TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMIA

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

EL COLEGIO DE MEXICO

Una comparación entre sistemas diferenciales de demanda y su aplicación al caso de México

Norma Angélica Chávez Hernández

Promoción 1993-1995

1997

ASESOR: Dr. Carlos Manuel Urzúa Macías

INDICE

INTRODUCCIÓN

Cuando se habla de los aspectos económicos de un país, generalmente se piensa en la macroeconomía, en tasas de crecimiento del PIB, la política monetaria, el saldo de la balanza comercial o de las fluctuaciones del tipo de cambio; sin embargo un área igualmente importante y hasta cierto punto descuidada en México es la microeconómica.

El análisis de la situación que actualmente enfrentan las empresas y consumidores es por demás importante para el desarrollo y fortalecimiento económico no solo del campo donde funciona la empresa sino para el del país en general. Dado que el último propósito de la producción es el consumo, el presente trabajo se aboca al análisis y modelación de las decisiones de los consumidores, que son los entes que motivan el funcionamiento del sistema económico a través de las leyes de la oferta y la demanda.

Durante muchos años se han propuesto diversas formas funcionales que modelan las decisiones de consumo por medio de sistemas de demanda, así mismo se han querido establecer comparaciones entre los modelos para obtener la forma funcional que mejor describe situaciones reales. Aquí se pretende estimar por métodos econométricos algunos de los sistemas utilizados mas comúnmente, además de describir y aplicar una forma alternativa de comparación de los sistemas.

La forma como se distribuye el trabajo es la siguiente: en el capítulo I se describe la teoría básica del consumidor que se requiere para los propósitos de este trabajo y se establece la notación y algunas fórmulas que serán de utilidad a lo largo del texto.

El capítulo II contiene cuatro sistemas de demanda de los mas utilizados en la literatura para hacer estimaciones econométricas y que además cumplen con las propiedades de la teoría; a saber, el Sistema de Gasto Lineal (de Stone y Geary), La función de Utilidad Indirecta Translog (Christensen), el sistema AID (creado por Deaton y Muellbauer), y el Rotterdam (formulado por Theil). Los sistemas de demanda que se van a estimar se describen en el capítulo III, se aplican algunas modificaciones a la forma funcional original para facilitar su posterior comparación. En el capítulo IV se hace referencia a los datos utilizados en la estimación, se presentan los estimadores de los coeficientes para cinco grupos de bienes en cada uno de los cuatro sistemas y se calculan las elasticidades (ingreso y precios) en tres diferentes fechas. El establecimiento de una forma de comparación por parejas de modelos y de todos en general, se hace en el capitulo V, además de que muestran los resultados de dichas comparaciones.

Finalmente, en las conclusiones se observa que para cada sector de la economía en México se llega a resultados diferentes. Sin embargo existe un patrón común que define una forma funcional diferencial híbrida de dos sistemas bastante conocidos (AID y Rotterdam), como la mejor alternativa para ajustar los datos.

CAPITULO I

FUNCIÓN DE UTILIDAD Y ELECCIÓN DEL CONSUMIDOR

En la teoría económica del consumidor se establecen algunos supuestos acerca de la consistencia de las preferencias del consumidor. Estos supuestos son tan fundamentales que se puede referir a ellos como axiomas de la teoría del consumidor, a saber; completez, reflexividad, transitividad, continuidad y no saciedad local, los cuales permiten representar las preferencias de los individuos por funciones de utilidad ordinales de la forma

$$u(q_1,...,q_n) \qquad (1)$$

que asocia un nivel de utilidad o satisfacción con cada cesta de consumo posible y cuyos argumentos son cantidades generalmente positivas de un número finito de bienes. Esta función de utilidad se supone que es monótona creciente y estrictamente cuasicóncava con respecto a las cantidades q_i. El vector gradiente de esta función de utilidad, $\boldsymbol{u}_q = [\partial u/\partial q_i]$ representa las utilidades marginales y es positivo, dado que $u(.)$ es creciente. Además, la matriz de segundas derivadas,
$\boldsymbol{U} = [\partial^2 u/\partial q \partial q']$ es simétrica. La naturaleza cuasicóncava se refleja en la condición.

$$x' \boldsymbol{U} x \leq 0, \quad \forall \ x = 0$$

El ingreso del consumidor está representado por m el cual es distinto de cero y finito. Con este ingreso paga $p_i q_i$, $i= 1,...,n$ para los montos deseados de bienes, donde p_i es el precio positivo unitario para el bien i. Esos gastos deben satisfacer la restricción presupuestal

$$\Sigma_i \ p_i q_i = m. \tag{2}$$

Entonces el consumidor elige la mejor cesta de bienes que pueda adquirir; o lo que es lo mismo el consumidor debe resolver el problema de maximización de utilidad sujeto a su restricción presupuestal:

$$\begin{aligned} &\max \ u(\boldsymbol{q}) \\ &\text{s.a. } \ \boldsymbol{pq} \leq m \end{aligned}$$

donde las condiciones de primer orden son

$$\boldsymbol{u}_q = \lambda \boldsymbol{p} \tag{3}$$

El multiplicador de Lagranje está dado por λ y $\boldsymbol{p}$ es el vector de precios. La solución del problema de maximización son las funciones de demanda Marshallianas, que representan la decisión óptima del consumidor como función de los precios que enfrenta y de su ingreso

$$q_i = f_i(m, \boldsymbol{p}) \ \text{ec}(4) \tag{4}$$

PROPIEDADES DE LA DEMANDA

La diferenciabilidad de estas demandas es de interés porque muchas de las versiones que se estiman econométricamente son diferenciables. Es más, muchas de las propiedades y restricciones que impone la teoría son expresadas en términos de las derivadas de (5) para facilitar los cálculos, o en términos de las elasticidades, las cuales se pueden representar como derivadas de la versión logarítmica de (4):

$$d\ln q_i = \eta_i \, d\ln m + \textstyle\sum_j \mu_{ij} \, d\ln p_j \qquad i,j=1,\ldots,n \qquad (5)$$

donde η_i es la elasticidad ingreso de la demanda para el bien i (cambio porcentual en la demanda del bien i cuando cambia el ingreso), y μ_{ij} es la elasticidad precio de la demanda del bien i respecto al precio j (cambio porcentual en la demanda del bien i cuando varia el precio del bien j).

Lo más lógico es que la demanda de un bien aumente cuando crece el ingreso, por eso cuando η_i es positiva el bien se denomina normal y cuando es negativa inferior. Si además de ser positiva es mayor que uno entonces se trata de bienes de lujo, mientras que las elasticidades entre cero y uno se refieren a bienes necesarios. En el caso de la elasticidad precio la clasificación depende si se trata del precio del propio bien, en cuyo caso se tienen bienes ordinarios o de tipo Giffen si μ_{ii} es negativa o positiva respectivamente. Finalmente cuando μ_{ij} es menor que cero se dice que los bienes i y j son complementos, y si se trata de una elasticidad positiva son sustitutos.

Se define ahora $w_i = p_i q_i / m$ como la proporción del ingreso gastado en la compra del bien i (proporción de consumo). Entonces de la ecuación (3) se desprende que $\sum_i w_i = 1$.

Por conveniencia se usaran las elasticidades en términos de *Slutsky* o de la *elasticidad precio de la demanda compensada*,

$$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij} + \eta_i w_j \qquad (6)$$

Esta elasticidad representa el efecto sustitución de un cambio en precio, manteniendo constante la utilidad.

Para que las funciones de demanda sean consistentes con la teoría del consumidor deben cumplir ciertas propiedades, las cuales se expresan a través de las elasticidades antes descritas. Primero se tienen las condiciones de agregación, que garantizan el cumplimiento de (2)

$$\sum_i w_i \eta_i = 1 \qquad \text{(agregación de Engel)} \qquad (7a)$$

$$\sum_i w_i \mu_{ij} = -w_j \qquad \text{(agregación de Cournot)} \qquad (7b)$$

que juntas y utilizando (7) implican

$$\sum_i w_i \varepsilon_{ij} = 0 \qquad \text{(agregación de Slutsky)} \qquad (7c)$$

Además se tienen las condiciones para que la demanda sea homogénea de grado uno en precios e ingreso (al multiplicar precios e ingreso por un mismo número la elección no varía)

$$\sum_i \mu_{ij} = -\eta_i \qquad (8a)$$

$$\sum_i \varepsilon_{ij} = 0 \qquad (8b)$$

La siguiente es la condición de simetría de Slutsky, que establece que el cambio en la demanda del bien *i* por un cambio en el precio del bien *j* es igual al cambio en la demanda del bien *j* como resultado de la variación del precio del bien *i*.

$$w_i\varepsilon_{ij} = w_j\varepsilon_{ji} \qquad (9)$$

La condición de negatividad, que garantiza la concavidad de la función de demanda esta dada por

$$\sum_i \sum_j x_i w_i \varepsilon_{ij} x_j < 0 \qquad x_i, x_j = \text{constante}$$

Otro uso de las elasticidades de Slutsky es que pueden representar estructuras particulares del orden de las preferencias o de la función de utilidad. Si por ejemplo el orden es representado por una función de utilidad que es suma de n funciones en cada una de sus cantidades, entonces

$$\varepsilon_{ij} = \varphi\eta_i\,(\delta_{ij} - \eta_j\, w_j) \qquad \text{lo cual significa completa independencia}$$

con φ como el recíproco de lo que Frisch[1] llama flexibilidad del dinero o Houthakker describe como flexibilidad del ingreso (mide el cambio relativo en la utilidad marginal del ingreso como resultado de un pequeño incremento absoluto del ingreso), y δ_{ij} una delta de Kronecker, que toma los valores de 1 si $i=j$, y cero si los subíndices son distintos.

