



EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

“ENSAYOS DE ECONOMÍA FINANCIERA”

TESIS PRESENTADA POR:

CARLOS ALBERTO REYES MARTÍNEZ

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTOR EN ECONOMÍA

PROMOCIÓN 2008-2011

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ MIGUEL TORRES GONZÁLEZ

MÉXICO, D.F.

DICIEMBRE DE 2012



CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

CONSTANCIA DE APROBACIÓN

Doctorante: Carlos Alberto Reyes Martínez
Tesis: *Ensayos de Economía Financiera.*
Director de Tesis: Dr. José Miguel Torres González

Aprobada por el Jurado Examinador:

Dr. Eneas Caldiño García	Presidente	_____
Dr. José Miguel Torres González	Primer Vocal	_____
Dr. Daniel Ventosa-Santaulària	Vocal Secretario	_____
Dra. Begoña Fernández Fernández	Suplente	_____

México, D.F., 5 de diciembre de 2012

Dedicatoria

Con Amor:

A mi esposa, Génesis.

A mis padres, Clotilde y Pablo.

Agradecimientos

En mi estudio de la ciencia económica he tenido la fortuna de estar rodeado de las personas correctas: personas que me han brindado su apoyo en distintos aspectos para poder llegar a este punto en mi carrera. A ustedes les expreso mi gratitud en un arreglo insuficiente de palabras.

Mi primer agradecimiento es para el Dr. Miguel Torres, quien además de dirigir el trabajo que aquí se presenta ha sido un maestro en mi búsqueda de conocimiento en diversas áreas. Agradezco su paciencia, dedicación y ejemplo de compromiso con la investigación. Su generosidad hacia sus alumnos es bien conocida y apreciada.

Al iniciar el doctorado tuve la oportunidad de contar con la guía del Dr. Gonzalo Rangel, a quien le agradezco su disposición, gentileza y acierto al orientar mis inquietudes académicas por un camino que me ha dado grandes satisfacciones.

Agradezco a la Dra. Begoña Fernández, al Dr. Eneas Caldiño y al Dr. Daniel Ventosa-Santalàuria, los miembros de mi comité doctoral, por sus valiosos comentarios y el tiempo dedicado a revisar mi trabajo.

La persona más cercana a lo largo del doctorado fue sin duda alguna Génesis, mi esposa. Su amor, paciencia, compañerismo, amistad y apoyo, son sólo algunas de las razones por las que estoy profundamente agradecido. Agradezco la luz que trae a mi vida y el impulso que en todo momento dio al proyecto que hoy se materializa en esta tesis.

Agradezco a mis padres por ser las personas que siempre han estado ahí para brindarme lo mejor de sí, por formarme como la persona que soy mediante consejos y ejemplo, por su dedicación, sacrificio y amor incondicional.

Agradezco a Vero y a Rol por ser buenos hermanos. Los momentos difíciles por los que tuvimos que pasar en años recientes fueron más llevaderos gracias a su apoyo.

Agradezco a mis amigos de la maestría y doctorado por su camaradería, buen humor y compañerismo, que hicieron más agradables estos años. Especial mención merecen Allan y Pablo quienes me ayudaron en la obtención de la información y con comentarios sobre la tesis.

Agradezco el apoyo que me brindaron a través de la Coordinación Académica del CEE el Dr. Raymundo Campos, el Dr. Isidro Soloaga y el Dr. David Cantala.

No puedo dejar de expresar mi gratitud hacia El Colegio de México, institución grande, noble y generosa. La oportunidad que se me brindó de ser estudiante en este lugar es invaluable.

Índice

Introducción	3
1. Modelo de Dos Factores con Dinámica DCC en la Evaluación del Riesgo de Crédito	7
1.1 Introducción	7
1.2 Riesgo de crédito y correlaciones	8
1.3 Modelo de dos factores con dinámica DCC	11
1.4 Estimación del modelo y resultados	16
1.5 Conclusiones	27
2. Faltante Marginal Esperado Condicional con Choques Locales y Externos	29
2.1 Introducción	29
2.2 MES condicional de dos factores	32
2.3 Estimación del modelo y resultados	39
2.4 Conclusiones	49
3. Implicaciones del <i>Carry Trade</i> para Portafolios Internacionales	51
3.1 Introducción	51
3.2 Modelo para el inversionista internacional	55
3.3 Metodología de estimación y solución del modelo	69
3.4 Descripción de datos y resultados	77
3.5 Conclusiones	89

Bibliografía	91
Apéndices	105
Apéndice 1.A Análisis de componentes principales	105
Apéndice 2.A Estimador no-paramétrico	106
Apéndice 2.B Correlaciones ajustadas	109
Apéndice 2.C MES para empresas no financieras	113
Apéndice 3.A Dinámica de los precios en divisa n	116
Apéndice 3.B Solución óptima en V	117
Apéndice 3.C Significancia económica de ignorar los saltos en el tipo de cambio	120
Apéndice 3.D Parámetros de los procesos de difusión	121

Introducción¹

En las últimas cuatro décadas los mercados financieros han evolucionado en sofisticación y alcance. Lo y Merton (2009) mencionan que hay razones para creer que la innovación financiera continuará a un paso acelerado en el futuro debido a los costos decrecientes de su implementación y a la creciente competencia financiera nivel global. Una característica distintiva de la economía financiera es la cercanía y retroalimentación de la práctica con la investigación. Se anticipan, por lo tanto, nuevos retos para la investigación en finanzas. La Gran Crisis Financiera de 2007-2009 se encargó de indicar los temas relevantes en la agenda, como son la regulación del sistema financiero orientada a prevenir eventos sistémicos; la incorporación de la heterogeneidad y la dinámica institucional en los modelos tradicionales; la necesidad de replantear la administración de riesgos de tal forma que permita a los usuarios un mejor entendimiento del problema económico subyacente y de las limitaciones de los modelos; el desarrollo de mejores herramientas de cómputo para problemas específicos de finanzas cuantitativas y de acceso más general; entre otros.

Teniendo esta agenda en mente, en esta tesis se estudia la elección óptima de portafolios de activos financieros, así como los riesgos relevantes para éstos. Se hace énfasis en estudiar situaciones de estrés en los mercados financieros, a saber: el riesgo de crédito, el riesgo sistémico y el riesgo de saltos en el tipo de cambio.

Muchos de los modelos de riesgo de crédito empleados en el medio financiero son modelos estáticos, hecho que generó problemas en los modelos de crédito de instrumentos financieros estructurados durante la crisis financiera de 2007-2009 por su poca capacidad de incorporar información de mercado de forma oportuna. En el primer capítulo se presenta un modelo econométrico dinámico para evaluar el riesgo de crédito. Se considera una especificación en la que los rendimientos siguen tanto a un factor local como a un factor global. La volatilidad y la correlación de dichos factores se modelan de forma condicional, es decir, varían en el tiempo. Este modelo está pensado para mercados financieros para los que la información local y la información externa son relevantes para el proceso de formación de precios, como el mercado accionario mexicano. Al analizar los rendimientos agregados de un portafolio de

¹ Los primeros dos artículos fueron co-asesorados por el Dr. Miguel Torres y el Dr. Gonzalo Rangel.

acciones de la Bolsa Mexicana de Valores, se obtienen funciones de distribución consistentes con el hecho estilizado de exceso de curtosis durante episodios de estrés económico, como las crisis de 1994-1995 y 2007-2009.

Los mercados financieros tienen como funciones primordiales la provisión de financiamiento y la transferencia de riesgos en la economía. Existen situaciones donde estas funciones se ven seriamente comprometidas, y al riesgo de que esto ocurra se le conoce como riesgo sistémico. En el segundo capítulo se propone una medida de riesgo sistémico para mercados financieros altamente ligados a un mercado externo (regional o global). Siguiendo la metodología propuesta por Engle y Brownlees (2010) se desarrolla un modelo econométrico para estimar el Faltante Marginal Esperado (*Marginal Expected Shortfall*, abreviado MES) empleando únicamente información de mercado. Se propone una especificación de dos factores, de tal forma que los rendimientos van a estar determinados por choques externos, locales e idiosincráticos. Esta representación permite estimar al MES a partir de las volatilidades condicionales, las correlaciones condicionales y la dependencia en la cola izquierda de la distribución conjunta de los choques. Se estima el modelo y se obtiene una lista ordenada para un grupo de instituciones financieras que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores.

El *carry trade* es una estrategia que por más de 50 años ha probado generar rendimientos altos por períodos prolongados de tiempo, seguidos por grandes pérdidas después de colapsos repentinos en los tipos de cambio. En el tercer artículo se estudian las implicaciones de estos saltos en los tipos de cambio en la elección de portafolios internacionales. Se provee una solución cerrada al problema del inversionista internacional, empleando la descomposición ortogonal de Aït-Sahalia, Cacho-Díaz y Hurd (2009) y definiendo una nueva distribución de probabilidad para la magnitud de los saltos. Lo anterior extiende el modelo teórico de Torres (2007) de tres a un número arbitrario de activos. En la implementación empírica del modelo también ampliamos el alcance al ir de tres países a cinco países. Otra contribución consiste en proponer un camino para la estimación del modelo mediante la combinación de diversas metodologías econométricas y numéricas. Los parámetros del modelo se estiman mediante una adaptación de la metodología de GMM Espectral. En esto seguimos a Torres (2007). Sin embargo, además de identificar los momentos para el modelo con saltos normales, también identificamos los momentos de nuestra distribución, la cual es una adaptación de la distribución Bernoulli Multivariada. También proponemos el uso de cuadraturas Gaussianas

distintas a las empleadas por Torres (2007) como parte de la solución numérica de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman de nuestro problema de optimización. El parámetro de intensidad común de los saltos se compara con los parámetros de intensidad univariados de la metodología de *Expectation Maximization*. Este análisis es innovador y da elementos para una adecuada calibración de dicho parámetro. El modelo con saltos de magnitud normal induce una mayor curtosis que el modelo cuyos saltos siguen la distribución que proponemos. Sin embargo, cuando el promedio de los saltos es grande, nuestra distribución captura mejor la curtosis. Encontramos que la introducción de saltos aumenta la volatilidad de los tipos de cambio y que las correlaciones de los saltos van en sentido contrario a las correlaciones Brownianas. El modelo nos permite también cuantificar el equivalente cierto necesario para compensar al inversionista miope que no toma en cuenta los saltos en los tipos de cambio. Las recurrentes crisis financieras han cuestionado reiteradamente nuestro entendimiento de las implicaciones que tienen los eventos de estrés en los mercados financieros para la selección de portafolios. No hay razones para pensar que este desafío a nuestro entendimiento sea menor en el futuro, por lo que la agenda de investigación es amplia y en constante evolución.

Capítulo 1

Modelo de Dos Factores con Dinámica DCC en la Evaluación del Riesgo de Crédito

1.1 Introducción

Las recientes turbulencias en los mercados financieros han resaltado la necesidad de revisar los modelos tradicionales de medición del riesgo financiero. En el presente trabajo se plantea una metodología para evaluar de forma condicional el riesgo de crédito de un portafolio de activos usando información de mercado. Se parte de una representación de factores para los rendimientos de los activos, que tiene en cuenta que para ciertos mercados de valores es relevante la información del mercado local y la información proveniente de choques globales o regionales. En el caso de México esta intuición económica es capturada por el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores y por el índice (global) Standard & Poor's (S&P 500), representativo de los mercados accionarios estadounidenses. La matriz de varianzas y covarianzas del portafolio se modela de forma condicional combinando la especificación DCC de Engle (2002) para las correlaciones y especificaciones GARCH para las volatilidades. Esta forma de estimar la matriz de varianzas y covarianzas y la representación de factores permiten reducir de forma significativa el número de parámetros a estimar respecto a otros modelos que emplean procesos GARCH multivariados.

Siguiendo la metodología de Berd, Engle y Vornov (2007) se aprovecha la especificación de factores para obtener una expresión analítica de la función de distribución de los rendimientos agregados del portafolio.

Se estima el modelo para un portafolio de 10 acciones de empresas mexicanas grandes. Se trabaja bajo el supuesto de portafolio de pesos iguales (*equally weighted*), sin embargo se permite heterogeneidad en el peso de los factores y en las volatilidades idiosincráticas. La muestra va de 1994 a 2009 para poder analizar el desempeño del modelo durante la crisis de 1994/1995, de origen mexicano, y durante la crisis de 2007/2009, de origen externo

(estadounidense). Las funciones de distribución que se obtienen describen de forma adecuada el comportamiento de los rendimientos agregados para el período correspondiente. Se estima también un modelo de un factor (IPC) para efectos comparativos. El modelo de dos factores logra capturar colas más anchas, para los períodos de crisis antes mencionados, que el modelo de un factor y que la función de distribución empírica histórica.

En la siguiente sección se describe de manera breve el contexto teórico y metodológico en el que se ubica el presente trabajo y que permite apreciar más claramente las ventajas y desventajas del modelo propuesto: por un lado se tiene la literatura concerniente al riesgo de crédito de un portafolio y por el otro la que tiene que ver con la modelación de la matriz de varianzas y covarianzas. Lo deseable es contar con un modelo que incorpore la información disponible de forma condicional a las interacciones entre los activos que conforman el portafolio y que son determinantes del riesgo de crédito. Claramente esto no aplica para todo tipo de riesgo de crédito, pero sí para aquellos casos donde se cuenta con los precios de mercado de los instrumentos del portafolio.

En la tercera sección se presenta el modelo econométrico propuesto; se detallan las componentes y supuestos del mismo, haciendo especial énfasis en la representación bifactorial, en el modelo DCC y en el desarrollo analítico de la función de distribución. En la cuarta sección se estima el modelo y se presentan los resultados. Finalmente se concluye y se sugieren posibles extensiones al modelo.

1.2 Riesgo de Crédito y Correlaciones

La evaluación del riesgo de crédito puede ser de forma individual o de forma conjunta. Este último caso es el que nos ocupa: el riesgo de crédito de un portafolio.

Tomemos como referente² a tres modelos representativos de la medición del riesgo de crédito: CreditMetricsTM, desarrollado por J.P. Morgan (1997); CreditRisk+ (1997), desarrollado por

² Hay que tener en cuenta las instituciones financieras consideran estos modelos como parte de su capital intelectual y por lo tanto resulta complicado conocer con certeza cuáles son los modelos más empleados en la industria.

Credit Suisse/First Boston; y CyRCE³ de Márquez (2002). Los dos primeros alcanzan la categoría de paradigma y el último, sin ser representativo en la industria, es un modelo desarrollado en México bajo el auspicio de la autoridad reguladora (Banco de México) y que da un tratamiento completo al tema de riesgo de crédito cuyas características merece la pena comentar.

CreditMetricsTM es un modelo que emplea como insumos precios de mercado y calificaciones de crédito. Modela la transición a distintos estados de calidad crediticia, incluido el estado de incumplimiento. Se requiere contar con probabilidades de transición proporcionadas generalmente por una calificadora o generadas de modo interno, lo cual es un supuesto no trivial. El modelo logra capturar curtosis en la cola de la distribución no-condicional de los rendimientos, también se pueden modelar correlaciones no-condicionales mediante el uso de factores.

CreditRisk+ se origina en el contexto de la teoría del riesgo, como respuesta a los problemas de administración actuarial de los portafolios de activos contingentes de las aseguradoras. Por esta razón, al extender el modelo para evaluar el riesgo de crédito, se incorporan características útiles como son la concentración y el tamaño de los riesgos. A diferencia de CreditMetricsTM, en CreditRisk+ únicamente se contemplan dos estados de la naturaleza: el estado de pago y el estado de no-pago. La probabilidad de incumplimiento es una variable Poisson cuyo parámetro característico (tasa de incumplimientos) a su vez sigue un proceso gamma. El portafolio se segmenta en sectores independientes de acuerdo al peso que tienen determinados factores sistemáticos e idiosincráticos sobre el instrumento. Esta segmentación en sectores independientes permite pasar de las distribuciones marginales a las conjuntas sin mayor dificultad. El modelo logra describir efectos de concentración y volatilidad en las probabilidades de incumplimiento. Finalmente, es posible capturar la acumulación de probabilidad en la cola izquierda de la distribución. La modelación es condicional a los factores pero no al conjunto de información que se actualiza en el tiempo. Una desventaja clara de CreditRisk+ es que no se toman en cuenta estados intermedios de calidad crediticia.

CreditMetricsTM sirve para instrumentos con precios de mercado, lo que excluye hipotecas, créditos al consumo y algunos activos exóticos. CreditRisk+ puede usarse para bonos,

³ El nombre proviene de Concentración y Riesgo de Crédito.

derivados y préstamos. Para una comparación más extensa de estos modelos se puede consultar Gordy (2000).

El modelo CyRCE de Márquez (2002) presenta algunas características importantes: bajo ciertos supuestos, se puede llegar a una expresión cerrada del VaR; se puede dividir el portafolio en segmentos no homogéneos y analizar correlaciones intra (*within*) e inter (*between*); se mide explícitamente la contribución individual al riesgo y la contribución por concentración, medida por el índice Herfindahl-Hirschman.

El modelo propuesto en la siguiente sección no requiere calificaciones de crédito y recurre a supuestos distribucionales menos restrictivos para obtener la función de distribución de los rendimientos y para simular el comportamiento de los activos en el portafolio y sus interacciones en el tiempo.

Una desventaja importante de los modelos que emplean calificaciones de crédito es que dichas calificaciones no incorporan en tiempo real la información sobre el instrumento y con frecuencia éstas se determinan tomando como base la experiencia de otros países. Además, aunque cada día se emiten calificaciones más ad-hoc, la credibilidad de las mismas se ha deteriorado al no haber anticipado adecuadamente los eventos que llevaron a la crisis de 2007/2009.

Una vez que se ha optado por incorporar información de forma más oportuna al modelo, se presenta el problema de estimar la matriz de varianzas y covarianzas condicional, H_t :

$$r_t = H_t^{1/2} \xi_t \quad (1.1)$$

$$H_t = \text{Var}(r_t | F_{t-1})$$

ξ_t es Ruido Blanco Estricto (0,I)

Donde $\{r_t\}$ es un vector de rendimientos de dimensión $n \times 1$ con media cero y F_t es el conjunto de información generado por el proceso observable $\{r_t\}$.

Para la modelación de esta matriz por lo general se recurre a los modelos GARCH multivariados⁴, que son una generalización del modelo GARCH univariado de Engle (1982) y Bollerslev (1986). Un problema común a estos modelos es la disyuntiva entre flexibilidad y parsimonia de los modelos: por lo general los modelos más flexibles requieren estimar un alto

⁴ Para una revisión de literatura más completa sobre modelos multivariados de volatilidad se puede consultar los trabajos de Bawens, Laurent y Rombouts (2006); Rue S. Tsay (2007); y Silvennoinen y Teräsvirta (2008).

número de parámetros. Engle (2002) propone el modelo DCC que reduce la dimensión del problema. Este modelo descompone el problema multivariado en estimaciones univariadas de la volatilidad y las correlaciones, las cuales siguen procesos condicionales autorregresivos. Esta especificación es la que se elige para modelar la matriz de varianzas y covarianzas de los factores que se presenta en la siguiente sección.

1.3 Modelo de Dos Factores con Dinámica DCC

Al situarnos en el contexto de una economía globalizada, es natural pensar en una alta correlación entre eventos económicos tanto a nivel local como a nivel global. Este efecto se acentúa en épocas de inestabilidad económica, como quedó claro en la crisis 2007/2009, cuando eventos originados en los mercados internacionales de crédito (principalmente en E.U.A.) tuvieron repercusiones en un gran número de países en distintas dimensiones: producción, consumo, mercados laborales, comercio, el crédito mismo, etc.

Aún sin la presencia de eventos sistémicos, la interacción de los agentes, el valor de las empresas y el valor de los activos van a cambiar en el tiempo. Una medición adecuada del riesgo de crédito debe tomar en cuenta estos cambios. Sin embargo, es importante identificar los factores relevantes que determinan los cambios en el valor de un portafolio.

La especificación de los rendimientos mediante factores tiene su antecedente en los modelos CAPM de Sharpe (1964) y Lintner (1965), y APT de Ross (1965), los cuales dan al factor de descuento estocástico una representación lineal.

Berd, Engle y Voronov (2007) proponen una especificación simétrica de un factor para los rendimientos a fin de evaluar el riesgo de crédito de los *tranches* de las *Collateralized Debt Obligations*⁵:

$$r_{i,t} = \beta r_{m,t} + \sigma \varepsilon_{i,t} \quad (1.2)$$

⁵ Las *Collateralized Debt Obligations* (CDO) son portafolios de deuda estructurada muy generales que se dividen en sub-portafolios (*tranches* o tramos) con distintos perfiles de riesgo y distintas prioridades de pago. Los flujos generados por los activos comprendidos en el CDO se dirigen primero a los *tranches* de mayor *seniority*. Por lo tanto los tramos más *junior* deben ofrecer una mayor compensación por riesgo. No existe una metodología generalmente aceptada para valuar este tipo de instrumentos que, de acuerdo a sus particularidades, pueden llegar a ser sumamente complejos.

Ellos descomponen los rendimientos en una parte sistemática, que tiene que ver con el rendimiento promedio del mercado ($r_{m,t}$) y una parte idiosincrática ($\sigma\varepsilon_{i,t}$). El peso del factor de mercado y la volatilidad idiosincrática se suponen constantes e idénticos para todos los activos.

En el presente trabajo se extiende el modelo anterior al incluir dos factores en la parte sistemática de los rendimientos y permitir heterogeneidad en el peso de dichos factores y en las volatilidades idiosincráticas:⁶

$$r_{i,t} = \beta_i^{M1} r_{M1,t} + \beta_i^{M2} r_{M2,t} + \sigma_i \xi_{i,t} \quad (1.3)$$

donde M1 es el IPC (factor local) y M2 es el S&P 500 (factor global).

La intuición económica que se trata de capturar con esta especificación es que para mercados de valores como el mexicano que se encuentran fuertemente ligados a un mercado más profundo y desarrollado, tanto los choques de este último como los choques locales van ser relevantes en la determinación de los rendimientos de los activos.

Una ventaja adicional de la representación de factores es reducir el problema de la dimensionalidad en la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas mencionado anteriormente. Esto se logra al tener una estructura de correlaciones para los factores que se hereda a las correlaciones entre activos. En el modelo que se presenta, dicha estructura va a estar dada por el proceso de Correlaciones Condicionales Dinámicas (DCC) de Engle (2002). El modelo DCC parte de un resultado estadístico muy básico: la matriz de varianzas y covarianzas puede expresarse como el producto de la matriz diagonal de desviaciones estándar y la matriz de correlaciones. El resultado se mantiene en términos condicionales:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (1.4)$$

Donde:

$$H_t = \text{Var}(\tilde{r}_t | F_{t-1}) = E(\tilde{r}_t \tilde{r}_t' | F_{t-1}) = E_{t-1}(\tilde{r}_t \tilde{r}_t') \quad (1.5)$$

⁶ Una especificación aún más flexible sería permitir que las betas del modelo y la volatilidad cambien en el tiempo empleando modelos del tipo *Factor-DCC* de Engle (2009); el *Factor-Spline-GARCH* de Engle y Rangel (2011); o el modelo Multiplicativo Multivariado de Hafner y Linton (2010).

$\tilde{r}_t = D_t \varepsilon_t$ y ε_t son vectores con media cero y dimensión $n \times 1$

F_t es el conjunto de información generado por el proceso observable r_t

R_t es la matriz de correlaciones condicionales del vector r_t

$D_t = \text{diag}(\sigma_{1t}^{1/2}, \dots, \sigma_{nt}^{1/2})$ es la matriz que tiene en su diagonal las desviaciones estándar condicionales del vector r_t y ceros en las demás posiciones

σ_{it}^2 es la varianza condicional univariada del elemento i del vector r_t

En este trabajo $\tilde{r}_t = (r_{M1,t} \quad r_{M2,t})'$, es decir, el vector de factores va a tener una estructura de correlaciones DCC y por lo tanto la matriz R_t va a ser de dimensión 2×2 .

Es fácil mostrar que la matriz de correlaciones de los rendimientos es la matriz de varianzas y covarianzas de los residuales estandarizados. Asumiendo normalidad tenemos que:

$$\varepsilon_t \sim N(0, R_t) \quad (1.6)$$

La matriz R_t se estima a partir la normalización de la matriz de cuasi-correlaciones Q_t , la cual por lo regular (aunque no necesariamente) se estima de forma autorregresiva.

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{R} + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1} \quad (1.7)$$

donde \bar{R} es la matriz de correlaciones muestral con elementos $\bar{\rho}_{ij}$.

Q_t recibe el nombre de matriz de cuasi-correlaciones pues para asegurarnos de que la matriz de correlaciones, R_t , tenga elementos en el rango $[-1, 1]$ es necesario realizar la siguiente normalización:⁷

$$R_t = (I \odot Q_t)^{-1/2} Q_t (I \odot Q_t)^{-1/2} \quad (1.7.1)$$

Donde \odot es el producto Haddamard (componente a componente).

Podemos ver que la información necesaria para estimar las correlaciones condicionales está contenida en los residuales obtenidos en una primera etapa en la cual se estiman las varianzas condicionales y se estandarizan los residuales.

⁷ Engle y Sheppard (2001) desarrollan de forma extensa las propiedades teóricas de estacionariedad y regularidad de los modelos DCC.

La especificación de dos factores con correlaciones DCC y varianzas *Threshold* GARCH(1,1) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
r_{i,t} &= \beta_i^{M1} r_{M1,t} + \beta_i^{M2} r_{M2,t} + \sigma_i \varepsilon_{i,t} \\
r_{M1,t} &= \sigma_{M1,t} \varepsilon_{M1,t} \\
\sigma_{M1,t}^2 &= \omega + \alpha_{M1} r_{M1,t-1}^2 + \gamma_{M1} r_{M1,t-1}^2 I_{(r_{M1,t-1} < 0)} + \beta_{M1} \sigma_{M1,t-1}^2 \\
r_{M2,t} &= \sigma_{M2,t} \varepsilon_{M2,t} \\
\sigma_{M2,t}^2 &= \omega + \alpha_{M2} r_{M2,t-1}^2 + \gamma_{M2} r_{M2,t-1}^2 I_{(r_{M2,t-1} < 0)} + \beta_{M2} \sigma_{M2,t-1}^2 \\
\begin{pmatrix} \varepsilon_{M1,t} \\ \varepsilon_{M2,t} \end{pmatrix} &\sim N(0, R_t) \\
R_t &= (I \odot Q_t)^{-1/2} Q_t (I \odot Q_t)^{-1/2} \\
q_{ij,t} &= \bar{\rho}_{ij} + a(\varepsilon_{i,t-1} \varepsilon_{j,t-1} - \bar{\rho}_{ij}) + b(q_{ij,t-1} - \bar{\rho}_{ij}) \quad i, j = M1, M2
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Nótese que las varianzas de los factores tienen una especificación *Threshold* GARCH (TARCH) con el fin de capturar el efecto-apalancamiento debido a los rendimientos negativos, o en otras palabras, se le asigna mayor peso a las malas noticias.

Se puede demostrar que con la especificación anterior la función de distribución condicional de los rendimientos de mercado va a ser normal bivariada.

$$\begin{pmatrix} r_{M1,t} \\ r_{M2,t} \end{pmatrix} \sim N(\bar{0}, H_t) = N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{M1,t}^2 & \sigma_{M1,t} \sigma_{M2,t} \rho_{M1,M2,t} \\ \sigma_{M1,t} \sigma_{M2,t} \rho_{M1,M2,t} & \sigma_{M2,t}^2 \end{pmatrix}\right) \tag{1.9}$$

La correlación entre activos va a depender de las correlaciones entre los factores, de los pesos de los factores y de las correlaciones muestrales de las idiosincrasias:

$$\rho_{i,j,t} = \frac{\beta_i^{M1} \beta_j^{M1} H_{11,t} + (\beta_i^{M1} \beta_j^{M2} + \beta_i^{M2} \beta_j^{M1}) H_{12,t} + \beta_i^{M2} \beta_j^{M2} H_{22,t} + Cov(\sigma_i \varepsilon_i, \sigma_j \varepsilon_j)}{\sqrt{(\beta_i^{M1})^2 H_{11,t} + (\beta_i^{M2})^2 H_{22,t} + 2\beta_i^{M1} \beta_i^{M2} H_{12,t} + Var(\sigma_i \varepsilon_i)} \sqrt{(\beta_j^{M1})^2 H_{11,t} + (\beta_j^{M2})^2 H_{22,t} + 2\beta_j^{M1} \beta_j^{M2} H_{21,t} + Var(\sigma_j \varepsilon_j)}}$$

$$i, j = 1, \dots, n \tag{1.10}$$

La estructura recursiva de las distintas componentes del modelo nos permite simular el comportamiento futuro de los rendimientos. Esta característica es importante para poder analizar el riesgo de largo plazo de un portafolio de activos.

