuestos proporcionales e impuestos de suma fija, siendo estos últimos iguales a las transferencias proporcionadas por el gobierno. Quizá la forma de imposición de impuestos (proporcionales) y la forma de repartir las transferencias por partes iguales (suma fija) con el hecho de que la desigualdad se mantiene, puede sonar paradójico. Ya que al cobrar un impuesto proporcionar al ingreso, se les quita más a los que más ganan y menos a los que ganan poco, y al otorgar transferencias por partes iguales, pareciera que se está mejorando económicamente a la gente pobre y empeorando a los ricos. Entonces cabe preguntar ¿cómo es que se mantuvo la desigualdad? si el análisis anterior muestra lo contrario. La respuesta a esta pregunta se da en la herramienta utilizada en este trabajo. Primero no olvidemos que entre los más ricos y los más pobres hay gente de medianos ingresos, y como la distribución de ingresos no es cualquier medida de ingresos, sino que es una función de densidad que mide el promedio de ingresos de la gente, la desigualdad de la población se mantuvo en general. En otras palabras, lo que se está midiendo no es si los pobres mejoraron ó si los ricos empeoraron, sino cuáles son los requisitos que se deben cumplir para que en promedio la desigualdad se mantenga. Por último, si bien el análisis del modelo es interesante, una limitante del trabajo es haber supuesto que el ingreso es exógeno, es decir, independientemente de la proporción del impuesto éste se seguirá pagando. Pero sabemos que en general no funciona de esta forma, que los ciudadanos deberían reaccionar ante esta imposición del impuesto. Quizá lo último se podía haber modelado en una sección más del trabajo, es decir, considerando la recaudación de manera aleatoria y medir este efecto aleatorio en la desigualdad con un concepto más general, ocupando otros conceptos de medición aparte de la curva de Lorenz.

ANEXO

PROGRAMA PARA CALCULAR LA GRÁFICA DE LA CURVA DE LORENZ PARA UNA DISTRIBUCIÓN DE INGRESOS EXPONENCIAL.

```
x<-function(y,a)
{
   return (1-exp(-a*y))
}

y<-seq(0,100,1)
a<-.5

x1<-x(y,a)
x1
z<-function(x1,a)
{
return (( 1-x1)*log(1-x1)+x1)
}

w<-z(x1,a)
w
matplot(x1,cbind(x1,w), type="l", main="Curva de Lorenz para exp(.5)",
   lty=2,lwd=4:4)
```

PROGRAMA PARA CALCULAR LA GRÁFICA DE LA CURVA DE LORENZ PARA UNA DISTRIBUCIÓN DE INGRESOS, DESPUES DE IMPUESTOS Y TRANSFREENCIAS, EXPONENCIAL CON PARAMETRO .5 Y UNA PROPORCIÓN IGUAL DE .5 DEL INGRESO.

```
x<-function(y,a,b)
{
   return ((1/b)*(1-exp(-a*y )))
}

y<-seq(0,100,1)
a<-.5
b<-.5
x1<-x(y,a,b)
x1
z<-function(x1,a,b)
{
return (( 1-b*x1)*log(1-b*x1)+b*x1)
}

w<-z(x1,a,b)
w
matplot(x1,cbind(b*x1,w), type="l", main="Curva de Lorenz para exp(.5)y
   proporción =.5", lty=2,lwd=4:4)
```

BIBLIOGRAFÍA

[1] Rocha, Adalberto G.. "La Desigualdad Económica", CEE, El Colegio de México, (1986).

[2] Latham, Rogher. "Lorenz-Dominating Income Tax Functions", International Economic Review, Vol. 29, No. 1. 1988.

[3] Levine, Daniel B. y Singer, Neil M. "The Mathematic Relation Between the Income Density Function and the Measurement of Income Inequality", Econometrica, Vol 38, No. 2. 1970.

[4] Kakwani, N.C., "Applications of Lorenz Curves in Economic analysis", Econometrica, Vol. 45, No. 3. 1977.

[5] Fei, John, C.H., "Equity Oriented Fiscal Programs", Econometrica, Vol. 49, No.44, (jul., 1981), pp. 869-881.

[6] McGarrry, Kathleen, Robert F. Schoeni, "Transfer Behavior in the Health and Retirement Study: Measurement and the Redistribution of Resources within the Family", The Journal of Human Resources, Vol. 30, (1995), pp. s184-s226.

[7] Liu, Pak-Wai, "Lorenz Domination and Global Tax Progressivity", The Canadian Jolurnal of Economics, Vol. 18, No.2. (May, 1985), pp. 395-399.

[8] Atkinson, Anthony B., "On the Measurement of Inequality," Journal of Economic Theory 2 (1970), 244-263.

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis surge de mi interés por la aplicación de la matemática a la ciencia económica. Por la pasión, como Licenciado en Matemáticas y próximamente Maestro en Economía, por modelar la intuición económica con herramientas matemáticas, aplicando éstas para obtener resultados, y volver aplicar la parte intuitiva para explotar y analizar los resultados obtenidos.

Agradezco a mis profesores y compañeros de esta institución (Mi Colmex Querido): a mis profesores por haberme instruido y detallado conceptos e ideas económicas así como la parte matemática que fui puliendo, a mis compañeros por compartir ese espíritu de competencia y compañerismo sano.

De nueva cuenta a mi institución: EL COLEGIO DE MEXICO por sus instalaciones y servicios, ¡Que orgullo egresar de aquí! Gracias en lo particular al centro de estudios económicos por darme la confianza al otorgarme la beca para realizar estos estudios.

Resalto la ayuda y sobre todo la disposición de mi asesor, Dr. Jaime Sempere, gracias profesor por aceptarme como tesista y guiarme en mis ideas tan generales, particularizando éstas. Pero sobre todo por creer en mí y darme seguridad y confianza.

De manera muy especial agradezco a mi gran familia: a mi madre la persona más maravillosa que he conocido, por ese ejemplo de sacrificio, coraje y fuerza, gracias "Doña Margarita". Gracias también a Don Luis por apoyar a mi familia y acompañar a mi Madre. A mis hermanos y hermanas por volver a creer en mí, que tan solo verlos es una motivación para seguir luchando. Gracias Hugo por el ejemplo, gracias Edith por la lucha, gracias Angelina por la paciencia, gracias Martha por el sacrificio y coraje, gracias Beto por atreverte y gracias Polo por aguantar.

A mi novia por ese gran apoyo moral, por el ambiente académico compartido y por estar a mi lado para disfrutar de los pequeños triunfos como para levantarme de las grandes caídas, gracias Yanink.

Por último a mi Padre (QED) y a Dios, que me están echando porras desde el cielo y desde todas partes.

Sin los anteriores habría sido imposible alcanzar este sueño.

Gracias.

Luis Antonio Andrade Rosas
Octubre 2006.