Otra estructura es la separabilidad por grupos, del orden de las preferencias. Los bienes se organizan de manera que los grupos no se traslapan y la utilidad se escribe como función de las utilidades separadas de para cada grupo. Entonces para $i \in \mathrm{F}$ y $j \in \mathrm{G}$, con $\mathrm{F} \neq \mathrm{G}$

[1]citado por Theil ,1965, p. 77

$\varepsilon_{ij} = \varphi_{FG}\, \eta_i \eta_j\, w_j$ lo cual significa separabilidad débil

donde $\varphi_{FG} = \varphi_{GF}$ es un parámetro para todas las interacciones entre los bienes del grupo F y los del grupo G. La separabilidad es una propiedad conveniente porque permite formular sistemas de asignación completos para cada grupo separadamente, dados los ingresos de cada grupo.

Finalmente, si las preferencias son homoteticas, el cambio en la demanda es constante respecto a cambios en el ingreso y esto genera curvas de Engel como rectas que parten del origen, lo cual se puede expresar como

$$\eta_i = 1, \qquad \forall\ i$$

Una vez que el consumidor ha decidido cual es su mejor elección se puede hacer uso de un concepto bastante útil; la función de *utilidad indirecta*

$$u^*(m, p_1, \ldots, p_n) \tag{10}$$

la cual se obtiene remplazando en la función de utilidad (1) las cantidades q_i en (4), que se obtuvieron del problema de optimización. La forma diferencial de la utilidad indirecta es

$$du^* = \Sigma_i\, (\partial u/\partial q_i)\, [(\partial f_i/\partial m)\, dm + \Sigma_j\, (\partial f_i/\partial p_j)\, dp_j]$$

$$= \lambda\, m\, (\Sigma_i\, w_i \eta_i\, d \ln m + \Sigma_i \Sigma_j\, w_i \mu_{ij}\, d \ln p_j) \tag{11}$$

$$= \lambda\, m\, (d \ln m - \Sigma_j\, w_j\, d \ln p_j)$$

Donde se usaron las condiciones (3), (7a) y (7b), y el multiplicador de Lagrange λ es la utilidad marginal del ingreso $\partial u^*/\partial m$. De la ecuación (16) se pueden derivar las demandas Marshallianas usando la identidad de Roy.

$$q_i = -(m/p_i)\left(\frac{\partial u^*}{\partial \ln p_i} \Big/ \frac{\partial u^*}{\partial \ln m}\right)$$

Nótese que en la ecuación (11) $d\ln m - \sum_j w_i \, d \ln p_j$ puede ser visto como una especie de cambio en el ingreso real. Otra forma de ver este concepto de ingreso real es utilizar la diferencial logarítmica de la restricción presupuestal (2)

$$d \ln m = \sum_j w_j \, d \ln p_j + \sum_j w_j \, d \ln q_j \tag{12}$$

reescribiendo

$$\sum_j w_j \, d \ln q_j = d \ln m - \sum_j w_j \, d \ln p_j \tag{13}$$

donde el miembro izquierdo es un cambio en un índice de la cantidad, correspondiente a un cambio en el ingreso real en el miembro derecho. En adelante se utilizará la siguiente notación

$$d \ln \mathrm{Q} = \sum_j w_j \, d \ln q_j \,, \qquad d \ln \mathrm{P} = \sum_j w_j \, d \ln p_j \tag{14}$$

para indicar estos índices de precios y cantidades. Entonces con la ecuación (12) se tiene

$$d \ln m = d \ln \mathrm{P} + d \ln \mathrm{Q}$$

Otro concepto de uso práctico es la función de gasto, la cual puede ser derivada de la ecuación (15) expresando m en términos de la utilidad u y los precios $\boldsymbol{p}$

$$e(u,p_1,...,p_n) \qquad (15)$$

Esta función establece el gasto mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad u, dado el vector de precios $\boldsymbol{p}$. De la ecuación se sigue que su forma diferencial se puede escribir como

$$d \ln e = [1/(\lambda\ m)]\ du + \textstyle\sum_j w_j\ d \ln p_j$$

La cual se utiliza como base para aplicar el lema de Shephard, (que establece que dada una función de costos, su derivada parcial con respecto al precio de uno de los factores da como resultado la demanda condicionada de ese factor), haciendo una analogía entre la función de costos y la de gasto, el nivel de producción y la utilidad, y la demanda de los factores con la demanda de bienes por parte del consumidor.

$$w_i = \partial \ln e / \partial \ln p_i, \qquad i = 1,...,n \qquad (16)$$

De donde se obtienen funciones de demanda del tipo

$$q_i = h_i(u,\boldsymbol{p}) \qquad (17)$$

mejor conocidas como las demandas Hicksianas. Además, reemplazando la utilidad u con la utilidad indirecta u^* se obtienen las demandas Marshallianas dadas por (4).

Otra forma de establecer un relación entre las dos funciones de demanda es comenzar con la ecuación (5), usar la (6) y (11) para obtener

$$d \ln q_i = [1/(\lambda\, m)]\eta_i \, du + \textstyle\sum_j \varepsilon_{ij} \, d \ln p_j$$

que es la versión de la diferencial logarítmica de la ecuación (25). De esta expresión es clara la naturaleza de ε_{ij} como la elasticidad precio de la demanda manteniendo la utilidad constante.

CAPITULO II

Dentro de la literatura microeconómica se conocen cuatro aproximaciones básicas para llegar a un sistema de ecuaciones de demanda que satisfagan las propiedades de la teoría del consumidor.

EL SISTEMA DE GASTO LINEAL

La primera de ellas se hace a través de la **función de utilidad** de los consumidores. Un caso particular es el *Sistema de Gasto Lineal* (SGL), de Stone (1954), el cual trabaja generando un sistema donde el gasto en bienes individuales es expresado como función lineal del gasto total y los precios.

Suponiendo que $g = \boldsymbol{pq}$ es el gasto total, se puede considerar la siguiente relación

$$\boldsymbol{pq} = \boldsymbol{p}\gamma + \beta(g - \boldsymbol{p}\gamma)$$

donde γ es un vector de cantidades de bienes con las cuales el consumidor está en algún sentido comprometido, por ejemplo: cantidades mínimas indispensables de consumo para poder subsistir. Además bajo el supuesto de que $g > \boldsymbol{p}\gamma$, se tiene entonces que los consumidores primero usan cierta cantidad de su ingreso (gasto total) en adquirir el vector de consumo γ a los precios corrientes, cualesquiera que sean éstos, y luego distribuyen el ingreso restante entre el conjunto de bienes disponibles en ciertas proporciones fijas dadas por los elementos del vector β.

Entonces el SGL proviene de una función de utilidad creciente y cuasicóncava de la forma

$$u(q_1,...,q_n) = \Sigma_i \beta_i \ln(q_i - \gamma_i), \qquad \text{con} \quad \Sigma_i \beta_i = 1, \qquad \gamma_i < q_i \tag{18}$$

Maximizando esta función de utilidad sujeta a la restricción (2) se obtienen las demandas

$$q_i = \gamma_i + (\beta_i/p_i)(m - \Sigma_j p_j\gamma_j)$$

La aditividad en este sistema implica que la suma de los gastos es idéntica al gasto total, es decir, $g = \boldsymbol{pq}$, lo cual es suficiente para cumplir el supuesto de completa independencia del orden de las preferencias dado por la ecuación (18).

Las propiedades de aditividad y simetría se verifican bajo el SGL. Sin embargo la propiedad de aditividad implícita en el sistema genera algunas desventajas, como lo explica García Alba (1986); que las elasticidades precio cruzadas sean cercanas a cero y que las elasticidades con respecto al propio precio sean casi proporcionales a las elasticidades ingreso. Más aún el requerimiento de que γ_i sea menor que la cantidad q_i mas pequeña observable, es difícil de lograr con los datos.

LA FUNCIÓN TRANSLOG

La segunda aproximación para llegar a un sistema de demandas es usar una **función de utilidad indirecta** como la (15) para después aplicar el lema de Roy. Un ejemplo de ello es lo que hace Christensen (1975), donde representa la utilidad y la utilidad indirecta como funciones cuadráticas en los logaritmos de las cantidades consumidas, las cuales permiten que las proporciones de consumo varíen con el nivel total de gasto al mismo tiempo que puede existir una gran variedad de patrones de sustitución entre los bienes, siendo en este sentido menos restrictiva que las funciones basadas en elasticidades de sustitución constantes e iguales entre todos los pares de bienes.

