



# EL COLEGIO DE MÉXICO

## CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

### **MAESTRÍA EN ECONOMÍA**

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN ECONOMÍA

**SOFISTICACIÓN Y EFICIENCIA EN MERCADOS FINANCIEROS**

**ALAN MARTÍN HERNÁNDEZ SOLANO**

PROMOCIÓN 2009-2011

ASESOR:

**JOSÉ MIGUEL TORRES GONZÁLEZ**

JUNIO 2011



# Resumen

Ante una mayor presencia de agentes sofisticados en los mercados financieros, como es el caso de los inversionistas institucionales, resulta natural hacerse la siguiente pregunta: ¿Una mayor sofisticación conducirá a una mayor eficiencia (en el sentido de que los precios de los activos converjan a sus valores fundamentales)? Para abordar este problema, muy recientemente en el 2010, Stein[12] desarrolló un modelo en donde en el mercado conviven agentes sofisticados pero no-informados, con agentes ingenuos pero que cuentan con información privilegiada. Stein[12] muestra que un aumento en sofisticación no siempre es acompañado por mayor eficiencia (efecto *overcrowded*). Aquí retomamos este trabajo para probar qué tan robusto es su resultado cuando los arbitrajistas tienen más flexibilidad para negociar. En particular, permitimos que éstos puedan vender activos, y no sólo comprarlos (como en el modelo original). El resultado central de esta generalización es un poco sorprendente: una relajación de los supuestos originales permite asegurar que una mayor sofisticación de los agentes económicos *siempre* generará una mayor ineficiencia de mercado. Es decir, el fenómeno podría tener una mayor relevancia práctica de lo que originalmente sugirió Stein[12].



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El problema del <i>crowded-trade</i></b>	<b>5</b>
2.1. Ausencia de arbitrajistas y oportunidad de arbitraje . . . . .	6
2.2. Entrada de arbitrajistas en el modelo . . . . .	7
2.2.1. Incertidumbre acerca de la capacidad de arbitraje . . .	8
<b>3. Venta de activos y el <i>crowded-trade</i></b>	<b>13</b>
3.1. Capacidad de arbitraje negativa . . . . .	13
3.2. Ejemplos del modelo extendido . . . . .	15
3.2.1. Distribución Bernoulli . . . . .	16
3.2.2. Distribución Uniforme. . . . .	23
3.2.3. Comparación de la ineficiencia de mercado a través de distribuciones de probabilidad . . . . .	25
3.3. Recapitulación . . . . .	29
<b>4. Consideraciones finales</b>	<b>33</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>35</b>
<b>Apéndice</b>	<b>37</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>39</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Como lo señala Stein[12], en los últimos 20 años se ha mostrado un gran cambio en cuanto a la manera en que se maneja el dinero de los inversionistas. En particular, se ha observado una mayor importancia de los inversionistas institucionales, que son organizaciones que operan grandes volúmenes de activos financieros, por ejemplo bancos, compañías de seguros, sociedades de inversión, etc.

Un indicador de lo anterior ha sido el gran crecimiento de la industria de los *hedge fund*<sup>1</sup> en los Estados Unidos y el aumento en el capital que dichas empresas manejan. En México también se ha presentado un fenómeno similar, como ejemplo, se ha visto un crecimiento anual promedio de 28 % durante el periodo de octubre de 1995 a abril de 2011 en la cantidad de dinero que manejan las Afores, las administradoras de fondos para el retiro (véase figura 1.1).

Bajo la hipótesis de que los inversionistas institucionales son agentes sofisticados y los inversionistas individuales no, lo anterior nos lleva a pensar que el mercado debería presentar una convergencia hacia una mayor sofisticación. Lo cual a su vez, plantea la siguiente pregunta ¿Dicha sofisticación en el mercado, conducirá a una mayor eficiencia en el sentido de que los precios de los activos converjan a sus valores fundamentales?<sup>2</sup>

Fama[3] define a un mercado eficiente como aquél que refleja totalmente la información existente, y divide a la eficiencia en tres tipos: débil, semi-

---

<sup>1</sup>Un *hedge fund* es un fondo de inversión privada que utiliza una gran variedad de estrategias de inversión destinadas a proteger el capital del fondo ante las crisis en el mercado y aumentar al máximo los rendimientos durante las alzas del mismo.

<sup>2</sup>La reciente literatura de Psicología y Finanzas considera dos tipos de eficiencia: “*no hay almuerzo gratis*”, un mercado es eficiente si no hay oportunidad de arbitraje; y “*precio igual a valor*”, donde la eficiencia se da si el precio de un activo es igual a su valor fundamental. En este artículo adoptamos la segunda acepción.

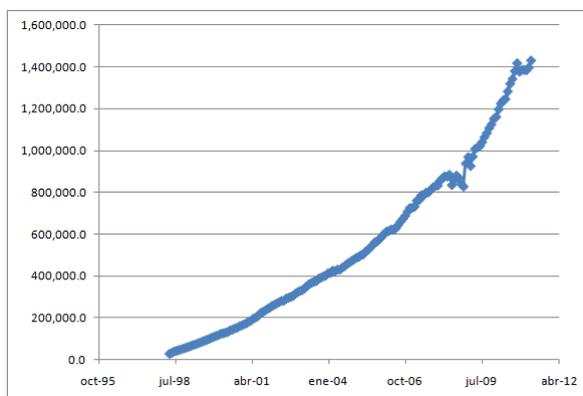


Figura 1.1: Dinero manejado por las Afores en millones de pesos.  
Fuente: Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro.

fuerte y fuerte. La primera se refiere a si el mercado refleja en sus precios los precios pasados, la semi-fuerte a si el mercado incorpora a los precios toda la información pública disponible, y la eficiencia fuerte se refiere a si los precios reflejan toda la información disponible, pública y privada. Entonces, dado que el modelo a desarrollar toma como supuesto que los agentes no sofisticados poseen información privilegiada, particularmente estaríamos hablando de que si el mayor incremento de agentes sofisticados, conduce al mercado hacia una eficiencia fuerte.

Stein[12] muestra que bajo ciertas condiciones, tomando en cuenta la existencia de agentes con información privilegiada, dicho aumento en eficiencia no siempre es alcanzado.

Retomando su trabajo, en esta tesis extendemos el modelo desarrollado, al permitir que los arbitrajistas puedan comprar o vender activos financieros en el mercado, no sólo comprar, para mostrar que siempre es posible encontrar que la eficiencia del mercado no se alcanza. Uno de los fenómenos que evita dicha eficiencia en el mercado es el problema del *crowded-trade*, el cuál es un fenómeno nuevo y puede pensarse como una externalidad negativa entre arbitrajistas, entendiendo como arbitrajistas a aquellos agentes sofisticados que se dedican a comprar (vender) activos cuando creen que sus precios están por debajo (arriba) de su valor fundamental, para obtener ganancias extraordinarias, es decir, realizan arbitraje. <sup>3</sup>

<sup>3</sup>Hay que mencionar que dicha definición de arbitraje difiere de la comúnmente usada en los libros de textos de finanzas, la cual viene dada indirectamente por el siguiente concepto:

**Ausencia de arbitraje:** Dado un espacio de pagos  $X$  y una función de precios  $p(x)$   $\forall x \in X$ , no existe oportunidad de arbitraje si para todo pago  $x \in X$  con  $x \geq 0$  (siempre),

El problema original consiste en que ante la falta de información sobre el número de arbitrajistas en un mercado, si un arbitrajista trata de seguir una estrategia rentable, como comprar una determinada acción que estuviera subvaluada, éste podría sufrir pérdidas puesto que los demás arbitrajistas podrían percatarse sobre la rentabilidad de dicha estrategia y usarla para su beneficio, pero al haber una gran cantidad de agentes siguiendo la misma estrategia, esto generaría que su precio aumente considerablemente, perdiéndose el beneficio que la acción ofrecía.

Un ejemplo de tal fenómeno lo presenta Khandani[7], quien muestra como la crisis de agosto de 2007 fue generada debido a que una gran cantidad de *hedge funds* utilizaron las mismas técnicas cuantitativas para crear su portafolio de inversión, el cual típicamente mostraba un exceso de retornos, y debido a que algunas de estas grandes empresas tuvieron problemas de liquidez se vieron obligadas a rematar sus activos, afectando considerablemente los precios, lo cual generó que durante la liquidación, todas las empresas que usaban los mismos activos en sus carteras experimentarían pérdidas nunca antes vistas.

Dicha crisis deja claro que la incertidumbre sobre la composición de los portafolios de los grandes inversionistas puede tener grandes efectos sobre el mercado accionario de un país. En particular, debido a que México está en un proceso sofisticación -lo cual genera que grandes empresas manejen grandes cantidades de fondos- es importante estudiar y tratar de entender el problema del *crowded-trade* y sus efectos en la eficiencia del mercado para evitar crisis como la de agosto de 2007.

Además, al hacer una revisión de literatura sobre micro-estructura de mercados[10] nos hemos percatado que el problema *crowded-trade* es un tema totalmente nuevo, como lo menciona Stein[12], página 1519: “El tema del *crowded-trade* no ha tenido, según mi conocimiento, una investigación formal”. Dicho problema no se había tomado en cuenta en la formación de precios, por lo que esto brinda aún más importancia a su estudio. Hay que mencionar que Stein[12] lo colocó en la mesa de discusión apenas en 2010. Aún más, lo hizo en su mensaje como presidente de la *American Finance Association (AFA)*, por lo que el tema fue presentado de una manera más bien informal.

La estructura del artículo es la siguiente: En el segundo capítulo se expone brevemente el modelo original, donde los agentes arbitrajistas sólo pueden comprar activos, obteniendo las ecuaciones que definen la ineficiencia en un

---

y  $x > 0$  (con alguna probabilidad positiva), se tiene que  $p(x) > 0$ . En otras palabras, no-arbitraje significa que un activo con pagos no-negativos siempre y con pagos estrictamente-positivos en algunos estados del mundo, no puede ser gratuito ni puede tener un precio negativo.

mercado con y sin arbitrajistas. En el tercer capítulo se generaliza el modelo original, permitiéndolo que los arbitrajistas puedan comprar o vender activos indistintamente. Y se muestra que las ecuaciones que definen la ineficiencia en un mercado con y sin arbitrajistas son las mismas que en el modelo original. Después, mediante algunos ejemplos, se obtiene que la diferencia fundamental con respecto al modelo original es que bajo la generalización, siempre es posible hallar que una mayor sofisticación en los agentes económicos genera una mayor ineficiencia de mercado, contrario al modelo original, que no puede asegurarlo. Por último, en el cuarto capítulo se propone como trabajo a futuro realizar algunas modificaciones al modelo desarrollado, con la finalidad de volverlo todavía más realista.