Durante la crisis de 2007/2009 los modelos tradicionales funcionaron razonablemente bien para administrar el riesgo de corto plazo. Sin embargo existían numerosas posiciones de largo plazo cuyo riesgo no era claro cómo cuantificar. Para analizar el riesgo de horizontes de tiempo más largos se simula el portafolio de pesos iguales para T días en el futuro a partir de la fecha inicial t. Una vez hecho esto se agregan los rendimientos.

$$r_{p,t \rightarrow T} = w_1 r_{1,t \rightarrow T} + w_2 r_{2,t \rightarrow T} + \dots + w_n r_{n,t \rightarrow T} \quad (1.11)$$

$$w_1 = w_2 = \dots = w_n = w = \frac{1}{n}$$

$$r_{i,t \rightarrow T} = \sum_{s=1}^T r_{i,t+s} \quad (1.12)$$

Esta forma de agregar rendimientos presupone una especificación logarítmica de los rendimientos.

Estamos interesados en estudiar la probabilidad del evento de incumplimiento (*default*), el cual podemos definir como la variable binaria D_p (que toma el valor uno si el default ocurre y cero en otro caso) y hacer un mapeo a un *threshold model* de tal manera que el evento de default ocurre cuando se traspasa cierto umbral de pérdidas, d.

$$D_p = 1 \Leftrightarrow r_{p,t+T} \leq d$$

Haciendo uso de la ley de las expectativas iteradas y de las propiedades de las funciones indicadoras de eventos aleatorios, podemos derivar una expresión conveniente para el evento de default mediante la función de distribución de pérdidas del portafolio de rendimientos agregados:

$$\begin{aligned} P(D_p = 1) &= P(r_{p,t \rightarrow T} \leq d) = E\left(I_{(r_{p,t \rightarrow T} \leq d)}\right) = E\left(E\left(I_{(r_{p,t \rightarrow T} \leq d)} \mid r_{m1,t \rightarrow T}, r_{m2,t \rightarrow T}\right)\right) \\ &= E\left(P\left(r_{p,t \rightarrow T} \leq d \mid r_{m1,t \rightarrow T}, r_{m2,t \rightarrow T}\right)\right) \\ &= E\left(P\left(\sum_{i=1}^n w \sigma_i \varepsilon_{i,t \rightarrow T} \leq d - \beta_{m1} r_{m1,t \rightarrow T} - \beta_{m2} r_{m2,t \rightarrow T}\right)\right) \\ &= E\left(\Phi\left(\frac{d - \beta_{m1} r_{m1,t \rightarrow T} - \beta_{m2} r_{m2,t \rightarrow T}}{\frac{\sqrt{T}}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}\right)\right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde β_{m1} y β_{m2} son los promedios ponderados del peso de los factores para los rendimientos individuales desagregados.

La función de pérdidas del portafolio es el producto final del modelo que nos permite analizar comportamientos extremos del rendimiento del portafolio así como comportamientos más moderados de los mismos.

Aún cuando se parte de un supuesto de normalidad de corto plazo, la dinámica condicional que imponen los modelos DCC y TARCh induce concentración de probabilidad en la cola izquierda de la distribución del riesgo de largo plazo.

1.4 Estimación del Modelo y Resultados

Para analizar las propiedades empíricas del modelo de dos factores se forma un portafolio de pesos iguales con 10 acciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Los factores de mercado están representados por los índices accionarios IPC y S&P 500, debido al alto grado de integración económica de México con E.U.A. En el cuadro 1.1 se presentan algunas estadísticas descriptivas de los excesos de rendimientos de los factores en pesos, los rendimientos del S&P 500 en dólares y los rendimientos del tipo de cambio dólar/peso.

VARIABLE	IPC	SP500	SP500USD	TC
Media	0.000148	0.000096	0.000172	0.000027
Mediana	-0.000169	-0.000177	0.000273	0.000095
Máximo	0.120462	0.200805	0.109572	0.109542
Mínimo	-0.14365	-0.148062	-0.094695	-0.094725
Desv. Est.	0.016559	0.0147	0.012473	0.012472
Sesgo	0.069527	0.949113	-0.204157	-0.195434
Curtosis	9.033537	25.44926	12.05339	12.05789
No. Obs.	3,861	3,861	3,861	3,861

Cuadro 1.1. Estadísticas descriptivas de los factores y del tipo de cambio.

Cabe mencionar que, si bien los candidatos naturales para estudiar el riesgo de crédito son los instrumentos de deuda (bonos) de las empresas, por la poca profundidad de estos mercados en México los precios de estos instrumentos son poco informativos pues existe una gran cantidad de días en que no se registran movimientos. En cambio, los precios de las acciones son más

dinámicos y es posible explotar sus variaciones para intentar conocer el comportamiento de largo plazo. Es decir, este tipo de análisis puede realizarse para activos líquidos con precios de mercado.

Se seleccionan 10 empresas que están entre las más grandes en México: Carso, Cemex, Comercial Mexicana, Elektra, Femsa, Vitro, Banorte, Telmex, Televisa y Wal-Mart de México. En el cuadro 1.2 se muestran algunas estadísticas descriptivas de los excesos de rendimientos logarítmicos de las acciones correspondientes.

VARIABLE	CARSO	CEMEX	COMER	ELEKTRA	FEMSA	GVITRO	NORTE	TELMEX	TLEVISA	WALMEX
Media	0.000133	-0.000252	-0.000448	0.000498	0.000274	-0.000713	0.000135	0.000206	-0.000030	0.000171
Mediana	-0.000249	-0.000486	-0.000466	-0.000389	-0.000381	-0.000533	-0.000532	-0.000466	-0.000406	-0.000408
Máximo	0.219229	0.237851	0.437918	0.212391	0.245186	0.266986	0.269996	0.125677	0.179506	0.17014
Mínimo	-0.192363	-0.241121	-1.402595	-0.210111	-0.352193	-0.260875	-0.24267	-0.100288	-0.191593	-0.160278
Desv. Est.	0.024981	0.026912	0.036763	0.027978	0.025822	0.02876	0.028665	0.019303	0.025471	0.022752
Sesgo	0.045222	-0.087882	-14.73852	0.114127	-0.310779	0.174366	0.112522	0.222633	0.268148	0.167316
Curtosis	9.717663	13.76615	574.2798	10.63012	22.46869	13.39032	11.7778	6.091517	8.757202	8.239137
No. Obs.	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861	3,861

Cuadro 1.2 Estadísticas descriptivas de las acciones de la BMV que integran el portafolio.

Dos casos interesantes son los de Comercial Mexicana y Grupo Vitro, ya que han presentado eventos financieros especialmente complicados en su historia. En particular, en 2008, ambas empresas entraron en procesos de moratoria de pagos y de casi-bancarota.

Las series de precios diarios conforman un panel balanceado que va de julio de 1994 a abril de 2009, período en el que se desarrollan dos de las crisis financieras más importantes de los últimos 20 años: la crisis de 1994/1995, de origen local, y la de 2007/2009, de origen externo. Los precios se transforman a exceso de log-rendimientos. Por consistencia y para evitar efectos de *carry trade* los rendimientos del S&P 500 se expresan en pesos. La tasa libre de riesgo que se considera es la tasa equivalente diaria de la tasa CETE a 91 días.

Al estimar las betas de las ecuaciones individuales de rendimientos nos encontramos con problemas de significancia para algunas acciones, probablemente debido a problemas de colinealidad en los factores en ciertos momentos en el tiempo. Como se puede observar en el gráfico 1.1, las correlaciones DCC entre el IPC y el S&P 500 son bastante altas a la final de la muestra, alcanzando niveles por encima del 60%.

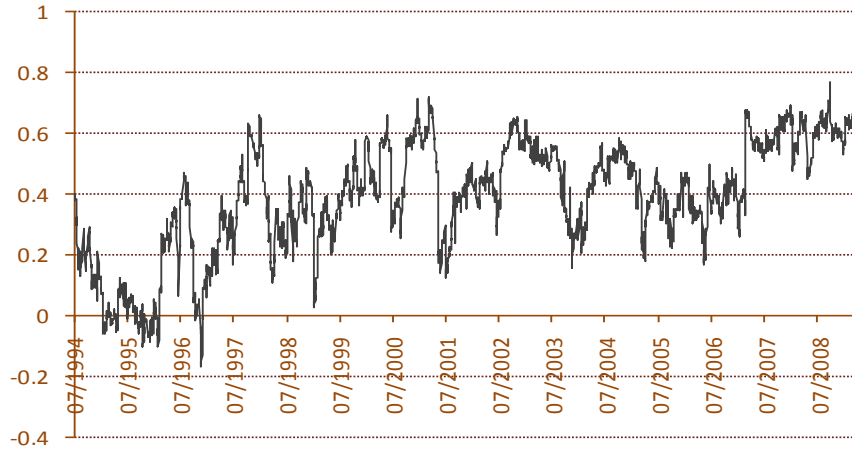


Gráfico 1.1 Correlaciones DCC entre el IPC y el S&P 500.

Con el fin de contar con un factor más significativo que sea función del IPC se realiza una “ortogonalización” consistente en extraer la información contenida en el IPC que no es explicada por el S&P 500, para lo cual se realiza una regresión TARCH(1,1) de los rendimientos del IPC sobre los rendimientos del S&P 500:

$$r_{IPC,t} = \beta r_{SP500,t} + \varepsilon_{i,t} \rightarrow r_{\perp IPC,t} = \varepsilon_{i,t} \quad (1.14)$$

Los residuales de la regresión son la nueva variable IPC_ORT y son heteroscedásticos⁸. Este cambio de variable modifica la ecuación TARCH de la volatilidad del primer factor puesto que, para conservar el sentido económico del efecto apalancamiento, el umbral de los efectos asimétricos no es sobre el IPC_ORT sino sobre la serie original del IPC:

$$\sigma_{\perp IPC,t}^2 = \omega + \alpha_{\perp IPC} r_{\perp IPC,t-1}^2 + \gamma_{\perp IPC} r_{\perp IPC,t-1}^2 I_{(r_{IPC,t-1} < 0)} + \beta_{\perp IPC} \sigma_{\perp IPC,t-1}^2 \quad (1.15)$$

Como era de esperarse, al tomar la nueva variable las correlaciones DCC se reducen (véase el gráfico 1.5) y las betas se vuelven altamente significativas como puede apreciarse en el cuadro 1.3, a excepción de la de Comercial Mexicana la cual es por mucho la relación más débil (aunque mantiene niveles de significancia razonables). También como era de esperarse las constantes son cercanas a cero y no significativas. El peso del factor IPC_ORT, en promedio, es muy cercano a la unidad y el del factor S&P 500 es aproximadamente un medio.

⁸ En el Anexo se hace un análisis de componentes principales para el IPC y el S&P 500, antes y después de la ortogonalización aquí descrita.

VARIABLE	CARSO	CEMEX	COMER	ELEKTRA	FEMSA	GVITRO	NORTE	TELMEX	TELEVISA	WALMEX
C	0.000343 (1.334711)	-0.000031 (-0.101308)	-0.000231 (-0.441977)	0.00067 (1.576722)	0.000508 (2.063278)	-0.000557 (-1.354918)	0.000305 (0.805797)	0.000348 (1.788591)	0.000147 (0.590499)	0.000356 (1.565358)
IPC_OR_T	1.113015 (36.660570)	1.199339 (30.498760)	1.020984 (9.053903)	0.924332 (18.49139)	1.185592 (20.96697)	0.803867 (17.58044)	0.949274 (16.35796)	0.856177 (28.485200)	1.058455 (32.451720)	1.00144 (34.540000)
SP500	0.480787 (15.971730)	0.574945 (11.35428)	0.181575 (1.953223)	0.426663 (9.372048)	0.398371 (7.259164)	0.300209 (6.013019)	0.495121 (14.346670)	0.580223 (20.275720)	0.689516 (22.023770)	0.474188 (13.416320)

Cuadro 1. 3 Resultados de la regresión de mínimos cuadrados de los rendimientos individuales sobre los factores. Los errores son los de Newey-West. Se reportan los respectivos estadísticos t.

Hay que tener en cuenta que las betas constantes a lo largo de la muestra son una simplificación que hace el modelo. Para examinar el alcance de esta simplificación se estiman *rolling* betas con horizontes de 120 días.⁹ En el gráfico 1.2 se presentan los promedios de las *rolling* betas individuales. Se observa que a pesar de que al tomar promedios la variación de las betas se suaviza, aún es posible observar cambios importantes en el peso de los factores. También podemos notar que la fluctuación de las betas se da alrededor de la media de largo plazo que sugieren los estimados en el cuadro 1.

Aunque no existe variación en los rendimientos proveniente del peso de los factores no de las volatilidades idiosincráticas (por ser constantes en el tiempo), la variación proveniente de las volatilidades y de las correlaciones condicionales de los factores es importante y ésta se hereda a los rendimientos individuales.

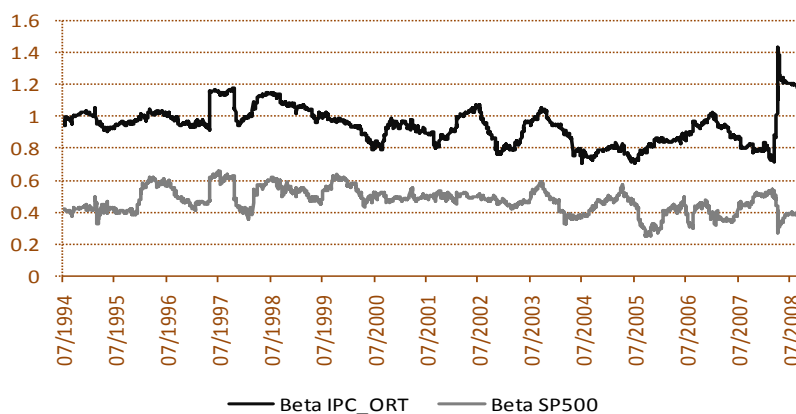


Gráfico 1.2. *Rolling* betas promedio de los activos del portafolio a de 120 días, estimadas con OLS y errores estandarizados Newey-West.

⁹ Como se mencionó anteriormente, para conocer la dinámica condicional de las betas variantes en el tiempo se necesitaría recurrir a una especificación donde las varianzas idiosincráticas se modelen de forma condicional como el Factor-Double-ARCH presentado en Engle (2009). Se obtienen aún mejores estimados con modelos que toman que pueden existir factores latentes omitidos en la especificación de los rendimientos, como el modelo Factor-DCC o el modelo Factor-Spline-GARCH para modelar correlaciones de alta y baja frecuencia de Engle y Rangel (2011).

Los parámetros de las ecuaciones TARCH(1,1) se presentan en el cuadro 1.4 y los correspondientes estimados de las volatilidades en los gráficos 1.3 y 1.4.

Factor	IPC_ORT	S&P 500
α	0.034218 (5.374144)	0.061439 (19.9667)
γ	0.123534 (14.39635)	0.068766 (7.002842)
β	0.894268 (145.0798)	0.889825 (162.0715)

Cuadro 1.4 Estimados de la ecuación de volatilidad TARCH(1,1). La estimación se hace por máxima verosimilitud. La ecuación del IPC_ORT se modifica para tomar en cuenta la asimetría respecto a la serie original IPC.

Los parámetros de persistencia son muy parecidos para los dos factores. Sin embargo, los parámetros de efectos de las innovaciones muestran un mayor efecto de la asimetría de las noticias en el caso del IPC_ORT. En ambos casos se cumple la condición de estacionariedad

$$\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma < 0.$$

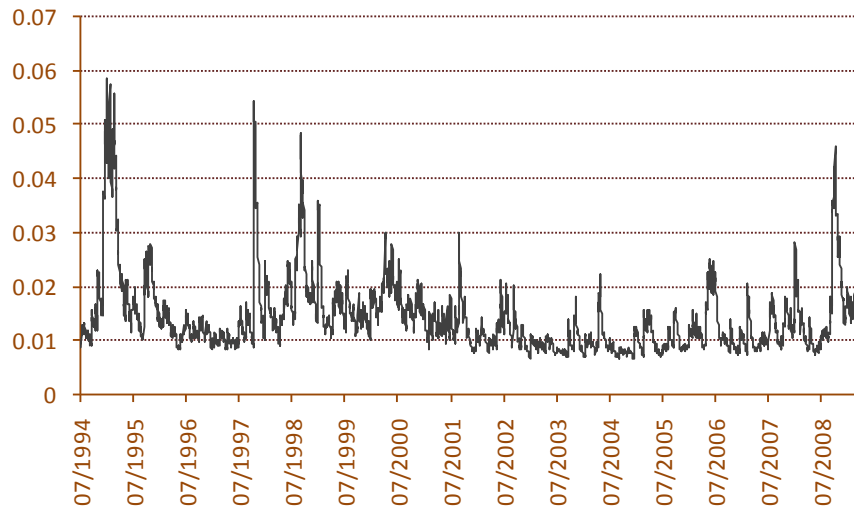


Gráfico 1.3 Volatilidad diaria TARCH del factor IPC_ORT.

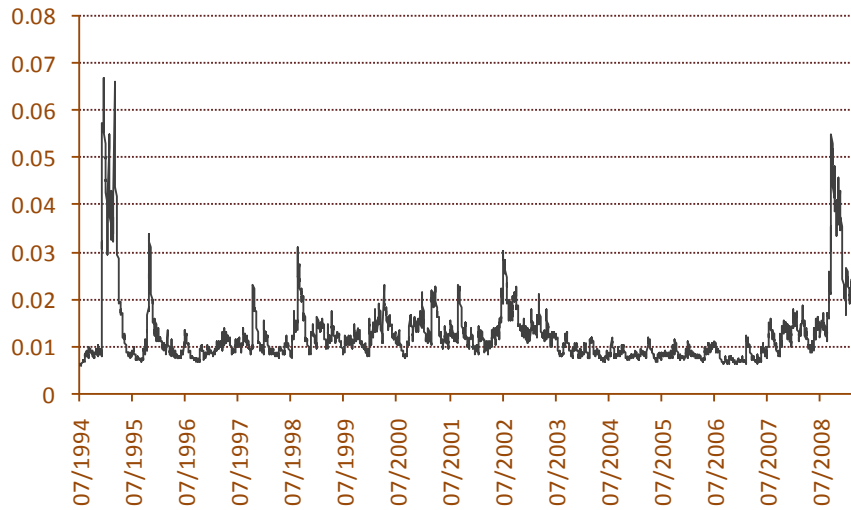


Gráfico 1.4 Volatilidad diaria TARCH del factor S&P 500.

En general la volatilidad del IPC_ORT es superior a la del S&P 500 pero al final de la muestra este fenómeno se invierte. Hay coincidencia en algunos períodos de *clustering* como en 1994/1995 y en el período de 2007-2009 y un desfase importante en el período 1997/2002. En una segunda etapa, se estiman por máxima verosimilitud las correlaciones DCC de los factores usando los residuales estandarizados de las ecuaciones TARCH. Los parámetros de la estimación son significativos.

DCC	a	b
Valor	0.025729	0.963877
p-value	0.000000	0.000000

Cuadro 1.5 Parámetros DCC de los factores.

Los valores típicos para rendimientos financieros de los parámetros DCC son de $a=0.01$ y $b=0.97^{10}$. Recordemos que la ecuación de cuasi-correlaciones es:

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{R} + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1} \quad (1.16)$$

Esta especificación también se conoce como la especificación *mean-reverting* debido a que las correlaciones cambiantes en el tiempo van a moverse alrededor de una media fija: la matriz de correlaciones muestral. La matriz de cuasi-correlaciones va a ser una matriz positiva

¹⁰ Véase Engle (2009).

definida si $(1-a-b)\bar{R}$ es una matriz positiva definida y si se cumplen las condiciones: $a > 0, b > 0$ y $a+b < 1$. El parámetro b nos indica la persistencia de las correlaciones en el tiempo. El parámetro a nos indica la reacción de las correlaciones a los choques de mercado o rendimientos estandarizados. Si estos rendimientos van en el mismo sentido, las correlaciones aumentan y viceversa. La suma de los parámetros, $a+b$ nos va a indicar qué tan rápido se regresa a la media en este modelo. En la estimación presentada en el cuadro 1.5 podemos observar que la reversión a la media es ligeramente más lenta que los valores típicos mencionados anteriormente. Existen especificaciones que consideran una media móvil de baja frecuencia en torno a la cual se mueven las correlaciones alimentadas con información de mayor frecuencia, un trabajo pionero en este sentido es el de Engle y Rangel (2011).

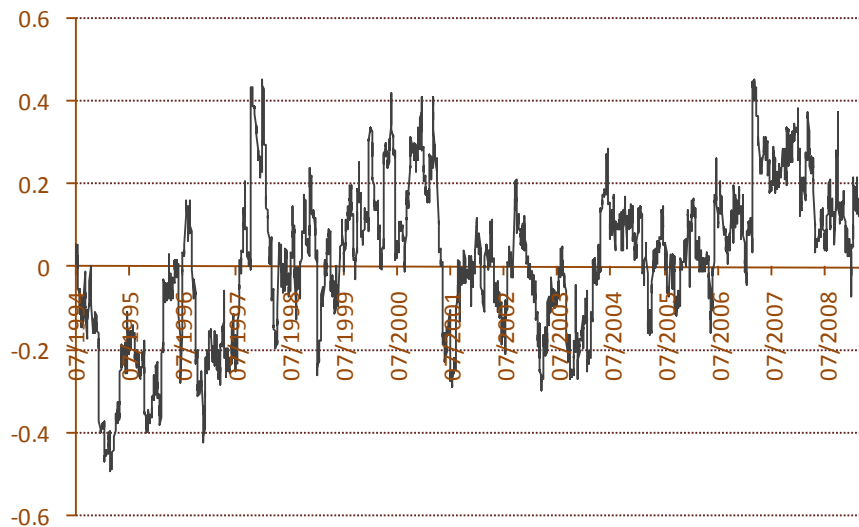


Gráfico 1.5 Correlaciones DCC del IPC_ORT y del S&P 500

Las correlaciones del factor IPC transformado con el S&P 500 son más bajas que las del factor original como resultado de la ortogonalización y como puede observarse al comparar el gráfico 1.1 con el gráfico 1.5. La variación se da alrededor de cero pero con fluctuaciones de una magnitud no despreciable que va del -40% al 40% aproximadamente.

Esta dinámica que hemos observado en las correlaciones y volatilidades condicionales se va a heredar a los rendimientos individuales al momento de hacer las simulaciones en el tiempo y por ende a los rendimientos del portafolio.

Como se mencionó anteriormente el portafolio que se conforma tiene pesos iguales y queremos conocer el comportamiento de largo plazo de sus rendimientos. Una primera

aproximación al problema es construir la función de distribución de los rendimientos de largo plazo para toda la muestra. El horizonte de agregación es de 100 días. En el gráfico 1.6 puede verse el comportamiento de tales rendimientos agregados para los períodos de 1994/1995, 1998 y 2007/2009. Esto último nos da evidencia de colas anchas en la distribución de rendimientos. Para las simulaciones se toma en cuenta los períodos de 1994/1995 y de 2007/2009 por ser los que más directamente ligan el origen de las crisis a los factores de mercado de la especificación.

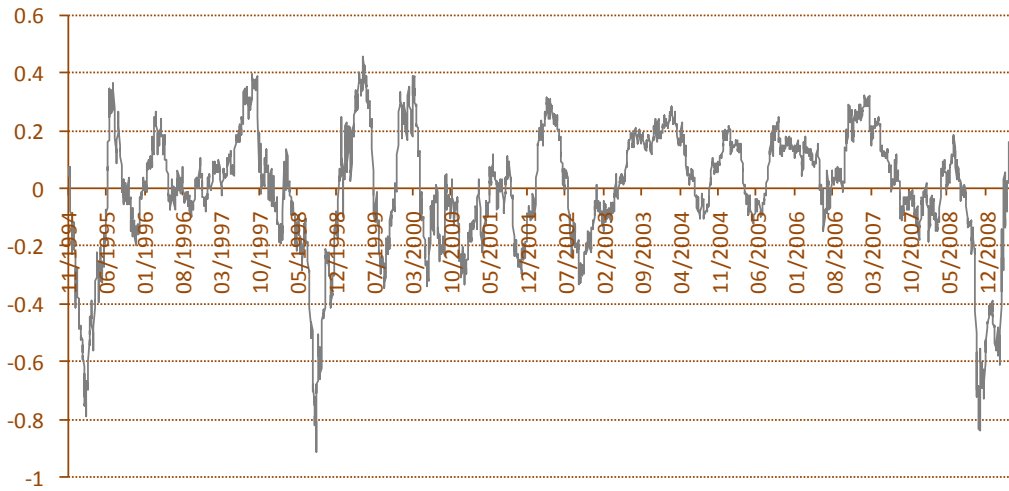


Gráfico 1.6 Rendimientos Históricos Agregados a 100 días del Portafolio de pesos iguales.

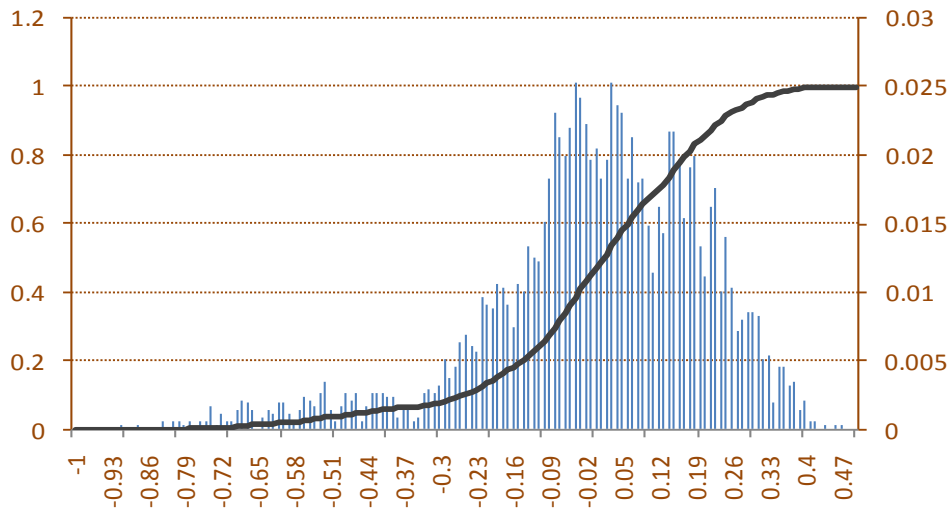


Gráfico 1.7 Distribución Histórica de los Rendimientos Agregados del Portafolio Homogéneo. La línea es la función de distribución y las barras son la función de densidad.

El gráfico 1.7 presenta la función de distribución histórica de los rendimientos agregados (que describe el comportamiento promedio de los mismos). En la gráfica se puede apreciar la presencia de colas anchas en el lado izquierdo de la distribución. Esta distribución se toma como punto de referencia para contrastar los resultados empíricos de las funciones resultantes de la simulación.

Como se mencionó al final de la sección anterior, la ecuación que queremos estimar es la siguiente:

$$P(D_p = 1) = P(r_{p,t+T} \leq d) = E \left(\Phi \left(\frac{d - \beta_{m1} r_{m1,t+T} - \beta_{m2} r_{m2,t+T}}{\sqrt{\sum_i^n \left(\frac{T}{n^2}\right) \sigma_i^2}} \right) \right) \quad (1.17)$$

La forma recursiva de las ecuaciones DCC y TARARCH nos permite simular los rendimientos condicionales de los factores T=100 días en el futuro empleando números normales bivariados. Los pesos de los factores son el promedio ponderado (de acuerdo a los pesos de los activos en el portafolio) estimados anteriormente.

El umbral d puede calibrarse de acuerdo a la experiencia del portafolio en particular. Para efectos de este estudio se varía el umbral en el dominio de los eventos de probabilidad positiva.

Se realizan k=3,000 simulaciones a 100 días para los factores tomando como punto inicial distintos períodos de interés: principios de enero de 1995 (crisis financiera con origen en México), principios de enero de 2007 (período previo a la crisis de 2007/2009), principios de enero de 2008 (los mercados financieros empiezan a mostrar cierta inquietud pero aún es incipiente) y principios de noviembre de 2008 (la crisis de 2007/2009 en pleno).

Una vez que tenemos los estimados de los rendimientos agregados del portafolio podemos estimar la ecuación de interés de la siguiente manera:

$$\frac{1}{3,000} \sum_{k=1}^{3,000} \Phi \left(\frac{d - \beta_{m1} r_{m1,t \rightarrow T}^{(k)} - \beta_{m2} r_{m2,t \rightarrow T}^{(k)}}{\sqrt{\sum_i^n \left(\frac{T}{n^2}\right) \sigma_i^2}} \right) = p \quad (1.18)$$

En cada simulación k se obtienen los rendimientos para los siguientes 100 días, los cuales se agregan y multiplican por los pesos correspondientes. Para cada probabilidad p se determina el umbral d_p que satisface la igualdad.

Para cada uno de los posibles períodos iniciales se simula una función de distribución. También se estima el modelo análogo que emplea sólo un factor en la especificación de la ecuación de rendimientos y que por tanto no emplea la dinámica DCC entre factores, pero que sí emplea la dinámica TARCH para las volatilidades del factor único (IPC).

Los resultados de las simulaciones son presentados en los gráficos 1.8 y 1.9. Se superponen las funciones de distribución para poder apreciar la cola izquierda de la distribución.