La llamada función de Utilidad Indirecta Logarítmica Trascendental o función Translog está dada por

$$\ln u^* = \alpha_0 + \Sigma_i\, \beta_i \ln(p_i/m) + ½\, \Sigma_i \Sigma_j\, \beta_{ij} \ln(p_i/m) \ln(p_j/m)$$

Las proporciones del presupuesto para el bien i se determinan de la identidad

$$(p_i q_i/m) = \left(\frac{\partial \ln u^*}{\partial \ln p_i} \bigg/ \frac{\partial \ln u^*}{\partial \ln m} \right)$$

obteniendo

$$\frac{\partial \ln u^*}{\partial \ln p_i} = \beta_i + \Sigma_j\, \beta_{ij} \ln(p_i/m) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \ln u^*}{\partial \ln m} = \Sigma_i\, [\, \beta_i + \Sigma_j\, \beta_{kj} \ln(p_i/m)]$$

Dado que estas ecuaciones son homogéneas de grado cero en los parámetros, se requiere de una normalización para la estimación. Esta normalización consiste en

$$\Sigma_j\, \beta_j = -1,$$

y sabiendo que $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ las demandas como proporción del gasto son

$$w_i = \frac{p_i q_i}{m} = \frac{\beta_i + \sum_j \beta_{ij} \ln(p_i/m)}{-1 + \sum_k \sum_j \beta_{kj} \ln(p_k/m)} \tag{19}$$

Este sistema no es lineal en los parámetros y no es fácil estimarlo. Aún más, es posible que predicciones en el valor de las proporciones sea negativo.

La elasticidad ingreso de la demanda η_i asociado con (19) es

$$\eta_i = 1 - (\Sigma_j \, \beta_{ij} \, / \, w_i - \Sigma_k \, \Sigma_j \, \beta_{kj}) \, / \, x$$

donde x es el denominador de la (19). La elasticidad de Slutsky multiplicada por w_i es

$$w_i \, \varepsilon_{ij} = (\beta_{ij} - w_i \, \Sigma_k \, \beta_{kj} - w_j \, \Sigma_k \, \beta_{ik} + w_i \, w_j \, \Sigma_k \, \Sigma_l \, \beta_{kl}) \, / \, x$$

la cual satisface la condición (7c), la condición de homogeneidad (8b) y la condición de simetría (9). Sin embarco no se pude garantizar la negatividad aún cundo se controlen los signos de $\beta_{ij.}$ El sistema es homotético fijando $\Sigma_j \, \beta_{ij} = 0$ para todo i. Esta propiedad puede ser construida en el sistema, o probada, o ambas sin cambiar esencialmente la especificación funcional.

EL SISTEMA AID

La tercera aproximación se basa en una **función de gasto** (15), para después aplicar el lema de Shephard (24) y obtener ecuaciones de demanda Hicksiana (17), en las cuales la utilidad u, que no es observable, se sustituye con una función de gasto en términos de $\boldsymbol{p}$ y m.

El ejemplo más conocido de este tipo de especificaciones es el **AID** o Sistema de Demanda Casi Ideal, Deaton (1980). Este sistema es una aproximación de primer orden a las funciones de demanda.

Se parte de una clase de preferencias específica, que permiten la agregación exacta sobre los consumidores: la representación de las demandas de mercado como si fuesen el resultado de decisiones tomadas por un consumidor representativo. Estas preferencias conocidas como la clase PIGLOG, son representadas a través de una función de costo o gasto (15), de la forma:

$$\ln e(u,p) = (1-u)\ \ln\{a(p)\} + u \ln \{b(p)\}$$

con algunas excepciones u siempre se encuentra entre cero (subsistencia) y uno (abundancia), entonces las funciones lineales, homogéneas y positivas $a(p)$ y $b(p)$ pueden ser consideradas como costos de subsistencia y abundancia, respectivamente.

Ahora se determinan formas funcionales específicas para ln $a(p)$ y ln $b(p)$. Para que la función de costos resultante sea una forma funcional flexible, debe tener suficientes parámetros, de manera que en cualquier punto sus derivadas:
$\partial e/\partial p_i$, $\partial e/\partial u$, $\partial^2 e/\partial p_i \partial p_j$, $\partial^2 e/\partial u \partial p_i$ y $\partial^2 e/\partial u^2$, puedan ser igualadas a las de una función de costos arbitraria.

$$\ln a(p) = a_0 + \Sigma_i\ \alpha_i \ln p_i + 1/2\ \Sigma_i\ \Sigma_j\ r_{ij} \ln p_i \ln p_j$$

$$\ln b(p) = \ln a(p) + c_0 \Pi_j\ p_j^{c_j}$$

Por lo tanto la función de gasto del AID es

$$\ln e(u,p) = a_0 + \Sigma i\ \alpha_i \ln p_i + 1/2\ \Sigma_i \Sigma j\ r_{ij}^* \ln p_i \ln p_j + u\ c_0 \Pi_j\ p_j^{cj} \quad (20)$$

donde α_i, r_{ij} y c_j son parámetros. La justificación de la elección de las formas particulares de $a(p)$ y $b(p)$ es que llevan a un sistema de demanda que cumple con las propiedades de la teoría.

Se puede verificar que $e(u,p)$ es homogénea de grado 1 estableciendo que:

$$\Sigma i\ \alpha i = 1, \qquad r_{ij} = r_{ji}, \qquad \Sigma_j r_{ij} = \Sigma_i r_{ji} = \Sigma_i c_i = 0$$

Por el lema de Shephard se sabe que $\partial e(u,p)/\partial\ p_i = q_i$, entonces multiplicando por $p_i/e(u,p)$

$$\frac{\partial \ln e(u,p)}{\partial \ln p_i} = \frac{p_i q_i}{e(p,u)} = w_i \qquad \text{dado que } e(u.p) = m$$

Por lo que la diferenciación logarítmica de (20) da las proporciones del ingreso como función de los precios y la utilidad

$$w_i = \alpha i + \Sigma_j r_{ij} \ln p_j + c_i\ u\ \Pi_j\ p_j^{cj} \qquad \text{donde } r_{ij} = 1/2\ (r^*ij + r^*ji)$$

Para un consumidor que maximiza su utilidad, el gasto total o ingreso m es igual a $e(u,p)$, esta igualdad puede ser invertida para dejar u en términos de p y m. De este modo sustituyendo la utilidad indirecta en (20), se obtienen proporciones del presupuesto como funciones de los precios y el ingreso.

$$w_i = \alpha i + \sum_j r_{ij} \ln p_j \; + c_i (\ln m - \ln \mathrm{P}^*) \qquad (21)$$

donde P* es un índice de precios definido por

$$\ln \mathrm{P}^* = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + 1/2 \sum_j \sum_k r_{jk} \ln p_k \ln p_j \qquad (22)$$

Una variante utiliza

$$\ln \mathrm{P}^* = \sum_k w_k \ln p_k \qquad (23)$$

Conocido como el índice de Stone. Con (23) las ecuaciones de las proporciones del presupuesto son lineales en los parámetros a ser estimados, es decir, a_i, c_i, r_{ij}.

La elasticidad ingreso de la demanda esta dada por

$$\eta_i = 1 + c_i/w_i$$

De donde se desprende que la homoteticidad se da si $c_i = 0$ para toda i, lo cual es fácil de imponer como restricción si uno encuentra alguna razón para hacerlo. Las elasticidades de Slutsky cambian de acuerdo con la definición que se utilice para P*, es decir, la ecuación (22) o (23). Para la primera y multiplicando por w_i se tiene

$$w_i \varepsilon_{ij} = r_{ij} + c_i c_j (\ln m - \ln \mathrm{P}^*) - w_i \delta_{ij} + w_i w_j$$

en el segundo caso queda

$$w_i \varepsilon_{ij} = r_{ij} - w_i \delta_{ij} + w_i w_j$$

Se puede verificar que las condiciones de agregación, homogeneidad y simetría se satisfacen. Sin embargo la condición de negatividad no se puede garantizar para todas las combinaciones de p y m, aún cuando se restrinjan los valores de los parámetros. Una debilidad básica de la ecuación (21) es que variaciones en w_i, que en principio están limitadas al intervalo (0,1), se mueven de acuerdo a variaciones en m en el intervalo $(-\infty,+\infty)$ por la constante c_i.

EL SISTEMA ROTTERDAM

La cuarta aproximación consiste en definir directamente un sistema de demanda con alguna **forma particular que ha sido probada empíricamente**. Por ejemplo la especificación doble logarítmica.

Theil (1965), desarrolló un sistema de este tipo. Utilizó un concepto de teoría de la información, haciendo uso de una función decreciente de la probabilidad de que un evento considerado ocurra (en este caso el evento es la elección del consumidor). Afirmó que en principio puede tomarse cualquier función decreciente, pero que existen ciertas ventajas en usar el logaritmo del recíproco de la probabilidad (igual al negativo del logaritmo de la propia probabilidad).

La razón principal del uso del logaritmo es su aditividad para eventos independientes: cuando E y E' son estocásticamente independientes, la información de que ambos ocurran es entonces igual a la información de que ocurra E mas la información de que E' ocurra.