## Capítulo 2

### El problema del *crowded-trade*

En este capítulo se presentará una breve exposición del modelo propuesto originalmente por Stein[12] sobre el problema del *crowded-trade* y la eficiencia del mercado. En el siguiente capítulo se extiende este modelo al permitir que los arbitrajistas puedan comprar o vender activos financieros en el mercado, no sólo comprar, dándole mas realismo al modelo original.

El modelo desarrollado por Stein[12] se basa en dos supuestos principales:

1. Por un lado, supone que aunque existe una gran cantidad de capacidad de arbitraje, ninguno de los arbitrajistas conoce exactamente cuántos arbitrajistas siguen una estrategia en particular, en algún momento del tiempo. Capacidad de arbitraje es entendida como la cantidad de activos que el mercado puede comprar, en caso de que la capacidad de arbitraje sea positiva; o vender, si la capacidad de arbitraje es negativa.
2. Por otro lado, asume que los arbitrajistas desconocen el valor fundamental del activo, por lo que sus funciones de demanda sólo se basan en los retornos del mismo, en especial, un arbitrajista vende activos cuando los rendimientos de éstos son negativos y compra en caso contrario.

Estas hipótesis hacen posible la existencia del problema del *crowded-trade* en un mercado financiero. Por ejemplo, supóngase un mercado donde el precio de una acción está por debajo de su valor fundamental. Éste podría ser el caso donde los agentes no sofisticados han subvaluado el precio de dicha acción, por lo que los retornos del activo son altos, y dado el tipo de demanda de los arbitrajistas, entonces estos agentes se dedicarán a comprar el activo. Pero si una gran cantidad de arbitrajistas tratan de explotar esta oportunidad, entonces se provocará que el precio regrese a su valor fundamental, o incluso lo exceda, por lo que no habría beneficio alguno, o incluso habría pérdidas.

## 2.1. Ausencia de arbitrajistas y oportunidad de arbitraje

El modelo se lleva a cabo en tres periodos del tiempo,  $T = 0, 1, 2$ ; y se ilustra gráficamente en la figura 2.1.

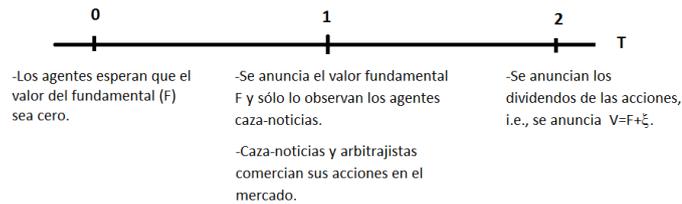


Figura 2.1: Estructura temporal del modelo.

Supóngase que hay un activo que paga un dividendo terminal en el periodo 2 de  $V = F + \xi$ , en donde  $\xi$  y el fundamental  $F$  son variables aleatorias.

En  $T = 0$  los agentes tienen las expectativas de que el valor del fundamental sea 0, i.e.,  $E_0(F) = 0$  y la oferta del único activo del mercado es 0 por lo que el precio de éste es  $P_0 = 0$ . La condición anterior significa que para fines prácticos el activo en cuestión aún no existe físicamente, por lo que sólo se está negociando sobre títulos de propiedad del activo. Un ejemplo de este caso son las ventas en corto, en el sentido de vender algo que no se tiene.

En  $T = 1$  se anuncian las ganancias del activo (se anuncia  $F$ ), las cuales son vistas por un conjunto de inversionistas llamados caza-noticias quienes, en base a esta información, hacen una predicción sesgada de  $V$ , en particular:

$$E(V) = (1 - \delta)F \quad \text{donde} \quad \delta \in (0, 1)$$

Además se supone que los caza-noticias tienen preferencias media-varianza y riesgo total agregado 1. El sesgo en las expectativas de los caza-noticias se puede justificar debido a que cada uno de estos agentes presenta una gran aversión al riesgo, por lo que prefieren ser pesimistas a la hora de formular sus expectativas sobre los dividendos finales del activo, ya que éstas sirven como base para realizar sus demandas.

Por los supuestos anteriores se tiene que si los caza-noticias son los únicos agentes en el mercado, entonces el precio en  $T = 1$  es igual a:

$$P_1 = (1 - \delta)F$$

Y dado que  $P_0 = 0$  entonces el retorno es:

$$R_1 = P_1 - P_0 = P_1$$

Así el retorno en  $T = 2$  vendrá dado por:

$$R_2 = V - P_1 = F + \xi - F(1 - \delta) = \delta F + \xi = \frac{\delta R_1}{1 - \delta} + \xi$$

Por lo que el retorno esperado en  $T = 2$  dado el retorno  $R_1$  viene dado por:

$$E(R_2|R_1) = \frac{\delta R_1}{1 - \delta}$$

De esta ecuación se puede deducir que si en  $T = 1$  hay un retorno positivo y alto, entonces en  $T = 2$  se espera que también halla un retorno positivo y alto, por lo que se presenta la oportunidad de crear arbitraje.

De lo anterior se observa que los retornos exhiben una persistencia, o *momentum*, en el corto plazo. Lo cual es congruente con los datos empíricos, puesto que se ha observado que los retornos exhiben una correlación incondicional positiva en horizontes de tres a doce meses, como lo muestra Jegadeesh y Titman[6] para cortes transversales de acciones individuales, y Cutler, Poterba y Summers[2] para fondos con similares categorías y estilo de inversión. Una posible interpretación de dicha evidencia es que la información que inicialmente es privada se incorpora gradualmente en los precios, véase Reis[11].

Si definimos la ineficiencia en el mercado (IM) como la medida en que los precios se alejan de su valor fundamental, es decir,

$$IM = E\left(\left|\frac{P_1 - F}{F}\right|\right) \quad (2.1)$$

Entonces se tendrá que ante la ausencia de arbitrajistas en el mercado:

$$IM = E\left(\left|\frac{F(1 - \delta) - F}{F}\right|\right) = \delta$$

## 2.2. Entrada de arbitrajistas en el modelo

Anteriormente se mostró que en un mercado donde sólo existen agentes tipo caza-noticias, existe la posibilidad de generar arbitraje. A continuación se incluyen agentes arbitrajistas al modelo y se toma el supuesto de que la capacidad de arbitraje es desconocida en un momento dado del tiempo.

### 2.2.1. Incertidumbre acerca de la capacidad de arbitraje

Consideremos que la capacidad de arbitraje,  $n$ , en el mercado, en  $T = 1$ , es desconocida y positiva.  $n = N\theta$ , donde  $N$  es la capacidad de arbitraje esperada en dicho periodo, y  $\theta$  es una variable aleatoria que cumple  $\theta \in [\theta_L, \theta_H]$ , con  $\theta_L \geq 0$  y  $\theta \sim (1, \sigma(\theta)^2)$ .

Además se supone que las demandas de los agentes caza-noticias(c) y arbitrajistas(a) son respectivamente

$$D^c = F(1 - \delta) - P_1 \quad (2.2)$$

y

$$D^a = n\phi P_1 \quad (2.3)$$

con  $\phi$  endógena. Hay que recalcar que el supuesto de la linealidad de la demanda de los arbitrajistas no necesariamente es la estrategia óptima para estos agentes, pues dicha optimalidad se podría mejorar suponiendo una demanda no lineal. A pesar de lo anterior, el modelo se restringe a tomar este tipo de demandas por dos razones principales. En primer lugar este tipo de estrategias son una buena aproximación al comportamiento de los arbitrajistas en el mundo real. En segundo lugar, el hecho de que  $\phi$  sea una variable endógena asegura que la demanda de los arbitrajistas sea la óptima entre todas las estrategias lineales.

Si en  $T = 1$  no se introducen nuevos activos en el mercado, entonces se debe cumplir la siguiente condición:

$$D^a + D^c = 0$$

Por lo que

$$0 = n\phi P_1 + F(1 - \delta) - P_1$$

Así

$$P_1 = \frac{(1 - \delta)}{1 - n\phi} F \quad (2.4)$$

El hecho de que los arbitrajistas no conozcan el valor del fundamental  $F$  representa un problema para ellos, ya que si  $P_1$  es alto puede deberse a dos situaciones con consecuencias totalmente opuestas. Por un lado,  $P_1$  alto podría deberse a una gran realización de  $F$ , y bajo el supuesto de que esto es debido a que los caza-noticias presentan una gran subreacción hacia el valor de  $F$ , se podría generar una gran oportunidad de arbitraje y de obtener ganancias. Por otro lado, un valor alto en  $P_1$  podría deberse al hecho de que existe una gran cantidad de arbitrajistas en el mercado,  $n$ , los cuales

empujan el precio del activo por arriba de su valor fundamental, por lo que en caso de comprar activos podría implicar tener pérdidas en el futuro.

Para simplificar el análisis, se define  $\Phi \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \phi N$ .<sup>1</sup> Que representa la intensidad de comercio de los arbitrajistas, puesto que la demanda de tales agentes se puede ver como  $D^a = n\phi P_1 = N\theta\phi P_1 = (N\phi)\theta P_1 = \Phi\theta P_1$ .

Dado que  $N \rightarrow \infty$  implica  $n \rightarrow \infty$  para ciertas realizaciones de  $\theta$ , se asume que en el periodo  $T = 1$ , la mayoría de las veces habrá una gran capacidad de arbitraje en el mercado, o lo que es lo mismo, que habrá una gran cantidad de agentes arbitrajistas.