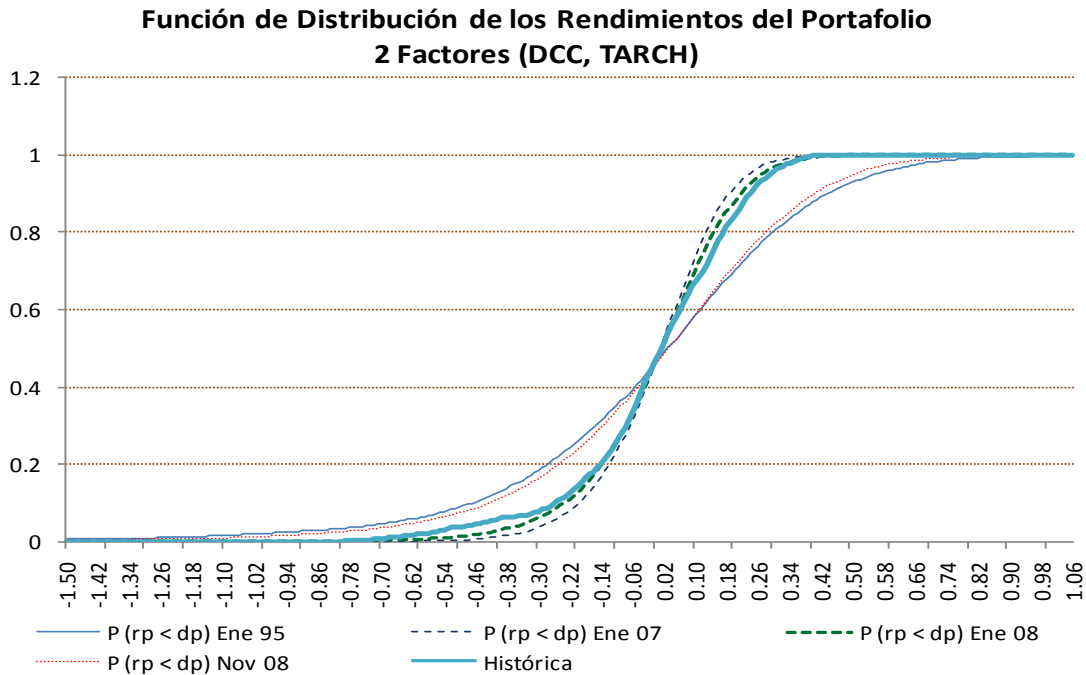


Gráfico 1.8 Distribuciones de los Rendimientos Agregados del Portafolio: Modelo de dos factores. El eje horizontal representa los distintos umbrales d_p .

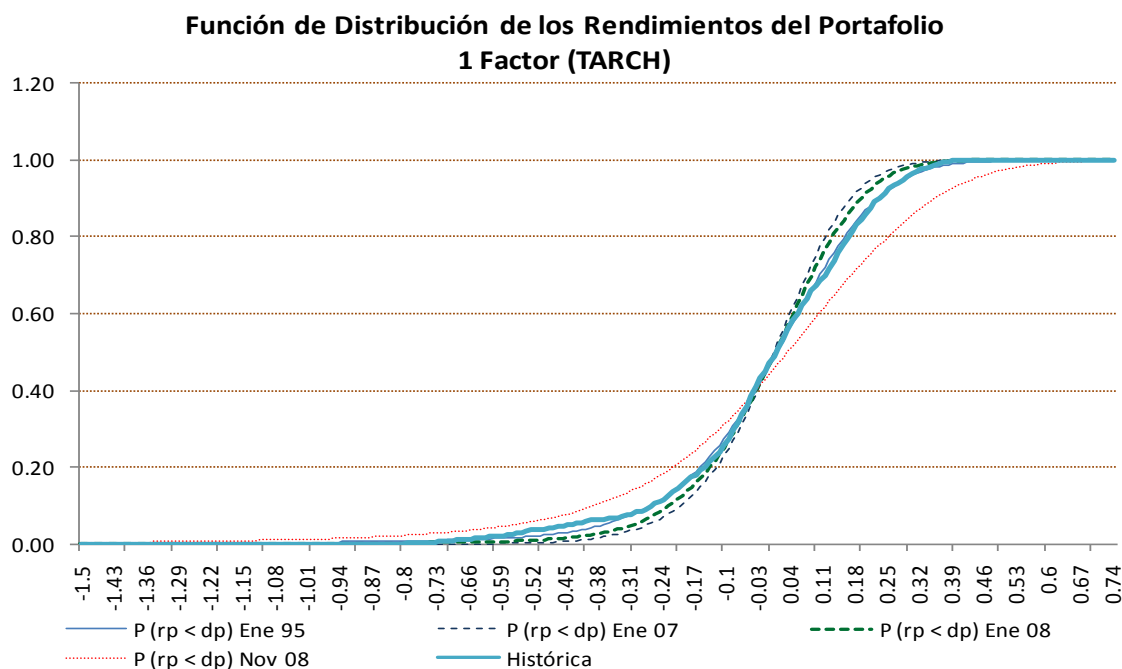


Gráfico 1.9 Distribuciones de los Rendimientos Agregados del Portafolio: Modelo de un factor. El eje horizontal representa los distintos umbrales d_p .

2 Factores	Ene-95	Ene-07	Ene-08	Nov-08	Histórica
Media	-0.002256	-1.66E-05	0.002489	0.0000108	-0.006078
Mediana	0.033251	0.012675	0.019406	0.031559	0.014224
Máximo	1.62541	0.414343	0.59832	1.229688	0.460675
Mínimo	-3.225204	-0.929032	-0.864387	-2.66707	-0.914823
Desv. Est.	0.390286	0.140744	0.170859	0.350231	0.213355
Sesgo	-1.222086	-0.782308	-0.698814	-1.094789	-0.973208
Curtosis	8.690101	4.913408	4.427814	6.965433	4.463431
No. Obs.	3,000	3,000	3,000	3,000	3,762

Cuadro 1.6 Rendimientos Agregados del Portafolio. Modelo de 2 Factores.

En el gráfico 8 y cuadro 6, la función de distribución del modelo de dos factores que tiene como punto inicial enero de 1995 presenta una cola más ancha que la distribución histórica. La distribución de noviembre de 2008 presenta una cola muy similar a la de enero de 1995. Las colas de enero de 2007 y de enero de 2008 son muy similares entre sí y están por debajo del comportamiento promedio histórico. Los resultados anteriores son consistentes con la historia de los rendimientos y con el hecho estilizado de una mayor acumulación de rendimientos en la cola izquierda de la distribución.

1 Factor	Ene-95	Ene-07	Ene-08	Nov-08	Histórica
Media	-0.001512	-0.002377	-0.00228	0.003353	-0.006078
Mediana	0.019765	0.01145	0.018551	0.041925	0.014224
Máximo	0.588762	0.342695	0.480163	1.063976	0.460675
Mínimo	-1.527965	-0.907141	-1.382745	-3.584225	-0.914823
Desv. Est.	0.195849	0.135519	0.159143	0.324941	0.213355
Sesgo	-1.210356	-0.896334	-1.10221	-1.680827	-0.973208
Curtosis	7.554042	5.280867	7.244025	11.70214	4.463431
No. Obs.	3,000	3,000	3,000	3,000	3,762

Cuadro 1.7 Rendimientos Agregados del Portafolio. Modelo de 1 Factor.

Por otro lado, en el gráfico 1.9 y cuadro 1.7, las funciones de distribución de un solo factor presentan un comportamiento similar a las de dos factores con excepción de la correspondiente a enero de 1995, en la que se describe una cola menos ancha que la del modelo de dos factores para el mismo período.

1.5 Conclusiones

Se propone una especificación de dos factores, uno local y uno global, para la evaluación del riesgo de crédito de portafolios en mercados en desarrollo integrados a un mercado global o regional. El modelo se plantea para un portafolio de pesos iguales pero permitiendo heterogeneidad en el peso de los factores y en las volatilidades idiosincráticas. Los factores siguen una dinámica DCC para las correlaciones y TARCH para las volatilidades. Esta estructura permite simular la función de rendimientos agregados del portafolio T días en el futuro. El modelo se estima para 10 acciones de la Bolsa Mexicana de Valores y un período de agregación en el futuro de 100 días. Los resultados son consistentes con los hechos estilizados de una mayor dependencia en la cola inferior de la distribución de rendimientos y de exceso de kurtosis en períodos de crisis económicas. El modelo de un factor captura un comportamiento similar de los rendimientos agregados, a excepción de la función de distribución de enero de 1995, período para el cual la especificación de dos factores captura colas más anchas.

A diferencia de los modelos tradicionales para la evaluación del riesgo de crédito, el modelo propuesto incorpora la información generada día a día de forma condicional, lo cual permite tener una estimación del riesgo más actualizada.

El modelo puede extenderse a una especificación de los rendimientos con betas y volatilidades idiosincráticas variantes en el tiempo y que considere la posible existencia de factores latentes omitidos. Esto permitiría un análisis más cercano del riesgo de largo plazo de un portafolio de activos. En el presente trabajo se opta por un modelo más parsimonioso.

Capítulo 2

Faltante Marginal Esperado Condicional con Choques Locales y Externos

2.1 Introducción

Las recurrentes crisis financieras han cuestionado de forma reiterada nuestro entendimiento de los eventos sistémicos. La complejidad de los mercados financieros parece ir siempre un paso adelante de las soluciones provistas. No obstante, los avances en la investigación del riesgo sistémico han sido importantes y han permitido incorporar a los sistemas financieros elementos como el prestamista de última instancia, los seguros de depósito, las regulaciones de Basilea I y II, entre otros.

Un avance importante, a raíz de la crisis global de 2007-2009, es el reconocimiento de la necesidad de ampliar el alcance de la medición del riesgo financiero. La regulación bancaria internacional está orientada actualmente a la medición del riesgo de una institución en forma aislada; dicha medición es relevante pero incompleta: es necesario medir también el riesgo conjunto de la institución respecto al resto del sistema financiero.

Esta noción de riesgo conjunto es la idea central sobre la que se desarrolla la medida de riesgo propuesta en este documento: una medida de riesgo que, empleando únicamente información de mercado, nos permite estimar el valor esperado de los rendimientos de un activo dado que el mercado se encuentra estresado.

Ha habido varias propuestas en torno a la idea de la medición del riesgo conjunto, entre las que destacan el Valor en Riesgo Condicional (CoVaR, por sus siglas en inglés) de Adrian y Brunnermeier (2010) y el Faltante Sistémico Esperado (SES, por sus siglas en inglés) de Acharya, Pedersen, Philippon y Richardson (2010).

El *Conditional Value at Risk* (CoVaR) es una extensión del *Value at Risk* que identifica la contribución de una institución en estrés al VaR de otra institución o del sistema mismo. La estimación se realiza mediante una regresión cuantil y la dinámica en el tiempo está dada por

un conjunto de variables de estado como el VIX¹¹, diferenciales (*spreads*) de crédito, tasas de interés e índices de mercado. Un problema con las medidas del tipo VaR es que no cumplen con la axiomática de Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1999) sobre medidas coherentes de riesgo, pues el VaR no cumple la propiedad de sub-aditividad, es decir, no captura de forma correcta los efectos de la agregación del riesgo¹². Una alternativa es el uso de medidas del tipo *Expected Loss*, las cuales son medidas coherentes de riesgo y consisten en estimar la pérdida esperada condicional a cierto estado de estrés.

El *Systemic Expected Shortfall* (SES) de Acharya et al. (2010) mide la contribución de una institución financiera al riesgo sistémico. La externalidad se presenta cuando el nivel de capital agregado cae por debajo de cierto umbral prudencial preestablecido para evitar liquidaciones¹³ (*firesales*) y restricción en la provisión de crédito. Se determina un impuesto que es función del SES y de la pérdida esperada de la institución en caso de incumplimiento. El modelo busca conciliar la teoría con la práctica de la administración de riesgos, al ligar la externalidad sistémica con el impuesto basado en medidas de pérdidas esperadas. Al resolver el problema de maximización de utilidad de los bancos y de la función de bienestar colectiva también se toman en cuenta las ineficiencias producidas por las garantías gubernamentales, por lo que se hace un cargo directamente proporcional a la cobertura recibida.

Un supuesto implícito en el modelo del SES es que los problemas de liquidez a nivel agregado generan externalidades a la economía en su conjunto. Podemos ver esta idea detrás de otros trabajos, como el de Diamond y Dybvig (1983) sobre corridas bancarias, el de Rochet y Tirole (1996) sobre contagio financiero por interconexiones, el de Garlenau y Pedersen (2007) sobre requerimientos de márgenes, el de Brunnermeier y Pedersen (2009) sobre espirales de liquidez, entre otros.

El modelo propuesto en el presente documento comparte la idea del párrafo anterior y por lo tanto se enfoca al sector encargado de canalizar la liquidez en la economía: el sector financiero. Aún más, la medida propuesta también puede rescatarse para empresas no financieras.

¹¹ VIX es el *Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index*, cuyo objetivo es reflejar la volatilidad implícita en contratos de opciones sobre el S&P 500.

¹² Artzner et al. (1999) sostienen que una medida de riesgo debe reflejar los efectos de la diversificación: la suma del riesgo de dos portafolios separados es mayor o igual que el riesgo del portafolio combinado.

¹³ Shleifer y Vishny (2010) analizan los efectos de las ventas forzadas de activos (reales y financieros) sobre los precios y las consecuencias sistémicas de dichas liquidaciones en los mercados financieros y en la economía real.

Existen otras propuestas importantes para medir el riesgo sistémico como la de Gray, Merton y Bodie (2008) que proponen un modelo estructural que analiza la sensibilidad de las obligaciones contingentes de las instituciones financieras a choques externos y a cambios en las políticas sobre administración de riesgos. Goodhart y Segoviano (2009) proponen una metodología basada en estimar cópulas no-paramétricas multivariadas para medir el estrés en el sistema bancario en general, el estrés entre bancos específicos y el estrés en el sistema asociado con un banco en particular. Huang Zhou y Zhu (2009 y 2011) proponen valorar la prima de un seguro hipotético contra pérdidas catastróficas en el sector financiero, el *Distress Insurance Premium* (DIP). El cálculo de este indicador requiere calcular las probabilidades de incumplimiento neutrales al riesgo, las pérdidas dado el estado de incumplimiento, las correlaciones de los rendimientos y el tamaño de las obligaciones por banco. Muestran que la contribución marginal de un banco al indicador de riesgo sistémico, DIP, es la pérdida esperada de la institución dado que el sistema está por debajo de un nivel crítico de pérdidas, bajo la medida neutral al riesgo. Encuentran que la contribución individual de los bancos es aproximadamente lineal en las probabilidades de default y no-lineal en el tamaño y las correlaciones.

Cada una de estas propuestas aporta elementos importantes para entender y controlar los eventos de alcance sistémico. Existen, por supuesto, propuestas que abordan el problema desde un ángulo distinto a los trabajos mencionados, como Nicolo y Lucchetta (2010) quienes hacen una distinción entre riesgo sistémico financiero y riesgo sistémico real, y proponen una metodología para identificar los choques relevantes; o como la propuesta de French et al. (2010) o la de Acharya y Richardson (2009)¹⁴.

El presente trabajo se enfoca en la medición del Faltante (Pérdida) Marginal Esperado (MES, por sus siglas en inglés) para mercados altamente relacionados con un mercado de mayor magnitud ya sea nivel global o regional. De acuerdo con Acharya et al. (2010) el MES está relacionado de forma lineal con el SES y las estimaciones confirman que esta relación es significativa. Siguiendo esta idea, Engle y Brownlees (2010) proponen un modelo

¹⁴ Ambas propuestas agrupan a un número importante de reconocidos economistas. El *Squam Lake Report* enlista las propuestas consensuadas de 15 académicos de distintas universidades, orientadas a una reforma del sistema financiero internacional pensada para el largo plazo. *Restoring Financial Stability* es un compendio de 26 artículos (breves) de 33 economistas de la Universidad de Nueva York, en el que se abordan distintos aspectos relevantes para el sistema financiero estadounidense e internacional, y se esbozan líneas de acción para el corto y el largo plazo.

econométrico para estimar el MES de forma condicional empleando una especificación de rendimientos de un factor. Sin embargo, hay mercados donde, además del factor de mercado local, es relevante considerar un factor de mercado externo.

El presente trabajo consta de cuatro secciones. En esta primera sección se hace una revisión de literatura y se explica cómo la medida de riesgo propuesta, cuando se analizan instituciones financieras, está respaldada por un modelo. En la segunda sección se desarrolla el modelo econométrico del MES condicional que extiende el modelo de un factor al caso de dos factores. La nueva medida del MES va a ser función de la volatilidad de los dos mercados en consideración, de la volatilidad idiosincrática, de la correlación entre mercados, de la correlación de los activos con cada mercado y de la dependencia no-lineal entre las innovaciones dado un estado de estrés en los mercados. La especificación de los rendimientos equivale a un modelo con betas dinámicas y además de permitirnos estimar el MES, nos va a permitir entender mejor la evolución del peso de los factores en el tiempo¹⁵. En la tercera sección se estima el modelo para 5 instituciones financieras de la Bolsa Mexicana de Valores y se analiza el comportamiento del MES y de sus componentes: volatilidades condicionales, correlaciones condicionales y dependencia en la cola de la distribución conjunta de los choques. Finalmente, en la cuarta sección se presentan las conclusiones.

2.2 MES condicional de dos factores

En esta sección se desarrolla una extensión al modelo condicional del MES de Engle y Brownlees (2010). La intuición económica que se trata de capturar es que, en ciertos mercados, los precios incorporan de forma relevante innovaciones de origen local e innovaciones de origen externo. Al incorporar esta característica, la parte sistemática de la ecuación de rendimientos va constar de dos factores explicativos. Si además imponemos dinámica en la parte idiosincrática, vamos a tener un modelo de betas variantes en el tiempo.

El modelo se enfoca en el MES de las instituciones financieras por dos razones: primero, debido a su relevancia, ya que éstas constituyen el vínculo entre liquidez de fondeo y liquidez

¹⁵ Hay un conjunto de trabajos que, a partir del comportamiento de las betas de los factores en el tiempo, tratan de explicar hasta qué punto existe contagio entre mercados financieros y hasta qué punto se trata de interdependencia entre los mismos. Algunos trabajos importantes respecto a este tema son: Allen y Gale (2000); Forbes y Rigobon (2002); Corsetti, Pericoli y Sbracia (2005); y Bekaert, Harvey y Ng (2005).

de mercado debido a su naturaleza de intermediación y asignación de recursos¹⁶; segundo, existe sustento teórico y evidencia empírica para ligar el MES al riesgo sistémico, de acuerdo a Acharya et al. (2010). El MES también es aplicable a las empresas no-financieras, sin embargo no es claro el modelo de riesgo sistémico detrás de estas mediciones. Afortunadamente, cuando el objetivo únicamente es estimar la reacción de los rendimientos ante eventos estresantes en el mercado, podemos recurrir al MES sin importar si se trata de rendimientos de empresas financieras o no-financieras. Esta característica es importante para mercados de valores como el mexicano, donde el sector financiero está dominado por un número reducido de instituciones, de las cuales un número aún menor cotizan en bolsa y un subconjunto todavía menor cuenta con historia de más de 10 años¹⁷; por lo que el poder medir el MES más allá del sector financiero da mayores posibilidades de uso al modelo econométrico propuesto. En el Apéndice 2.C se presentan estimaciones del MES para 15 empresas no-financieras de la Bolsa Mexicana de Valores.

Dos características deseables del modelo son la capacidad de predicción y la identificación del peso de los procesos locales y externos. Para lo cual se propone un modelo que toma en cuenta la dinámica de los rendimientos y que proporciona una estructura que facilite hacer pronósticos. Asimismo, es importante que el modelo tome en cuenta la dependencia lineal, la dependencia que ésta no logran capturar (dependencia no-lineal) y que haga explícita la pérdida o ganancia en la explicación de los factores que se deriva de cambios en la correlación entre mercados (que hace más colineales a los dos factores).

A continuación se desarrolla el modelo econométrico. Para empezar, queremos modelar tres tipos de choques: los del mercado externo ($\varepsilon_{M1,t}$), los del mercado local ($\varepsilon_{M2,t}$) y los idiosincráticos ($\varepsilon_{i,t}$). Asumimos que dichos choques tienen media cero, varianza unitaria y covarianza cero.

Más adelante se presentan los residuales estandarizados $\varepsilon_{M1,t}^*$, $\varepsilon_{M2,t}^*$ y $\varepsilon_{i,t}^*$, cuyas covarianzas son distintas de cero. De hecho la matriz de varianzas y covarianzas de estos residuales estandarizados va a ser la matriz de correlaciones del vector de rendimientos. Aún más, los

¹⁶ Véase Brunnermeier y Pedersen (2009).

¹⁷ Ver la sección III, Estimación y Resultados, donde se explican con mayor detalle los datos empleados para estimar el MES del sector financiero.

residuales $\varepsilon_{M1,t}^*$, $\varepsilon_{M2,t}^*$ y $\varepsilon_{i,t}^*$ son combinaciones lineales de los choques externos, locales e idiosincráticos ($\varepsilon_{M1,t}$, $\varepsilon_{M2,t}$ y $\varepsilon_{i,t}$).

En términos matriciales tenemos:

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{M1,t} \\ \varepsilon_{M2,t} \\ \varepsilon_{i,t} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad E(\varepsilon_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queremos un proceso de rendimientos que considere estos tres tipos de choques y que además se pueda expresar en términos de su matriz de correlaciones y de varianzas (sin las covarianzas).

$$D_t = \begin{pmatrix} \sigma_{M1,t} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{M2,t} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{i,t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{M1,M2,t} & \rho_{M1,i,t} \\ \rho_{M1,M2,t} & 1 & \rho_{M2,i,t} \\ \rho_{M1,i,t} & \rho_{M2,i,t} & 1 \end{pmatrix}$$

Esta elección es a conveniencia, para poder emplear la modelación condicional de las volatilidades, GARCH (Bollerslev y Engle, 1982 y 1986), y de las correlaciones, DCC (Engle 2002).

Se propone el siguiente vector de rendimientos¹⁸:

$$\begin{pmatrix} r_{M1,t} \\ r_{M2,t} \\ r_{i,t} \end{pmatrix} = D_t R_t^{1/2} \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \sigma_{M1,t} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{M2,t} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{i,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{M1,M2,t} & \rho_{M1,i,t} \\ \rho_{M1,M2,t} & 1 & \rho_{M2,i,t} \\ \rho_{M1,i,t} & \rho_{M2,i,t} & 1 \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} \varepsilon_{M1,t} \\ \varepsilon_{M2,t} \\ \varepsilon_{i,t} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Es fácil verificar que la media de este vector de rendimientos¹⁹ es cero y que la varianza está dada por la matriz que tiene como (mn)-ésimo elemento el producto del (mn)-ésimo elemento de la matriz de correlaciones por las volatilidades univariadas (m) y (n):

¹⁸ La notación de una matriz A a la potencia 1/2 se refiere a que esta matriz multiplicada por si misma nos da la matriz original A.

¹⁹ En realidad se trata de sobre-rendimientos.

$$\begin{aligned}
\Sigma_t &= \text{Var}\left(D_t R_t^{1/2} \varepsilon_t\right) = D_t R_t^{1/2} \text{Var}\left(\varepsilon_t\right) \left(R_t^{1/2}\right)' D_t \\
&= D_t R_t^{1/2} I_t \left(R_t^{1/2}\right)' D_t = D_t R_t^{1/2} \left(R_t^{1/2}\right)' D_t = D_t R_t D_t \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{M1,t}^2 & \sigma_{M1,t} \sigma_{M2,t} \rho_{M1,M2,t} & \sigma_{M1,t} \sigma_{i,t} \rho_{M1,i,t} \\ \sigma_{M1,t} \sigma_{M2,t} \rho_{M1,M2,t} & \sigma_{M2,t}^2 & \sigma_{M2,t} \sigma_{i,t} \rho_{M2,i,t} \\ \sigma_{M1,t} \sigma_{i,t} \rho_{M1,i,t} & \sigma_{M2,t} \sigma_{i,t} \rho_{M2,i,t} & \sigma_{i,t}^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sin embargo, aún no conocemos explícitamente la matriz $R_t^{1/2}$. Usando la descomposición de Cholesky encontramos la forma explícita de la matriz:

$$R_t^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_{M1,M2,t} & \sqrt{1 - \rho_{M1,M2,t}^2} & 0 \\ \rho_{M1,i,t} & \rho_{M2,i,t}^* & \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\rho_{M2,i,t}^* = \frac{\rho_{M2,i,t} - \rho_{M1,M2,t} \rho_{M1,i,t}}{\sqrt{1 - \rho_{M1,M2,t}^2}} \quad (2.3)$$

Por lo que la especificación de los rendimientos de mercado e idiosincráticos es como sigue:

$$r_{M1,t} = \sigma_{M1,t} \varepsilon_{M1,t} \quad (2.4)$$

$$r_{M2,t} = \sigma_{M2,t} \left(\rho_{M1,M2,t} \varepsilon_{M1,t} + \sqrt{1 - \rho_{M1,M2,t}^2} \varepsilon_{M2,t} \right) \quad (2.5)$$

$$r_{i,t} = \sigma_{i,t} \left(\rho_{M1,i,t} \varepsilon_{M1,t} + \rho_{M2,i,t}^* \varepsilon_{M2,t} + \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2} \varepsilon_{i,t} \right) \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.4) a (2.6) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
r_{M1,t} &= \sigma_{M1,t} \varepsilon_{M1,t}^* & \text{con} & \quad \varepsilon_{M1,t}^* = \varepsilon_{M1,t} \\
r_{M2,t} &= \sigma_{M2,t} \varepsilon_{M2,t}^* & \text{con} & \quad \varepsilon_{M2,t}^* = \rho_{M1,M2,t} \varepsilon_{M1,t} + \sqrt{1 - \rho_{M1,M2,t}^2} \varepsilon_{M2,t} \\
r_{i,t} &= \sigma_{i,t} \varepsilon_{i,t}^* & \text{con} & \quad \varepsilon_{i,t}^* = \rho_{M1,i,t} \varepsilon_{M1,t} + \rho_{M2,i,t}^* \varepsilon_{M2,t} + \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2} \varepsilon_{i,t}
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Los residuales estandarizados $(\varepsilon_{M2,t}^*)$ no son completamente locales pues son una combinación lineal de los choques del mercado externo $(\varepsilon_{M1,t})$ y los choques del mercado local $(\varepsilon_{M2,t})$. Del mismo modo, los residuales estandarizados $(\varepsilon_{i,t}^*)$ no son realmente idiosincráticos sino que se conforman por choques externos, locales e idiosincráticos. Sin embargo, los residuales del mercado externo se forman únicamente por los choques externos. En esta especificación de los rendimientos subyace un orden jerárquico entre los factores: hay un factor líder y un factor dependiente. Empíricamente este ordenamiento puede establecerse mediante un criterio estadístico y/o mediante un argumento económico. Estadísticamente el orden de la descomposición de Cholesky puede ser relevante.

La importancia relativa de los choques dentro de las ecuaciones de rendimientos está dada por las correlaciones y las volatilidades.

Cuando la correlación entre factores es perfecta, la ecuación (2.5) se vuelve redundante. Si la correlación entre mercados es nula, las ecuaciones (2.3), (2.5) y (2.6) se convierten simplemente en:

$$\rho_{M2,i,t}^* = \rho_{M2,i,t} \quad (2.8)$$

$$r_{M2,t} = \sigma_{M2,t} \varepsilon_{M2,t} \quad (2.9)$$

$$r_{i,t} = \beta_{M1,t} r_{M1,t} + \beta_{M2,t} r_{M2,t} + k_t \sigma_{i,t} \varepsilon_{i,t} \quad \text{donde } k_t = \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - \rho_{M2,i,t}^2} \quad (2.10)$$

Esta última ecuación es una regresión ortogonal con betas dinámicas. Puede verse que en la medida en que los rendimientos individuales se relacionen más con cualquiera de los mercados, la parte idiosincrática va a tener un peso menor.

En general no se va a cumplir que la correlación entre mercados sea cero, por el contrario, el modelo está diseñado para mercados que tienen un alto grado de interdependencia, como en el caso de los mercados accionarios de México y Estados Unidos²⁰. El tomar en cuenta factores de mercado correlacionados va a tener un impacto en las correlaciones de los rendimientos de las instituciones con el mercado local y por lo tanto en las betas del segundo factor. Esto es: el modelo de las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) es equivalente a una representación de betas

²⁰ La correlación histórica entre el S&P 500 y el IPC, para el período de 1994 a 2010, es de 54.11%.

dinámicas donde la importancia del segundo factor se ajusta de acuerdo al nivel de correlaciones entre mercados. Nótese que dicho ajuste es asimétrico, debido al orden jerárquico impuesto sobre los factores de mercado.

Una vez que se cuenta con la especificación de rendimientos que se ha construido, podemos desarrollar el estimador del MES.

La pérdida marginal esperada, MES, se define como la contribución de la institución financiera i al riesgo del sistema. El riesgo del sistema es el de subcapitalización, como se explico en la introducción.