En la teoría del consumidor se tienen precios y cantidades de distintos bienes como resultado de las elecciones de los consumidores. Theil consideró como punto de partida el cambio relativo en precios y cantidades del bien i en un periodo dado (comparado con el periodo precedente), con $i=1,\dots,n$. Entonces define $\Delta(\ln p_i)$ y $\Delta(\ln q_i)$ como las primeras diferencias de las series del logaritmo natural en precios y cantidades observadas. Además se puede decir que la probabilidad asociada con el bien i-ésimo es el valor de la proporción del ingreso que representa el bien i, es decir w_i.

Como se están comparando precios y cantidades de este periodo con aquellos de periodos precedentes, una elección obvia es el promedio de los valores de las proporciones de los dos periodos. Así

$$\begin{aligned} \Delta(\ln p) &= \sum_i \frac{w_i + (w_i)_{-1}}{2} \Delta(\ln p_i) \\ \Delta(\ln q) &= \sum_i \frac{w_i + (w_i)_{-1}}{2} \Delta(\ln q_i) \end{aligned} \tag{24}$$

donde w_i es el valor de la proporción corriente y $(w_i)_{-1}$ es el del periodo pasado.

Dada la utilidad $u(\boldsymbol{q})$ y la restricción $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{q} = m$ se define el Lagrangeano $u(\boldsymbol{q}) - \lambda(\boldsymbol{p}'\boldsymbol{q} - m)$, de donde se obtienen n condiciones de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} - \lambda p_i = 0$$

que junto con la restricción presupuestal son suficientes para determinar los valores de q y λ como funciones de $\boldsymbol{p}$ y m. Tomando ahora las derivadas de estas funciones respecto a sus argumentos y escribiendo el resultado en forma matricial queda

$$\begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m & Q_p \\ -\lambda_m & -\lambda'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda I \\ 1 & -q' \end{bmatrix}$$

donde $U = [\partial^2 u/\partial q_i q_j]$ es el Hesiano de la función de utilidad y $q_m = [\partial q_i/\partial m]$, $Q_p = [\partial q_i/\partial p_j]$, $\lambda_m = [\partial \lambda/\partial m]$, $\lambda_p = [\partial \lambda/\partial p]$, son las derivadas con respecto a sus índices. Invirtiendo la primera matriz de la izquierda se pueden tener soluciones explícitas para estas derivadas

$$q_m = \lambda_m U^{-1} p,$$

$$Q_p = \lambda U^{-1} - (\lambda/\lambda_m)\, q_m q'_m - q_m q',$$

$$\lambda_m = (p'Up)^{-1},$$

$$\lambda_p = -\lambda q_m - \lambda_m q,$$

Considérese en particular Q_p, la cual especifica la matriz de derivadas de las funciones de demanda con respecto a precios, como suma de tres términos. El tercero, $- q_m q'$ representa el efecto ingreso y los dos primeros el efecto sustitución.

Escribiendo esta ecuación en forma de elasticidades se llega a

$$\left(\frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln p_j}\right) = \varepsilon_{ij} - \varphi \eta_i \eta_j w_j - \eta_i w_j$$

donde $\varepsilon_{ij} = \dfrac{\lambda^{ij} p_j}{q_i}$, $\quad [u^{ij}] = U^{-1}$, $\quad \eta_i = \dfrac{\partial \ln q_i}{\partial \ln m}$, $\quad \varphi = \dfrac{1}{\lambda_m (m/\lambda)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial \ln \lambda}{\partial \ln m}}$

η_i es la elasticidad ingreso y φ es el recíproco de la elasticidad ingreso de la utilidad marginal del ingreso, llamada la flexibilidad del ingreso.

De las ecuaciones (24) de los cambios en logaritmos y considerando las ecuaciones de demanda explícitas, se aplica expansión en series de Taylor en los logaritmos y se toman los primeros términos solamente, por lo que el cambio en el logaritmo de la cantidad se escribe como

$$\Delta(\ln q_i) = \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln m}\Delta(\ln m) + \sum_j \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln p_j}\Delta(\ln p_j)$$
$$\Delta(\ln q_i) = \eta_i \Delta(\ln m) + \sum_j (\varepsilon_{ij} - \varphi \eta_i \eta_j w_j - \eta_i w_j)\Delta(\ln p_j)$$
$$\Delta(\ln q_i) = \eta_i \left[\Delta \ln m - \sum_j w_j \Delta \ln p_j\right] + \sum_j (\varepsilon_{ij} - \varphi \eta_i \eta_j w_j)\Delta(\ln p_j)$$

donde la variable dependiente esta dada por diferencias en los logaritmos de las cantidades.

Escribiendo el sistema en su forma diferencial queda

$$d \ln q_i = \eta_i \, (d \ln m - \textstyle\sum_j w_j \, d \ln p_j) + \textstyle\sum_j \varepsilon_{ij} \, d \ln p_j$$

donde además se elimina el último término por ser no observable. Y multiplicando ambos lados por w_i resulta

$$w_i \, d \ln q_i = b_i \, (d \ln m - \textstyle\sum_j w_j \, d \ln p_j) + \textstyle\sum_j s_{ij} \, d \ln p_j$$

donde $b_i = w_i \eta_i$ y $s_{ij} = w_i \varepsilon_{ij}$ se consideran ahora como constantes. Esta elección de las constantes es la que se conoce como el sistema Rotterdam, y cuyas propiedades se traducen en términos de elasticidades como sigue. La agregación de Engel y Slutsky implican que

$$\sum_i b_i = 1, \qquad \sum_i s_{ij} = 0$$

Mientras que para las condiciones de homogeneidad, simetría y negatividad se tiene

$$\sum_j s_{ij} = 0, \qquad s_{ij} = s_{ji}\,, \qquad \sum_i \sum_j x_i\, s_{ij}\, x_j < 0 \quad \text{con} \quad x_i, x_j \neq \text{constante}$$

Todas estas condiciones pueden ser impuestas o probadas al hacer las estimaciones a través de los coeficientes de la ecuación.

A partir de las cuatro formulaciones descritas para definir la forma funcional de un sistema de demanda se elegirán las más convenientes para la estimación. Desde el punto de vista teórico cada uno de ellos tiene sus ventajas y desventajas. Para efectos del presente trabajo se tomó en cuenta también la viabilidad de la estimación, así como su compatibilidad para una futura comparación.

CAPITULO III

Es claro que para realizar una comparación correcta entre dos cosas, éstas deben situarse dentro de un mismo contexto. Teniendo esto en cuenta se eligieron cuatro modelos con el fin de establecer una misma base de comparación, la cual consiste en definir las mismas variables dependientes para los diferentes sistemas de demanda, como lo hace Barten (1993).

Para ello se consideran cuatro tipos de funciones que por una parte son suficientemente distintos para mostrar diferencias en su desarrollo empírico y por otra son suficientemente similares para permitir la interpretación de esas diferencias

Considérese en primer lugar el sistema Rotterdam

$$w_i\, d \ln q_i = b_i\, (d \ln m - \Sigma_j w_j\, d \ln p_j\ ) + \Sigma_j s_{ij}\, d \ln p_j$$

Usando las ecuaciones

$$\Sigma_j\, w_j\, d \ln q_j = d \ln m - \Sigma_j w_j\, d \ln p_j \quad \text{y}$$

$$d \ln \mathrm{Q} = \Sigma_j\, w_j\, d \ln q_j\,, \quad d \ln \mathrm{P} = \Sigma_j w_j\, d \ln p_j$$

se tiene

$$w_i\, d \ln q_i = b_i\, d \ln \mathrm{Q} + \Sigma_j s_{ij}\, d \ln p_j$$

donde $b_i = w_i\eta_i$ y $s_{ij} = w_i\varepsilon_{ij} = (\mu_{ij}+\eta_i w_j)w_i$

entonces las elasticidades de este sistema están dadas por

$\eta_i = b_i/w_i$ y $\mu_{ij} = s_{ij}/w_i$

por lo tanto las restricciones a imponer son

$\sum_i w_i = 1$ $\sum_i b_i = 1$ $\sum_i s_{ij} = 0$ (agregación)

$\sum_j s_{ij} = 0$
(homogeneidad)

$s_{ij} = s_{ji}$ (simetría)

La matriz de términos $[s_{ij}]$ es negativa semidefinida de rango n-1 (concavidad)

El siguiente sistema que se va a estimar se obtiene tomando la forma diferencial del AID (21)

$w_i = \alpha i + \sum_j r_{ij} \ln p_j + c_i (\ln m - \ln P^*)$

diferenciando

$dw_i = c_i [d \ln m - d\ln P^*] + \sum_j r_{ij}\, d \ln p_j$

usando la ecuación (18)

$$dw_i = c_i\, [d \ln m - \textstyle\sum_j w_j\, d\ln p_j] + \sum_j r_{ij}\, d \ln p_j$$

y sustituyendo la (17)

$$dw_i = c_i\, \textstyle\sum_j w_j\, d\ln q_j + \sum_j r_{ij}\, d \ln p_j$$

para finalmente obtener la ecuación que se va estimar

$$dw_i = c_i\, d\ln \mathrm{Q} + \textstyle\sum_j r_{ij}\, d \ln p_j$$

Para este sistema las elasticidades son

$$\eta_i = 1 + c_i/w_i \qquad\qquad w_i\varepsilon_{ij} = r_{ij} - w_i\delta_{ij} + w_iw_j$$

y las condiciones para cumplir las restricciones de la teoría

$$\textstyle\sum_i c_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_i r_{ij} = 0 \qquad \text{(aditividad)}$$

$$\textstyle\sum_j r_{ij} = 0$$

(homogeneidad)

$$r_{ij} = r_{ji} \qquad \text{(simetría)}$$

La restricción de concavidad no pude ser fácilmente trasladada en una condición sobre la matriz r_{ij} dada su relación con el parámetro s_{ij}, es decir, $r_{ij} = s_{ij} - w_iw_j + w_i\delta_{ij}$.