Utilizando la ecuación 2.4 se obtiene que:

$$R_1 = P_1 = \frac{F(1 - \delta)}{1 - n\phi} = \frac{F(1 - \delta)}{1 - (N\theta)\phi} = \frac{F(1 - \delta)}{1 - \theta\Phi}$$

Por lo que

$$R_2 = V - P_1 = F + \xi - \frac{F(1 - \delta)}{1 - \theta\Phi} = \frac{F(\delta - \theta\Phi)}{1 - \theta\Phi} + \xi$$

Usando el razonamiento económico de que mientras más dinero se use para tratar de explotar una oportunidad comercial dada, entonces el exceso de rentabilidad predecible de dicha oportunidad debería de ser cero, se obtiene que, como la demanda de un arbitrajista es de la forma  $d^a \equiv \phi R_1$ ; entonces su retorno será  $\phi R_2 R_1$ , y dado que hay una gran cantidad de arbitrajistas apostando en contra de dicha oportunidad, entonces, por el razonamiento anterior, el rendimiento esperado debería de ser cero, por lo que:

$$E(R_1 R_2) = 0$$

Y como

$$0 = E(R_1 R_2) = E\left(\frac{F(1 - \delta)}{1 - \theta\Phi} \left(\frac{F(\delta - \theta\Phi)}{1 - \theta\Phi} + \xi\right)\right)$$

Usando la independencia de  $\xi$ ,  $\theta$  y  $F$  se tiene que

$$0 = E(F^2)E\left(\frac{(1 - \delta)(\delta - \theta\Phi)}{(1 - \theta\Phi)^2}\right)$$

Por lo que el valor de equilibrio de  $\Phi$ ,  $\Phi^*$ , debe de cumplir:

$$0 = E\left(\frac{\delta - \theta\Phi^*}{(1 - \theta\Phi^*)^2}\right) \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Dicha definición puede hacerse también tomando un valor de  $N$  grande, ya que lo que se quiere transmitir es la idea de que existe una gran cantidad de arbitrajistas, los cuales pueden entrar en cualquier momento al mercado. Dicha definición no modifica los resultados obtenidos por el modelo.

Y de las ecuaciones anteriores la ineficiencia del mercado(2.1) es:

$$IM = E\left(\left|\frac{\theta\Phi^* - \delta}{1 - \theta\Phi^*}\right|\right)$$

Por otro lado, a continuación en el lema 0.1 se analizan las características que debe cumplir el valor de equilibrio  $\Phi^*$ . Pero antes de esto, demos la siguiente definición.

**Definición 0.1 *Distribución degenerada.*** Una variable aleatoria  $X$  es degenerada en un valor real  $a \in \mathfrak{R}$  si toma dicho valor con probabilidad 1, es decir  $P(X = a) = 1$ .

**Lema 0.1** Sea  $\theta$  una variable aleatoria no degenerada con función de distribución  $\Gamma$ , además se cumple la ecuación de equilibrio 2.5. Entonces se tiene que  $\Phi^* > 0$ .

**Demostración 0.1** Claramente se tiene que  $\Phi^* \neq 0$  pues de lo contrario usando la ecuación 2.5 se tendría que  $\delta = 0$ , lo cual no puede ser. Por lo que sólo hay que demostrar que  $\Phi^* > 0$ .

Supóngase que  $\Phi^* < 0$  y dado que  $\theta \geq 0$  entonces  $-\theta\Phi^* \geq 0$ , por lo que

$$\frac{\delta - \theta\Phi^*}{(1 - \theta\Phi^*)^2} \geq 0$$

Ahora analicemos las implicaciones de dicha desigualdad, para los casos en que  $\theta$  es continua y discreta.

Si  $\theta$  es discreta, entonces debe existir un  $\theta_0$  tal que

$$\frac{\delta - \theta_0\Phi^*}{(1 - \theta_0\Phi^*)^2} > 0 \tag{2.6}$$

pues de lo contrario la distribución  $\Gamma$  sería degenerada. Así

$$E\left(\frac{\delta - \theta\Phi^*}{(1 - \theta\Phi^*)^2}\right) > 0 \tag{2.7}$$

Por otro lado, si  $\theta$  es continua, por el razonamiento anterior debe existir un  $\theta_0$  tal que se cumple 2.6. Y dado que  $\Gamma$  es continua se puede encontrar una vecindad  $(\theta_0 - \mu, \theta_0 + \mu)$  donde

$$\frac{\delta - \theta_1\Phi^*}{(1 - \theta_1\Phi^*)^2} > 0$$

Para  $\theta_1 \in (\theta_0 - \mu, \theta_0 + \mu)$ , por lo que se debe cumplir 2.7.

Así en ambos casos se llega a que

$$E\left(\frac{\delta - \theta\Phi^*}{(1 - \theta\Phi^*)^2}\right) > 0$$

lo cuál es una contradicción a la definición de  $\Phi^*$ , por lo que se tiene que  $\Phi^* > 0$ .  $\square$

Por el lema anterior y de la definición de la demanda de los arbitrajistas,  $D^a = n\phi P_1$ , hemos demostrado que el modelo de Stein[12] siempre es consistente,<sup>2</sup> ya que las demandas de activos siempre serán positivas, lo cual es congruente con el supuesto que la capacidad de arbitraje es positiva. Es decir, los arbitrajistas siempre comprarán activos en el mercado.

---

<sup>2</sup>Consistencia se refiere al hecho de que una vez solucionado el modelo, dichas soluciones no contradicen las hipótesis establecidas. Por otro lado, para mostrar que dicho modelo está bien definido, es decir, siempre tiene solución, habría que demostrar la existencia  $\Phi^*$  para cualquier distribución de  $\theta$ , lo cuál se aseguraría con la conjetura 0.1 expuesta en el siguiente capítulo.



# Capítulo 3

## Venta de activos y el *crowded-trade*

Como anteriormente hemos mostrado, en el modelo original los arbitrajistas siempre juegan un papel de compradores de activos financieros, lo cual puede diferir de la realidad. Es interesante preguntarse si los resultados obtenidos por el autor son robustos al permitir que los arbitrajistas puedan comprar o vender activos en el mercado.

La tarea principal de este apartado es generalizar el modelo original agregando el supuesto de que los arbitrajistas pueden ser compradores o vendedores de activos financieros, y observar los resultados que se generen, comparando, cuando sea posible, con los resultados obtenidos originalmente.

### 3.1. Capacidad de arbitraje negativa

Consideremos que la capacidad de arbitraje,  $n$ , puede tomar valores positivos, negativos, o cero. Como anteriormente, tomemos como equivalentes la capacidad de arbitraje y el número de arbitrajistas en el mercado, con la generalización de que  $|n|$  da la cantidad de arbitrajistas en el mercado y su signo la operación que están realizando: un signo negativo significa que los arbitrajistas venden activos y uno positivo que compran. También se considera que los arbitrajistas no conocen el valor del fundamental  $F$ , por lo que los problemas de falta de información son los mismos para todos los arbitrajistas, no importando si compran o venden activos. Es decir, ningún arbitrajista tiene conocimiento sobre los factores de descuento o sobre los flujos a futuro de los activos.

Además, supongamos como en el capítulo anterior, que  $n$  se escribe de la forma  $n = N\theta$ , donde  $N$  es la capacidad de arbitraje esperada en dicho

periodo (positiva), y  $\theta$  es una variable aleatoria que cumple,  $\theta \in [\theta_L, \theta_H]$  con  $\theta \sim (1, \sigma(\theta)^2)$  y  $\theta_L < 0$ .

Si las demandas de los arbitrajistas y de los caza-noticias son como en el modelo de Stein[12] (2.2 y 2.3), entonces siguiendo el razonamiento usado por el autor, se obtiene que el precio de equilibrio, la ineficiencia del mercado y la ecuación que define el valor de  $\Phi^*$  son las mismas que antes, debido a que todas las ecuaciones no cambian en lo absoluto, por lo que tenemos que el precio de equilibrio es

$$P_1 = \frac{1 - \delta}{1 - \theta\Phi^*} F$$

el valor de  $\Phi^*$  viene dado por la ecuación

$$0 = E\left(\frac{\delta - \theta\Phi^*}{(1 - \theta\Phi^*)^2}\right) \quad (3.1)$$

y la ineficiencia del mercado es

$$IM = E\left(\left|\frac{\theta\Phi^* - \delta}{1 - \theta\Phi^*}\right|\right)$$

Por otro lado, dado que la demanda de los arbitrajistas es

$$D^a = \theta\Phi^* P_1 \quad (3.2)$$

se puede notar que para que el modelo sea consistente se debe tener que  $\Phi^* > 0$ .

Esto es fácil de mostrar, ya que por un lado, el caso  $\Phi^* = 0$  no se puede presentar debido a que por la ecuación 3.1 se tendría que  $\delta = 0$  lo cual no puede ser. Y por otro lado si  $\Phi^* < 0$ , entonces en el caso de que  $\theta < 0$  se tendrá que  $n < 0$ , la capacidad de arbitraje es negativa, por lo que los arbitrajistas deberían de ser vendedores de activos, pero usando la ecuación 3.2 se tendría que  $D^a > 0$  por lo cual los arbitrajistas estarían comprando activos lo cual es una contradicción. Por los que se debe de tener  $\Phi^* > 0$ .

Desafortunadamente, el lema 0.1 no necesariamente es cierto cuando  $\theta$  puede tomar cualquier signo, por lo que una vez tomada una distribución para  $\theta$  habría que probar que existe  $\Phi^* > 0$  que resuelva 3.1, para que el modelo esté bien definido y sea consistente.<sup>1</sup>

Una vez establecidas las condiciones que se deben cumplir para que el modelo sea consistente y esté bien definido, se procede a analizar ejemplos particulares para observar qué pasa con la ineficiencia del mercado ante la entrada de una gran cantidad de arbitrajistas al mercado, i.e., se presenta el problema *crowded-trade*.

---

<sup>1</sup>La conjetura 0.1, expuesta a continuación, nos dice que siempre es posible encontrar tal  $\Phi^* > 0$ .

## 3.2. Ejemplos del modelo extendido

A continuación se explorará qué pasa con la ineficiencia del mercado, bajo el supuesto de que  $\theta$  toma distintas distribuciones estadísticas, en particular por tratabilidad, se toman a las distribuciones Bernoulli simétrica, Bernoulli sesgada y a la uniforme.

Uno de los problemas más difíciles encontrados al tratar de resolver el modelo, fue encontrar el valor de  $\Phi^*$  que cumpliera con la ecuación 3.1. Esto es, encontrar la raíz  $\Phi^*$  de la función  $z(\cdot)$  definida como

$$z(\Phi) \equiv E\left(\frac{\delta - \theta\Phi}{(1 - \theta\Phi)^2}\right)$$

Al tratar de usar paquetes matemáticos para hallar la raíz de dicha función, como Mathematica, dichos paquetes no convergían hacia las soluciones. Una de las posibles causas es la complejidad que puede llegar a tener  $z(\cdot)$  bajo ciertas distribuciones de  $\theta$ . Por lo anterior, se tuvo que recurrir a métodos numéricos para resolver el problema.