En términos matemáticos es el valor esperado, en el período $t-1$, de los rendimientos de la institución i dado que hay una caída promedio en los rendimientos de los mercados por debajo de ciertos umbrales (a esto se refiere el evento estresante S_t):

$$MES_{i,t-1}(S_t) = E_{t-1}(r_{i,t} | S_t) \quad \text{para cierto evento estresante } S_t \quad (2.11)$$

Acharya et al. (2010) mencionan la siguiente definición para riesgo sistémico, a la cual se recurre en el presente trabajo:

“Riesgo sistémico puede pensarse en un sentido amplio como la falla de una parte significativa del sistema financiero –una institución grande o varias pequeñas- que conduce a una reducción en la disponibilidad de crédito que tiene el potencial de afectar de forma adversa la economía real”

El evento estresante S_t no es necesariamente un evento en el extremo más bajo de la distribución de los rendimientos de los mercados. De hecho, recurriendo a argumentos de teoría de valores extremos, Acharya et al. muestran que el MES calculado en percentiles no tan extremos es un buen predictor de lo que ocurre en eventos más extremos. Engle y Brownlees (2010)²¹ fijan el umbral de pérdidas en 2%, lo cual permite contar con un mayor número de observaciones en las colas. A diferencia del modelo de un factor, en este modelo los condicionamientos pueden ser más generales. Puede condicionarse al evento en donde

²¹ En el trabajo citado, los autores estiman su modelo para 102 instituciones financieras de E.U.A, para instituciones con una capitalización superior a los 5 mil millones de dólares.

cualquiera de los dos mercados está en estrés, o que los dos mercados están en estrés o que únicamente uno de los mercados se encuentra estresado.

Aplicando el operador esperanza a los rendimientos al tiempo t , dado el conjunto de información en $t-1$, se obtiene el siguiente estimador del MES, donde las volatilidades y las correlaciones son las condicionales.

$$\begin{aligned}
MES_{i,t-1}(S_t) &= E_{t-1}(r_{i,t} | S_t) = E_{t-1} \left(\sigma_{i,t} \left(\rho_{M1,i,t} \varepsilon_{M1,t} + \rho_{M2,i,t}^* \varepsilon_{M2,t} + \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2} \varepsilon_{i,t} \right) \middle| S_t \right) \\
&= \sigma_{i,t} \rho_{M1,i,t} E_{t-1}(\varepsilon_{M1,t} | S_t) + \sigma_{i,t} \rho_{M2,i,t}^* E_{t-1}(\varepsilon_{M2,t} | S_t) + \sigma_{i,t} \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2} E_{t-1}(\varepsilon_{i,t} | S_t) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Tomando un caso particular, donde $(S_t) = (r_{M1,t} < c)$, podemos entender mejor el papel de los términos expresados como esperanzas condicionales (al conjunto de información y al evento S_t).

$$\begin{aligned}
MES_{i,t-1} &= \sigma_{i,t} \rho_{M1,i,t} E_{t-1} \left(\varepsilon_{M1,t} \middle| \varepsilon_{M1,t} < \frac{c}{\sigma_{M1,t}} \right) \\
&\quad + \sigma_{i,t} \rho_{M2,i,t}^* E_{t-1} \left(\varepsilon_{M2,t} \middle| \varepsilon_{M1,t} < \frac{c}{\sigma_{M1,t}} \right) \\
&\quad + \sigma_{i,t} \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2} E_{t-1} \left(\varepsilon_{i,t} \middle| \varepsilon_{M1,t} < \frac{c}{\sigma_{M1,t}} \right) \quad (2.13)
\end{aligned}$$

En esta ecuación podemos ver más claramente que el MES va a ser función de las volatilidades, las correlaciones y las colas izquierdas (ya que nuestro interés se centra en las pérdidas). Las correlaciones van a tomar en cuenta la dependencia lineal, y las esperanzas condicionales de los choques van a capturar una dependencia no lineal (recordemos que no existe dependencia lineal entre choques).

Esta dependencia no lineal se estima de forma no-paramétrica mediante *kernels*:

$$\begin{aligned}
E_{T-1}(\varepsilon_{i,T} | (\varepsilon_{M1,T} < k_1) \vee (\varepsilon_{M2,T} < k_2)) &= \quad (2.14) \\
&= \frac{\sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) + \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}}{\sum_{s=1}^{T-1} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) + \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}}
\end{aligned}$$

$$E_{T-1}(\varepsilon_{i,T} | (\varepsilon_{M1,T} < k_1) \wedge (\varepsilon_{M2,T} < k_2)) = \frac{\sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}}{\sum_{s=1}^{T-1} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}} \quad (2.15)$$

$$E_{T-1}(\varepsilon_{i,T} | \varepsilon_{Mj,T} < k_1) = \frac{\sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{Mj,s}}{h}\right)}{\sum_{s=1}^{T-1} \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{Mj,s}}{h}\right)} \quad j=1,2 \quad (2.16)$$

El desarrollo detallado de estos estimadores se presenta en el Apéndice 2.A. Son estimadores de la media condicional al estilo del de Nadaraya y Watson (1964). Es importante mencionar que esta parte del MES también podría estimarse de forma paramétrica empleando una distribución de valores extremos. En este caso se opta por la estimación no paramétrica por ser menos restrictiva.

2.3 Estimación y Resultados

La Bolsa Mexicana de Valores, de acuerdo al Banco Mundial, ocupó el lugar número 19 en cuanto a nivel de capitalización en el año 2010 con 454.3 miles de millones de dólares (contra 17,138 miles de millones de dólares del mercado estadounidense).

En el año 2000 ocupaba la posición número 23 con 125 miles de millones de dólares (contra 15,104 miles de millones de dólares del mercado estadounidense). En el gráfico 2.1 podemos observar la evolución de la capitalización en dólares de la BMV, a precios corrientes.

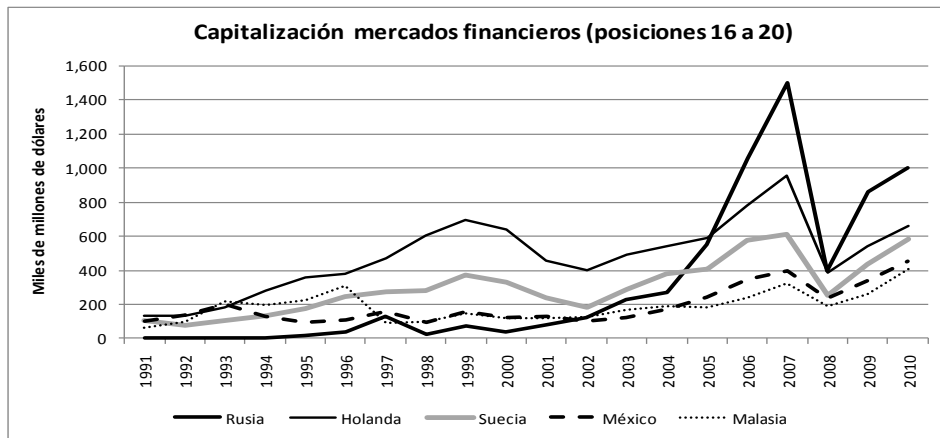


Gráfico 2.1

El sector financiero en México está dominado por un número reducido de instituciones. La gran mayoría de las instituciones financieras no cotiza en la bolsa, sin embargo las más grandes sí. De las financieras que cotizan en la BMV pocas tienen un período de historia de más de cinco años, ya sea porque recientemente empezaron a cotizar, o porque existió una fusión con un grupo internacional y desapareció la serie accionaria original²², o simplemente porque se decidió deslistar una serie accionaria en particular por alguna otra razón estratégica. Otro problema lo constituyen las acciones poco líquidas que, contando con un período de cotización largo pueden ser poco informativas.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se emplean las series de precios de cuatro grupos financieros predominantes en México y una aseguradora, que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV)²³: BBVA Serie * (ADR de BBVA), C Serie * (ADR de Citigroup), GFINBUR Serie O (acción mexicana de Grupo Financiero Inbursa), GFNORTE Serie O (acción mexicana de Grupo Financiero Banorte) y Q Serie CPO (acción mexicana de la aseguradora Qualitas)

Se usan las series de precios con frecuencia diaria que abarcan el período de julio de 1994 a septiembre de 2010 (4201 días hábiles). Es importante señalar que las series no están balanceadas, pues no todas empezaron a cotizar al mismo tiempo.

Acción	Serie	Valor Mercado 1	VM 1 %	VM 1 Paper %	Valor de Mercado 2	VM 2 %	VM 2 Paper%
1 ACTINVR	B	5,538,500,000	0.19%		5,538,500,000	1.25%	
2 BBVA	*	540,376,871,664	18.42%	18.42%	0	0.00%	0.00%
3 BOLSA	A	13,804,784,013	0.47%		13,804,784,013	3.12%	
4 C	*	1,069,340,812,174	36.45%	36.45%	0	0.00%	0.00%
5 COMPARC	*	29,345,848,283	1.00%		29,345,848,283	6.63%	
6 FINAMEX	O	1,835,101,160	0.06%		1,835,101,160	0.41%	
7 FINDEP	*	5,004,034,137	0.17%		5,004,034,137	1.13%	
8 GBM	O	10,960,000,000	0.37%		10,960,000,000	2.47%	
9 GENSEG	*	1,174,338,125	0.04%		1,174,338,125	0.27%	
10 GFINBUR	O	163,675,536,123	5.58%	5.58%	163,675,536,123	36.96%	36.96%
11 GFINTER	O	10,988,686,049	0.37%		10,988,686,049	2.48%	
12 GFMULTI	O	3,234,262,662	0.11%		3,234,262,662	0.73%	
13 GFNORTE	O	106,803,085,772	3.64%	3.64%	106,803,085,772	24.12%	24.12%
14 GFREGIO	O	9,506,729,286	0.32%		9,506,729,286	2.15%	
15 GNP	*	7,508,052,864	0.26%		7,508,052,864	1.70%	
16 GPROFUT	*	5,855,296,371	0.20%		5,855,296,371	1.32%	
17 INVEX	A	5,114,605,949	0.17%		5,114,605,949	1.15%	
18 LASEG	*	111,084,500	0.00%		111,084,500	0.03%	
19 MONEX	B	7,175,910,150	0.24%		7,175,910,150	1.62%	
20 PATRIA	*	1,250,000,000	0.04%		1,250,000,000	0.28%	
21 Q	CPO	4,940,999,989	0.17%	0.17%	4,940,999,989	1.12%	1.12%
22 SAN	*	881,014,907,589	30.03%		0	0.00%	
23 SANMEX	B	43,685,427,849	1.49%		43,685,427,849	9.87%	
24 VALUEGF	O	5,320,000,000	0.18%		5,320,000,000	1.20%	
		2,933,564,874,707	100.00%	64.26%	442,832,283,280	100.00%	62.20%

Gráfico 2.1

²² Este hecho tiene impacto a la hora de calcular el valor total de las empresas en la BMV, pues los bancos más grandes con operaciones en México no cotizan como empresas mexicanas sino como ADR's.

²³ Adicionalmente se estima el MES para 15 empresas no-financieras que cotizan en la BMV, que se agrupan en 4 sectores: construcción, autoservicio, telecomunicaciones y diversificado. Los resultados a grandes rasgos de estas de estas estimaciones pueden verse en el apéndice D.

Las fuentes de información para las series de precios fueron Bloomberg y Yahoo Finanzas México. Para tener una mejor idea de qué tan representativas del sector financiero son las instituciones seleccionadas para el estudio, se presenta el cuadro 2.1, que se construyó a partir de información de Infosel, Economática y de la página de la BMV.

Las empresas sombreadas son las que se incluyen en la estimación y podemos ver que el valor de mercado de estas instituciones representa el 64.26% del valor de las financieras que cotizan en la BMV, bajo el criterio 1 (que toma en cuenta para el cálculo a los ADR's). Bajo el segundo criterio de valor de mercado (que no incluye los ADR's) el valor de mercado de las 5 instituciones representa el 62.20% del valor de mercado del sector financiero en la BMV. Los valores de mercado se aproximan usando las acciones inscritas por el precio correspondiente en pesos.

Se emplea el tipo de cambio MXP/USD que publica el Banco de México para la liquidación de operaciones en contratos. Se toma como una tasa libre de riesgo local la TIIE equivalente diaria a la que publica Banco de México. Como tasa libre de riesgo de E.U.A se toma la de los factores de Kenneth French, la cual se basa en el Treasury Bill a un mes. El factor de mercado externo es el S&P500 y el factor de mercado local es el IPC (Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV). Como se mencionó en la segunda sección, los factores siguen un orden jerárquico. Como era de esperarse, usando una prueba de causalidad de Granger, se encuentra que el S&P500 causa (en el sentido de Granger) al IPC y que el IPC no causa al S&P500. Las dos series son de rendimientos, es decir, son primeras diferencias.²⁴

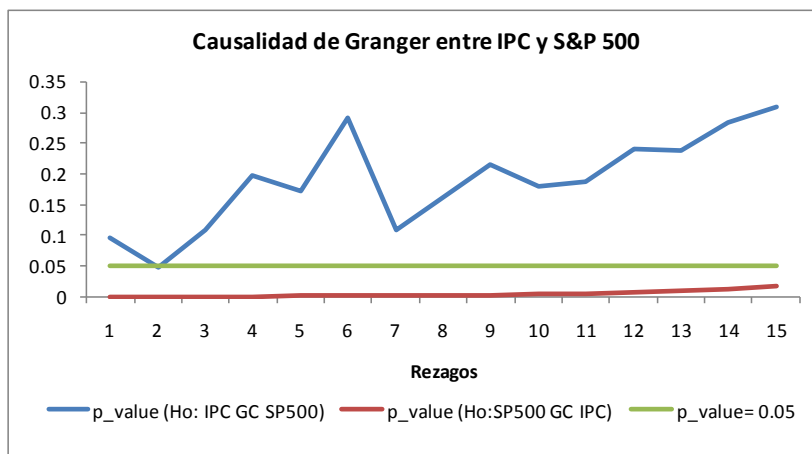


Gráfico 2.2

²⁴ Importa aclarar que se trabaja con primeras diferencias pues la prueba de causalidad de Granger puede distorsionarse bajo no-estacionariedad y quiebres estructurales.

Por lo que el factor de mercado M1=S&P 500 va a ser el factor “dominante” y el factor M2=IPC se va a formar de las innovaciones locales propias e innovaciones externas. Se trabaja con excesos de log rendimientos expresados en dólares americanos. Adicionalmente se estima el MES para 15 empresas no-financieras que cotizan en la BMV, que se agrupan en 4 sectores: construcción, autoservicio, telecomunicaciones y diversificado. Los resultados a grandes rasgos de estas de estas estimaciones pueden verse en el apéndice 2.C.

La estimación del MES se lleva a cabo en tres etapas. En la primer etapa se estiman las volatilidades univariadas empleando una especificación TARCH(1,1) para tomar en cuenta el efecto apalancamiento, es decir, las malas noticias ven a tener un efecto mayor que las buenas noticias.

$$\sigma_{S\&P500,t}^2 = \omega_{S\&P500} + \alpha_{S\&P500} r_{S\&P500,t-1}^2 + \gamma_{S\&P500} r_{S\&P500,t-1}^2 I_{(r_{S\&P500,t-1} < 0)} + \beta_{S\&P500} \sigma_{S\&P500,t-1}^2 \quad (2.17)$$

$$\sigma_{IPC,t}^2 = \omega_{IPC} + \alpha_{IPC} r_{IPC,t-1}^2 + \gamma_{IPC} r_{IPC,t-1}^2 I_{(r_{IPC,t-1} < 0)} + \beta_{IPC} \sigma_{IPC,t-1}^2 \quad (2.18)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_i r_{i,t-1}^2 + \gamma_i r_{i,t-1}^2 I_{(r_{i,t-1} < 0)} + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2 \quad (2.19)$$

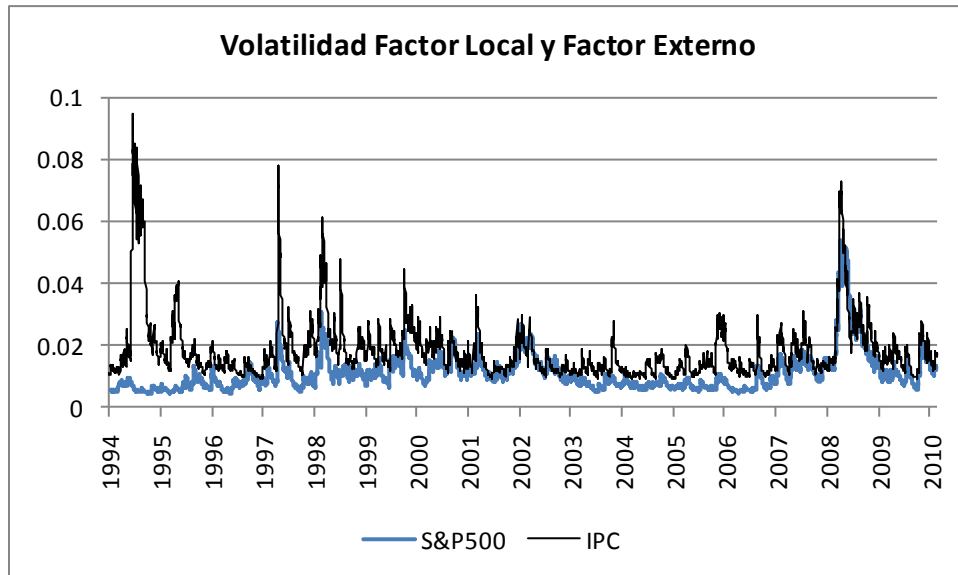


Gráfico 2.3

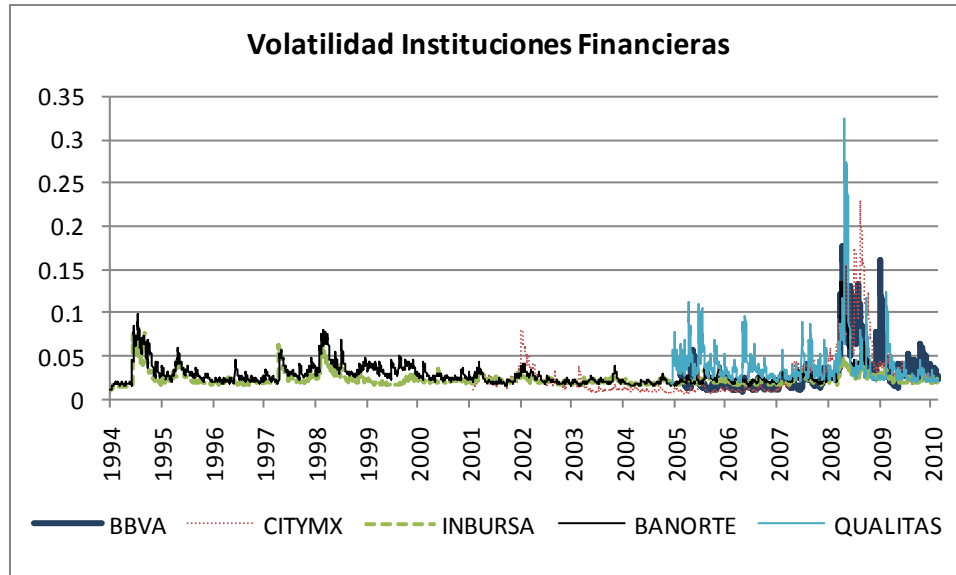


Gráfico 2.4

En la segunda etapa se estiman las correlaciones condicionales dinámicas, DCC, empleando los residuales obtenidos en la primera etapa. La matriz de varianzas y covarianzas de estos residuales va a ser la matriz de correlaciones de los rendimientos:

$$\varepsilon_t | F_t \text{ se distribuye } N(0, R_t)$$

En el modelo DCC las correlaciones siguen un proceso autorregresivo:

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{R} + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1}$$

La matriz \bar{R} es la matriz de correlaciones muestrales y es la tendencia de largo plazo que siguen las correlaciones dinámicas. Se emplea la notación Q_t para enfatizar que se trata de cuasi-correlaciones pues para asegurarnos de que tenemos una matriz válida de correlaciones, es necesario llevar a cabo la siguiente transformación²⁵:

Como podemos ver, en el gráfico 2.5, la correlación entre los factores de mercado ha aumentado más del doble en 16 años.

$$R_t = (I * Q_t)^{-1/2} Q_t (I * Q_t)^{-1/2}$$

²⁵ Donde * representa el producto Hadamard, es decir, el producto entrada por entrada para matrices de la misma dimensión.

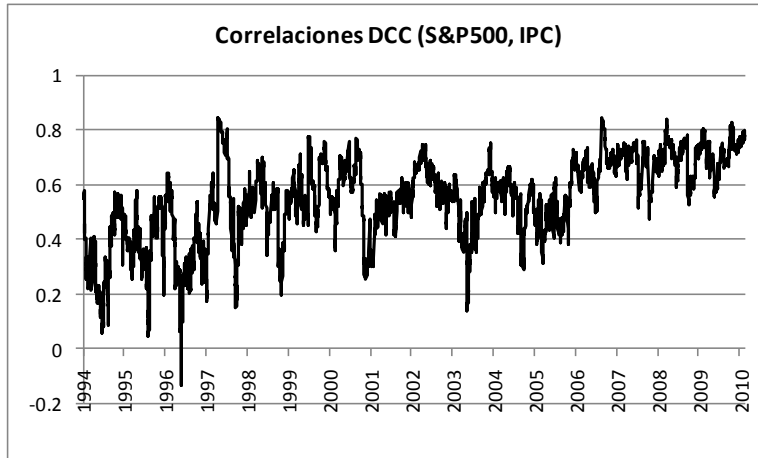


Gráfico 2.5

Tomando el promedio de las correlaciones de los rendimientos individuales con cada factor, en el gráfico 2.6 puede apreciarse que, a medida que ha aumentado la correlación entre los factores de mercado, el ajuste a las correlaciones de la institución con el mercado local ha sido negativo y cada vez más pronunciado ($DCC_Prom(i,IPC)^*$ es el promedio de $\rho_{M2,i,t}^*$).

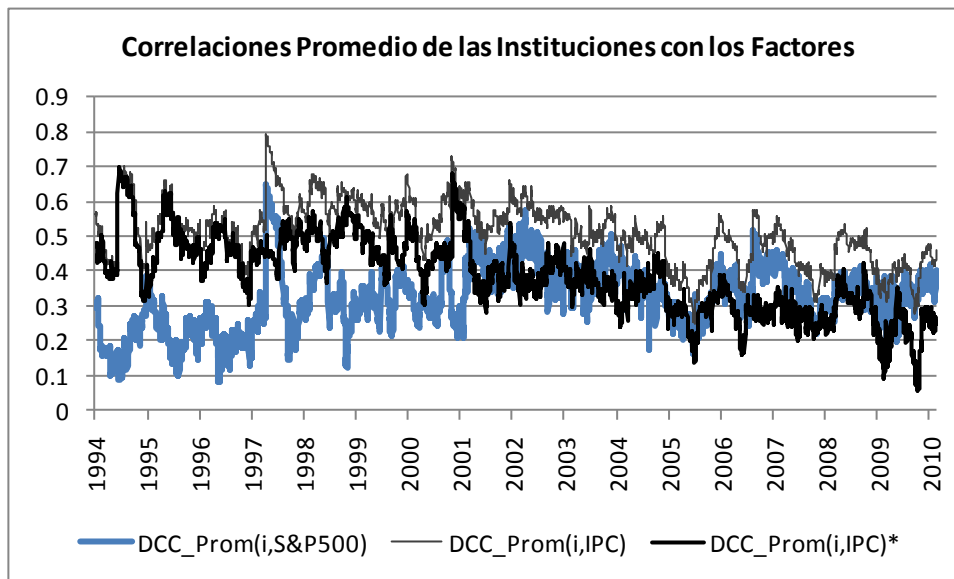


Gráfico 2.6

A pesar de que las instituciones tienen una correlación real con el mercado local mayor a la correlación con el mercado externo, al hacer el ajuste que sugiere el modelo en la sección anterior, las correlaciones con el mercado local son menores al final de la muestra.

En la tercera etapa empleamos los residuales de la segunda etapa para estimar las esperanzas condicionales con los estimadores con *kernels* descritos en la sección anterior.

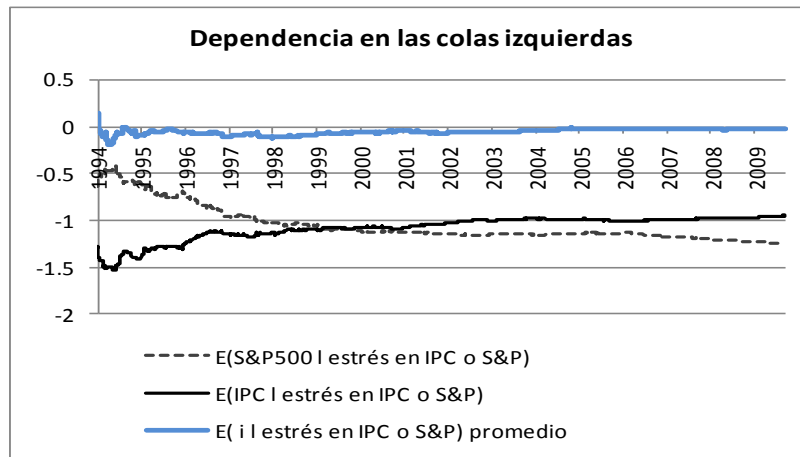


Gráfico 2.7

En el gráfico 2.7 se presenta la dependencia en las colas de la distribución conjunta de los residuales. El umbral de estrés para los dos factores es el 2%. Podemos ver que la dependencia para las idiosincrasias es muy reducida. Al principio de la muestra la dependencia dominante es la de las innovaciones locales, pero este papel se invierte a principios del año 2000.

Finalmente, con los estimados de las volatilidades, las correlaciones y de las colas podemos calcular el MES:

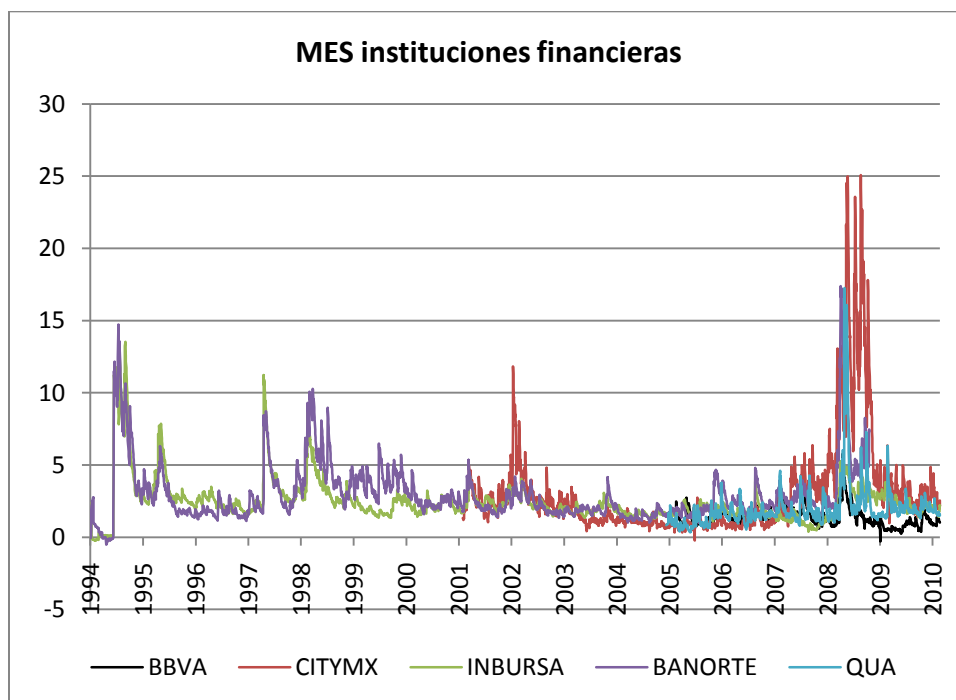


Gráfico 2.8

Para tener una idea general del comportamiento del riesgo sistémico de todo el sector, tomamos el promedio de las series del MES individuales.