El tercer sistema es una alternativa al problema de la restricción del AID respecto a la concavidad, propuesto por Keller y Van Driel (1985) llamado modelo CBS (Central Bureau of Statistics). Los autores utilizan la diferencial de la proporción del gasto

$$dw_i = w_j\, d\ln q_j + w_i\, d\ln p_j - w_i\, d\ln m$$

y la ecuación $\quad r_{ij} = s_{ij} - w_i w_j + w\, d\ln m$

para llegar aun modelo como:

$$w_i(d \ln q_i - d\ln \mathrm{Q}) = c_i\, d \ln \mathrm{Q} + \textstyle\sum_j s_{ij}\, d \ln p_j$$

que es un híbrido de los sistemas AID y Rotterdam, ya que tiene los coeficientes del ingreso c_i del primero, es decir, genera curvas de Engel convenientes y los coeficientes del precio del segundo, es decir, la simplicidad de la matriz de Slutsky incluyendo el hecho de poder implementar la restricción de concavidad. Se pude hacer, además, que cumpla las restricciones de homogeneidad, aditividad y simetría.

Por último el sistema NBR considerado por Neves (1987), que es un híbrido simétrico al CBS, en el sentido de que reemplaza el coeficiente c_i del AID por b_i-w_i para llegar a

$$d \ln w_i + w_i\, d\ln \mathrm{Q} = b_i\, d \ln \mathrm{Q} + \textstyle\sum_j r_{ij}\, d \ln p_j$$

el cual contiene los coeficientes del ingreso del sistema Rotterdam y los coeficientes de precios del AID. Aquí las condiciones de aditividad, homogeneidad y simetría pueden ser impuestas, no así la de negatividad, análogamente con el sistema AID.

Estos cuatro sistemas de demanda diferenciales, AID, ROT, CBS, NBR, son los que se utilizaran para el estudio del caso mexicano.

CAPITULO IV

LOS DATOS

Para la estimación de los modelos se tomaron series de datos de dos fuentes, de los años 1960 a 1969 se utilizaron los datos reportados por Pascual García Alba (1986), y para los años 1979 a 1993 se tomaron de las Cuentas Nacionales, INEGI. Para la elección de los grupos de bienes que se analizaron se tomo en cuenta que los modelos trabajan bajo los supuestos de la teoría del consumidor, los cuales indican que los bienes deben ser de consumo individual. Por lo tanto se consideraron cinco grupos de acuerdo con la división de las Cuentas Nacionales, que corresponden al consumo privado por origen de los bienes y servicios y que a saber son:

Grupo I	Agricultura, Ganadería, Silvicultura y Pesca
Grupo II	Electricidad, Gas y Agua
Grupo III	Comercio, Restaurantes y Hoteles
Grupo IV	Alimentos, Bebidas y Tabaco
Grupo V	Textiles, Vestido y Cuero

Dado el intervalo tan pequeño de tiempo que se analiza, no se hizo ninguna división en periodos mas cortos, suponiendo de esta manera que el crecimiento poblacional, las transformaciones sociales y políticas, y los cambios en precios e ingreso no afectaron de manera significativa las preferencias y las decisiones de consumo.

Lo anterior puede confirmarse en cierto modo al observar que la variación en las proporciones de consumo es muy pequeña. A excepción de la electricidad que tuvo una tasa de crecimiento de 360.67%.

PROPORCIONES DE CONSUMO

GRUPOS DE BIENES	1961	MEDIA	1993
AGRICULTURA	0.228506	0.1954212	0.185223
ELECTRICIDAD	0.05976	0.0134043	0.02753
COMERCIO	0.075575	0.0797781	0.079956
ALIMENTOS	0.517099	0.4975498	0.54442
TEXTILES	0.172843	0.184732	0.162871

ESTIMACIÓN DE LOS CUATRO MODELOS

Como se observa de los cuatro sistemas de demanda a estimar (ROT, AID, CBS y NBR) tienen en común la matiz de variables independientes, que consiste en la suma sobre todos los grupos de bienes de las diferenciales de los logaritmos de las cantidades ponderadas por la proporción del ingreso (dan lugar al coeficiente del ingreso), y de las diferenciales de los logaritmos de los precios de cada uno de los bienes (coeficientes de precios).

Para la estimación fue necesario considerar los términos diferenciales como primeras diferencias y se reemplazó la variable w_{it} por el promedio $w^*_{it} = (w_{it}+w_{it-1})/2$.

Se debe resaltar que muchas veces las series de datos (precios y cantidades de consumo) utilizadas en la estimación de formas funcionales de demanda, tienen tendencias lineales, las cuales desaparecen si se toman sus primeras diferencias. Esta es quizá una de las razones por la cual los sistemas de demanda con forma diferencial tienen un mejor ajuste sobre los datos y por eso son tan utilizados en la práctica.

Se tiene entonces para cada modelo un sistema de ecuaciones de la forma

$y_{it} = \beta_i X_{it} + u_{it}$ con $i = 1,...,5$ y $t = 1,...,33$

$E(u_{it}, u_{jt'}) = 0$ para $t \neq t'$ $i,j = 1,...,5$

$E(u_{it}, u_{it'}) = w_{ij}$ para $t = t'$ $i,j = 1,...,5$

Se supone además que los errores de cada modelo tienen distribución normal, independiente entre observaciones, pero correlacionados entre ecuaciones para las mismas observaciones.

Para cada una de las ecuaciones dentro de estos sistemas la matriz de variables independientes es la misma, por lo que se puede considerar a cada modelo como un conjunto de ecuaciones de regresiones tipo SUR (Seemingly Unrelated Regresions) en el sentido de Zellner. Esto se hace con el propósito de capturar en los errores cualquier omisión de variables.

Antes de correr cualquier regresión múltiple la teoría señala que hay que comprobar la cointegración del vector de variables involucrado, para determinar si la relación entre estas variables es válida en la forma en como se planteado. De acuerdo con Darnell (1994) dos o mas variables están cointegradas si cumplen las siguientes dos condiciones: que todas las variables sean integradas del mismo orden, y que los errores de la regresión por mínimos cuadrados ordinarios sean integrados de orden menor, en este caso interesa que sean integrados de orden cero, es decir que no exista correlación serial de los residuales.

Para verificar estas condiciones se utilizó el estadístico Dickey-Fuller que prueba la hipótesis de autocorrelación de primer orden o raíces unitarias, contra la alternativa de integración de orden cero, para cada variable y cada modelo (residuales).

Los resultados indican que sólo cuatro series del logaritmo de los precios resultan con raíces unitarias con un nivel de significancia del 5%, en el caso de las series individuales. Para los residuales en todos los grupos de bienes y en los cuatro sistemas se rechaza la hipótesis nula de raíces unitarias, por lo que se puede afirmar que todos los vectores son cointegrados.

La estimación de los modelos se llevó a cabo por el método de Mínimos Cuadrados Generalizados los cuales, bajo el supuesto de normalidad de los errores, genera estimadores de máxima verosimilitud, como lo explica Zellner (1962). El cálculo se hizo con el paquete RATS, con dos iteraciones para hacer los cálculos mas exactos (de esta manera se toma la matriz de varianza-covarianza de la matriz de residuales de la regresión anterior) y las restricciones de homogeneidad y simetría impuestas, para facilitar la comparación.