El método utilizado fue el de método de bisección, el cuál se explica a continuación.

### Método de Bisección<sup>2</sup>

Este método asegura, debido a su construcción, que si una función  $F(x)$  es continua en  $[a, b]$  y si  $F(a), F(b)$  tienen signos contrarios, entonces se encontrará  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $F(x_0) = 0$ .

El método consiste en lo siguiente:

Primero se verifica que  $F(a) \cdot F(b) < 0$ , después se calcula el punto medio  $m$  del intervalo  $[a, b]$  y se evalúa  $F(m)$ , si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada. En caso de que no lo sea, verificamos si  $F(m)$  tiene signo opuesto con  $F(a)$  o con  $F(b)$  y dependiendo de lo anterior se redefine el intervalo  $[a, b]$  como  $[a, m]$  ó  $[m, b]$  según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo. Con este nuevo intervalo se repiten los pasos anteriores encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la raíz de la función. Gráficamente el algoritmo se vería como en la figura 3.1.<sup>3</sup>

Dicho método fue elegido, a pesar de que existen métodos más eficientes como el de Newton-Rapson, debido a la conjetura 0.1, con la que aseguramos que el método de bisección siempre encontrará la solución a 3.1.

<sup>2</sup>Para una descripción más a detalle del método, véase Burden[1].

<sup>3</sup>El pseudocódigo es mostrado en el apéndice de este trabajo.

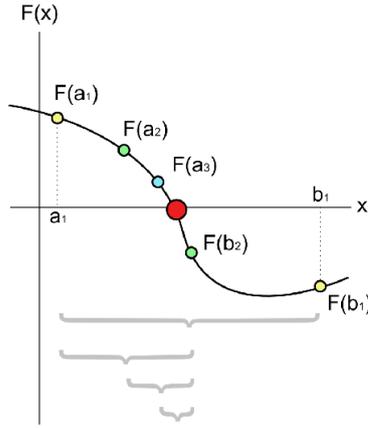


Figura 3.1: Método de Bisección.

**Conjetura 0.1** *Sea*

$$z(\Phi) = E\left(\frac{\delta - \theta\Phi}{(1 - \theta\Phi)^2}\right)$$

con  $\theta$  y  $\delta$  definidas como antes, entonces existe un  $x_0 \in (0, \frac{1}{\theta_H})$  tal que

- 1.-  $z(\Phi)$  es continua en  $[0, x_0]$
- 2.-  $z(x_0) < 0$

Se dará una demostración para el caso  $\theta \sim \text{Bernoulli}$ . La cual sugiere que una prueba general de esta conjetura podría ser posible, pero este ejercicio se dejará como una posible extensión para este artículo.

### 3.2.1. Distribución Bernoulli

Supóngase que  $\theta \sim \text{Bernoulli}$  con

$$P(\theta_i) = p_i \quad i \in \{1, 2\} \quad \text{tal que} \quad E(\theta) = 1, \quad p_1 + p_2 = 1 \quad \text{y} \quad \theta_1 < \theta_2.^4$$

En primer lugar se demostrará que el modelo está bien definido, es decir, se encontrará  $\Phi^* \in (0, \frac{1}{\theta_2})$  tal que la condición 3.1 se cumple. Dicha condición es equivalente a

$$p_1 \frac{\delta - \theta_1 \Phi^*}{(1 - \theta_1 \Phi^*)^2} + p_2 \frac{\delta - \theta_2 \Phi^*}{(1 - \theta_2 \Phi^*)^2} = 0 \tag{3.3}$$

Para probar la existencia de  $\Phi^*$  se establece el siguiente resultado:

---

<sup>4</sup>Nótese que  $\theta_H = \theta_2$  y  $\theta_L = \theta_1$ , lo mismo en los ejemplos siguientes.

**Resultado 0.1** *Dada*

$$g(x) = \frac{\delta - \theta_2 x}{(1 - \theta_2 x)^2}, \quad \delta \in (0, 1), \quad \theta_2 > 0, \quad y \quad A > 0$$

entonces existe un  $0 < \epsilon < \frac{(1-\delta)}{3\theta_2} \min\{1, \frac{1}{A\theta_2}, \frac{3\theta_2}{(1-\delta)}\}$  tal que

$$g\left(\frac{1}{\theta_2} - \epsilon\right) < -A$$

**Demostración 0.2** *Usando la definición de  $\epsilon$  se tiene que, como  $0 < \epsilon < 1$  entonces  $\epsilon^2 < \epsilon$ . Además*

$$\begin{aligned} \epsilon\theta_2 + (\delta - 1) + A\epsilon^2\theta_2^2 &< \frac{1 - \delta}{3} + (\delta - 1) + \epsilon A\theta_2^2 \\ &< \frac{1 - \delta}{3} + (\delta - 1) + \frac{1 - \delta}{3} \\ &= \frac{\delta - 1}{3} \\ &< 0 \end{aligned}$$

entonces

$$g\left(\frac{1}{\theta_2} - \epsilon\right) = \frac{\epsilon\theta_2 + (\delta - 1)}{\epsilon^2\theta_2^2} < -A \quad (3.4)$$

□

Por otro lado como

$$f(x) = \frac{\delta - \theta_1 x}{1 - \theta_1 x}$$

es continua en  $[0, \frac{1}{\theta_2}]$ , pues  $\theta_1 < \theta_2$ , entonces dado que una función continua sobre un intervalo cerrado es acotada, debe existir una constante  $M > 0$  tal que

$$f(x) < M \quad \forall x \in [0, \frac{1}{\theta_2}] \quad (3.5)$$

Tomando  $A=M+1$  y  $\epsilon$  del resultado 0.1, se tiene que

$$w(x) = p_1 f(x) + p_2 g(x)$$

es continua en  $[0, \frac{1}{\theta_2} - \epsilon]$ , pues  $f$  y  $g$  lo son en dicho intervalo. Además se tiene que

$$w(0) = \delta > 0$$

$$\begin{aligned}
w\left(\frac{1}{\theta_2} - \epsilon\right) &= p_1 f\left(\frac{1}{\theta_2} - \epsilon\right) + p_2 g\left(\frac{1}{\theta_2} - \epsilon\right) \\
&\leq f\left(\frac{1}{\theta_2} - \epsilon\right) + g\left(\frac{1}{\theta_2} - \epsilon\right) \\
&< M - A \quad \text{por 3.4 y 3.5} \\
&= M - (M + 1) = -1 \\
&< 0
\end{aligned}$$

Por lo anterior y la continuidad de  $w$ , se tiene que, usando el teorema del valor intermedio de Bolzano,<sup>5</sup> existe un  $\Phi^* \in (0, \frac{1}{\theta_2})$  tal que  $w(\Phi^*) = 0$ , por lo que se cumple la ecuación 3.3.

Una vez probado que el modelo ampliado está bien definido y es consistente bajo la distribución binomial, se toman dos casos particulares: Cuando los dos valores de  $\theta$  poseen la misma probabilidad de realización y el caso contrario.

### Distribución Binomial Simétrica

Sea  $\theta_1 = 1 - h$ ,  $\theta_2 = 1 + h$ ,  $h > 0$ ,  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  y  $var(\theta) = h^2$ .

Si se considera  $h \leq 1$  se obtiene el modelo original, puesto que  $\theta \geq 0$ . La figura 3.2 muestra la ineficiencia generada en el mercado, bajo dos supuestos diferentes, por una lado está la gráfica que representa la ineficiencia en un mercado sin arbitrajistas (la cual es un hiperplano) y por otro, aquella que muestra la ineficiencia en presencia de tales agentes.<sup>6</sup>

Cada gráfica, y de una manera similar las de los otros ejemplos, está elaborada de la siguiente manera:

- En el eje x, se coloca el valor de  $h$  el cual define los valores de  $\theta_1, \theta_2$ .
- En el eje y, se coloca el valor de  $\delta$ , el sesgo de los caza-noticias.
- Una vez fijo  $\theta_1, \theta_2$  y  $\delta$ , el modelo está totalmente definido, por lo que se calcula la ineficiencia en el mercado, usando la fórmula correspondiente

<sup>5</sup>Sea  $f$  una función real continua en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $f(a) < f(b)$  y  $c$  es un número tal que  $f(a) < c < f(b)$ , existe un punto  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = c$ .

<sup>6</sup>El lector debe tomar en cuenta que, a lo largo de este trabajo, la orientación de los ejes de las gráficas mostradas puede variar, por lo que no es posible realizar una comparación visual directa entre ellas. La posición varía debido a que en cada gráfica se busca la mejor visualización de los resultados encontrados.

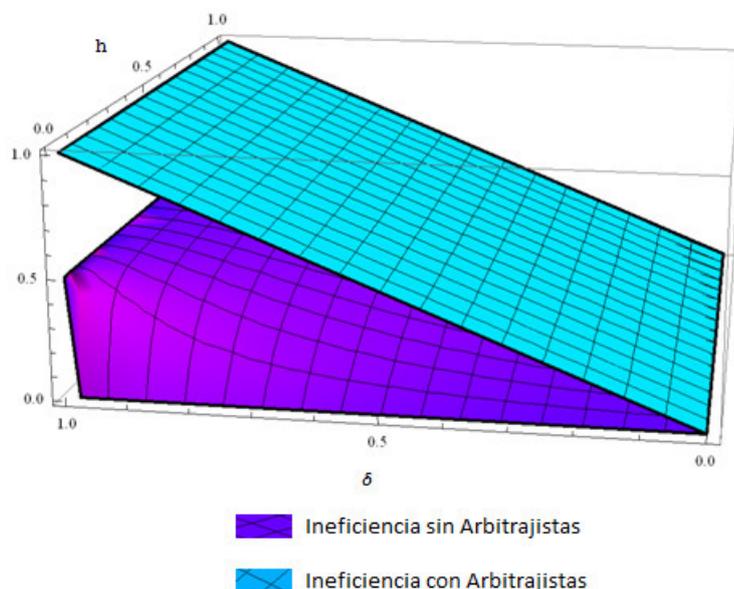


Figura 3.2: Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli simétrica según el modelo original.

a un mercado con arbitrajistas

$$IM = E\left(\left|\frac{\theta\Phi^* - \delta}{1 - \theta\Phi^*}\right|\right)$$

o sin arbitrajistas

$$IM = \delta$$

y dicho valor se coloca en el eje de las  $z$ 's.