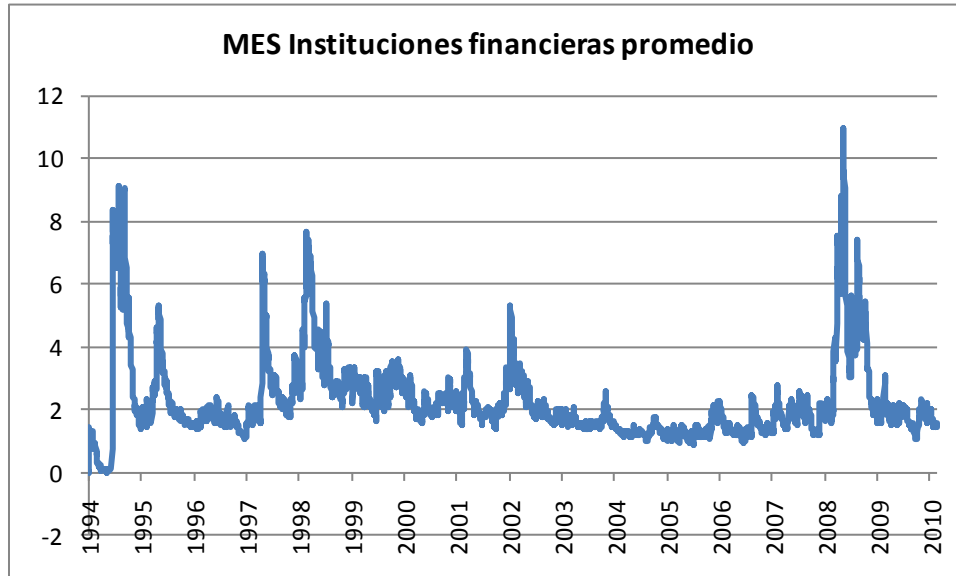


Gráfico 2.9

Podemos ver que el rendimiento esperado es menor a -2% ante una caída del 2% en cualquiera de los dos mercados, la primera mitad de 1995 (crisis del tequila), a finales de 1997 (crisis asiática), a finales de 1998 (crisis rusa) y de mediados de 2008 a mediados de 2009 (gran crisis financiera). Estas estimaciones son congruentes con los períodos económicos mencionados y que corresponden a distintas crisis en los mercados financieros. Es notable que el MES de la crisis (de origen externo) de 2007/2009 sea mayor al de la crisis de 1995 (de origen local). Lo cual puede ser evidencia de la importancia que ha cobrado el factor externo para los activos locales en México. A pesar de que se tomaron promedios, la intuición se conserva.

Para identificar la contribución del factor externo, del factor local y de las idiosincrasias, se toman promedios de los tres sumandos de la ecuación (2.12). Nuevamente, sabemos que al tomar promedios se pierde información, pero el gráfico 2.10 (basado en promedios) nos da una idea de la evolución de las fuentes de riesgo sistémico.

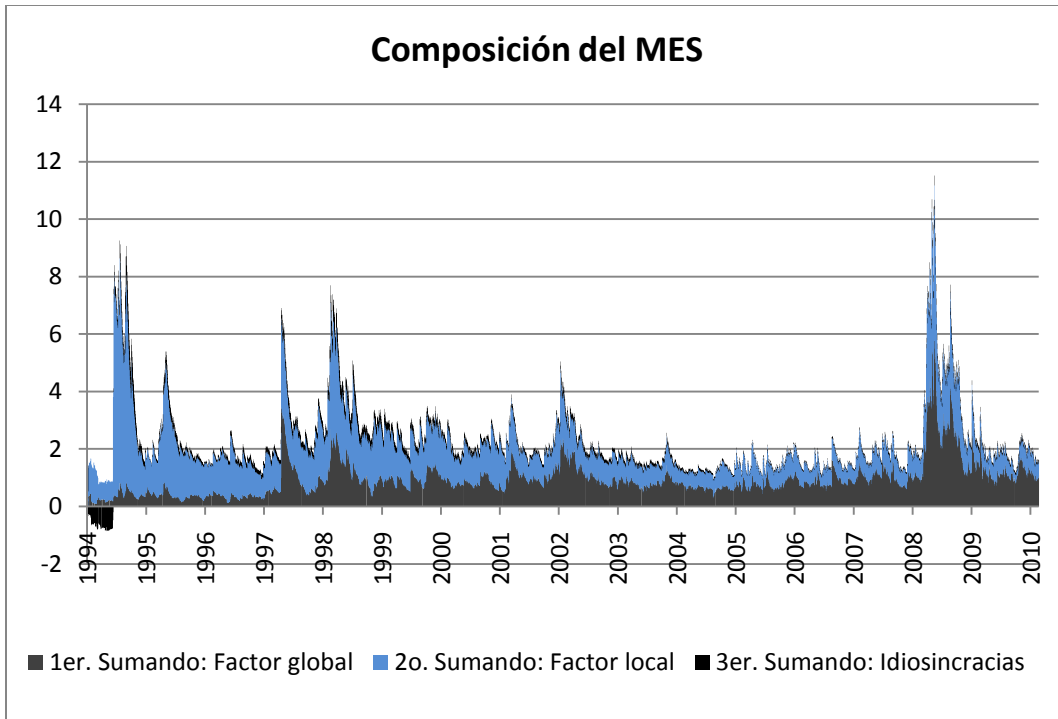


Gráfico 2.10

En el gráfico 2.11 se describe nuevamente la composición del MES pero en términos porcentuales para lo cuál se emplean los valores aobssolutos de cada sumando en el tiempo.

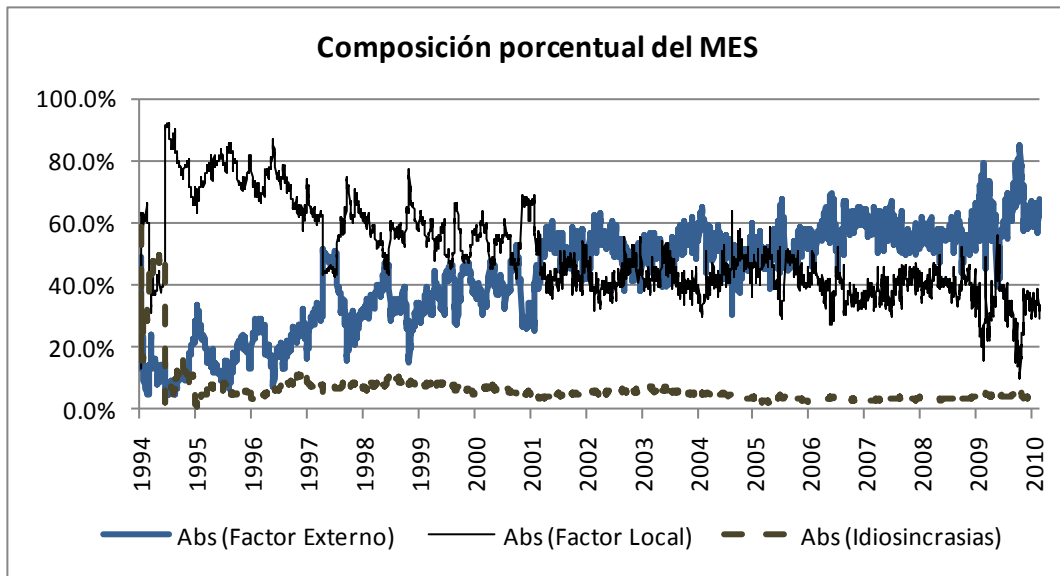


Gráfico 2.11

Las betas variantes en el tiempo nos describen una historia similar al gráfico anterior. Aunque, recordemos que la beta captura una dependencia lineal y el MES captura tanto la dependencia lineal como las correlaciones. $Beta(IPC)^*$ representa la Beta calculada con las correlaciones ajustadas.

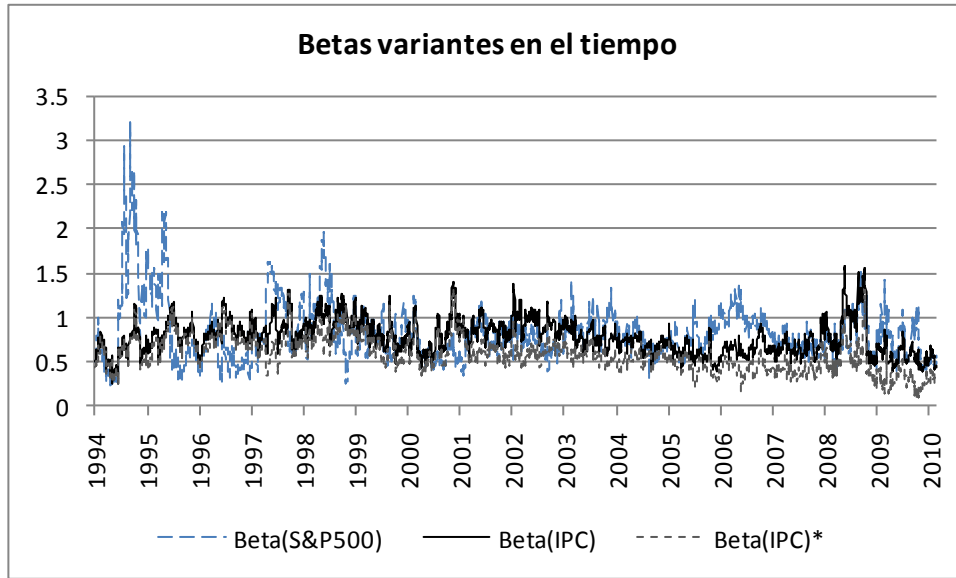


Gráfico 2.12

En cuanto a la capacidad predictiva a un día, tomando como referencia el modelo de un factor²⁶ local, IPC, contra el modelo de dos factores donde el primer factor es el factor externo y el segundo factor es el local, se encuentra que el MES es marginalmente mejor predictor en las 5 instituciones financieras y en las 15 empresas no financieras, bajo un criterio de errores cuadráticos medios. El error es en promedio 2.64% menor.

Por ejemplo, para Inbursa, el grupo financiero mexicano más grande, así se visualizan los dos modelos vs. rendimientos realizados:

²⁶ El MES de dos factores es comparable con el MES de un factor únicamente cuando el evento condicionante es el mismo, es decir, cuando el evento estresante se da en el mercado local.

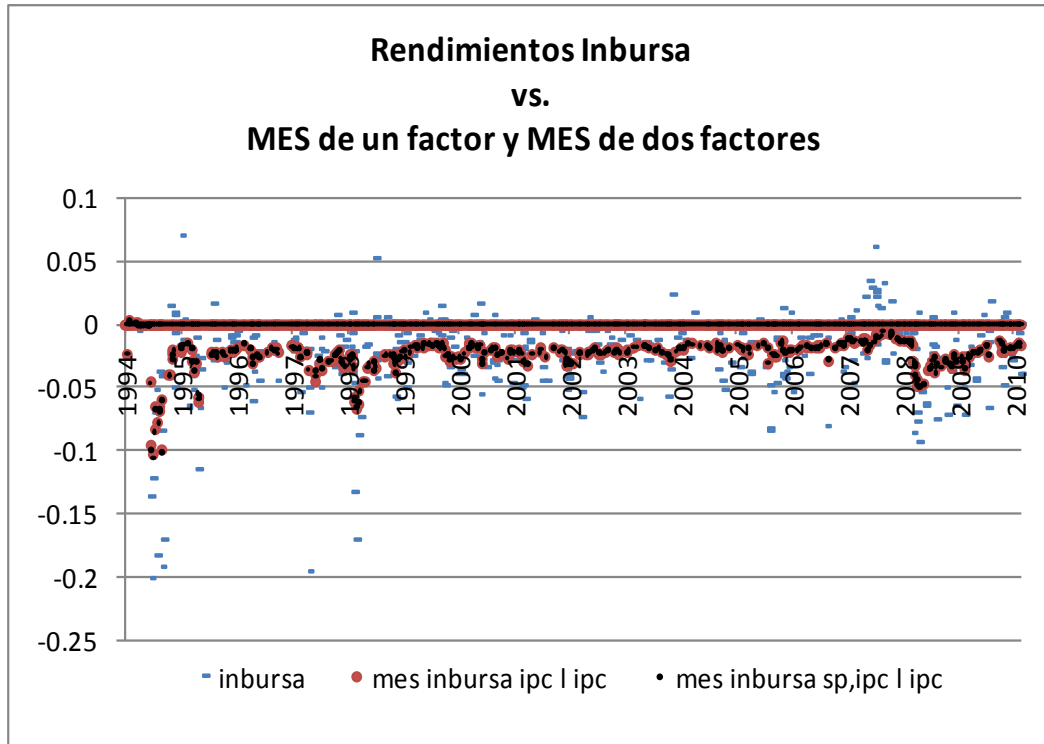


Gráfico 2.13

2.4 Conclusiones

El modelo propuesto extiende la metodología de Engle y Brownlees (2010), para estimar de forma condicional la *Marginal Expected Shortfall*, al caso donde es relevante incluir un factor local y un factor externo en la especificación de los rendimientos, empleando únicamente precios de mercado. Al igual que en el modelo de un factor, el MES es función de la volatilidad, las correlaciones y el riesgo de cola. Sin embargo, además de la volatilidad individual y del mercado local, se incorpora la volatilidad del mercado externo. Además de la correlación entre la institución y el mercado local, se incorporan las correlaciones entre la institución y el mercado externo, y las correlaciones entre los mercados local y externo. La dependencia no-lineal, estimada por las esperanzas condicionales al evento sistémico no sólo va a incorporar un nuevo término, sino que va a permitir hacer condicionamientos más generales: que el mercado externo esté en estrés, que el mercado local esté en estrés, que

cualquiera de los dos mercados esté en estrés o que ambos mercados estén en estrés de forma simultánea.

El modelo propuesto lleva implícita una especificación de betas variantes en el tiempo. Por lo que además de la capacidad predictiva del modelo, también es posible analizar la evolución en el tiempo del peso específico de los factores y de las idiosincrasias en la generación del riesgo sistémico.

Un claro ejemplo de un mercado local altamente ligado a uno externo es el mercado accionario mexicano ya que éste sigue de manera cercana al mercado estadounidense. Por esta razón, el modelo de dos factores puede ser una herramienta más adecuada para monitorear el riesgo sistémico en México. El hecho de que para la estimación únicamente se necesitan precios de mercado la hace atractiva en términos de los costos de la información.

Se estima el modelo para cuatro grupos financieros y una aseguradora para el período de julio de 1994 a septiembre de 2010. Se obtiene el comportamiento del MES en el tiempo y se elabora un ranking sistémico.

El análisis de las componentes del riesgo muestra que el factor de mercado externo se ha hecho cada vez más relevante.

Es pertinente resaltar que dicho ordenamiento es en términos de rendimientos. Para complementar el análisis es importante considerar el tamaño de la institución.

Como se mencionó en las primeras dos secciones, el MES puede ser ligado teóricamente al riesgo sistémico cuando se trata de instituciones financieras. Cuando se trata de empresas no financieras, el MES también puede ser estimado pero sin las mismas implicaciones teóricas. Aún así es muy útil como herramienta de administración de riesgo, ya que permite estimar la reacción de los rendimientos de la empresa ante condiciones estresantes en el mercado y el modelo econométrico tiene una estructura que permite hacer pronósticos.

Como temas pendientes directamente relacionados con el modelo presentado podemos mencionar que es relevante estudiar el efecto del estrés de una institución financiera sobre el mercado, usando modelos de pérdidas esperadas condicionales. La estimación del MES es relevante y también lo es el identificar los determinantes del MES para las instituciones financieras donde el modelo de dos factores es aplicable. La especificación de betas variantes en el tiempo podría incluir una especificación más flexible que capture de mejor manera las tendencias de largo plazo.

Capítulo 3

Implicaciones del *Carry Trade* para Portafolios Internacionales

3.1 Introducción

El *carry trade* es una estrategia de inversión que consiste en tomar posiciones largas en divisas con tasas de interés altas y cortas en aquellas con tasas bajas. Esta estrategia simple ha probado generar rendimientos por períodos largos, seguidos por grandes pérdidas después de colapsos repentinos en los tipos de cambio. El *carry trade* explota violaciones en la paridad de tasas de interés descubiertas y ha despertado mucho interés en la comunidad académica recientemente, como en Jordà y Taylor (2009) y Jurek (2009). En el presente artículo se estudian las implicaciones de estos saltos en los tipos de cambio en el contexto del problema del inversionista de Merton (1973). El inversionista internacional acude a los mercados internacionales, por un lado para cubrir sus posiciones cambiarias riesgosas y por el otro para aprovechar las ganancias del *carry trade*. Para estudiar los saltos del tipo de cambio en portafolios internacionales retomamos el modelo de Torres (2007).

Un trabajo pionero en el estudio de portafolios internacionales es el de Solnik (1974) donde se extiende el modelo de valuación de activos de capital (CAPM por sus siglas en inglés) al incluir como variable adicional el tipo de cambio. Se concluye que si se asume correlación cero entre el riesgo cambiario y el riesgo de mercado, cubrir en su totalidad el riesgo cambiario es óptimo. Se encuentra también que el tipo de cambio *forward* es un estimador sesgado del diferencial en las tasas de interés de dos países, lo cual es una versión del *forward premium puzzle*. Tres décadas y media más tarde Campbell, Serfaty-de Medeiros y Viceira (2010) analizan el caso de un inversionista que cuenta con un portafolio de acciones o bonos y acude al mercado de divisas para administrar el riesgo de sus posiciones. Al analizar portafolios de acciones, muestran que la cobertura total del riesgo cambiario no siempre es óptima. Sin embargo para el caso de los bonos se encuentra que la correlación entre los excesos de rendimiento de los bonos y las divisas es cercana a cero, por lo que la cobertura

total del riesgo cambiario será cercana a la cobertura óptima. Encuentran que la cobertura óptima va a depender de la correlación promedio de las divisas respecto al rendimiento accionario global. Sin embargo no encuentran evidencia de que estas correlaciones ayuden a explicar el *forward premium puzzle*. Das y Uppal (2004) estudian las consecuencias en la diversificación de los portafolios internacionales cuando los precios presentan movimientos discretos con tasa de ocurrencia común entre activos. Suponiendo que los rendimientos siguen un proceso de difusión con saltos, encuentran que existe una pérdida pequeña en términos de diversificación y una pérdida considerable para posiciones apalancadas. Una falla de este modelo, según Kole, Koedijk y Verbeek (2006), es que el conjunto de inversión es constante y por lo tanto no logra capturar la dinámica de los eventos sistémicos, en especial la persistencia. Encuentran que cuando se modela la persistencia de los eventos sistémicos mediante cambios de régimen, las pérdidas de un inversionista que ignora el régimen estresado (correlaciones y volatilidades altas) son importantes. Si se toma en cuenta el régimen de crisis, las ganancias de la diversificación se ven seriamente afectadas dependiendo de la probabilidad de crisis y los inversionistas tienden a cancelar posiciones apalancadas. La solución es la estándar del problema del inversionista, los cambios de régimen se incorporan en los conjuntos de inversión dinámicos es decir, en los parámetros de la media y la varianza del proceso de difusión; por tanto el modelo no toma en cuenta momentos de orden superior en los rendimientos. Torres (2007) plantea una especificación en la que los precios de los activos, expresados respecto a un numerario, presentan saltos como consecuencia de saltos conjuntos en los tipos de cambio. Se muestra que al incorporar la posibilidad de saltos, el riesgo de contagio puede producir efectos complejos en la cobertura del riesgo cambiario. En la implementación, los parámetros se estiman usando el Método Generalizado de Momentos (GMM) de Hansen (1982), con identificación de los momentos mediante transformadas de Fourier.²⁷ Se encuentra que los efectos del riesgo sistémico presentan efectos asimétricos en la demanda de divisas ligados a la dirección de los saltos y cambios en la dinámica de precios en activos sin saltos.

Sobre los determinantes de las variaciones de los tipos de cambio, Lustig, Roussanov y Verdelhan (2011) en un análisis de corte transversal identifican dos factores que explican la mayor parte de la variación en los excesos de rendimientos de portafolios de divisas

²⁷ Véase también Chacko y Viceira (2003).

ordenados de acuerdo a las respectivas tasas de interés. Los factores son motivados por los dos primeros componentes principales y su poder explicativo del rendimiento de los portafolios. El primer componente (nivel) tiene una correlación de 0.99 con el rendimiento promedio en dólares respecto a todas las demás divisas. El segundo componente (pendiente) tiene una correlación promedio de 0.94 con el diferencial de excesos de rendimiento entre portafolios con descuentos forward altos y portafolios con descuento forward bajo. Verdelhan (2011) en un análisis de series de tiempo reporta que estos dos factores explican entre un 20% y un 90% de la variación sistemática de los cambios del tipo de cambio en países con tipos de cambio flotantes. Aún más, se muestra que la variación sistemática está relacionada positivamente con medidas financieras y macroeconómicas de integración. Es decir, a una mayor integración financiera y comercial, una mayor capacidad de explicar las variaciones sistemáticas en los tipos de cambio.

La mayor integración sistemática y la presencia de eventos sistémicos en los mercados financieros, configuran un cambio en la manera de entender la asignación óptima de activos. Nuestro trabajo tiene el objetivo de ayudar a entender mejor las consecuencias de estas relaciones complejas en los portafolios internacionales cuando se modelan explícitamente los saltos en el tipo de cambio.

Al proveer soluciones analíticas para un número mayor de activos que los empleados en Torres (2007) buscamos contar con una caracterización más completa de las relaciones sistémicas y sistemáticas que se dan entre los activos del portafolio. Dicha caracterización no se restringe únicamente a las ecuaciones del portafolio óptimo sino que también se refiere a la estimación de los primeros cuatro momentos.

El tema de portafolios internacionales es bastante amplio pues tiene asociadas distintas ramificaciones importantes. Temas como la determinación de los tipos de cambio, los fundamentos teóricos de la decisión de invertir en el extranjero o en activos locales, las propiedades de los estimadores de los procesos estocásticos (como en nuestro caso, el GMM espectral), la importancia de emplear modelos que consideren las implicaciones de la microestructura de mercado de acuerdo a los datos, la robustez de la estimación ante crisis sistémicas. De particular importancia son los temas numéricos, muestra de ellos es la *Initiative for Computational Economics* de la Universidad de Chicago. Uno de los temas que se considera importante y difícil de resolver es el de la integración numérica, el cual es

relevante para nuestro problema como se explica en la sección 3.3. Al aumentar la dimensión y complejidad de la integración, necesitamos técnicas más poderosas que nos den algún nivel aceptable de certidumbre sobre los resultados empíricos para poderlos traducir de forma válida en intuición y en estrategias prácticas. Reconocemos que el problema es enorme y que en este artículo lidiamos únicamente con ciertos aspectos de la elección óptima de portafolios internacionales.

El resto del artículo se organiza de la manera que se describe a continuación. En la sección 3.2 se presenta el modelo teórico y se desarrolla nuestra primera contribución que consiste en proveer una solución cerrada al problema del inversionista internacional, empleando la descomposición ortogonal de Aït-Sahalia, Cacho-Díaz y Hurd (2009) y definiendo una nueva distribución de probabilidad para la magnitud de los saltos, la cual es una adaptación de la distribución Bernoulli multivariada.

En la sección 3.3 se explica la metodología de estimación del modelo y solución del problema que proponemos. Los parámetros del modelo se estiman mediante una adaptación de la metodología de GMM Espectral igual que en Torres (2007) y, a diferencia de éste, identificamos los momentos asociados nuestra distribución de saltos Bernoulli modificada además de los momentos asociados a la distribución normal. En esta sección también proponemos el uso de cuadraturas Gaussianas para solucionar numéricamente las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman. Dichas cuadraturas son distintas a las empleadas por Torres (2007) y recurren a un número mayor de nodos para implementar la aproximación. Se propone además una comparación del estimado del parámetro de intensidad de nuestro modelo contra los estimados del modelo univariado de Expectation Maximization como una forma de entender mejor los valores razonables de este parámetro.

En la sección 3.4 se amplía el análisis de Torres (2007) de tres países (9 activos) a cinco países (15 activos). Se describen los datos empleados para el análisis empírico y se presentan los resultados correspondientes. Encontramos que, el modelo con saltos de magnitud normal captura mejor la curtosis que el modelo con saltos de la distribución definida por nosotros, salvo para las divisas con saltos promedio grandes. También encontramos que el introducir saltos en el tipo de cambio aumenta la volatilidad de los tipos de cambio. Las correlaciones de los saltos van en sentido contrario a las correlaciones Brownianas. Un hallazgo importante en esta sección es la magnitud del Equivalente Cierto que necesita un inversionista con una

estrategia sub-óptima para compensar su pérdida de utilidad final esperada proveniente de no implementar la estrategia óptima del modelo con saltos. En la sección 3.5 se concluye y se plantea la posible agenda de investigación.

3.2 Modelo para el Inversionista Internacional

Elección del Portafolio Óptimo

En esta sección se describe el problema de optimización en tiempo continuo al que se enfrenta un inversionista internacional. Consideramos que un modelo de tiempo continuo es más apropiado para hacer explícitas las relaciones económicas de interés que los modelos de tiempo discreto.²⁸

El inversionista del país n (nuestro numerario) tiene que decidir la asignación de su riqueza entre los activos de n países, que maximice su utilidad final esperada sujeto a la restricción impuesta por la ecuación de estado de la riqueza. En el modelo no se considera consumo intermedio.

$$V(w, t) = \max_{\Pi} E_{W(t)=w} [U(W(T))], \quad V(w, T) = U(w) \quad (3.1)$$

$$\dot{W}(s) = g(W(s), \Pi(s)), \quad W(t) = w$$

W es la riqueza (variable de estado) y sigue una dinámica estocástica $g(\cdot)$; w es la riqueza inicial; Π es el vector de controles, o pesos del portafolio; U es la función de utilidad de la riqueza final, V es la función valor.

Asumimos una función CRRA para la utilidad final,

$$U(W(T)) = \frac{W(T)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

²⁸ Cabe mencionar que debido a la naturaleza discreta de los datos, en la estimación también se incurre en una discretización del modelo continuo. Para modelos en tiempo discreto que incorporan saltos en el tipo de cambio ver por ejemplo Maheu y McCurdy (2006).

Los activos disponibles para el inversionista son n acciones, n bonos y n divisas, entre n países.

La especificación de los rendimientos de Torres (2007) es idónea para analizar los saltos en los precios asociados a saltos en el tipo de cambio, porque descompone los rendimientos de un activo en los rendimientos en moneda local del activo y los rendimientos del tipo de cambio. El numerario es la divisa del país n y en lo sucesivo asumiremos, sin pérdida de generalidad, que la divisa n es el dólar.

La evolución de los precios del bono y la acción del país i en moneda local está dada por los siguientes procesos de difusión:

$$\begin{aligned} \text{Bono, país } i: & \quad dB_i = B_i r_i dt & (3.2) \\ \text{Acción, país } i: & \quad dP_i = P_i \mu_i^a dt + P_i \sigma_i^a dz_i^a \\ & \quad i=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

El tipo de cambio sigue un proceso de difusión con saltos de tipo Poisson de magnitud J_i . N es un proceso de Poisson puro con tasa de ocurrencia λ_i . La siguiente ecuación describe la dinámica del tipo de cambio de la divisa i a dólares.

$$dS_i = S_i \mu_i^s + S_i \sigma_i^s dz_i^s + S_i J_i dN \quad (3.3)$$

Los superíndices a y S en las dos ecuaciones anteriores se utilizan para distinguir los parámetros de las acciones de los del tipo de cambio *spot*.

Recurriendo al cálculo de Itô para procesos con saltos y combinando las ecuaciones anteriores, se puede mostrar que los rendimientos de bonos y acciones en dólares están dados por las siguientes ecuaciones (en el Apéndice 3.A se detalla el desarrollo).

$$\text{Acción } i, \text{ en dólares: } \quad \frac{dP_i^n}{P_i^n} = (\mu_i^a + \mu_i^s + \sigma_{ii}^{as}) dt + \sigma_i^a dz_i^a + \sigma_i^s dz_i^s + J_i dN \quad (3.4)$$

$$\text{Bono } i, \text{ en dólares: } \quad \frac{dB_i^n}{B_i^n} = (r_i + \mu_i^s) dt + \sigma_i^s dz_i^s + J_i dN$$

Los saltos en el tipo de cambio se reflejan en saltos en los precios/rendimientos de los bonos y las acciones. No se toman en cuenta otras fuentes de saltos en los precios para poder aislar los efectos de los co-movimientos discretos del tipo de cambio en la elección óptima del portafolio. Sin embargo, hay evidencia de que los saltos no son insignificantes en el caso de las acciones.²⁹

Las covarianzas no siempre son entre activos de la misma clase por lo que se usará la siguiente notación para la tasa instantánea de covarianza entre el activo i del tipo k y el activo j del tipo l : σ_{ij}^{kl} donde k =acción, divisa y l =acción, divisa.

El vector de controles, Π , va a contener la proporción de la riqueza invertida en acciones a_i y la proporción de la riqueza invertida en bonos b_i . De tal forma que los cambios en la riqueza van a estar dados por los rendimientos de los bonos y las acciones de acuerdo a las proporciones a_i y b_i , para $i=1,2,\dots,n$.

$$\frac{dW}{W} = \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{dP_i^n}{P_i^n} + b_i \frac{dB_i^n}{B_i^n} \right) \quad (3.5)$$

Si a esta ecuación le aplicamos la transformación $y_i = a_i + b_i$, con $\sum_{i=1}^n y_i = 1$, propuesta por Solnik (1974), no es difícil mostrar que podemos reescribir la ecuación de acumulación como un arreglo matricial:

$$\frac{dW}{W} = \left[r_n + [a_n \ a' \ y'] \begin{bmatrix} \mu_n^a - r_n \\ \mu^a + \sigma^{as} - r \\ \mu^s + r - r_n \end{bmatrix} \right] dt + [a_n \ a' \ y'] \begin{pmatrix} \sigma_n^a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma^s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} dz_n^a \\ dz^a \\ dz^s \end{bmatrix} + y' J dN \quad (3.6)$$

Donde $a, b, \mu^a, \mu^s, \sigma^a, \sigma^s, \sigma^{as}, dz^a, dz^s, J, r$ y r_n son vectores de dimensión $(n-1)$ con componentes $a_i, b_i, \mu_i^a, \mu_i^s, \sigma_i^a, \sigma_i^s, \sigma_{ii}^{as}, dz_i^a, dz_i^s, J_i, r_i$ y r_n , para $i=1,2,\dots,(n-1)$.