En los sistemas AID, CBS y NBR se calculan los coeficientes de 6 variables para cinco ecuaciones. Sin embargo, para el modelo Rotterdam al imponer las restricciones una de las ecuaciones es redundante, por lo que se incluyen en la estimación del sistema sólo 4 de ellas y los coeficientes de la excluida se imputan de manera que se cumplan las propiedades de homogeneidad y simetría.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

COEFICIENTES ESTIMADOS DE LOS CUATRO SISTEMAS

	ROT		AID		CBS		NBR	
Grupo	b_i	s_{ii}	c_i	s_{ii}	b_i	s_{ii}	b_i	r_{ii}
I	.11481	-.03367	-.03611	-.03512	-.03613	-.0351	.11538	-.03312
	(.01718)	(.01897)	(.01649)	(.01581)	(.01650)	(.0158)	(.01687)	(.01562)
II	.00962	-.00124	.00291	-.00049	.00291	-.00049	.01006	-.00079
	(.00112)	(.00058)	(.00087)	(.00045)	(.00087)	(.00045)	(.00087)	(.00042)
III	.06844	-.00424	-.00021	.01113	-.00221	.01114	.06041	.012481
	(.00884)	(.01094)	(.00860)	(.01010)	(.00860)	(.01011)	(.00907)	(.01077)
IV	.36794	-.01818	.00215	-.01790	.00215	-.01791	.368990	-.01501
	(.01609)	(.02553)	(.01581)	(.02482)	(.01581)	(.02483)	(.01678)	(.02651)
V		-.02636	.01897	-.01614	.01899	-.01615	.162932	-.01651
			(.02179)	(.01392)	(.01279)	(.01392)	(.01301)	(.01438)

Aún cuando los cuatro sistemas tienen la misma matriz de variables dependientes los resultados de los coeficientes muestran grandes diferencias, en el caso de los sistemas Rotterdam y AID las elasticidades proporcionan algunos elementos para realiza una mejor comparación entre los estimadores, usando las siguientes fórmulas:

ROT	AID
$\eta_i = b_i/w_i$	$\eta_i = c_i/w_i + 1$
$\varepsilon_{ii} = s_{ii}/w_i$	$\varepsilon_{ii} = r_{ii}/w_i - 1 + w_i$

Dado que se tiene una serie para cada w_i solo se evaluaron tres puntos; el correspondiente al primer dato de la serie (1961), el del último (1993) y la media.

ELASTICIDADES DEL SISTEMA ROTTERDAM

η_i 1961	Promedio	η_i 1993	ε_{ii} 1961	Promedio	ε_{ii} 1993
0.71630	0.94734	0.79608	-0.21011	-0.27788	-0.23351
2.27161	0.53618	0.99319	-0.29480	-0.06958	-0.12889
1.25549	1.28587	1.15754	-0.07788	-0.07976	-0.07180
0.99048	1.01253	1.00329	-0.04895	-0.05004	-0.04958
			-0.21839	-0.19220	-0.23582

ELASTICIDADES DEL SISTEMA AID

η_i 1961	Promedio	η_i 1993	ε_{ii} 1961	Promedio	ε_{ii} 1993
0.77468	0.70200	0.74958	-1.05882	-1.16858	-1.09928
1.68796	1.16238	1.30079	-1.11268	-1.00964	-1.04143
0.99599	0.99589	0.99630	-0.74124	-0.73759	-0.75257
1.00581	1.00594	1.00588	-0.67672	-0.68588	-0.68209
1.15720	1.16973	1.13834	-1.01301	-1.03259	-0.98051

Se puede observar que las elacticidades precio de la demanda compensada (elasticidad de Slutsky) son todas negativas, lo que indica que no hay problemas con la condición de concavidad. Más aún, las elasticidades para el mismo grupo de bienes estimado por el mismo sistema a lo largo del tiempo no tiene grandes cambios, lo que indica que además de que las proporciones de consumo se mantienen muy estables los estimadores tampoco varían demasiado.

Sin embargo, aunque existe una gran similitud entre las elasticidades ingreso de la demanda de los dos modelos, para las ε_{ii} la variación con respecto al sistema Rotterdam es hasta del 708% para el grupo II (Electricidad) en 1993. Se tiene entonces que para ese año la demanda de electricidad sufre una variación muy pequeña cuando se modifica su precio, según el sistema Rotterdam, pero con el sistema AID la contracción en la demanda es más que proporcional al cambio sufrido por el precio de este servicio. Entonces se sigue la pregunta de ¿cuál de los dos resultados es el que se considera correcto?, para ello se debe realizar una comparación adecuada como la del siguiente capítulo.

CAPITULO V

COMPARACIÓN POR PARES

Hasta ahora se han estimado cuatro diferentes sistemas de demanda cuyas ecuaciones para la estimación econométrica contienen la misma matriz de variables explicativas, no obstante estos sistemas no están anidados, entendiendo por este término que uno de los modelos es un caso particular del otro, es decir que al aplicar ciertas restricciones a los parámetros de alguno, se puede obtener la estimación del otro.

Sin embargo, siguiendo a Barten(1993) se puede construir un modelo que engloba o anida artificialmente dos de los modelos de demanda antes estimados. Considerando que cada uno de los sistemas es de la forma

$$y_{it} = X_t \beta_j + u_{it}$$

Se puede suponer que j=1,2, y que se construye la siguiente combinación lineal

$$\alpha_1(y_{1t} - X_t\beta_1) + \alpha_2(y_{2t} - X_t\beta_2) = v_t$$

Sin pérdida de generalidad se puede establecer $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, reescribiendo el modelo

$$(1-\alpha_2)\, y_{1t} + \alpha_2\, y_{2t} = X_t((1-\alpha_2)\, \beta_1 + \alpha_2\beta_2) + v_t$$

o (25)

$$y_{1t} = X_t((1-\alpha_2)\,\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + \alpha_2(y_{1t} - y_{2t}) + v_t$$

Una condición para estimar esta ecuación es que las matrices de covarianza de los dos modelos sean iguales. Dado que y_{1t} y y_{2t} tienen diferentes valores esperados pero los mismos componentes aleatorios (son explicados por las mismas variables), entonces sus matrices de covarianza son iguales. Otra observación importante es que no es posible estimar β_1 y β_2 individualmente, mientras que el parámetro α_2 sí.

De la ecuación (25) es claro que si α_2 es cero se tiene sólo el primer modelo y si α_2 es igual a uno, lo que se obtiene es el segundo. Entonces se puede probar si el estimador de α_2 es significativamente distinto de cero. Si lo es, el segundo modelo no puede ser excluido del modelo general, es decir, el primer modelo no puede por si mismo explicar los datos adecuadamente.

Además se puede considerar el hecho de que $\alpha_1 = 1-\alpha_2$, y de esta manera probar la contraparte. En otras palabras, si se rechaza la hipótesis nula de $\alpha_1 = 0$, se está rechazando al segundo modelo como una explicación satisfactoria de la realidad.

Finalmente se puede utilizar la ecuación (25) para probar la hipótesis nula de $\alpha_2 = 0$ (ninguna contribución del modelo 2) y de $\alpha_2 = 1$ (ninguna contribución del modelo 1). Por otra parte se puede hacer que los coeficientes de la ecuación (25) satisfagan loas condiciones de homogeneidad y simetría en el momento de la estimación.

Nuevamente se utilizó el programa RATS y sistemas de ecuaciones SUR para la estimación de las 6 combinaciones de pares de modelos(situando a cada uno de ellos alternativamente en la segunda posición) y para los 5 grupos de bienes señalados, con las restricciones de homogeneidad y simetría impuestas. Se reporta como estadístico de bondad de ajuste el error estándar(STD-ESTIM) de la estimación, debido a que la R-cuadrada no es informativa por ser diferentes las variables dependientes para cada par considerado.

Para simplificación de la presentación de los resultados se hace uso de la siguiente notación: α_r, α_a, α_c, α_n, que corresponden a los coeficientes de la variable compuesta por la diferencia de las variables dependientes de los dos modelos involucrados en la estimación. De esta manera se tiene que si α_x ($x = r,a,c,n$) es uno, se estará estimando el modelo que ocupa la segunda posición de acuerdo con la ecuación (25).

RESULTADOS POR GRUPOS DE BIENES

GRUPO I

SISTEMAS	α_r	α_a	α_c	α_n	STD-ESTIM
ROT	1	0	0	0	.00615
AID	0	1	0	0	.00597
CBS	0	0	1	0	.00598
NBR	0	0	0	1	.00633
ROT + AID	.97295	.02204	0	0	.000369
	(.00378)	(.00378)			
ROT + CBS	.97298	0	0	.02701	.000369
	(.00378)			.00378	
ROT + NBR	.99542	0	0	.000457	.000391
	(.000781)			(.000781)	
CBS + AID	0	856.39473	-855.39473	0	.003337
		(84.25352)	(84.25352)		
CBS + NBR	0	0	4.32652	-3.32652	.005931
			(1.07134)	(1.07134)	
AID + NBR	0	4.34086	0	-3.34086	.005915
		(1.06385)		(1.06385)	

GRUPO II

SISTEMAS	α_r	α_a	α_c	α_n	STD-ESTIM
ROT	1	0	0	0	.000344
AID	0	1	0	0	.000284
CBS	0	0	1	0	.000284
NBR	0	0	0	1	.000311
ROT + AID	.009291	.99071	0	0	.000306
	(.00695)	(.00695)			
ROT + CBS	.00931	0	.99069	0	.000306
	(.00696)		(.00696)		
ROT + NBR	.00246	0	0	.99753	.000404
	(.00123)			(.00123)	
CBS + AID	0	674.8885	-673.8885	0	.000229
		(147.64612)	(147.64612)		
CBS + NBR	0	0	1.16832	-0.16832	.000287
			(.2367)	(.2367)	
AID + NBR	0	1.17103	0	-0.17103	.000287
		(.23658)		(.23658)	