De la figura 3.2 se puede mostrar gráficamente que la ineficiencia del mercado, en presencia de arbitrajistas, disminuye en relación a un mercado donde sólo hay actores tipo caza-noticias, esto pues la gráfica de la ineficiencia de mercado sin arbitrajistas (hiperplano) siempre está por arriba de la gráfica de la ineficiencia del mercado que posee a los dos tipos de agentes.

Por otro lado, al permitir que  $h > 1$  (modelo extendido) se presentan resultados diferentes a los anteriores (véase figura 3.3), puesto que en este caso la eficiencia en el mercado con arbitrajistas puede ser mejorada, igualada o empeorada con respecto al mercado donde no existe su participación. A continuación se da una interpretación económica de dichos resultados y sobre la forma de la figura 3.3. Para facilitar la explicación consideremos que en el periodo 1 se anuncian altos dividendos en el activo del mercado, por lo que el valor de  $F$  es alto.

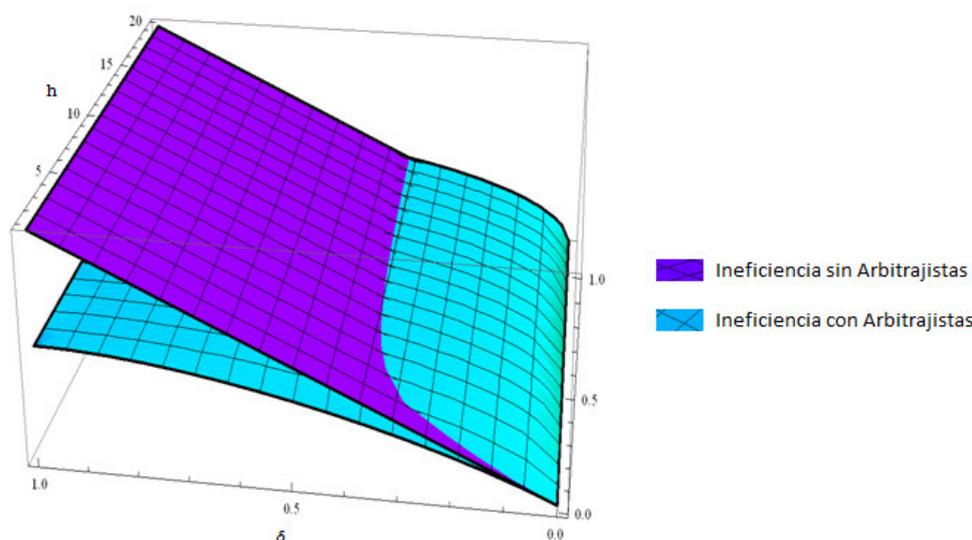


Figura 3.3: Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli simétrica según el modelo ampliado.

Si el sesgo,  $\delta$ , que cometen los caza-noticias en la valuación del activo es pequeño entonces, en un mercado donde sólo existe este tipo de agentes, su precio ( $P_1 = (1 - \delta)F$ ) es alto, puesto que presenta una pequeña subvaluación. Además, al entrar los arbitrajistas al mercado, su intensidad de comercio es pequeña debido a que los caza-noticias cometen pocos errores de los cuales se puedan obtener beneficios.

Si  $h$  es pequeño (cercano a uno) entonces hay muy pocos arbitrajistas en el mercado, puesto que  $\theta \in \{1 - h, 1 + h\}$ , y la incertidumbre sobre el número de arbitrajistas que aparecerá en el mercado es pequeña, lo que motivará a dichos agentes a aumentar su intensidad de comercio, disminuyendo la caída que antes se había generado, para conocer el efecto final sobre  $\Phi^*$  véase figura 3.4. Además, debido a que la incertidumbre sobre el número de arbitrajistas es baja, entonces los arbitrajistas pensarán que el precio alto es debido a que el valor fundamental es alto y dado que saben que el precio está subvaluado, elegirán comprar dicho activo -esto se puede ver en el modelo puesto que como  $h$  es cercana a 1 entonces aproximadamente  $\theta \in \{0, 1\}$ , es decir, sólo hay agentes dispuestos a comprar en el mercado. Dicho incremento de demanda generará que el precio del activo aumente acercándose al valor fundamental. Por lo que para este caso, la entrada de arbitrajistas al mercado genera mayor eficiencia.

Conforme  $h$  aumenta, se incrementa la cantidad de agentes arbitrajistas en el mercado y la incertidumbre sobre cuántos negociarán en algún mo-

mento en el tiempo, por lo que dichos agentes deciden disminuir aún más su intensidad de comercio (recordando que la intensidad era baja debido a que  $\delta$  es pequeño). Además, ante el aumento en la incertidumbre, los arbitrajistas creerán que el precio es alto debido a un exceso en la demanda y no por una alta realización de  $F$ , por lo que decidirán vender sus activos. Este incremento en la oferta generará una gran caída en el precio, el cual se alejará del valor del fundamental  $F$ , es decir, en este caso la entrada de arbitrajistas trae consigo mayor ineficiencia en el mercado.

Por otro lado, si el sesgo que realizan los caza-noticias a la hora de valorar los activos es grande, entonces el precio en el mercado donde sólo existe este tipo de agentes es pequeño, puesto que se presenta una gran subvaluación del activo. Además, cuando entran arbitrajistas al mercado su intensidad de comercio es grande puesto que ahora los caza-noticias cometen muchos errores, los cuales pueden ser aprovechados por los arbitrajistas para obtener beneficios.

Si el valor de  $h$  es pequeño, se tiene que la incertidumbre sobre el número de arbitrajistas que participan en el mercado es poca, por lo que los arbitrajistas incrementan aún más su intensidad de comercio, y atribuirán el valor bajo del precio al gran sesgo que cometen los caza-noticias, por lo que desearán comprar los activos subvaluados, y dado que la intensidad de arbitraje es grande entonces habrá una gran demanda por lo que los precios subirán rápidamente alcanzando el nivel del fundamental. Así, para éstos valores niveles de  $h$  y  $\delta$  la entrada de arbitrajistas vuelve al mercado más eficiente.

Conforme el valor de  $h$  aumenta, la incertidumbre y el número de arbitrajistas incrementa, por lo que disminuye la intensidad de comercio. Sin embargo, el número de operaciones no cae debido a la gran cantidad de agentes arbitrajistas que ahora existen.

Además, los arbitrajistas pensarán que el precio del activo es bajo debido a un exceso de oferta generado por la gran cantidad de agentes arbitrajistas en el mercado, por lo que decidirán comprar el activo generando un exceso de demanda que llevará a un incremento en el precio, regresándolo al nivel del valor fundamental. Por lo que bajo las condiciones descritas anteriormente, la entrada de arbitrajistas traerá como consecuencia que la eficiencia en el mercado aumente.

Es importante hacer notar, que existen ciertos niveles para  $\delta$  y  $h$  en donde la eficiencia en el mercado con y sin arbitrajistas es la misma (véase figura 3.3) y que la región definida por estos valores sigue un patrón muy peculiar. Por lo que sería interesante, como trabajo futuro, profundizar sobre este punto.

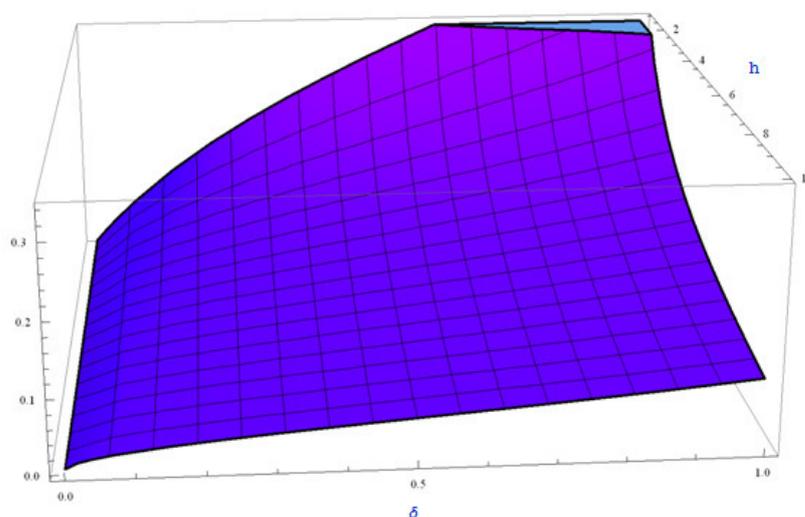


Figura 3.4: Intensidad de comercio,  $\Phi^*$ , bajo una distribución Bernoulli simétrica según el modelo ampliado.

### Distribución Binomial Sesgada

Sea  $\theta_1 = \frac{1-h}{1-p}$ ,  $\theta_2 = \frac{h}{p}$ ,  $p_2 = p$ ,  $h > p$  y  $var(\theta) = \frac{(h-p)^2}{p(1-p)}$ .

Dado que en esta ocasión se tienen tres incógnitas para definir el modelo original y el extendido, las cuales son  $h$ ,  $p$  y  $\delta$  entonces no se puede mostrar gráficamente, de una manera general cómo se relaciona la ineficiencia en el mercado con y sin arbitrajistas, ni cómo se relaciona la ineficiencia en el modelo original con respecto al ampliado, ya que para ello se necesitaría graficar en  $R^4$ .

Por lo anterior y con la finalidad de mostrar los resultados más importantes que se pueden hallar bajo este tipo de distribución, fijamos el parámetro  $\delta = .4$  y dejamos que  $h$  varíe en el intervalo  $[0, 20]$ . Obteniendo el modelo original con  $h \leq 1$  y el ampliado al tomar  $h > 1$ . Las figuras 3.5 y 3.6 muestran la ineficiencia de mercado bajo cada modelo.

De estas gráficas se observa que en ambos casos, modelo original y su extensión, se presentan ejemplos en donde existe una mayor ineficiencia del mercado ante la participación de arbitrajistas. Ello se observa puesto que en cada una de las figuras, la gráfica que representa la ineficiencia del mercado bajo la presencia de arbitrajistas, en ciertas regiones, está por arriba del hiperplano que representa la ineficiencia de un mercado sin arbitrajistas.