La transformación $y_i = a_i + b_i$ es conveniente pues la expresión (3.5) puede re-agruparse de tal forma que a_i es el peso de una inversión cubierta contra el riesgo cambiario y y_i es el peso de una posición especulativa en la divisa del país i . Esta transformación es la empleada en la ecuación (3.56) de la sección V.

²⁹ Véase Jorion (1988) y Bekaert et al. (1988)

A fin de facilitar la lectura de la notación, expresamos a (3.6) de una forma aún más compacta.

$$\frac{dW}{W} = [r_n + \Pi\mu]dt + \frac{1}{2}\Pi D dz + y' J dN \quad (3.7)$$

$$\text{con } \mu = \begin{bmatrix} \mu_n^a - r_n \\ \mu^a + \sigma^{as} - r \\ \mu^s + r - r_n \end{bmatrix}, \quad dz = \begin{bmatrix} dz_n^a \\ dz^a \\ dz^s \end{bmatrix} \quad \text{y } D = \text{diag}(\sigma_n^{a2} \sigma^{a2} \sigma^{s2})$$

Sea $\Sigma = DRD$ es la matriz de covarianzas de los $(2n-1)$ procesos Brownianos y \mathbf{R} la matriz de correlaciones correspondiente. La matriz de covarianzas puede representarse mediante bloques, para facilitar el análisis individual de los controles óptimos.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_n^{a2} & \sigma_n^{aa'} & \sigma_n^{as'} \\ \sigma_n^{aa} & \Sigma^{aa} & \Sigma^{as} \\ \sigma_n^{as} & \Sigma^{sa} & \Sigma^{ss} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Los vectores σ_n^{aa} y σ_n^{ss} tienen como elementos a σ_{ni}^{aa} y σ_{ni}^{ss} , respectivamente. Las matrices $\Sigma^{aa}, \Sigma^{ss}, \Sigma^{as}$ y Σ^{sa} tienen como elementos a $\sigma_{ij}^{aa}, \sigma_{ij}^{ss}, \sigma_{ij}^{as}$ y σ_{ij}^{sa} , respectivamente.

La teoría del control óptimo estocástico nos dice que para el problema planteado en (3.1), la ecuación de estado (3.6) y el vector de controles, $\Pi' = [a_n \ a' \ y']$, la función valor $V(w, t)$ va a cumplir con la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)³⁰:

$$0 = \max_{\Pi} \{V_t + \mathcal{L}V\} \quad (3.9)$$

El operador infinitesimal \mathcal{L} , correspondiente a la función valor y al proceso de riqueza conformado por múltiples procesos Brownianos no independientes y un proceso Poisson multivariado, está dado por:

$$\mathcal{L}V(w, t) = w[r_n + \Pi\mu]V_w + w^2 [\Pi\Sigma\Pi]V_{ww} + \lambda E_{W(T)=w} [U(w(1 + yJ), t) - U(w, t)] \quad (3.10)$$

³⁰ Este es un resultado se deriva del Teorema de Feynman-Kac (1949), el que a su vez tiene su antecedente en la ecuación de Kolmogorov hacia-atrás (1931).

A fin de encontrar los controles óptimos, proponemos la siguiente forma para la solución de la ecuación de HJB, la ecuación valor:

$$V(w, t) = A(t) \frac{w(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Por lo que la ecuación de HJB es

$$0 = \max_{\Pi} \left\{ V_t + w[r_n + \Pi'\mu]V_w + w^2[\Pi'\Sigma\Pi]V_{ww} + \lambda E_{W(T)=w} [U(w(1 + \mathbf{y}'\mathbf{J}), t) - U(w, t)] \right\}$$

$$0 = \max_{\Pi} \left\{ \frac{A_t}{A} + (1-\gamma)[r_n + \Pi'\mu] - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)[\Pi'\Sigma\Pi] + \lambda E_{W(T)=w} [(1 + \mathbf{y}'\mathbf{J})^{1-\gamma} - 1] \right\} \quad (3.11)$$

Derivando con respecto a Π , se obtiene la condición de optimalidad del portafolio:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\mu} - \gamma \mathbf{DRD}\Pi + \lambda E \left[(1 + \mathbf{y}'\mathbf{J})^{-\gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right] \quad \text{con } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{DRD} \quad (3.12)$$

Esta expresión nos indica que de forma implícita el portafolio óptimo va a depender de la media de los rendimientos, de la aversión al riesgo, la frecuencia y tamaño de los saltos, de las varianzas y de las correlaciones. Los primeros dos términos de la ecuación representan la relación media-varianza de un inversionista que ignora la existencia de saltos simultáneos en el tipo de cambio, capturados por el tercer término.

En el óptimo, el término de saltos simultáneos puede verse como un ajuste en el rendimiento requerido para compensar el riesgo implicado por los segundos momentos. Si en promedio se presentan más saltos negativos en el tipo de cambio, el rendimiento promedio requerido es mayor que el sugerido por el enfoque miope de media-varianza. Desafortunadamente, no puede decirse mucho más sobre las relaciones implícitas en la ecuación (3.12) aún en el caso de sub-modelos más elementales como el que se describe a continuación.

Demanda óptima de divisas para el portafolio local

La tendencia de los inversionistas a sobre-asignar activos locales a sus portafolios, conocido como *home bias*,³¹ es un hecho bien documentado. Consideremos al inversionista que ha decidido invertir únicamente en el índice accionario local y que se enfrenta al problema de determinar la demanda óptima en divisas que complementa su estrategia de inversión.

Como se mencionó anteriormente, Campbell, Serfaty-de Medeiros y Viceira (2010) muestran que la cobertura completa en general no es óptimo para activos accionarios, por lo que la decisión sobre las posiciones en divisas no es trivial. De hecho, en este caso la posición no necesita de cobertura por estar expresada en la moneda local. Lo que se busca entonces es determinar la demanda de divisas que maximice la utilidad final esperada y/o que conduzca a una disminución del riesgo del portafolio.

La ecuación (3.11) puede adecuarse para resolver el problema arriba descrito, donde a_n está dado, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y maximizamos sobre \mathbf{y} . Es decir $\mathbf{\Pi}' = [a_n \ \mathbf{0}' \ \mathbf{y}']$ y un coeficiente de aversión al riesgo $\gamma = 2$.

$$0 = \max_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{A_t}{A} - [r_n + [a_n \ \mathbf{0}' \ \mathbf{y}'] \boldsymbol{\mu}] + \left[[a_n \ \mathbf{0}' \ \mathbf{y}'] \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} a_n \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \right] - \lambda E \left[\frac{\mathbf{y}' \mathbf{J}}{(1 + \mathbf{y}' \mathbf{J})} \right] \right\} \quad (3.13)$$

Renombrando el término independiente de \mathbf{y} , $k = \frac{A_t}{A} - [r_n + a_n (\mu_n^a - r_n)] + a_n^2 \sigma_n^{a^2}$.

$$0 = \max_{\mathbf{y}} \left\{ k - (\boldsymbol{\mu}^s + \mathbf{r} - r_n)' \mathbf{y} + 2a_n \sigma_n^{as'} \mathbf{y} + \mathbf{y}' \boldsymbol{\Sigma}^{ss} \mathbf{y} - \lambda E \left[\frac{\mathbf{y}' \mathbf{J}}{(1 + \mathbf{y}' \mathbf{J})} \right] \right\} \quad (3.14)$$

Una solución implícita para \mathbf{y} se obtiene de resolver directamente la ecuación (3.14).

$$0 = (\boldsymbol{\mu}^s + \mathbf{r} - r_n - 2a_n \sigma_n^{as'}) - 2\boldsymbol{\Sigma}^{ss} \mathbf{y} + \lambda E \left[(1 + \mathbf{y}' \mathbf{J})^{-2} \mathbf{J} \right] \quad (3.15)$$

Bajo la ocurrencia de saltos simultáneos, todos de magnitud j y probabilidad p :

$$0 = (\mathbf{r} - r_n + \boldsymbol{\mu}^s) - 2(a_n \sigma_n^{as'} + \boldsymbol{\Sigma}^{ss} \mathbf{y}) + \frac{\lambda p j}{(1 + j \mathbf{I}' \mathbf{y})^2} \mathbf{I} \quad (3.16)$$

³¹ Para revisiones de literatura académica sobre el *home bias*, véase Lewis (1999), Karolyi y Stulz (2003) y Sercu y Vanpeé (2007).

El sistema es simultáneo y no lineal. Aún en este modelo simplificado poco podemos decir de las demandas individuales sin la necesidad de recurrir a evaluaciones numéricas como la que vamos a describir en la sección 3.3. Las soluciones numéricas son útiles y prácticamente indispensables como se verá en las siguientes secciones.

Sin embargo, es relevante tener un acercamiento a las soluciones cerradas que nos permitan desarrollar intuición sobre cómo se determinan las demandas de los activos del portafolio, para lo cual hay que recurrir a ciertos supuestos matemáticos y estadísticos.

Descomposición ortogonal del espacio de rendimientos para n activos

La presente sección representa una extensión significativa respecto al trabajo de Torres (2007) en el que se estudia el modelo teórico para el caso $n=3$. A continuación se describe la solución cerrada del problema del inversionista para n arbitraria, que se obtiene empleando la descomposición ortogonal de Aït-Sahalia, Cacho-Díaz y Hurd (2009)³² y una adaptación de la distribución Bernoulli multivariada de Dai, Ding y Whaba (2012)³³.

Aït-Sahalia (2004) afirma que la esencia de la administración de riesgos puede resumirse como la habilidad de separar el riesgo Browniano del riesgo de saltos, a fin de poder implementar estrategias Gaussianas para el corto plazo y estrategias enfocadas a controlar pérdidas extremas asociadas a saltos en los precios.

Posteriormente Aït-Sahalia, et al. (2009) proponen una descomposición ortogonal del espacio de rendimientos $\mathbf{R}^n = V \oplus V^\perp$.³⁴ Donde V es el espacio generado por los vectores de saltos y V^\perp es el hiperplano ortogonal a V .

La descomposición ortogonal puede realizarse si existe una transformación bajo la cual los subespacios V y V^\perp son invariantes.

Combinando diversos resultados de álgebra lineal³⁵ sabemos que los eigen-espacios de una matriz cuadrada A de $n \times n$ son subespacios de \mathbf{R}^n y que si dicha matriz es diagonalizable,

³² En la primera parte de esta sub-sección se desarrolla y explica la descomposición ortogonal de Aït-Sahalia, et al (2009). En particular, las ecuaciones (18) a (22) son fórmulas y resultados de los autores referidos con algunas modificaciones. Las ecuaciones (17), (23) a (29) siguen la teoría de los autores mencionados pero son más particulares al problema que planteamos nosotros y donde hacemos supuestos distribucionales distintos.

³³ Esta distribución se emplea para obtener la solución cerrada, pero se enuncia formalmente hasta la sección IV.

³⁴ El símbolo \oplus representa la suma directa de los dos subespacios. Es decir, los elementos de \mathbf{R}^n pueden escribirse de forma única como la suma de un elemento de V y un elemento de V^\perp .

³⁵ Ver por ejemplo Beezer (2012).

entonces R^n puede expresarse como la suma directa de sus eigen-espacios. Aún más, tales eigen-espacios son subespacios de R^n invariantes a la transformación inducida por A.

Sabemos que las matrices de varianzas y covarianzas son diagonalizables por lo que podemos emplear nuestra matriz de varianzas y covarianzas Brownianas para implementar la descomposición deseada.

Ait-Sahalia, et al. (2009) proponen la transformación $\Sigma = \Sigma^{JB} + \Sigma^B$ que mapea V en V y V^\perp en V^\perp . Por construcción, el riesgo de saltos ocurre sólo en V mientras que el riesgo Browniano ocurre tanto en V como en V^\perp , de ahí la notación empleada³⁶.

A fin de hacer explícita la descomposición ortogonal de la matriz de varianzas y covarianzas se replantea el problema original (3.14) para el caso en que existen $n-1 = mk$ activos³⁷, m fuentes de riesgo Poisson (sectores), k firmas por sector y con $\gamma = 2$:

$$0 = \max_y \left\{ k - (\boldsymbol{\mu}^a + \boldsymbol{\sigma}^{as} - \mathbf{r})' \mathbf{y} + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as'} \mathbf{y} + \mathbf{y}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss} \mathbf{y} - \sum_{l=1}^m \lambda_l E \left[\frac{\mathbf{y}' \mathbf{J}_l}{(1 + \mathbf{y}' \mathbf{J}_l)} \right] \right\} \quad (3.17)$$

Ahora procedemos a explicar cómo se forman las matrices Σ , Σ^{JB} y Σ^B .

Proponemos las siguientes matrices de dimensión k x k:

$$\sigma_l^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho_{ll} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{ll} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\sigma_l \sigma_s \begin{pmatrix} \rho_{ls} & \cdots & \rho_{ls} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{ls} & \cdots & \rho_{ls} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

³⁶ Debido a la aleatoriedad “multi-direccional” de los rendimientos Brownianos, éstos pueden estar en cualquiera de los dos subespacios, a diferencia de los saltos que únicamente se encuentran en un subespacio.

³⁷ En este caso, para guardar consistencia con el planteamiento inicial, el espacio que se descompone es R^{n-1} , aunque al tener una n arbitraria no se pierde generalidad.

Recurriendo a las propiedades básicas de determinantes, los eigen-valores de (3.18) son

$$\begin{aligned}\theta_{ll}^{JB} &= \sigma_l^2 (1 + (k-1)\rho_{ll}) \quad \text{con multiplicidad } 1 \\ \theta_{ll}^B &= \sigma_l^2 (1 - \rho_{ll}) \quad \text{con multiplicidad } (k-1)\end{aligned}$$

y los eigenvalores de (3.19) son

$$\begin{aligned}\theta_{ls}^{JB} &= k\sigma_l\sigma_s\rho_{ls} \quad \text{con multiplicidad } 1 \\ \theta_{ls}^B &= 0 \quad \text{con multiplicidad } (k-1)\end{aligned}$$

Usando estas matrices construimos la matriz de varianzas y covarianzas Browniana

$$\Sigma_{SS} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{11} & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \sigma_1\sigma_2 \begin{pmatrix} \rho_{12} & \cdots & \rho_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{12} & \cdots & \rho_{12} \end{pmatrix} & \cdots & \sigma_1\sigma_m \begin{pmatrix} \rho_{1m} & \cdots & \rho_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1m} & \cdots & \rho_{1m} \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_m\sigma_1 \begin{pmatrix} \rho_{m1} & \cdots & \rho_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \cdots & \rho_{m1} \end{pmatrix} & \sigma_m\sigma_2 \begin{pmatrix} \rho_{m2} & \cdots & \rho_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m2} & \cdots & \rho_{m2} \end{pmatrix} & \cdots & \sigma_m^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_m & \cdots & \rho_m \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Es importante señalar que (3.20) no es la matriz de varianzas y covarianzas original sino una representación de factores, lo cual explica la homogeneidad dentro de los distintos bloques. La generalidad de esta representación va a depender del número y tamaño de los sectores en consideración. Para portafolios de dimensiones elevadas, un modelo factorial claramente resultará apropiado. Una desventaja puede ser la estimación de este tipo de matrices pues las condiciones para obtener matrices positivas definidas pueden ser astringentes.

Podemos expresar a (3.20) como la suma de dos matrices

$$\Sigma_{SS} = \Sigma_{SS}^{JB} + \Sigma_{SS}^B$$

$$\Sigma_{SS}^{JB} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \theta_{11}^{JB} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \theta_{12}^{JB} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \dots & \theta_{1m}^{JB} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1}^{JB} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \theta_{m2}^{JB} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \dots & \theta_{mm}^{JB} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\Sigma_{SS}^B = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \theta_{11}^B \begin{pmatrix} k-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & k-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \theta_{mm}^B \begin{pmatrix} k-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & k-1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A su vez el vector de pesos de las divisas se descompone en dos vectores ortogonales

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^B = \sum_{l=1}^m y_l^{JB} \mathbf{1}_l + \mathbf{y}^B$$

El vector $\mathbf{1}_l$ es un vector con unos en las componentes $(l-1)k+1$ hasta lk y ceros en el resto.

Los saltos están diferenciados por sector de la siguiente manera y siempre tienen direcciones paralelas a los vectores de unos.

$$\mathbf{J}_l = \sum_{s=1}^m j_{s,l} \mathbf{1}_s$$

Donde $j_{s,l}$ es el salto en el sector s como consecuencia del salto en el sector l .

También renombramos y reexpresamos el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_n + \boldsymbol{\mu}^s = \boldsymbol{\mu} = \sum_{l=1}^m \mu_l^{JB} \mathbf{1}_l + \boldsymbol{\mu}^B$.

Sustituyendo los términos anteriores en (3.17) obtenemos la ecuación de HJB de la descomposición ortogonal.

$$0 = \max_{y^{JB}, y^B} \left\{ \begin{aligned} &k - (\boldsymbol{\mu}^{JB} + \boldsymbol{\mu}^B)' (\mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^B) + 2a_n (\boldsymbol{\sigma}_n^{as JB} + \boldsymbol{\sigma}_n^{as B})' (\mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^B) \\ &+ (\mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^B)' (\boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB} + \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^B) (\mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^B) - \sum_{l=1}^m \lambda_l E \left[\frac{(\mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^B)' \mathbf{J}_l}{1 + (\mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^B)' \mathbf{J}_l} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

La ortogonalidad de los vectores y matrices hacen posible la separación de (3.23) en dos problemas de maximización independientes.

$$0 = \max_{y^{JB}} \left\{ -\boldsymbol{\mu}^{JB'} \mathbf{y}^{JB} + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB'} \mathbf{y}^{JB} + \mathbf{y}^{JB'} \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB} \mathbf{y}^{JB} - \sum_{l=1}^m \lambda_l E \left[\frac{\mathbf{y}^{JB'} \mathbf{J}_l}{1 + \mathbf{y}^{JB'} \mathbf{J}_l} \right] \right\} \quad (3.24)$$

$$+ \max_{y^B} \left\{ -\boldsymbol{\mu}^{B'} \mathbf{y}^B + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as B'} \mathbf{y}^B + \mathbf{y}^{B'} \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^B \mathbf{y}^B \right\} \quad (3.25)$$

La solución óptima está implícita en las ecuaciones

$$0 = -\boldsymbol{\mu}^B + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as B} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ss}^B \mathbf{y}^{B*} \quad (3.26)$$

$$0 = -\boldsymbol{\mu}^{JB} + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB} \mathbf{y}^{JB*} - \sum_{l=1}^m \lambda_l E \left[\frac{1}{(1 + \mathbf{y}^{JB*'} \mathbf{J}_l)^2} \mathbf{J}_l \right] \quad (3.27)$$

En el apéndice 3.B se detalla cómo se obtiene una solución cerrada para (3.27), bajo los supuestos de una tasa única de ocurrencia de saltos y suponiendo que con probabilidad p el vector de saltos \mathbf{J} toma el valor $\bar{\mathbf{j}}$ y con probabilidad $(1-p)$ toma el valor $\bar{\mathbf{0}}$.

El caso de la ecuación (3.23) es el caso típico de la solución de Merton para el inversionista miope ante los saltos en los precios. De hecho, el problema se simplifica aún más cuando tomamos en cuenta la ortogonalidad de la solución \mathbf{y}^{B*} respecto a los vectores de unos de cada sector.

En el subespacio de no-saltos, V^\perp , la demanda de divisas (k -dimensional) está dada por:

$$y_l^{B*} = \frac{1}{2\sigma_l^2(1-\rho_{ll})} \left[\boldsymbol{\mu}^B - 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as B} \right]_l \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (3.28)$$

El vector $\left[\mu^B - 2a_n \sigma_n^{as B} \right]_l$ es la parte del vector $r - r_n + \mu^s - 2a_n \sigma_n^{as}$ correspondiente a las componentes no nulas del sector l y des-mediado respecto a la media del sector de ese mismo vector.

En el numerador, μ^B , nos indica las desviaciones de la Paridad Descubierta de la Tasa de Interés. Si por ejemplo, esperamos que el tipo de cambio de un país extranjero aumente, nos va a resultar más atractivo invertir en la divisa foránea. Este término puede tomar valores tanto positivos como negativos, dependiendo del país. Si tomamos portafolios grandes podemos esperar que el valor promedio de este término sea cercano a cero. Bajo neutralidad al riesgo, cero costos de transacción, y expectativas racionales este valor será nulo. Por otro lado, el término $-2a_n \sigma_n^{as B}$ indica la parte de la demanda que sirve como cobertura contra los cambios en los precios de las acciones en dólares debido a apreciaciones o depreciaciones en el tipo de cambio. Como era de esperarse la cobertura va en sentido contrario a las correlaciones de los rendimientos accionarios del país local respecto a los cambios en los tipos de cambio de las divisas del resto de los países. Esto es, si una divisa se correlaciona negativamente con los rendimientos del índice accionario del país numerario (E.U.A.) aumenta su atractivo como cobertura. Los términos del denominador nos indican una relación negativa entre la demanda y la volatilidad de las divisas del sector correspondiente. Hay una relación positiva entre la correlación sectorial y la demanda de las divisas pertenecientes a dicho sector, la cual puede explicarse como un premio a la homogeneidad dentro del sector. Es decir, qué tan consistente es el comportamiento de las divisas del sector como vehículo de cobertura cambiaria.

Por otra parte, como se mencionó antes, en el apéndice 3.B se desarrolla una solución cerrada para (3.27) en el caso de saltos simultáneos con tamaño 0 ó j . La tasa común de llegada de los saltos Poisson es el promedio de las tasas de llegada sectoriales.

Sin embargo el sistema de $(n-1)$ ecuaciones es redundante por lo que la solución que se da en el apéndice 3.B (3.27.9) se reduce a un sistema de m ecuaciones (una por cada sector), donde la matriz de varianzas y covarianzas tiene como elemento ls -ésimo al eigen-valor $\theta_{ll}^{JB} = \sigma_l^2 (1 + (k-1)\rho_{ll})$ para $l=s$ y al eigen-valor $\theta_{ls}^{JB} = k\sigma_l\sigma_s\rho_{ls}$ para $l \neq s$.

Los vectores μ^{JB} , $\sigma_n^{as JB}$ y y^{JB*} , formados por los m promedios sectoriales repetidos k veces, son remplazados por vectores de dimensión m formados por los m promedios sectoriales. Por ejemplo, el vector y^{JB*} , de dimensión $n-1=mk$, es remplazado por un vector de dimensión m cuya componente l -ésima corresponde al promedio de las y_{li}^{JB*} para $i=1,2,\dots,k$.

Entonces, mientras que el vector y^{B*} va a tener $n-1=km$ componentes distintas, el vector y^{JB*} va a tener únicamente m componentes distintas pues en cada sector las k demandas son las mismas.

Para no complicar innecesariamente la notación escribimos la solución óptima del sistema reducido sin hacer un cambio de notación. Lo único que hay que hacer para obtener el vector de dimensión $n-1$ es repetir la componente l del siguiente vector para las k divisas del sector l .

$$y^{JB*} = \frac{1}{2} \Sigma_{ss}^{JB-1} \left[M^{JB} - \frac{\bar{j}' \Sigma_{ss}^{JB-1} M^{JB} \bar{j} + \frac{1}{k} \varphi^* \bar{j}}{\bar{j}' \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j}} \right] \quad (3.29)$$

con

$$M^{JB} = r^{JB} - r_n^{JB} + \mu^{s JB} - 2a_n \sigma_n^{as JB}$$

En el apéndice 3.B se muestra que para determinar la demanda óptima, primero tenemos que determinar $\varphi^* = \bar{j}' y^{JB*} = j_1 y_1^{JB*} + j_2 y_2^{JB*} + \dots + j_m y_m^{JB*}$. Pero sólo conocemos \bar{j} y φ^* , mas no conocemos las y_l^{JB*} .

La demanda óptima en el subespacio V tiene una componente miope, M^{JB} , muy similar a la de la demanda óptima en el subespacio V^\perp . Sólo que ahora se presentan otras dos componentes más complejas que el denominador de (3.28):

$$\Sigma_{ss}^{JB-1} \quad y \quad - \frac{\bar{j}' \Sigma_{ss}^{JB-1} M^{JB} \bar{j} + \frac{1}{k} j' y^{JB*} \bar{j}}{\bar{j}' \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j}} \quad (3.29.1)$$

Supongamos que M^{JB} toma un valor positivo y que los saltos no son diferenciados, es decir, $j_1 = j_2 = \dots = j_m = j$. En este caso las dos componentes mencionadas arriba son “típicamente” reductoras de la demanda. En términos muy simplistas, pre-multiplicar por Σ_{ss}^{JB-1} es semejante a una división entre una varianza. Aunque, esto no se sostiene en general sobre todo porque esta matriz adopta una forma mucho más compleja que la matriz Σ_{ss}^{B-1} pues en esta última únicamente se consideraban volatilidades y correlaciones dentro de cada sector. En Σ_{ss}^{JB-1} se toman en cuenta volatilidades amplificadas por las correlaciones dentro de un mismo sector $\sigma_i^2(1+(k-1)\rho_{ii})$, así como volatilidades y correlaciones entre sectores $k\sigma_i\sigma_s\rho_{is}$. En este caso, a diferencia de la solución en el espacio V^\perp , las correlaciones van en el mismo sentido que la volatilidad pues en este espacio donde las interacciones entre sectores son relevantes, existe un castigo por la disminución de oportunidades de diversificación.

En cuanto a la segunda expresión en (3.29.1) siguiendo con los supuestos de saltos homogéneos y de rendimiento cubierto positivo, puede verse que el signo de los saltos no cambia el signo del término completo. Si además el promedio de las posiciones en divisas es positivo, entonces dicho término disminuye (o hace más negativa) la demanda de divisas.

Los efectos de las varianzas, covarianzas y saltos son complejos; aún en este modelo simplificado, para el cual es posible encontrar una solución cerrada para la demanda de divisas.

La solución cerrada de y^{JB*} nos ayuda a entender la importancia de los saltos para encontrar el valor de la combinación óptima de divisas, el que a su vez es un diferenciador clave entre la demanda del espacio con saltos y la demanda del espacio sin saltos.

Estimar este modelo requiere de una metodología consistente para estimar la matriz de varianzas y covarianzas factorial. Además ha sido necesario hacer supuestos fuertes sobre la distribución del tamaño de los saltos. La contribución de las soluciones cerradas es principalmente teórica.

En la siguiente sección se describe una metodología para estimar los parámetros relevantes del modelo y para resolver el portafolio cuando no se cuenta con soluciones de forma cerrada.

3.3 Metodología de estimación y solución del modelo

La solución del portafolio óptimo, ya sea en forma cerrada o mediante métodos numéricos, requiere conocer los parámetros de los procesos de precios y tipo de cambio.

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu} - \gamma \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Pi} + \lambda E \left[(1 + \mathbf{y}' \mathbf{J})^{-\gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right] \quad (3.30)$$

Siguiendo a Torres (2007),³⁸ se recurre a la metodología de GMM espectral para identificar y estimar los primeros cuatro momentos alrededor de la media³⁹. La identificación se lleva a cabo explotando las propiedades de las funciones características mediante análisis de Fourier.⁴⁰

En la sección anterior mostramos que al tomar en cuenta rendimientos en dólares, los rendimientos tanto de acciones como de bonos van a heredar los saltos del tipo de cambio. Por conveniencia, para el desarrollo de esta sección trabajamos con logaritmos de los precios. Aplicando la forma apropiada del Lema de Ito a las siguientes ecuaciones,⁴¹

$$\begin{aligned} \frac{dP_i^n}{P_i^n} &= (\mu_i^a + \mu_i^s + \sigma_{ii}^{as}) dt + \sigma_i^a dz_i^a + \sigma_i^s dz_i^s + (e^{J_i} - 1) dN \\ \frac{dB_i^n}{B_i^n} &= (r_i + \mu_i^s) dt + \sigma_i^s dz_i^s + (e^{J_i} - 1) dN \end{aligned} \quad (3.31)$$

obtenemos la dinámica del logaritmo de los precios en dólares:

³⁸ Véase también Singleton (2001), Chacko y Viceira (2003) y Das y Uppal (2003); donde se describen metodologías de estimación GMM basadas en la función característica. En el fondo son lo mismo. Sin embargo, considero que el análisis espectral es más “limpio” en describir la identificación de los parámetros. A diferencia del análisis espectral de Chacko y Viceira (2007), que realiza la estimación GMM en el dominio de las frecuencias, Torres (2007) realiza la estimación GMM en el dominio de los reales.

³⁹ Como mencionan Chacko y Viceira (2003) este método es particularmente útil pues por lo general las funciones de densidad de los procesos no son conocidas.

⁴⁰ Véase por ejemplo Stein y Shakarchi (2003).