GRUPO III

SISTEMAS	α_r	α_a	α_c	α_n	STD-ESTIM
ROT	1	0	0	0	.003064
AID	0	1	0	0	.003092
CBS	0	0	1	0	.003094
NBR	0	0	0	1	.003317
ROT + AID	.43258	.56741	0	0	.002711
	(.04215)	(.04215)			
ROT + CBS	.43284	0	.56715	0	.002712
	(.042167)		(.04216)		
ROT + NBR	.33504	0	0	.66495	.002491
	(.04315)			(.043151)	
CBS + AID	0	1000.7481	-999.74810	0	.001742
		(82.9641)	(82.9641)		
CBS + NBR	0	0	1.54814	-0.54814	.0031
			(1.52145)	(1.52145)	
AID + NBR	0	1.61033	0	-0.61033	.003097
		(1.51829)		(1.51829)	

GRUPO IV

SISTEMAS	α_r	α_a	α_c	α_n	STD-ESTIM
ROT	1	0	0	0	.005552
AID	0	1	0	0	.005562
CBS	0	0	1	0	.005564
NBR	0	0	0	1	.005847
ROT + AID	.6247	.37529	0	0	.003412
	(.03385)	(.03385)			
ROT + CBS	.62487	0	.37512	0	.00341306
	(.03385)		(.03385)		
ROT + NBR	.87221	0	0	.12778	.00471506
	(.02660)			(.02660)	
CBS + AID	0	895.54579	-894.54579	0	.004238
		(45.24988)	(145.24988)		
CBS + NBR	0	0	2.98564	-1.98564	.005764
			(1.09171)	(1.09171)	
AID + NBR		2.9857326		-1.9857326	.005758
		1.0912118		1.0912118	

GRUPO V

SISTEMAS	α_r	α_a	α_c	α_n	STD-ESTIM
ROT	1	0	0	0	
AID	0	1	0	0	.005612
CBS	0	0	1	0	.005614
NBR	0	0	0	1	.005586
ROT + AID	.27002	.72997	0	0	.004633
	(.04888)	(.04888)			
ROT + CBS	.27004	0	.72995	0	.004634
	(.04886)		(.04886)		
ROT + NBR	.17354	0	0	.82645	.005048
	(.03685)			(.03685)	
CBS + AID	0	1488.3692	-1487.3692	0	.004095
		(160.1405)	(160.1405)		
CBS + NBR	0	0	-0.0224857	1.02248	.005766
			(.57352)	(.57352)	
AID + NBR	0	-0.01799	0	1.01799	.005765
		(.57374)		(.57374)	

Para cada pareja se establece que el segundo modelo no contribuye si el estimador del α correspondiente a ese modelo no rechaza la hipótesis nula de que el parámetro sea igual a cero (prueba T). En forma análoga, si el estimador del primer modelo es significativamente igual a cero lo que se plantea es que el segundo es suficiente para representar los datos. Como la suma de las α es uno bastaría usar uno de los parámetros para probar ambas cosas, la primera con la hipótesis nula α igual a cero y la segunda con α igual a uno.

De esta forma se observa que para el primer grupo de bienes (Agricultura), sólo en la combinación ROT + NBR este último no contribuye con la explicación de los datos, y para las demás combinaciones ninguno de los sistemas de demanda puede por sí solo hacer un mejor ajuste.

En el caso de la Electricidad, Gas y Agua, todas las combinaciones que incluyen al sistema ROT lo excluyen de manera que los demás incluso el NBR debieran ajustar mejor solos; esto llama la atención porque en las otras dos combinaciones del NBR su parámetro resulta significativamente igual a cero. Si a todo lo anterior se agrega el hecho de que la única combinación que no se rechaza es la de los sistemas CBS y AID se puede concluir que son estos sistemas de demanda los más aptos para modelar los datos.

Para los tres grupos de bienes restantes (Comercio, Alimentos, Textiles), se observa que para las combinaciones CBS + NBR y AID + NBR, siempre se rechaza la contribución del segundo modelo, mientras todas las demás combinaciones explican mejor que los modelos en forma individual.

A partir de los resultados anteriores es posible generalizar un poco más; por ejemplo, se nota que el sistema NBR es el mas débil ya que es rechazado en todos los grupos de bienes para al menos una combinación y dado que ésta no es la misma siempre se puede afirmar que el problema radica en el sistema mismo y no en las combinaciones en que participa. Por otra parte los únicos que no son excluidos son el CBS y el AID.

Cabe ahora mencionar que el NBR tiene en común con el ROT el coeficiente de ingreso, lo que de alguna manera podría hablar del pobre ajuste que realizan estos parámetros, y por otra parte de lo bien que modelan los del sistema AID que además comparte con el CBS. Lo que ya no es tan obvio es si los coeficientes de precios que mejor ajustan son los del modelo Rotterdam o los del AID, lo cual debe analizarse más a fondo.

COMPARACIÓN GENERAL DE LOS CUATRO MODELOS

Una vez que se han podido determinar comparaciones entre parejas de los distintos modelos, es factible crear un modelo mas general que los anide a todos, esto es posible estableciendo una combinación lineal del tipo

$$\alpha_r y_{rt} + \alpha_a y_{at} + \alpha_c y_{ct} + \alpha_n y_{nt} = X_t \gamma + v_t$$

donde $\gamma = \alpha_r \beta_r + \alpha_a \beta_a + \alpha_c \beta_c + \alpha_n \beta_n$. Y nuevamente se puede normalizar haciendo que la suma de las α sea uno, y así eliminar por ejemplo α_r con lo que resulta la siguiente versión

$$y_{rt} = X_t \gamma + \alpha_c(y_{rt} - y_{ct}) + \alpha_a(y_{rt} - y_{at}) + \alpha_n(y_{rt} - y_{nt}) + v_t \tag{26}$$

Si se fijan los parámetros $\alpha_c = 1$, $\alpha_a = \alpha_n = 0$, los que se está estimando es el sistema CBS. Si se hacen especificaciones análogas se pueden obtener también los sistemas AID y NBR. El modelo ROT corresponde a todos los alfa igual acero. De igual forma es posible calcular cada uno de los pares estimados anteriormente haciendo dos de las alfa cero y estimando sin restricción la tercera, o estimando dos de ellas pero restringiendo su suma a uno.

Sin embargo, existe un problema porque dado que el lado derecho de los sistemas es el mismo para cada modelo esto implica que

$$y_{rt} - y_{ct} + y_{at} - y_{nt} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(y_{rt} - y_{ct}) - (y_{rt} - y_{at}) + (y_{rt} - y_{nt}) = 0 \qquad (27)$$

Lo que significa que las tres variables adicionales en el sistema general son colineales, y por lo tanto no es posible realizar una estimación no restringida de las α. Pero se pude utilizar la ecuación (27) para reescribir la (26) como

$$y_{rt} = X_{t}\gamma + (\alpha_c + \alpha_a)(y_{rt} - y_{ct}) + (\alpha_a + \alpha_n)(y_{rt} - y_{nt}) + v_t$$

$$= X_{t}\gamma + \delta_1(y_{rt} - y_{ct}) + \delta_2(y_{rt} - y_{nt}) + v_t \qquad (28)$$

Debe hacerse notar que sólo se pueden estimar dos parámetros y que no es posible determinar los valores de las α individualmente. Sin embargo la información que aportan es muy valiosa, ya que si se observa de la ecuación (28) el segundo término refleja la diferencia entre los modelos ROT y CBS, osea la diferencia entre coeficientes de ingreso la cual queda parametrizada por la estimación de δ_1. A su vez δ_2 refleja la ponderación que da la estimación a la diferencia entre coeficientes de precios, porque los parámetros que tienen en común ROT y NBR son precisamente los b_i, o coeficientes del ingreso.

Entonces retomando la discusión final del capítulo anterior queda establecido en este modelo general que δ_1 muestra las diferencias entre los coeficientes de ingreso de los sistemas ROT y AID, y δ_2 lo hace para los de precios, por lo tanto $\delta_1 = 1$ se asocia con coeficientes del ingreso tipo AID, mientras que $\delta_2 = 1$ representa los coeficientes de precios para este mismo modelo.

SECTORES	δ_1	δ_2	Error Estándar de la Regresión
GRUPO I	0.95659	834.1210	0.003427
	(.80551)	(91.80512)	
GRUPO II	1.19568	695.42992	0.000232
	(.20056)	(48.59034)	
GRUPO III	-0.0126	1014.86038	0.00171
	(.76075)	(82.09211)	
GRUPO IV	1.89074	889.11108	0.004325
	(.84787)	(148.96813)	
GRUPO V	1.94302	1537.65533	0.004037
	(.55817)	(171.18767)	

Los resultados de las estimaciones muestran que para todos lo grupos de bienes no se rechaza la hipótesis nula de que δ_1 sea uno, es decir, que los coeficientes de ingreso del sistema AID son los que mejor ajustan los datos. Mientras que para el parámetro δ_2 se rechaza en todos los casos esta misma hipótesis, lo que indica que los coeficientes de precios que explican en forma más exacta son los del sistema ROT. Entonces si se hace una combinación con los parámetros de ambos sistemas que resultaron mejores, lo que se obtiene es un modelo del tipo CBS.

Esto último es consistente con los resultados obtenidos para las comparaciones por pares, ya que en casi todas las parejas que incluían al sistema CBS, no se le rechazaba como parte determinante en la explicación de los datos.