Lo anterior nos indica que bajo este tipo de distribución, ambos modelos predicen la posibilidad de que una mayor sofisticación del mercado puede

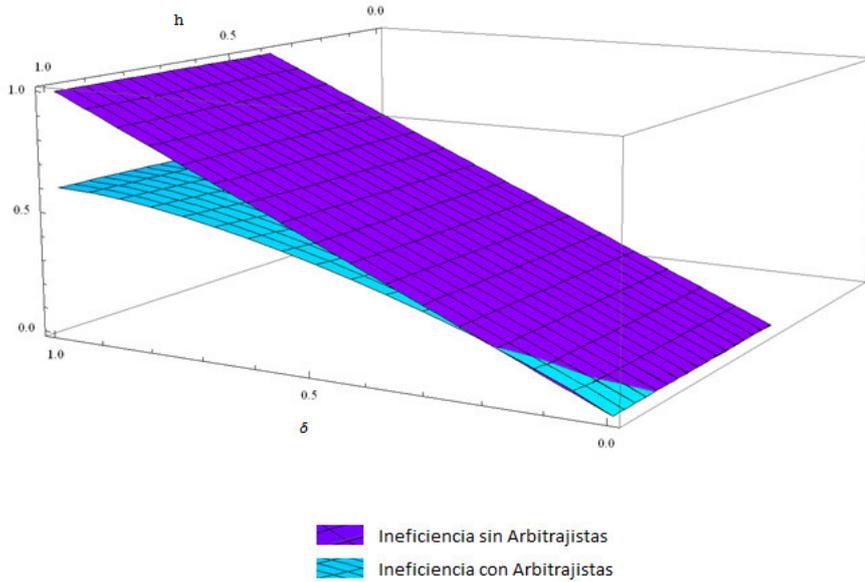


Figura 3.5: Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli sesgada bajo el modelo original, con  $\delta = .4$ .

generar una mayor ineficiencia del mismo.

Además, las gráficas donde se compara la ineficiencia en el mercado con y sin arbitrajistas (figura 3.6), y la de la intensidad de comercio (figura 3.7), bajo el modelo extendido, son muy parecidas a las del ejemplo pasado, por lo que la intuición detrás de ellas sigue los mismos lineamientos antes expuestos.

### 3.2.2. Distribución Uniforme.

Supóngase que  $\theta \sim U(1 - h, 1 + h)$  con  $var(\theta) = \frac{h^2}{3}$ . De la condición 3.1 se tiene que  $\Phi^*$  debe de cumplir:

$$\frac{1}{2h} \int_{1-h}^{1+h} \frac{\delta - \theta\Phi^*}{(1 - \theta\Phi^*)^2} dx = 0 \quad (3.6)$$

Haciendo el cambio de variable  $u = 1 - \theta\Phi^*$ , tenemos que

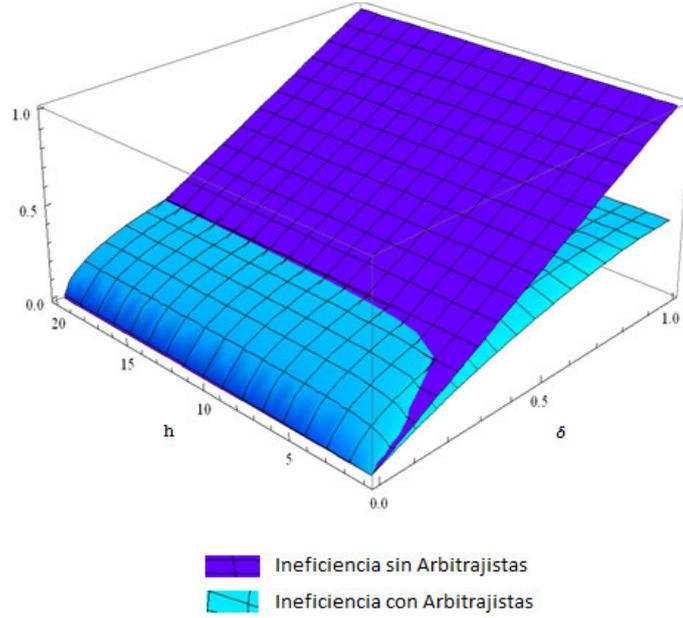


Figura 3.6: Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli sesgada bajo la extensión del modelo, con  $\delta = .4$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{1-h}^{1+h} \frac{\delta - \theta\Phi^*}{(1 - \theta\Phi^*)^2} dx &= -\frac{1}{\Phi^*} \int_{1-\Phi^*(1-h)}^{1-\Phi^*(1+h)} \frac{(\delta - 1) + u}{u^2} dx \\
 &= -\frac{1}{\Phi^*} \left\{ \int_{1-\Phi^*(1-h)}^{1-\Phi^*(1+h)} \frac{(\delta - 1)}{u^2} dx + \int_{1-\Phi^*(1-h)}^{1-\Phi^*(1+h)} \frac{1}{u} dx \right\} \\
 &= -\frac{1}{\Phi^*} \left[ -(\delta - 1)u^{-1} + \ln(u) \right] \Big|_{1-\Phi^*(1-h)}^{1-\Phi^*(1+h)} \\
 &= \frac{2(\delta - 1)h}{(\Phi^*)^2(1 - h^2) - 2\Phi^* + 1} - \frac{1}{\Phi^*} \ln \left( \frac{1 - \Phi^*(1 - h)}{1 - \Phi^*(1 + h)} \right)
 \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación 3.6 queda como

$$\frac{(1 - \delta)}{(h^2 - 1)(\Phi^*)^2 + 2\Phi^* - 1} + \frac{1}{2\Phi^*h} \ln \left( \frac{\Phi^*(1 - h) - 1}{\Phi^*(1 + h) - 1} \right) = 0$$

Si se considera que  $h \leq 1$  entonces estamos en modelo original, y se observa gráficamente que la ineficiencia en el mercado donde existe el arbitraje es menor al caso donde no existe tal fenómeno, véase gráfica 3.8. Considerando

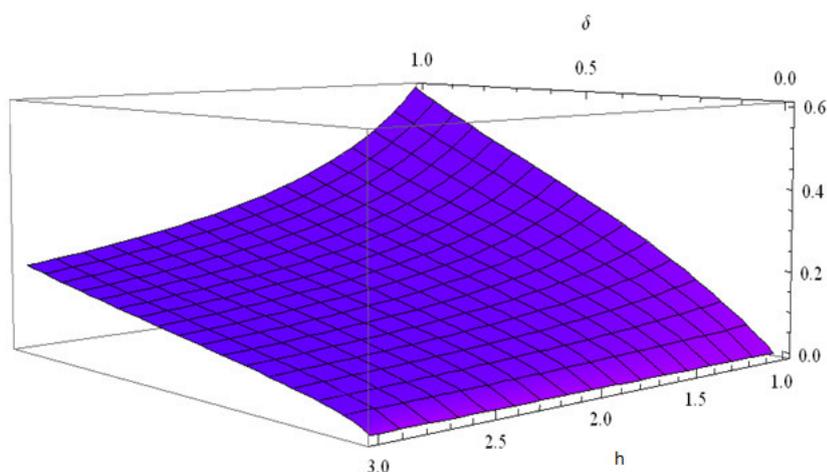


Figura 3.7: Intensidad de comercio bajo una distribución Bernoulli sesgada, con  $\delta = .4$ .

el caso donde  $h > 1$ , modelo ampliado, se obtiene que la ineficiencia del mercado con arbitrajistas no siempre se mejora en comparación con el mercado en donde solo existen agentes tipo caza-noticias, como se aprecia en la figura 3.9. Como en la situación anterior, bajo el modelo ampliado, las gráficas donde se compara la ineficiencia en el mercado con y sin arbitrajistas (figura 3.9), y la de la intensidad de comercio (figura 3.10) son muy parecidas a las del ejemplo en donde  $\theta$  tiene una distribución binomial simétrica, por lo que la intuición económica detrás de ellas es la ya mencionada en dicho ejemplo.

### 3.2.3. Comparación de la ineficiencia de mercado a través de distribuciones de probabilidad

Por último, comparemos como se comporta la ineficiencia de mercado bajo distintas distribuciones de probabilidad.

De las figuras 3.3, 3.6 y 3.9 observamos que la ineficiencia de mercado presenta dos patrones de crecimiento diferentes:

Por un lado, se observa que la ineficiencia de mercado puede ser una función cóncava como es el caso de las distribuciones binomiales (figuras 3.3 y 3.6). Y por otro lado, puede comportarse como una función cóncava para valores pequeños de  $\delta$  y después como una función convexa conforme  $\delta$  incrementa, como es el caso de la distribución uniforme (figura 3.9). La generalización de estas observaciones, la cuál a nuestro parecer muy proba-

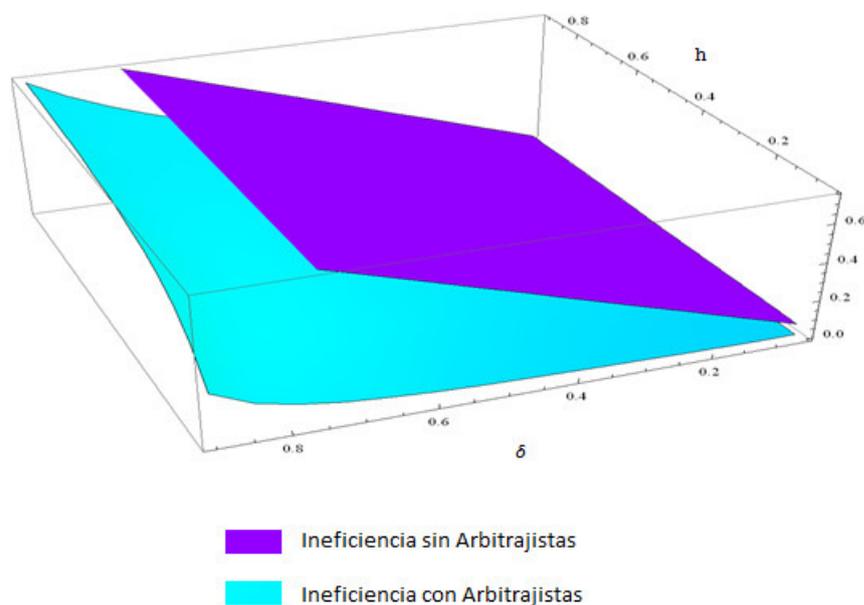


Figura 3.8: Ineficiencia en el mercado bajo una distribución uniforme según el modelo original.

blemente se cumpla, es que si la distribución de  $\theta$  es discreta entonces la ineficiencia en el mercado será una función cóncava, y si es continua entonces, para niveles de  $\delta$  bajos la función será cóncava y para niveles altos convexa.