⁴¹ Nótese que hemos sustituido la magnitud del salto en (4) por una aproximación continua.

$$dp_i^n = \left(\mu_i^a + \mu_i^s - \frac{1}{2}(\sigma_i^{a^2} + \sigma_i^{s^2}) \right) dt + \sigma_i^a dz_i^a + \sigma_i^s dz_i^s + J_i dN \quad (3.32)$$

$$db_i^n = \left(r_i + \mu_i^s - \frac{1}{2} \sigma_i^{s^2} \right) dt + \sigma_i^s dz_i^s + J_i dN$$

La dinámica en (32) puede representarse por un activo genérico, para facilitar la exposición,

$$dx_j = a_j dt + \sigma_j dz_j + J_j dN \quad (3.33)$$

\mathbf{J} sigue una distribución normal multivariada $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma})$. La tasa de ocurrencia de los saltos es la misma para todos los procesos.

La solución de la ecuación diferencial estocástica (3.33) es un proceso con probabilidades de transición bien definidas y por lo tanto resuelve la ecuación de Kolmogorov hacia-adelante:

$$-p_t + \mathcal{L}^* p = 0 \quad (3.34)$$

Donde p representa la densidad de las probabilidades de transición de \mathbf{x} , y \mathcal{L}^* es el operador infinitesimal adjunto del proceso de saltos. Desarrollando (3.34) tenemos

$$p_t + (ap)_x - \frac{1}{2}(\Sigma p)_{xx} - \lambda E_J [p(\mathbf{x} - \mathbf{J}, t) - p(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (3.35)$$

Si empleamos las propiedades de la derivada y de las convoluciones de la transformada de Fourier a la función de transición de \mathbf{x} , la ecuación se simplifica enormemente

$$\hat{p}_t - ika\hat{p} + \frac{1}{2}k'\Sigma k\hat{p} - \lambda(\hat{f}(\mathbf{J}) - 1)\hat{p} = 0 \quad (3.36)$$

Donde \hat{f} es la función de densidad multivariada de los saltos que, como se mencionó, es normal multivariada.

Factorizando, se llega a una ecuación diferencial muy sencilla de resolver:

$$\hat{p}_t - K\hat{p} = 0 \quad (3.37)$$

$$\text{con } K = ika + \frac{1}{2}k'\Sigma k - \lambda(\hat{f} - 1)$$

Notando que $\hat{p} = \phi_x(\mathbf{k}) = E_x[e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}]$, la solución tiene una forma conocida

$$\hat{p} = \hat{p}_0 e^{iK} = E_x[e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}] = E_x[e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_0}] e^{iK}$$

Y dado que \mathbf{x} representa logaritmos en precios, las diferencias van a representar rendimientos. Esto nos permite tener una expresión para la función característica de los rendimientos:

$$\phi_r(\mathbf{k}) = \phi_{\Delta x}(\mathbf{k}) = e^{iK} \quad (3.38)$$

El siguiente resultado de estadística nos permite obtener los momentos de las diferencias del proceso de difusión con saltos a partir de (3.38):

$$\begin{aligned} E[x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}] &= (-i)^{n_1+n_2+\dots+n_m} \left[\frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_m} \phi_x(\mathbf{k})}{\partial k_1^{n_1} \partial k_2^{n_2} \dots \partial k_m^{n_m}} \right]_{\mathbf{k}=0} \\ &= (-i)^{n_1+n_2+\dots+n_m} \left[\frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_m} e^{iK(\mathbf{k})}}{\partial k_1^{n_1} \partial k_2^{n_2} \dots \partial k_m^{n_m}} \right]_{\mathbf{k}=0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para encontrar la asignación óptima del portafolio nos basta con los dos primeros momentos como puede verse en la ecuación de HJB (3.30). El tercer y cuarto momentos nos ayudan a entender de una manera intuitiva la forma en que cambia la distribución de los rendimientos al introducir el elemento de saltos.⁴² Incidentalmente se calculan también los parámetros de la distribución normal multivariada de los saltos.

Tomando las primeras cuatro derivadas y con $t=1$, obtenemos expresiones para los primeros cuatro momentos:

$$\begin{aligned} E[r_j] &= m_j = a_j - i\lambda \left[\hat{f}_j \right]_{\mathbf{k}=0} \\ E[r_j r_l] - m_j m_l &= s_{jl} = \sigma_{lj} - \lambda \left[\hat{f}_{jl} \right]_{\mathbf{k}=0} \\ E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)^2] &= i\lambda \left[\hat{f}_{jll} \right]_{\mathbf{k}=0} \\ E[(r_j - m_j)^4] &= 3s_{jj} + \lambda \left[\hat{f}_{jjjj} \right]_{\mathbf{k}=0} \end{aligned} \quad (3.40)$$

⁴² El análisis de momentos de orden cinco y superior es un tema poco estudiado en los procesos de difusión con saltos. Es importante esclarecer el impacto en la estimación de sobre-identificar el modelo empleando estos momentos de orden superior y la posibilidad de ganar una mayor intuición sobre el problema del inversionista internacional. Sin embargo, dada la complejidad que induce el número de activos considerados en el análisis empírico, decidimos considerar únicamente los primeros cuatro momentos en nuestro análisis.

Los momentos quedan expresados en función de las derivadas de la transformada de Fourier de la densidad multivariada de los saltos (la función característica de estos). Es decir, los momentos de los rendimientos van a depender de los parámetros Brownianos y de los momentos (parámetros) de los saltos. Resulta interesante que al igualar el parámetro Poisson a cero, podemos adivinar en el sistema (3.40) a la distribución normal subyacente en la parte Browniana de los procesos Poisson. Por esta razón esperaríamos desviaciones de la normalidad cuando se considera la parte de saltos en el proceso Poisson, es decir, cuando $\lambda \neq 0$.

En (3.40) hemos dejado intencionalmente a los momentos en función de las derivadas de la función característica para poder probar una especificación Normal y una especificación Bernoulli Multivariada.

Cuando f es normal multivariada (como supusimos al inicio), la función característica es

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = e^{ik\mu - \frac{1}{2}k' \Gamma k} \quad (3.41)$$

Los correspondientes momentos son entonces,

$$\begin{aligned} E[r_j] &= m_j = a_j + \lambda \mu_j \\ E[r_j r_l] - m_j m_l &= s_{jl} = \sigma_{lj} + \lambda (\gamma_{jl} + \mu_j \mu_l) \\ E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)^2] &= \lambda [2\mu_l \gamma_{jl} + \mu_j (\mu_l^2 + \mu_l \gamma_{ll})] \\ E[(r_j - m_j)^4] &= 3s_{jj} + \lambda (\mu_j^4 + 6\mu_j^2 \gamma_{jj} + 3\gamma_{jj}^2) \end{aligned} \quad (3.42)$$

En estas dos últimas ecuaciones vemos de manera explícita la manera en que los saltos indiquen asimetría y curtosis a los rendimientos.

También usamos la flexibilidad de las ecuaciones (3.40) para identificar los momentos de una nueva función de distribución de probabilidad que proponemos. Modificamos la distribución Bernoulli Multivariada de Dai, Ding y Whaba (2012) para las particularidades de nuestro análisis. Esta distribución es de interés debido a que en la sección anterior se utilizó para llegar a la solución analítica del modelo de factores.

Suponemos que el vector de magnitudes aleatorias de los saltos está formado por variables aleatorias que pueden tomar únicamente dos posibles valores, es decir, $J \in \{0, j_1\} \times \{0, j_2\} \times \dots \times \{0, j_m\}$. La densidad va a tener la siguiente representación:

$$P(J_1 = s_1, J_2 = s_2, \dots, J_m = s_m) = p_{00\dots 0} \prod_{r=1}^m (1 - I_{[s_r=j_r]})^{I_{[s_1=j_1]}} \prod_{r=2}^m (1 - I_{[s_r=j_r]})^{I_{[s_1=j_1]}} \dots \prod_{r=1}^m I_{[s_r=j_r]} \quad (3.43)$$

$$\text{con } s_i \in \{0, j_i\} \quad \text{y} \quad p_{00\dots 0} + p_{j_1 0\dots 0} + \dots + p_{j_1 j_2 \dots j_m} = 1$$

Las funciones indicadoras en los exponentes de los parámetros de la función de densidad, $p_{00\dots 0}, p_{j_1 0\dots 0}, \dots, p_{j_1 j_2 \dots j_m}$, van a permitir que cuando necesitemos calcular la probabilidad del vector (s_1, s_2, \dots, s_m) todos los parámetros tengan exponente cero excepto $p_{s_1 s_2 \dots s_m}$, cuyo exponente va a ser uno.

La función característica para este tipo de saltos está bien definida (como lo está en el caso univariado):

$$\phi_J(\mathbf{k}) = p_{00\dots 0} + p_{j_1 0\dots 0} e^{ik_1 j_1} + \dots + p_{j_1 j_2 \dots j_m} e^{i(k_1 j_1 + k_2 j_2 + \dots + k_m j_m)} \quad (3.44)$$

Para seguir con la idea de saltos conjuntos, tomemos el caso donde todas las componentes del vector son todas cero o todas distintas de cero al mismo tiempo. Es decir, los casos intermedios no existen $p_{j_1 0\dots 0} = p_{0 j_2 \dots 0} = \dots = p_{0 j_2 \dots j_m} = 0$.

Para este caso particular la función característica es la siguiente:

$$\phi_J(\mathbf{k}) = p_{00\dots 0} + p_{j_1 j_2 \dots j_m} e^{i(k_1 j_1 + k_2 j_2 + \dots + k_m j_m)} \quad \text{con } p = p_{j_1 j_2 \dots j_m} \text{ y } (1-p) = p_{00\dots 0} \quad (3.45)$$

Los momentos, de acuerdo a (3.40) y (3.45) son los siguientes:

$$\begin{aligned} E[r_j] &= m_j = a_j + \lambda p j_j \\ E[r_j r_l] - m_j m_l &= s_{jl} = \sigma_{jl} + \lambda j_j j_l p \\ E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)^2] &= \lambda j_j j_l^2 \\ E[(r_j - m_j)^4] &= 3s_{jj} + \lambda j_j^4 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ahora que los momentos han sido identificados, empleamos la técnica GMM de Hansen (1982).

Pasando restando el lado derecho de los sistemas (3.40) o (3.46) al lado izquierdo, podemos expresar los momentos como:

$$E[u(r_t, \theta)] = 0 \quad (3.47)$$

Sea

$$\bar{u}(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u(r_t, \theta) \quad (3.48)$$

Este vector nos va a decir cuánto, en promedio, se desvían los parámetros de su valor muestral. La función que minimiza el estimador de GMM es

$$\bar{u}'(\theta) W e \bar{u}(\theta) \quad (3.49)$$

Como menciona Cochrane (2005) es importante seleccionar una buena matriz de pesos, $W e$. Además de conducir a una estimación consistente, es importante que la matriz sea positiva definida ya que entonces será invertible. Newey y West (1987) usan el kernel de Bartlett para estimar la matriz de la densidad espectral positiva definida. La inversa de dicha matriz también será positiva definida y será la matriz de pesos, $W e$.

El estimador propuesto de la matriz de la densidad espectral es:

$$\hat{W}e^{-1} = \hat{S} = \sum_{j=-k}^k \left(\frac{k-|j|}{k} \right) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u(r_t, \theta)' u(r_t, \theta) \quad (3.50)$$

En una primera etapa, $W e$ se sustituye por la matriz identidad, para poder tener un primer valor de los parámetros. Estos parámetros de la primera etapa sirven para calcular la matriz de pesos de la segunda etapa. El valor de k debe elegirse de tal forma que la información se use de forma eficiente. Andrews (1991) propone usar $k = T^{1/3}$ aunque Cochrane insiste en que la elección de k es principalmente una cuestión de buen juicio.

En el modelo con saltos normales hay $\frac{5n^2 + 3n - 2}{2}$ parámetros a estimar y $(3n^2 - 1)$ condiciones de momentos.

En el modelo con saltos Bernoulli hay $2n^2 + 2n$ parámetros a estimar y $(3n^2 - 1)$ condiciones de momentos.

Cuando $n=5$, hay que estimar 69 parámetros para el caso normal y 60 para el caso Bernoulli. El número de condiciones de momentos es 74 en los dos modelos, por lo que hay sobre-identificación en ambos casos. Una vez que hemos estimado los parámetros, podemos regresar al sistema (3.30) y proponer una forma de resolverlo.

Solución del portafolio óptimo

Como se mencionó en la sección 3.2, una forma de resolver el portafolio es mediante alguna manipulación algebraica o algún supuesto simplificador que nos permita llegar a una expresión cerrada para los pesos óptimos del portafolio. Sin embargo, las soluciones cerradas en la literatura, incluida la que se presenta en este trabajo, sirven más para ganar intuición sobre el problema que para el cálculo de los valores óptimos.

En este trabajo se opta por recurrir a métodos numéricos para resolver el sistema (30).

Sin duda la parte más problemática de este sistema son las ecuaciones de los procesos con salto pues involucran un valor esperado de una función sobre una distribución multivariada.

Es decir, se tiene que calcular una integral múltiple para una función suficientemente complicada. Aún bajo un comportamiento normal de los saltos el problema no es trivial y a medida que aumenta el número de activos la complejidad del problema lo hace inaccesible.

Los métodos de integración numérica o cuadraturas nos permiten aproximar la integral de una función en \mathbb{R}^d . Dos de las reglas más populares son las de Newton –Cotes y las Gaussianas⁴³.

Las primeras emplean valores de la función en puntos determinados (nodos) para construir polinomios que aproximen a la función original, entonces se aproxima la integral de interés mediante la integración de dichos polinomios entre nodos.

$$\int_D f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (3.51)$$

Los nodos de este tipo de reglas en general se eligen de forma arbitraria y su número explota al incrementarse la dimensión de la integración.

⁴³ Para una explicación más detallada sobre el tema de integración numérica pueden consultarse los trabajos de Su (2011), Judd (1998) y Stroud (1991).

Las cuadraturas Gaussianas son más generales y se basan en técnicas de aproximación funcional mediante polinomios ortogonales respecto a una función de pesos, *Weg*. Las raíces de dichos polinomios van a ser los nodos.

$$\int_D f(x) \text{Weg}(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (3.52)$$

De este modo, la aproximación se realiza en un número de puntos que no explota al aumentar la dimensión de la integral.

Para el análisis empírico de este trabajo se utiliza la siguiente regla tomada de Stroud (1971). La integral d -dimensional

$$\int_{R^d} f(x) e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} dx \quad (3.53)$$

se aproxima con una regla de grado 5 (el grado del polinomio ortogonal a la función de pesos) que emplea $2d^2 + 1$ puntos:

$$Af(0, \dots, 0) + B \sum_{i=1}^d (f(re^i) + f(-re^i)) + D \sum_{i=1}^d \sum_{j=i+1}^d f(\pm se^i \pm se^j) \quad (3.54)$$

donde

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1 + \frac{1}{2}d} & s &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}d} & V &= \pi^2 \\ A &= \frac{2}{d+2}V & B &= \frac{4-d}{2(d+2)^2}V & D &= \frac{V}{(d+2)^2} \end{aligned}$$

A fin de poder aplicar esta cuadratura, la integral $E\left[\frac{J_i}{1+y'J}\right]$ necesita ser llevada a su forma canónica (3.53), usando la descomposición de Cholesky $\Sigma = R'R$ y el cambio de variable $J = \sqrt{2}Rx + \mu$:

$$E\left[\frac{J_i}{1+y'J}\right] = \int_{R^d} \pi^{-\frac{d}{2}} \frac{(\sqrt{2}Rx + \mu)_i}{(1+y'(\sqrt{2}Rx + \mu))^2} e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} dx = \int_{R^d} f(J(x)) e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} dx \quad (3.55)$$

Incorporando la cuadratura de (3.54) en el sistema (3.30) podemos proceder a resolverlo.

En la siguiente sección se estima el modelo para $n=5$, lo cual amplía el análisis en tres dimensiones de Torres (2007) en el que emplea cuadraturas Gaussianas de orden siete con 12 nodos. Nosotros empleamos cuadraturas Gaussianas de orden cinco con 33 nodos.

3.4 Descripción de datos y resultados

Datos

Estimamos el modelo para activos de 5 países desarrollados: Inglaterra, Alemania, Japón, Canadá y Estados Unidos. Estos son cinco de los seis países analizados en Torres (2007)⁴⁴ para series de frecuencia mensual. Para cada país se consideraron los precios de los índices accionarios, bonos gubernamentales y el tipo de cambio con respecto al dólar. Los datos fueron obtenidos principalmente de Bloomberg y de las bases de datos del Banco de México. El período de la muestra es de mayo de 1993 a enero de 2012 con observaciones de frecuencia diaria. Se consideraron 4248 observaciones por serie⁴⁵. Los rendimientos diarios se multiplican por 100 debido a su magnitud tan pequeña, con el fin de evitar complicaciones numéricas innecesarias y para facilitar su lectura.

		Media	Volatilidad
Acciones	AUK	0.01659	1.25036
	AGE	0.03243	1.60252
	AJP	-0.02049	1.56720
	ACA	0.02744	1.17443
	AUS	0.02529	1.28751
Tipos de Cambio	TUK	0.00009	0.60265
	TGE	0.00184	0.68497
	TJP	0.00822	0.76074
	TCA	0.00521	0.55887
Bonos	BUK	0.01202	0.42758
	BGE	0.03078	1.14146
	BJP	0.01326	0.42362
	BCA	0.01470	0.64659
	BUS	0.01777	0.93617

Tabla 3.1. Estimados muestrales de los rendimientos de los activos. Fuente: Bloomberg.

⁴⁴ No consideramos Suiza. Cabe aclarar que de entre los seis países que considera Torres, además del numerario E.U.A., se selecciona a Reino Unido y a Japón para estimar el modelo ($n=3$) debido a que en su muestra las divisas de estos países presentan las curtosis más altas.

⁴⁵ Se trabajó únicamente con los días para los que todas las series cuentan con observaciones en nuestra muestra. No incluimos corrección por *trading* no-sincronizado pues en la mayoría de los meses los datos eliminados fueron pocos.

En la tabla 1.1 se reportan los estimados muestrales de la media y volatilidad de las series de rendimientos de los índices accionarios FTSE-100 (AUK), DAX (AGE), NIKKEI-225 (AJP), TSE-300 (ACA) y S&P500 (AUS); de los tipos de cambio en dólares de la libra esterlina (TUK), del euro (TGE)⁴⁶, el yen (TJP) y del dólar canadiense (TCA); de los intereses LIBOR 3M (BUK), GETB1 3M (BGE), de los certificados de depósito japoneses a 3 meses (BJP)⁴⁷, del papel comercial canadiense a 3 meses (BCA) y de los Treasury bills a 3 meses (BUS). Los datos reportados para los bonos son los rendimientos que se infieren de las variaciones de precios de estos instrumentos, no se refiere a la tasa de interés (o descuento) aplicable al valor de carátula de los mismos.⁴⁸

Como puede apreciarse en la tabla 1.1, los bonos considerados no se comportan como activos libres de riesgo. Sin embargo, debido a la complejidad que esto implica para el modelo, se deja para un futuro introducir un elemento estocástico en la ecuación de los bonos en (3.2).

Los rendimientos de los tipos de cambio son mucho más bajos que los de las acciones y los bonos. En casi todos los casos, a excepción de Japón, los rendimientos accionarios están por encima de los rendimientos de los bonos. Todas las medias son positivas salvo para Japón, lo cual indica que en promedio estas divisas se han apreciado mientras que el yen se ha depreciado en este período. Los rendimientos del tipo de cambio para Inglaterra son cercanos a cero, es decir, la libra esterlina es la divisa más estable en relación al dólar (en promedio).

En los gráficos 3.1, 3.2 y 3.3 se presentan las series en niveles.

⁴⁶ Se utiliza el tipo de cambio (USD/DM) al inicio de la serie, pero debido a la introducción del Euro, se decretó un tipo de convertibilidad fija de 1.95583 (DM/Euro). Esta serie ajustada es la que se empleó para este análisis empírico.

⁴⁷ Tanto para los bonos de corto plazo de Japón como los de Canadá las series obtenidas presentan lapsos en que se interrumpen, por lo que en su lugar se utilizaron las series referidas por seguir muy cercanamente a las series de los rendimientos subyacentes en las tasas de interés gubernamentales. En general, la dificultad para conseguir una serie de datos para períodos prolongados de tiempo aumenta en la medida en que se busquen datos de frecuencia más alta.

⁴⁸ Véase, por ejemplo, Cvitanic y Zapatero (2010) para una descripción de la diferencia entre estos conceptos. Básicamente ésta puede expresarse del siguiente modo: un aumento en el interés del bono tiende a reducir su precio, por lo que se tendrá un rendimiento negativo en términos de precios.

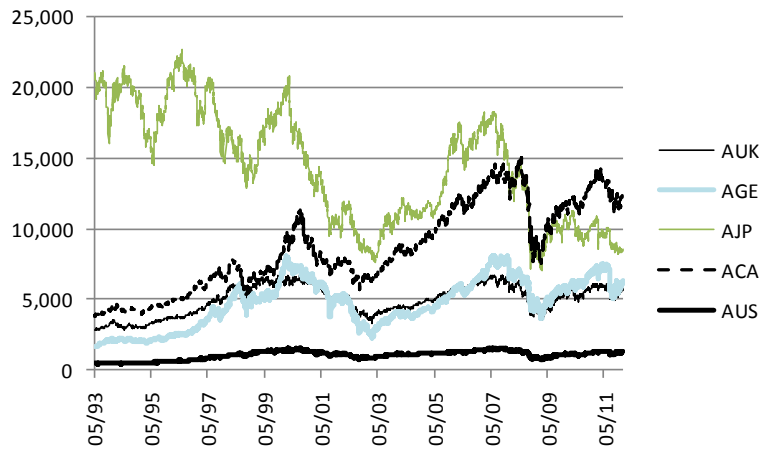


Gráfico 3.1 Índices accionarios. Fuente: Bloomberg.

Las series accionarias muestran una volatilidad muy similares entre sí, todas entre 1 y 1.5. Las dos más volátiles son las de Japón y Alemania.

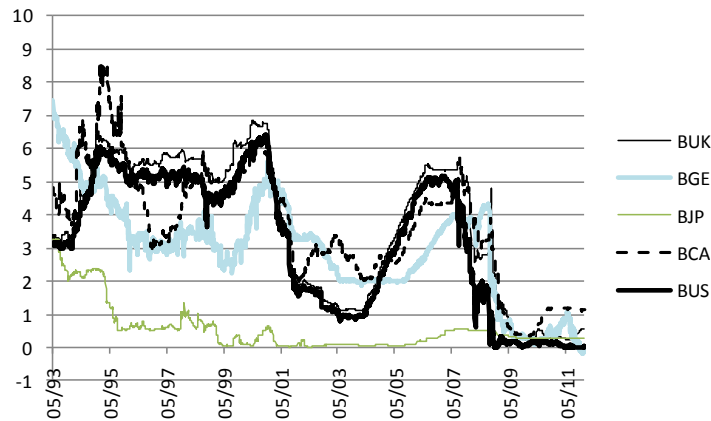


Gráfico 3.2 Tasas de interés de los bonos. Fuente: Bloomberg.

Como ya se explicó, los rendimientos de los bonos van en sentido inverso a las tasas de interés de los mismos por lo que, al observar el gráfico dos podíamos esperar rendimientos medios positivos en los bonos como los reportados en la tabla 1.1. Los bonos presentan una volatilidad menor a la de las acciones y muy similar a las de los tipos de cambio, ubicándose en un rango de 0.43 a 1.14.

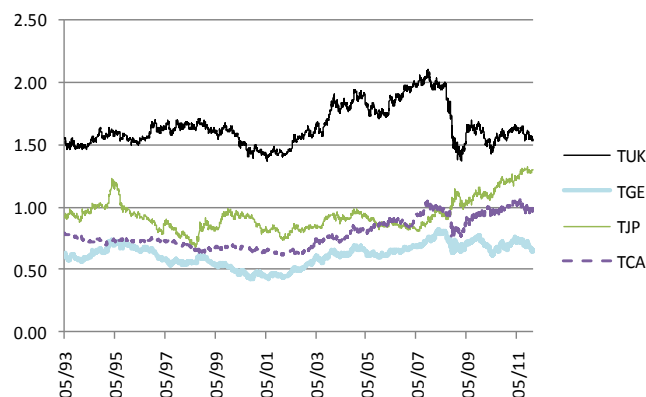


Gráfico 3.3 Tipos de cambio. Fuente: Bloomberg.
La serie del yen se re-escala por un factor de 100 para una mejor visualización.

Las volatilidades de los tipos de cambio se ubican entre 0.56 y 0.76, siendo las menos volátiles. En el gráfico 3 se observa una ligera tendencia a la apreciación de los tipos de cambio respecto al dólar. Por efectos de la escala no es posible apreciar la serie de Japón, que se encuentra muy pegada al eje horizontal. Sin embargo, en términos de rendimientos el tipo de cambio del yen es el más alto, con un promedio de 0.0082. Japón y Canadá, que son los dos países con apreciaciones promedio más fuertes son de los más bajos en rendimiento en bonos.

	AUK	AGE	AJP	ACA	AUS	TUK	TGE	TJP	TCA
AUK	1	0.77528538	0.297257693	0.53557777	0.539659	0.0338738	0.0068052	-0.151008	0.31485124
AGE	0.77528538	1	0.290221911	0.52328388	0.57072327	0.0520399	-0.024671	-0.14545	0.2888088
AJP	0.29725769	0.29022191	1	0.23753638	0.13951032	0.08792575	0.028421	-0.029583	0.12670633
ACA	0.53557777	0.52328388	0.237536382	1	0.72124853	0.17329933	0.11735866	-0.119805	0.35087163
AUS	0.539659	0.57072327	0.139510323	0.72124853	1	0.11774633	0.08366871	-0.20300821	0.40781024
TUK	0.0338738	0.0520399	0.08792575	0.17329933	0.11774633	1	0.62861876	0.19787168	0.35285908
TGE	0.0068052	-0.024671	0.02842099	0.11735866	0.08366871	0.62861876	1	0.32598698	0.36133453
TJP	-0.151008	-0.14545	-0.02958272	-0.119805	-0.20300821	0.19787168	0.32598698	1	-0.04429519
TCA	0.31485124	0.2888088	0.126706327	0.35087163	0.40781024	0.35285908	0.36133453	-0.04429519	1

Tabla 3.2 Matriz de correlaciones muestrales. Fuente: Bloomberg.

En la tabla 3.2⁴⁹ resalta el hecho de que las correlaciones entre acciones son todas positivas, muy probablemente debido a una la existencia de un factor mundial con el que todas se encuentran correlacionadas de forma positiva. Esto no significa que no haya posibilidades de diversificación entre estos activos pero sí que estas oportunidades, de existir, son limitadas. El índice accionario que tiene las correlaciones promedio más fuertes es el DAX (0.5399),

⁴⁹ No se incluyen las correlaciones de los bonos ya que para efectos de la estimación se considera el promedio de los rendimientos. Es decir, la especificación de bonos no toma en cuenta una componente estocástica.

seguido por el FTSE-300 (0.5369), luego están el TSE-100 (50.54) y el S&P500 (49.28), y por último el NIKKEI-225 (0.2411). Obviamente estas correlaciones no cuentan la historia completa de las interacciones entre los activos de interés para nuestro portafolio ya que son estáticas y en el período de estudio es bastante amplio. Japón no sólo tiene el índice accionario con las correlaciones más bajas con otros índices accionarios, sino que también el tipo de cambio de su divisa se correlaciona negativamente con todos los índices accionarios incluido el propio. El yen también se correlaciona negativamente con el dólar canadiense. El resto de las correlaciones entre tipos de cambio son positivas. Seis de las siete correlaciones negativas presentes en la matriz pertenecen a Japón. La otra correlación negativa es entre el tipo de cambio del marco alemán con su propio índice accionario.

Todas las divisas presentan exceso de curtosis: 2.89 para la libra esterlina, 2.43 para el marco alemán, 6.92 para el yen y 3.91 para el dólar canadiense (ver tabla 3.6). Claramente un modelo normal-Browniano va a estar limitado para capturar correctamente la dinámica de precios y por lo tanto la asignación de portafolio probablemente no será la mejor. Cuando introducimos los saltos en el tipo de cambio, estamos induciendo curtosis en los rendimientos, como puede verse en la última ecuación de (3.42).

Análisis de los resultados

A continuación se presentan los resultados de las estimaciones para las siguientes especificaciones: el modelo sin saltos, el modelo con saltos normales, el modelo con saltos de la distribución Bernoulli multivariada modificada presentada en la sección anterior.

Dado que hay varios parámetros de medias, es importante aclarar que en la tabla 3.3 se presentan los estimados de las medias de (3.42) y (3.46). Es decir, estas medias ya incorporan las sumas y productos de las medias, varianzas y covarianzas, Brownianas y de los saltos; así como los parámetros de ocurrencia de los saltos.