Entonces puede decirse que de entre un grupo de sistemas diferenciales de demanda como los elegidos, el híbrido CBS es el mejor. Sin embargo hay que considerar que la comparación sigue siendo restringida, en el sentido de que fuerza a los sistemas a tener una misma matriz de variables independientes.

CONCLUSIONES

El propósito central de la teoría de la elección del consumidor es explicar la asignación del ingreso de un consumidor o riqueza, entre los bienes disponibles, los cuales pueden ser comprados en el mercado. Cada vez es mayor el número de funciones de demanda que pretenden lograr esta explicación de la decisión de consumo, haciendo uso de formas funcionales mas sencillas de estimar y más completas desde el punto de vista teórico.

Sin embargo elegir el mejor modelo no es tarea fácil, de ahí la búsqueda de una forma de comparación satisfactoria para la elección del modelo mas adecuado. La idea de construir un sistema que incluya dos o mas funciones de demanda es trabajar con un modelo más flexible para el análisis de las decisiones de consumo. Se eligieron sistemas cuya forma funcional es diferencial, ya que ha sido comprobado empíricamente por algunos expertos que son los que mejor ajustan. Pero fue necesario construir una sistema de anidamiento artificial entre ellos para llevar a cabo la comparación, utilizando el método de adición de variables de McAleer el cual fue aplicado por Barten (1993) a los cuatro sistemas de demanda utilizados en este trabajo.

El análisis empírico muestra que para cada sistema por separado, los parámetros no siempre resultan significativos, de hecho son pocos los que pasan la prueba T satisfactoriamente. El que la estimación no sea tan buena puede deberse en principio a los datos, que fueron obtenidos de fuentes diferentes y que llegó a darse el caso de inconsistencia en algunas series reportadas en las Cuentas Nacionales.

De la comparación por parejas se tuvo que el mas débil de los sistemas resultó ser el NBR, ya que su contribución fue rechazada en muchos de los pares que formaba, además se pudo resaltar el buen ajuste que proporcionaron los coeficientes del ingreso del sistema AID, ya que son los que comparte con el sistema CBS y en varias de las parejas que estos dos sistemas participaban se rechazó la hipótesis de que el otro modelo podía representar los datos de una manera mas efectiva. Esto viene a confirmarse con la estimación del modelo general, ya que indica que los estimadores de los coeficientes del ingreso del AID y los de precios del sistema ROT son los mas aptos para modelar los datos de los cinco grupos de bienes. Y una combinación de estos dos sistemas se encuentra en el CBS.

Como advertencia final hay que hacer notar que a pesar de que se llega a un sistema que puede describir mejor la realidad para este grupo de datos, no quedan excluidos otros sistemas de demanda que no fueron estimados en este trabajo. Además este es solo un pequeño paso dentro del análisis del comportamiento del consumidor, que podría ser mucho mas detallado si se desagregan mas los grupos de bienes y se contara con un mayor número de datos a lo largo del tiempo. E incluso se podría probar con nuevas combinaciones de los modelos propuestos, así como incluir otras variables que se pudieran considerar relevantes por el contexto en el que se dieron las decisiones de consumo.

BIBLIOGRAFÍA

-Barten, A., (1993), "Consumer Allocation Models: Choice of Functional Form", Empirical Economics, vol. 18, no.1.

-Christensen, L., Jorgenson, D., Lau, L., (1975), "Trascendental Logarithmic Utility Function", American Economic Review, vol. 5.

-Darnell, A., (1994), "A Dictionary of Econometrics", edit. Edward Elgar Publishing Limited, Inglaterra.

-Deaton, A., Muellbauer, J., (1980), "An Almost Ideal Demand System", American Economic Review, vol. 70.

-García Alba, P., (1986), "Especificación de un Sistema de Demanda y su Aplicación a México", Revista Estudios Económicos, El colegio de México.

-INEGI, Sistema de Cuentas Nacionales, Tomo II: Oferta y Utilización de Bienes y Servicios, 1970-1993.

-Keller, W., van Driel, J., (1985), "Differential Consumer Demand System", European Economic Review, vol. 27.

-Neves, P., (1954), "Analysis of Consumer Demand in Portugal, 1958-1981", Mémoire de maitrise en sciences économiques, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

-Stone, R., (1954), "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand", The Economic Journal, vol. 64.

-Theil, H., (1965),"The Information Approach to Demand Analysis", Econometrica, vol. 33.

-Zellner, A., (1962), "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Test for Aggregation Bias", Journal of the American Statistical Association, vol. 57.

ANEXO

CONSUMO PRIVADO NOMINAL POR GRUPO DE BIENES

AÑO	1	2	3	4	5
1960	16923.9	529.8	5109.8	38285.3	11564.3
1961	17901.4	555.3	5676.6	41792.7	11557.2
1962	18798.3	680.9	6400.3	43639.5	12164.4
1963	20837.8	786.9	6901.8	48015.3	12783.4
1964	23989.5	916.4	7739.8	56369.2	16948.5
1965	24799.5	1017.5	8675.8	61374.2	18932.8
1966	26173.2	1138.1	9335.8	66795.4	20999.1
1967	28577.8	1228.4	10400.9	70874.1	24902.1
1968	30215.4	1350.1	12406.9	77761.7	27510.9
1969	32135.3	1512	13213.8	85811.5	32715
1970	35427.7	1681.7	15229.9	94908.3	37769.2
1971	43111	1704	18283.4	107755.6	42391.2
1972	47548	1942	24112.6	118400.5	50004.5
1973	58584.5	2247	28978	144999.9	61169
1974	76072.8	2912	38112.1	196216.3	74388.8
1975	89673	3462	46149.3	233315.9	83936
1976	102989.7	4165	57145.1	285240.3	104392.4
1977	137251.7	5691	73699.6	384218	133242.2
1978	173775.1	6430	95134.8	463941.9	172150
1979	216310.7	8423	123776.2	553749.2	229643.3
1980	295012.6	11098	167686.9	706323.8	311396.9
1981	385720.9	15084.9	236766	933000.2	411227.9
1982	553323	25913	400470	1596983	651109
1983	1068382	55176	799144	2930520	1219451
1984	1915857	100786	1284217	5263864	2004718
1985	3250842	152680	1891455	8679299	3311405
1986	6552207	350310	3495624	15169919	5456657
1987	14981178	592116	8879763	35239861	12428162
1988	28491052	1304342	20969658	74584418	26641036
1989	36262643	1631306	29137982	96136760	32078098
1990	52661853	2464509	39695082	123827716	40015546
1991	61730290	2967743	51182148	157336512	48691746
1992	68878491	4012675	61852759	181817429	54449341
1993	76275678	4166513	70384641	194992356	54308592

CONSUMO PRIVADO REAL POR GRUPO DE BIENES

AÑO	1	2	3	4	5
1960	21736.8	568.5	7189.1	49189.4	16441.8
1961	22221.3	593.8	7769.4	52734.4	16663.2
1962	22847.5	689.7	8443.9	53892.7	17074
1963	24898.7	794.8	8961	57869.7	17552.7
1964	27748.2	924.5	9770	65016	21973.6
1965	28480.7	1022.7	10781.4	69653	23574.8
1966	29886.7	1135.5	11169.5	74615.2	25298.4
1967	31709.7	1237.5	12084.7	77076.5	28166.4
1968	33648.6	1361.8	13749.5	83053	30268.2
1969	34367.4	1525.2	13923.4	89959.3	33239.9
1970	35427.7	1681.7	15299.9	94908.3	37769.2
1971	42378.9	1726	16279.1	96945.3	41336.5
1972	43053.5	1955.7	19706.3	102964.9	45465.1
1973	45572.3	2138	21052.7	110206.2	48177.6
1974	46991.1	2362.3	21588.2	115489.3	48276.9
1975	49797.1	2612.8	22368.5	120739.8	49948.7
1976	50195.8	2900.1	22766.3	125442.4	51283
1977	52116.7	3199.9	22582.7	129814.8	54802.5
1978	55358.9	3570.1	24847	135301.2	58216.1
1979	58003.8	3944.9	26912.5	145188.3	64744
1980	61924.4	4313	28519	154845.3	66988.8
1981	65192.2	4845.1	30416.2	162418	71533.7
1982	63954.047	5956.5391	30856.796	184206.46	74719.019
1983	65893.309	6124.7434	29743.828	181037.57	68803.54
1984	69644.525	6357.6137	27990.984	184390.43	69587.79
1985	70746.405	6795.3808	25347.664	189845.16	71676.952
1986	71726.951	7227.6985	24846.803	188744.84	68313.121
1987	74248.06	7488.9056	26154.664	188317.77	62053.194
1988	73071.956	7949.9235	26516.34	188570.51	63033.822
1989	69407.834	8904.2921	28770.045	203149.08	67710.967
1990	75826.77	9599.2701	30801.258	211842.57	71667.081
1991	77518.999	10352.012	32359.38	222833.5	71600.922
1992	76383.11	11273.684	34140.163	233712.29	73900.954
1993	80247.156	11927.247	34640.853	235868.03	70563.166