Por otro lado, intuitivamente esperaríamos que si una distribución de  $\theta$  tiene mayor varianza que otra, entonces la ineficiencia de mercado de la primera debería ser mayor a la segunda.

Dicha afirmación se obtiene bajo el razonamiento de que una mayor varianza, o incertidumbre sobre el número de arbitrajistas, implica un mayor número de arbitrajistas que pueden entrar al mercado, por lo que se presentaría en mayor medida el problema del *over-crowded*, generado que los precios se alejen considerablemente del valor fundamental.

Pero cuando se compara la ineficiencia que genera la distribución Bernoulli simétrica, con varianza  $h^2$ , con la distribución uniforme cuya varianza es  $\frac{h^2}{3}$ , observamos que no siempre sucede lo que anteriormente se había predicho, véase gráfica 3.11.

Contrario a lo esperado, se observa que para valores altos de  $\delta$  la distribución con menor varianza genera mayor ineficiencia en el mercado que la que posee mayor varianza. En este caso, dicho fenómeno se debe a que los agentes en el mercado malinterpretan las señales que reciben sobre la cantidad de agentes arbitrajistas, lo cuál se explica detalladamente a continuación.

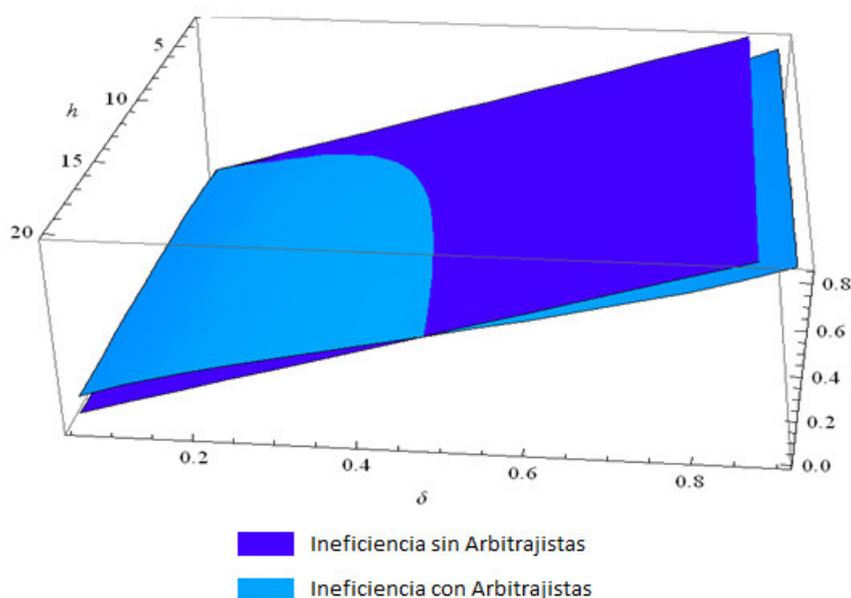


Figura 3.9: Ineficiencia en el mercado bajo una distribución uniforme según el modelo ampliado.

Dado un valor fijo de  $h$  y  $\delta$  los arbitrajistas deciden mantener un nivel en la intensidad de comercio  $\Phi^*$ , la cuál para nuestro caso es casi la misma bajo la distribución Bernoulli simétrica y la uniforme (véase grafica 3.12).

Y dado que la demanda agregada de los arbitrajistas viene dada por  $d^a = \theta\Phi^*P_2$  entonces dicha demanda depende aleatoriamente de la variable  $Z = \theta\Phi^*$ , con  $Z \in [\theta_1\Phi^*, \theta_2\Phi^*]$ . Definiendo  $I = [\theta_1\Phi^*P_2, \theta_2\Phi^*P_2]$  se tiene que, si  $\theta$  sigue una distribución uniforme entonces la demanda agregada puede tomar cualquier valor en el intervalo  $I$  y si sigue una distribución Bernoulli sólo podrá tomar los valores extremos de dicho intervalo.

Si  $\delta$  tiene un valor alto, entonces debido a que los cazanoticias cometen muchos errores a la hora de valorar los activos, los arbitrajistas decidirán mantener una intensidad de comercio alta, por lo que el intervalo  $I$  será grande. Así, si  $\theta$  sigue una distribución binomial simétrica, siempre se observarán sólo dos niveles de demanda en el mercado, lo cuál genera una sensación errónea de poca incertidumbre y motivará a los arbitrajistas a arriesgarse a entrar en el mercado, contrario al caso uniforme, en donde los agentes observan una gran cantidad de valores de la demanda, ya que  $Z$  varía en un rango grande, lo cual brinda la sensación de que existe gran incertidumbre desalentando la entrada de arbitrajistas a el mercado.

Así, la distribución discreta genera un sentimiento erróneo de que existe

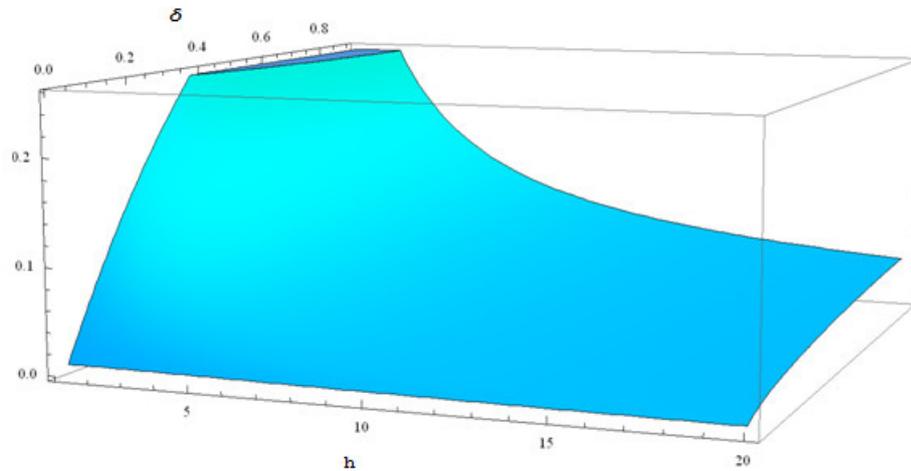


Figura 3.10: Intensidad de comercio bajo una distribución uniforme.

menor incertidumbre en comparación a la distribución continua, que motiva a que más arbitrajistas entren al mercado volviendo más grave el problema del *over-crowded*, por lo que se tiene que para valores altos de  $\delta$ , una distribución binomial genera mayor eficiencia que una uniforme.

En el caso en que  $\delta$  posea un valor bajo, entonces la intensidad de comercio será pequeña por lo que el intervalo  $I$  también lo será. Lo anterior provocará que la demanda agregada en el mercado varíe muy poco bajo las dos distribuciones, entonces los arbitrajistas creerán que existe poca incertidumbre sobre el número de arbitrajistas en el mercado, por lo que en ambos casos la incertidumbre y por tanto la ineficiencia del mercado serán casi las mismas. En este ejemplo en particular, la distribución uniforme genera mayor eficiencia (aunque la diferencia es muy pequeña) en el mercado que la distribución Bernoulli, lo cual es congruente con la intuición económica descrita inicialmente.

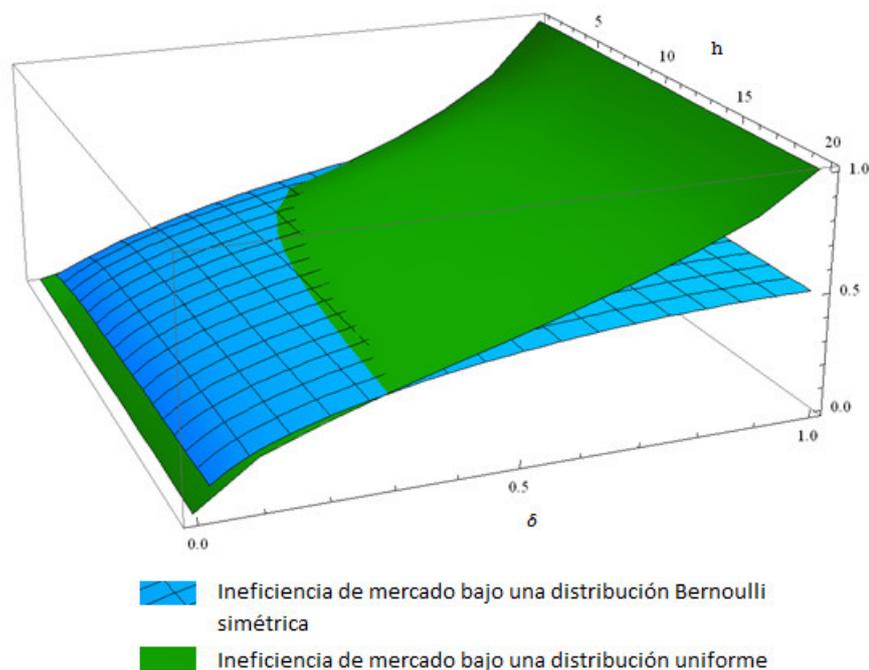


Figura 3.11: Ineficiencia en el mercado bajo una distribución uniforme y una Bernoulli simétrica según el modelo ampliado.

### 3.3. Recapitulación

De los ejemplos anteriores, se han obtenido resultados muy interesantes, los cuales se resumen a continuación:

1. Existen casos, cuando  $\theta$  se distribuye uniforme y binomial simétrica, donde bajo el modelo original siempre es posible encontrar que una mayor sofisticación en el mercado implica una mayor eficiencia del mismo.
2. Contrario al caso anterior, cuando el modelo original es ampliado permitiendo que los agentes arbitrajistas compren o vendan activos indistintamente, se encuentra que siempre es posible hallar la existencia de mercados en donde la entrada de arbitrajistas trae como consecuencia una mayor ineficiencia, las condiciones que deben cumplir dichos mercados son que el sesgo que cometen los caza-noticias sobre sus ganancias esperadas sea muy pequeño y que se presente el problema del *overcrowded*.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Se dejará como trabajo a futuro tratar de demostrar que este resultado se cumple no importando la distribución de  $\theta$ .

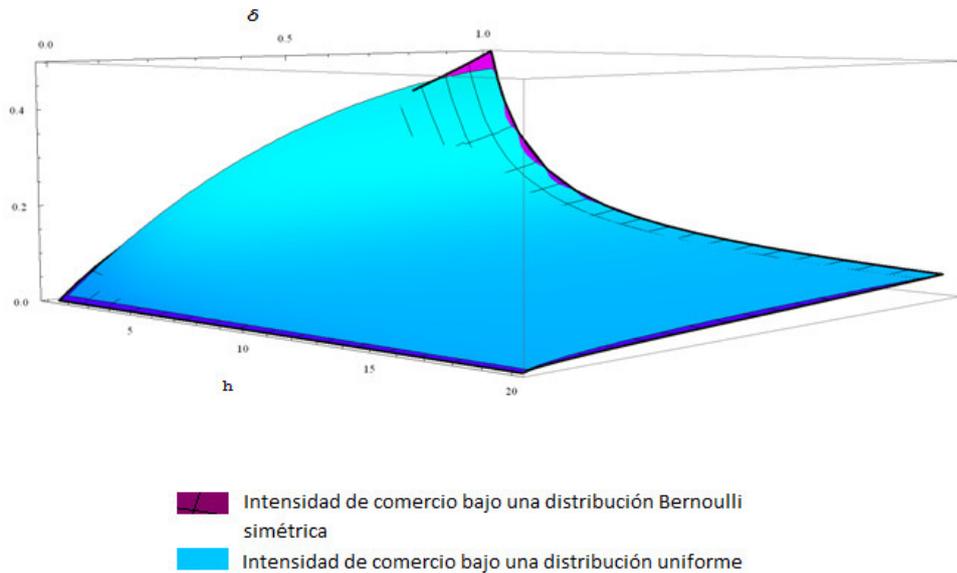


Figura 3.12: Intensidad de comercio bajo una distribución uniforme y una Bernoulli simétrica.

3. Se ha mostrado que la conjetura propuesta por Stein[12], a mayor varianza de  $\theta$  mayor ineficiencia del mercado, aún se sigue conservando ante la ampliación de su modelo simple y cuando no se cambie la distribución de  $\theta$ .
4. Al comparar la ineficiencia en el mercado generada por diferentes distribuciones, se encuentra que no siempre se cumple que, si una distribución siempre tiene una menor varianza que otra, entonces generará un mercado más eficiente.

Los resultados anteriores nos permiten responder a la respuesta planteada inicialmente: ¿Una mayor sofisticación en el mercado, conducirá a una mayor eficiencia en el sentido de que los precios de los activos converjan a sus valores fundamentales?

Por un lado, se ha encontrado que bajo el modelo original existen ciertas distribuciones en donde una gran sofisticación en el mercado generará una mayor eficiencia en el mismo, lo interesante de este caso es que para que esto suceda, probablemente el problema del *crowded-trade* pierde relevancia a la hora de formar precios.

Pero por otro lado, al volver más realista el modelo, encontramos que dicha eficiencia no siempre es alcanzable. Una posible justificación de dicho resultado, es que debido a que la mayoría de los agentes sofisticados, co-

mo los *hedge fund*, utilizan como base para formar sus carteras de inversión los mismos modelos económicos o sus modelos están desarrollados bajo los mismos principios entonces sus inversiones tienen muchos activos en común, generando el problema del *crowded-trade*. Por lo que al haber una gran demanda (u oferta) por dichos activos, los precios de éstos se alejan demasiado de su valor fundamental, lo que provoca que se incremente la ineficiencia en el mercado y la posibilidad de tener pérdidas en las inversiones.

Un ejemplo de dicha situación es publicado por Lewis[9] en el *New York Times*, quién narra los eventos ocurridos durante la crisis de agosto de 1998. Donde una cantidad considerable de firmas importantes de *Wall Street* compraron los mismos activos y trataron de venderlos al mismo tiempo, lo que llevó a que el precio se desplomara generándoles pérdidas millonarias.



# Capítulo 4

## Consideraciones finales

A lo largo de este trabajo se generalizó el modelo de Stein[12] para tratar de darle un mayor realismo y obtener resultados mas creibles. La diferencia fundamental en los resultados arrojados por los dos modelos es que bajo nuestra generalización, siempre es posible hallar que una mayor sofisticación en los agentes económicos genera una mayor ineficiencia de mercado, contrario al modelo original, que no puede asegurarlo.

A pesar de haber realizado tal generalización, aun se presentan muchas limitaciones en el modelo propuesto. Por lo anterior se plantea como trabajo a futuro incorporar las siguientes modificaciones al modelo:

- Permitir que los agentes sofisticados puedan aprender a partir de las realizaciones de  $n$ , lo que les daría la oportunidad de corregir las estrategias que les generen pérdidas económicas. Dicho aprendizaje quizá podría ser modelado mediante un esquema bayesiano.
- Dividir al grupo de agentes sofisticados en dos subgrupos. Por un lado, los compradores de activos y por el otro los vendedores. Lo anterior permitirá, que en un periodo del tiempo hayan tanto agentes arbitrajistas compradores como vendedores, contrario al modelo desarrollado donde sólo puede haber de un tipo. Lo que les dará a los agentes del modelo un comportamiento similar al de los agentes de mercados reales.
- Algo muy importante a realizar, será completar la demostración formal de algunas conjeturas presentadas a lo largo de la tesis. Específicamente:
  - La conjetura 0.1. La cuál asegura que la extensión del modelo planteada siempre podrá ser resuelta.

- La aseveración de que para toda distribución de  $\theta$ , siempre es posible encontrar mercados en donde la entrada de arbitrajistas genera una mayor ineficiencia del mismo.
  - La hipótesis de que si la distribución de  $\theta$  es discreta entonces la ineficiencia en el mercado será una función cóncava, y si es continua entonces, para niveles de  $\delta$  bajos la función será cóncava y para niveles altos será convexa.
- Hacer un análisis profundo sobre las condiciones que generan que la eficiencia en el mercado sea la misma con y sin arbitrajistas.

# Bibliografía

- [1] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2001). *Análisis numérico*. Cengage Learning Latin America.
- [2] Cutler, D. M., Poterba, J. M., & Summers, L. H. (1990). Speculative Dynamics and the Role of Feedback Traders. *American Economic Review*, 80(2), 63-68.
- [3] Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(2), 383-417.
- [4] Glosten, L. R., & Milgrom, P. R. (1985). Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders. *Journal of Financial Economics*, 14(1), 71-100.
- [5] Hong, H., & Stein, J. C. (1999). A Unified Theory of Underreaction, Momentum Trading, and Overreaction in Asset Markets. *Journal of Finance*, 54(6), 2143-2184.
- [6] Jegadeesh, N., & Titman, S. (1993). Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. *Journal of Finance*, 48(1), 65-91.
- [7] Khandani, A. E., & Lo, A. W. (2011). What Happened to the Quants in August 2007? Evidence from Factors and Transactions Data. *Journal of Financial Markets*, 14(1), 1-46.
- [8] Kyle, A. S. (1985). Continuous auctions and insider trading. *Econometrica*, 53(6), 1315-1335.
- [9] Lewis, M. (1999). How the Eggheads Cracked. *New York Times Magazine (AI)*, 148(51412). 24/01/1999.
- [10] O'hara, M. (1995). *Market Microstructure theory*. Wiley.

- [11] Reis, R. (2006). Inattentive Consumers. *Journal of Monetary Economics*, 53(8), 1761-1800.
- [12] Stein, J. C. (2009). Presidential Address: Sophisticated Investors and Market Efficiency. *Journal of Finance*, 64(4), 1517-1548.

# Apéndice

## Pseudocódigo del Método de Bisección.

Para obtener una solución a  $f(p)=0$  dada la función  $f$  continua en el intervalo  $[a, b]$ , donde  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos.

ENTRADA: Extremos  $a, b$ ; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones  $N$ .

SALIDA: Solución aproximada  $p$  o mensaje de error.

PASO 1 Tome  $i=1$ ;  
FA= $f(a)$

PASO 2 Mientras  $i < N+1$  , haga pasos 3-6.

PASO 3 Tome  $p = a + (b-a)/2$ ;  
FP= $f(p)$

PASO 4 Si  $FP=0$  o  $(b-a)/2 < TOL$  entonces  
SALIDA( $p$ ) (PROCEDIMIENTO TERMINADO SATISFACTORIAMENTE)  
PARAR

PASO 5 Tome  $i=i+1$

PASO 6 Si  $FA \cdot FP > 0$  entonces tome  $a=p$   
FA=FP

Si no tome  $b=p$

PASO 7 SALIDA("FRACASO, EL ALGORITMO NO ENCONTRÓ LA SOLUCIÓN")



# Índice de figuras

1.1. Dinero manejado por las Afores en millones de pesos. Fuente: Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro.	2
2.1. Estructura temporal del modelo.	6
3.1. Método de Bisección.	16
3.2. Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli simétrica según el modelo original.	19
3.3. Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli simétrica según el modelo ampliado.	20
3.4. Intensidad de comercio, $\Phi^*$ , bajo una distribución Bernoulli simétrica según el modelo ampliado.	22
3.5. Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli sesgada bajo el modelo original, con $\delta = .4$ .	23
3.6. Ineficiencia en el mercado bajo una distribución Bernoulli sesgada bajo la extensión del modelo, con $\delta = .4$ .	24
3.7. Intensidad de comercio bajo una distribución Bernoulli sesgada, con $\delta = .4$ .	25
3.8. Ineficiencia en el mercado bajo una distribución uniforme según el modelo original.	26
3.9. Ineficiencia en el mercado bajo una distribución uniforme según el modelo ampliado.	27
3.10. Intensidad de comercio bajo una distribución uniforme.	28
3.11. Ineficiencia en el mercado bajo una distribución uniforme y una Bernoulli simétrica según el modelo ampliado.	29
3.12. Intensidad de comercio bajo una distribución uniforme y una Bernoulli simétrica.	30