	Media Muestral	Media Normal	Media BernoulliM	Media No Salto
AUK	0.0165882	0.0114854	0.0237758	0.0165882
AGE	0.0324278	0.0307803	0.0447412	0.0324278
AJP	-0.0204912	-0.0199159	-0.0211915	-0.0204912
ACA	0.0274363	0.0246869	0.0394459	0.0274363
AUS	0.0252948	0.0230424	0.0411049	0.0252948
TUK	0.0000883	0.0044341	0.0092980	0.0000883
TGE	0.0018386	-0.0013434	0.0076013	0.0018386
TJP	0.0082240	-0.0024166	0.0047375	0.0082240
TCA	0.0052063	0.0030991	0.0103749	0.0052063

Tabla 3.3 Estimados Muestrales vs. GMM. Fuente: Bloomberg.

En la tabla 3.3 podemos observar que los estimados del modelo sin saltos igualan exactamente a los momentos muestrales. Por su lado los estimadores normales y Bernoulli son aproximaciones más o menos cercanas. En las medias la distribución Bernoulli aproxima mejor a los momentos muestrales.

En la tabla 3.4 nuevamente los momentos calculados con los parámetros estimados del modelo sin salto son exactamente iguales a los momentos muestrales. Sin embargo, ahora los estimados normales son más cercanos a los momentos muestrales que los Bernoulli. Al igual que en el caso de las medias, estos estimados son la combinación de los parámetros de salto y los parámetros Brownianos.

	Covarianza Muestral	Covarianza Normal	Covarianza Bernoulli	Covarianza No Salto
AUK,AUK	1.5634000	1.5018700	1.4268600	1.5634000
AUK,AGE	1.5534600	1.4950000	1.4405100	1.5534600
AUK,AJP	0.5824960	0.5325990	0.5200150	0.5824960
AUK,ACA	0.7864730	0.7441910	0.6905750	0.7864730
AUK,AUS	0.8687700	0.8348350	0.7685770	0.8687700
AUK,TUK	0.0255247	0.0139221	-0.0147432	0.0255247
AUK,TGE	0.0058284	-0.0041968	-0.0355811	0.0058284
AUK,TJP	-0.1436390	-0.1325850	-0.1305610	-0.1436390
AUK,TCA	0.2200160	0.1928220	0.1688880	0.2200160
AGE,AGE	2.5680700	2.4724800	2.4257100	2.5680700
AGE,AJP	0.7288840	0.6737630	0.6900710	0.7288840
AGE,ACA	0.9848430	0.9376180	0.8893030	0.9848430
AGE,AUS	1.1775500	1.1205600	1.0439000	1.1775500
AGE,TUK	0.0502576	0.0361014	0.0150476	0.0502576
AGE,TGE	-0.0270810	-0.0420895	-0.0654453	-0.0270810
AGE,TJP	-0.1773190	-0.1519610	-0.1520710	-0.1773190
AGE,TCA	0.2586590	0.2342610	0.2202720	0.2586590
AJP,AJP	2.4561200	2.2799300	2.3155600	2.4561200
AJP,ACA	0.4372010	0.3803700	0.3791140	0.4372010
AJP,AUS	0.2815020	0.2427690	0.2469560	0.2815020
AJP,TUK	0.0830430	0.0488271	0.0501443	0.0830430
AJP,TGE	0.0305095	0.0040454	0.0063978	0.0305095
AJP,TJP	-0.0352696	-0.0383304	-0.0198109	-0.0352696
AJP,TCA	0.1109780	0.0775747	0.0569869	0.1109780
ACA,ACA	1.3792800	1.2702600	1.2541000	1.3792800
ACA,AUS	1.0905900	1.0014100	0.9769050	1.0905900
ACA,TUK	0.1226550	0.0903603	0.0745867	0.1226550
ACA,TGE	0.0944088	0.0786755	0.0551503	0.0944088
ACA,TJP	-0.1070380	-0.0870751	-0.0984673	-0.1070380
ACA,TCA	0.2302970	0.1965660	0.1847550	0.2302970
AUS,AUS	1.6576800	1.5560400	1.5073500	1.6576800
AUS,TUK	0.0913608	0.0661717	0.0427413	0.0913608
AUS,TGE	0.0737878	0.0572251	0.0313725	0.0737878
AUS,TJP	-0.1988390	-0.1658280	-0.1760650	-0.1988390
AUS,TCA	0.2934420	0.2610000	0.2493180	0.2934420
TUK,TUK	0.3631820	0.3388790	0.3269420	0.3631820
TUK,TGE	0.2594900	0.2484460	0.2260950	0.2594900
TUK,TJP	0.0907159	0.0940021	0.0799295	0.0907159
TUK,TCA	0.1188440	0.1057170	0.0924910	0.1188440
TGE,TGE	0.4691830	0.4503210	0.4267040	0.4691830
TGE,TJP	0.1698670	0.1645310	0.1447140	0.1698670
TGE,TCA	0.1383230	0.1274350	0.1149600	0.1383230
TJP,TJP	0.5787290	0.5263310	0.4937010	0.5787290
TJP,TCA	-0.0188325	-0.0132299	-0.0159397	-0.0188325
TCA,TCA	0.3123400	0.2889700	0.2738680	0.3123400

Tabla 3.4 Estimados Muestrales vs. GMM

Es pertinente mencionar que al estimar matrices de varianzas y covarianzas un criterio de cercanía a los momentos muestrales o uno de significancia estadística no son suficientes. Es

de suma importancia que además los estimados sean matrices positivas definidas. Únicamente así serán matrices de varianzas y covarianzas válidas. Al estimar el modelo con saltos normales nos enfrentamos a este problema, pues a pesar de que la matriz espectral (3.50) (y por lo tanto también su inversa) se construyen de modo que sean positivas definidas, esto no garantiza que la matriz de covarianzas que se quiere estimar también lo sea. Una solución a esto es aplicar alguna técnica de regularización estadística que nos permita transformar nuestra matriz estimada o explotar de una mejor manera la información contenida en ella. Existen numerosas técnicas para estimar matrices positivas definidas válidas como los modelos GARCH multivariados⁵⁰. Pero al estimar un modelo con condiciones de momentos en las que simultáneamente se estiman medias, dos o más matrices de covarianzas, co-asimetrías, curtosis y algún otro momento de orden superior; resulta poco factible encontrar las condiciones que nos conduzcan a una matriz positiva definida válida sin afectar otros aspectos del problema que se trata de resolver. Higham (2012) propone una técnica para encontrar la matriz positiva más cercana a una matriz dada. El criterio de cercanía se establece con normas de Frobenius. Esta técnica resulta bastante apropiada cuando nuestro estimado de la matriz de varianzas y covarianzas no es positivo definido. Afortunadamente, usando la regla práctica mencionada anteriormente como punto de partida, $k \approx T^{1/3} \approx 16$, pudimos encontrar dos valores en la vecindad que nos dieron matrices con todos sus eigen-valores positivos. Tomamos $k=13$ pues este orden de auto-correlaciones nos permitió llegar a la matriz con los eigen valores más positivos.

La tabla 3.5 nos muestra los coeficientes de co-asimetría. En general la asimetría es reducida. Los valores muestrales son en su mayoría positivos. Los estimados de GMM con saltos normales parecen reproducir mejor a la muestra. Los valores Bernoulli son en su mayoría negativos pero reducidos. El modelo sin saltos, por estar formado por procesos Brownianos (normales) y debido a la simetría de las distribuciones normales, no puede ser utilizado para capturar asimetría.

⁵⁰ Véase Silvennoinen y Teräsvirta (2007) para una revisión de la literatura

	Asimetría Muestral	Asimetría Normal	Asimetría BernoulliM	Asimetría No Salto
TUK,TUK	-0.2725658	-0.0998859	-0.1978509	
TUK,TGE	0.0524171	-0.0217393	-0.0064604	
TUK,TJP	0.0386463	-0.0494456	-0.0211659	
TUK,TCA	-0.0513150	-0.0804007	-0.1882785	
TGE,TGE	-0.0047184	0.0018079	-0.0359349	
TGE,TGE	0.0757897	-0.0720988	-0.0011734	
TGE,TJP	0.1463264	-0.0095033	-0.0038443	
TGE,TCA	0.0988187	0.0061433	-0.0341963	
TJP,TJP	0.1115778	0.0270351	0.0629953	
TJP,TGE	0.1148432	0.0107862	0.0020570	
TJP,TJP	0.5706648	0.1129879	0.0067392	
TJP,TCA	0.2484198	0.1411152	0.0599478	
TCA,TCA	-0.0689452	-0.0727058	-0.1904818	
TCA,TGE	0.0494157	-0.0330051	-0.0062197	
TCA,TJP	0.0069444	-0.1287981	-0.0203776	
TCA,TCA	-0.0298488	-0.1693943	-0.1812663	

Tabla 3.5. Estimados Muestrales vs. GMM. Fuente: Bloomberg.

La tabla 3.6 proporciona evidencia fuerte a favor del uso del modelo de saltos. Nuevamente, el modelo Browniano no puede capturar la curtosis tan alta de los tipos de cambio.

El modelo de saltos normales captura gran parte de la curtosis muestral. En tanto que el modelo Bernoulli tiene dificultad para capturar curtosis. Sin embargo, este último captura mejor la curtosis de los tipos de cambio con media más alta y tiene problemas para capturar curtosis de saltos medios y pequeños.

	Curtosis Muestral	Curtosis Normal	Curtosis BernoulliM	Curtosis No Salto
TUK	2.8880260	1.5254577	0.3646946	
TGE	2.4281083	1.8430930	0.0013850	
TJP	6.9226973	3.2143351	0.1592352	
TCA	3.9097844	2.4787536	2.8956051	

Tabla 3.6 Estimados Muestrales vs. GMM. Fuente: Bloomberg.

A continuación nos enfocamos en el modelo de saltos normales por ser el más informativo y el que mejor reproduce el hecho estilizado de movimientos extremos en las series financieras. Las medias, volatilidades y correlaciones reportadas en las tablas 3.7 y 3.8 son las de los procesos Brownianos de las ecuaciones (3.2) y (3.3) de los precios de las acciones y del tipo de cambio. Las medias en la tabla 3.7 son mucho mayores a las muestrales, pero recordemos que el modelo se estimó como logaritmos de precios y las medias se ajustan por un medio de la varianza, lo cual nos lleva a valores muy parecidos a los de la muestra. Las volatilidades de

las acciones son muy parecidas a las muestrales. Pero las correlaciones y volatilidades de los tipos de cambio sí presentan cambios sustanciales respecto a los valores muestrales: -0.12 unidades para la volatilidad y +0.20 unidades para las correlaciones. En otras palabras, la presencia de saltos en los tipos de cambio aumenta en promedio 0.13 unidades la volatilidad y las correlaciones disminuyen 0.20 unidades.

	Media	Volatilidad
AUK	0.762421	1.22550806
AGE	1.26702	1.57241216
AJP	1.12005	1.50994371
ACA	0.659816	1.12705812
AUS	0.801062	1.24741332
TUK	0.141028	0.50307355
TGE	0.168633	0.5700921
TJP	0.154182	0.57697834
TCA	0.113387	0.44238897

Tabla 3.7 Media y volatilidad de los procesos Brownianos de las acciones en divisa local y de los tipos de cambio. Fuente: Bloomberg.

	AUK	AGE	AJP	ACA	AUS	TUK	TGE	TJP	TCA
AUK	1	0.77581581	0.287821624	0.53879298	0.54610242	0.02258172	-0.00600692	-0.18750753	0.3556609
AGE	0.77581581	1	0.283778839	0.52907012	0.57129226	0.04563795	-0.04695289	-0.1674967	0.33676683
AJP	0.28782162	0.28377884	1	0.22351115	0.12889085	0.06427894	0.0046995	-0.043997	0.11613284
ACA	0.53879298	0.52907012	0.223511148	1	0.71228735	0.15936754	0.12244701	-0.13390234	0.39423738
AUS	0.54610242	0.57129226	0.128890852	0.71228735	1	0.10544608	0.08046947	-0.23040292	0.47296155
TUK	0.02258172	0.04563795	0.064278937	0.15936754	0.10544608	1	0.9845806	0.3322375	0.32106922
TGE	-0.00600692	-0.04695289	0.004699497	0.12244701	0.08046947	0.9845806	1	0.34557118	0.63794779
TJP	-0.18750753	-0.1674967	-0.043997002	-0.13390234	-0.23040292	0.3322375	0.34557118	1	0.42323795
TCA	0.3556609	0.33676683	0.116132843	0.39423738	0.47296155	0.32106922	0.63794779	0.42323795	1

Tabla 3.8 Correlaciones de los procesos Brownianos. Fuente: Bloomberg.

De tal forma que no es una sorpresa encontrar que la matriz de correlaciones de los saltos normales sea dominada por valores negativos

	Media	Volatilidad		TUK	TGE	TJP	TCA
TUK	-0.0797512	0.82115467	TUK	1	-0.4100389	-0.012687293	0.53610675
TGE	-0.059295	0.99532306	TGE	-0.4100389	1	0.269548705	-0.37502875
TJP	0.0781709	1.23629285	TJP	-0.01268729	0.2695487	1	-0.85512251
TCA	-0.0986428	0.85448991	TCA	0.53610675	-0.37502875	-0.855122508	1

Tabla 3.9 Medias, Volatilidades y Correlaciones de los saltos. Fuente: Bloomberg.

Los saltos promedio en los tipos de cambio son negativos, lo que aumenta la incertidumbre sobre posiciones en las divisas con saltos y se refleja en una mayor volatilidad.

El parámetro más importante del proceso con saltos es el parámetro de intensidad λ . De la ecuación (3.12) puede apreciarse que este parámetro determina el peso que tiene la componente de salto. En nuestra especificación del problema modelamos esta tasa como un parámetro común para reflejar cierto comportamiento. El supuesto de una tasa común de saltos no es trivial, como podemos apreciarlo en la tabla 3.10, donde se toman ciertos parámetros del modelo GMM- normal-multivariado y se comparan con los estimados por la metodología univariada para estimar saltos mediante el algoritmo de Expectation Maximization.⁵¹ Este análisis comparativo entre estas dos metodologías es una innovación del presente trabajo respecto al trabajo de Torres (2007).

	Lambda EM-J	Lambda GMM-N	Media Muestral	Media EM-J	Media GMM-N	Varianza Muestral	Varianza EM-J	Varianza GMM-N
TUK	0.1809332	0.126049	0.0000883	0.0000122	0.0044339	0.3631820	0.3779701	0.338878914
TGE	0.3372273	0.126049	0.0018386	0.0016480	-0.0013436	0.4691830	0.5127654	0.450320886
TJP	0.1242982	0.126049	0.0082240	0.0083099	-0.0024166	0.5787290	0.4958962	0.526330059
TCA	0.2855361	0.126049	0.0052063	0.0051982	0.0030992	0.3123400	0.3531055	0.288969563

Tabla 3.10 Comparativo entre estimados univariados: Expectation Maximization vs. GMM-N. Fuente: Bloomberg.

Vemos que la tasa de salto que estimamos se encuentra en el rango inferior de los valores univariados. La lógica de esto es que un comportamiento conjunto se observa con menos frecuencia. Los estimados de la media de EM son más cercanos a los valores muestrales, en tanto que los estimados de GMM para la varianza son más cercanos a los valores muestrales. En resumen, encontramos que cuando los saltos normales, se puede inducir curtosis en los rendimientos del tipo de cambio. El modelo Bernoulli modificado sólo captura curtosis cuando los saltos medios son grandes. La introducción de saltos en el modelo aumenta la volatilidad en el tipo de cambio y las correlaciones Brownianas disminuyen.

⁵¹ Todas las estimaciones se llevaron a cabo con el software Wolfram Mathematica 8 a excepción de la estimación mediante el algoritmo de Expectation Maximization de Dempster, Laird y Rubin (1977) presentada en la tabla 10. Aprovechando que el algoritmo EM se encuentra implementado en el software R decidimos hacer esta prueba de robustez, pensando en el rango de valores válido para lambda. La implementación del algoritmo para la estimación de procesos de saltos se debe a Graser (2009). La especificación de los rendimientos es $\log \frac{S_t}{S_{t-1}} \sim (1-\lambda)N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2\right) + \lambda N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \mu_j, \sigma^2 + \sigma_j^2\right)$ donde λ es el parámetro de una distribución Bernoulli.

Portafolio óptimo

Finalmente, nos interesa conocer el portafolio que de todo este proceso de optimización. En Torres (2007) se reacomoda la ecuación de acumulación de la riqueza (3.5) de la siguiente manera:

$$\frac{dW}{W} = \frac{dB_n}{B_n} + a_n \left(\frac{dP_n}{P_n} - \frac{dB_n}{B_n} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(\frac{dP_i^n}{P_i^n} - \frac{dB_i^n}{B_i^n} \right) + \sum_{i=1}^n y_i \left(\frac{dP_i^n}{P_i^n} - \frac{dB_n}{B_n} \right) \quad (3.56)$$

De esta manera a_i se puede interpretar como la porción de la riqueza que se invierte de forma cubierta contra el riesgo de tipo de cambio y y_i es una inversión con fines especulativos. Los estimados de estas demandas⁵² se presentan en la tabla 3.11, junto con el Equivalente Cierto con el que el inversionista miope, que ignora la presencia de saltos en el tipo de cambio, se sentiría compensado por no haber implementado la estrategia óptima. En el apéndice 3.C se explica con más detalle este concepto.

	a_{UK}	a_{GE}	a_{JP}	a_{CA}	a_{US}	y_{UK}	y_{GE}	y_{JP}	y_{CA}	y_{USA}	EqC
Salto-Normal	0.0005972	0.1533730	0.1765750	0.1631770	0.1873290	-0.0385141	0.1359320	0.5722320	-0.7369120	1.0672621	0.0000000
No-Salto	-0.0440318	0.1609557	0.1692436	0.1773476	0.0743892	-0.0483337	0.1755269	0.3114434	-0.1502005	0.7115640	0.0656247
Salto-Bernoulli	-0.0587426	0.1630044	0.1730682	0.1588604	0.1010373	-0.0510529	0.2341718	0.2916351	-0.1626653	0.6879114	0.0654366

Tabla 3.11 Portafolio Óptimo y Equivalente Cierto. Tres especificaciones. Fuente: Bloomberg.

La restricción de que la suma de las demandas de divisas sea uno significa que la exposición a las divisas es total. Resulta interesante que la posición óptima del modelo con saltos normales es trasladar toda esa exposición a la divisa local, para la cual obviamente no hay riesgo cambiario. Es decir, la posición neta en las otras cuatro divisas es prácticamente cero. Todas las posiciones en índices accionarios son largas y con excepción del índice inglés, las acciones son un sub-portafolio de pesos más o menos homogéneos. El S&P500 domina sobre los otros índices pero sólo ligeramente. Resulta interesante el que la posición óptima en el dólar canadiense sea corta y por mucho la más grande, tan sólo superada por la posición en moneda local. De la estadística descriptiva de la tabla 1 no se pueden encontrar pistas sobre esta asignación, pues no es una variable con rendimientos en la media de las divisas y no es especialmente volátil. Sin embargo, basta ver los estimados de los procesos estocásticos para

⁵² Recordemos que impusimos la restricción $y_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i = 1$ por lo que conociendo n-1 demandas la enésima queda también determinada.

entender el por qué de esta asignación: en las tablas 3.8 y 3.9 podemos ver las fuertes correlaciones negativas con el yen y con el marco Alemán. Aún más: los saltos medios del dólar canadiense son los más altos en magnitud y son negativos. Caso contrario es el del yen que tiene también saltos grandes pero positivos. No es de extrañarse entonces que tenga una ponderación alta como divisa especulativa en una estrategia larga. El caso de la libra esterlina también es ilustrativo pues a pesar de que el FTSE-100 tiene un peso casi nulo como inversión, los saltos de gran magnitud que presenta hacen que se tome una posición en divisas proporcionalmente grande. De las especificaciones de no-salto y de saltos Bernoulli podemos decir que la exposición total no la realizan en moneda local como lo indica la estrategia óptima de saltos normales. Sin embargo sí le asignan una ponderación importante a la tenencia de divisa local. Puede observarse que las estrategias subóptimas imitan en cierto grado la estrategia óptima, pero debido a la miopía del modelo Browniano y a la poca flexibilidad del modelo Bernoulli, no logran descifrar la información que proporciona el proceso latente de saltos.

En la tabla 3.11 se reporta uno de los hallazgos más importantes de este trabajo: la magnitud de la equivocación de un seguidor de las políticas subóptimas medido como el Equivalente Cierto. Para el caso de un período la pérdida económica del inversionista que siguió la política de no-saltos o de saltos Bernoulli es prácticamente la misma. Estos inversionistas requieren una compensación del 6.5% de su riqueza como consecuencia de su pérdida de utilidad final esperada. En el apéndice 3.C se detalla la derivación del Equivalente Cierto. La pérdida económica para estos dos modelos es la misma, la asignación óptima aunque no es la misma es muy parecida. El modelo Bernoulli sin embargo, permite hacer un análisis empírico que en el caso normal es inexistente.

En el apéndice del documento de Campbell, Sefarty-de Medeiros y Viceira (2010) se muestra una especificación del portafolio que probablemente resultaría interesante adaptar para nuestro estudio y requiere únicamente de pedir que la suma de los pesos en acciones sea igual a uno.

$$\frac{dW}{W} = a_n \frac{dP_n}{P_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_i \frac{dP_i^n}{P_i^n} - \theta_i \left(\frac{dP_i^n}{P_i^n} - \frac{dB_n}{B_n} \right) \right)$$

donde $\theta_i = -d_i$ y $y_i = a_i - \theta_i$

Esta representación permite interpretar directamente a θ_i como la cobertura “clásica” de tomar una posición corta en bonos extranjeros y una posición larga en bonos locales. La

cobertura promedio va a ser cero para conservar la exposición total igual a uno. El inversionista está obligado a tener un portafolio de acciones de suma igual a uno.

a_{UK}	a_{GE}	a_{JP}	a_{CA}	a_{US}	y_{UK}	y_{GE}	y_{JP}	y_{CA}	y_{USA}
-0.0329	0.221126	0.214874	0.257552	0.339351	-2.13851	1.25305	0.90955	-1.71321	2.68912

$hedge_{UK}$	$hedge_{GE}$	$hedge_{JP}$	$hedge_{CA}$
2.10561	-1.03192	-0.69468	1.97076

Tabla 3.12 Portafolio de suma uno en acciones y hedge.

Vemos que la asignación óptima del problema restringido nos hace romper el esquema de pesos casi homogéneos. El portafolio sigue teniendo una exposición negativa al dólar canadiense. Las dos divisas que más se emplean como hedge son la libra esterlina y el dólar canadiense. Llama la atención que la libra esterlina sea la divisa con la exposición más alta y el índice accionario con el menor peso. Probablemente se use como hedge para posiciones en Alemania con quien tiene una correlación negativa bastante alta y cuya divisa se utiliza, por estrategia óptima, para sostener posiciones especulativas.

Resumiendo, la asignación óptima es la que considera saltos normales. Las asignaciones de no-saltos y de saltos Bernoulli modificados son subóptimas. Sin embargo, el modelo de saltos Bernoulli modificados permite explorar el comportamiento de momentos de orden superior. Si bien dicha exploración es muy limitada, en el caso de no-saltos ésta es inexistente. Las estrategias de *carry trade* permiten establecer coberturas para el riesgo cambiario y posiciones especulativas que resultan en una asignación óptima de la riqueza.

3.5 Conclusiones

El modelo de elección de portafolios internacionales explota las estrategias de *carry trade* para conformar asignaciones óptimas de activos. La optimalidad está ligada a la capacidad del modelo incorporar elementos relevantes presentes en los rendimientos. En nuestro caso el elemento relevante son los saltos en los tipos de cambio, que se incorporan para inducir curtosis en los rendimientos. En la primera parte de este trabajo se resolvieron analíticamente las ecuaciones de HJB, recurriendo a la descomposición ortogonal de Aït-Sahalia et al. (2009) y a supuestos estadísticos entre los cuales se incluye una densidad parecida a la

densidad Bernoulli multivarida. Con esta solución se consiguió extender el análisis teórico de la demanda de divisas de Torres (2007). La implementación del modelo también se realizó para un número mayor de países que en el documento citado. Los parámetros del modelo se estiman mediante GMM y los momentos correspondientes se identifican mediante transformaciones de Fourier. La flexibilidad de esta estrategia nos permitió identificar los momentos de los dos modelos con saltos y del modelo sin saltos. Las ecuaciones de HJB se resolvieron numéricamente y la integral múltiple implícita en éstas se implementó también de forma numérica mediante cuadraturas Gaussianas que difieren de las propuestas por Torres (2007) y que cuentan con un mayor número de nodos. Empíricamente encontramos que el modelo de saltos normales es superior al de saltos Bernoulli modificados y al de no-saltos para reproducir el hecho estilizado en los rendimientos financieros de exceso de curtosis. El modelo de saltos Bernoulli capturó bien la curtosis para divisas con saltos promedio en su tipo de cambio grandes. El proceso latente de saltos contribuye al aumento de la volatilidad en los tipos de cambio y disminuye las correlaciones Brownianas entre tipos de cambio. Encontramos que la significancia económica de ignorar los saltos en la asignación óptima del portafolio es de 6.5%.

Dado que el tema de portafolios internacionales es muy amplio, quedaron pendientes distintas cuestiones entre las que destacamos algunas a continuación. Como se vio en el análisis de los datos, tal vez sería apropiado tratar a los bonos gubernamentales como riesgosos. Las técnicas numéricas ocupan un lugar muy importante en la solución de estos modelos, es importante reconocer lo poco que aún se sabe sobre el tema y el fuerte impacto que tienen en la traducción de los resultados a una intuición y a estrategias prácticas válidas. También es importante conducir el análisis en períodos de estrés financiero y compararlo con un análisis en períodos no estresados. En la muestra que considerada en el presente trabajo se consideraron dos crisis financieras mayores, la crisis con origen en México de 1994-1995 y la Gran Crisis Financiera de 2007-2009 con origen en E.U.A., por lo que este punto es relevante. Sabemos que para datos de frecuencia baja, los efectos de los saltos se pueden suavizar por lo que es más complicado identificar los saltos. Pero si aumentamos la frecuencia de los datos también podemos encontrar una mayor influencia de la micro-estructura de mercados. Otra cuestión importante es la calibración de los parámetros del modelo: probablemente hay parámetros, como la intensidad de los saltos, que por la sensibilidad del modelo a los mismos

pueden estimarse de forma válida o calibrarse de forma independiente a la estimación en sistemas. Ligado a este tema está la estimación de matrices positivas definidas cuando éstas son estimadas dentro de un sistema en conjunto con otros parámetros. En el artículo se tocó este tema pero es lo suficientemente amplio como para tener un tratamiento por separado. Poco conocemos de las propiedades de la metodologías GMM espectral, que bien podría estudiarse a través de métodos numéricos como simulaciones Monte Carlo. Sin duda también son relevantes temas más teóricos como los determinantes de los tipos de cambio y sus saltos, entre otros. En conclusión, el tema es muy amplio y aún quedan muchas preguntas relevantes por contestar que retomaremos en el futuro.

Bibliografía

Acharya, V., L. Pedersen, T. Philippon y M. Richardson (2010). “Measuring Systemic Risk”. Working paper, NYU Stern School of Business.

Acharya, V. y M. Richardson, editores (2009). *Restoring Financial Stability: How to Repair a Failed System*. NYU Stern School of Business. John Wiley and Sons.

Adrian, T. y M. Brunnermeier (2010). “CoVaR”. Working paper, Federal Reserve Bank of New York.

Adrian, T. y H. Shin (2010). “Liquidity and Leverage”. *Federal Reserve Bank of New York Staff Reports*, No. 328.

Aït-Sahalia, Y., J. Cacho-Diaz y T.R. Hurd (2009). “Portfolio Choice with Jumps: A Closed Form Solution”. *The Annals of Applied Probability*, Vol. 19, No. 2, pp. 556-584.

Aït-Sahalia, Y. (2004). “Disentangling Diffusion from Jumps”. *Journal of Financial Economics*, Vol. 74, No. 3, pp. 487-528.

Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis, Volume II: Practical Financial Econometrics*. John Wiley and Sons.

Allen, F. y D. Gale (2000). “Financial Contagion”. *The Journal of Political Economy*, Vol.108, No. 1, pp. 1-33.

Allen, F. y D. Gale (2007). “An Introduction to Financial Crises”. Working paper, Wharton Financial Institutions Center, No. 07-20.

Altman, E. (1968). “Financial Ratios, Discriminant Analysis and Prediction of Corporate Banruptcy”. *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 4, pp. 589-609.

Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber y D. Heath (1999). "Coherent Measures of Risk". *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp. 203-228.

Basel Committee on Banking Supervision (1999). "Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications". Publicaciones, abril.

Beezer, R. (2012). *A First Course in Linear Algebra*. Publicado por Robert A. Beezer, Department of Mathematics and Computer Science, University of Puget Sound.

Bekaert, G., C. Erb, C. Harvey y T. Viskanta (1988). "Distributional Characteristics of Emerging Market Returns and Asset Allocation". *Journal of Portfolio Management*, Vol. 24, No.1, pp. 102-116.

Bekaert, G., C. Harvey y A. Ng (2005). "Market Integration and Contagion". *The Journal of Business*, Vol. 78, No. 1, pp. 39-69.

Berd, A., R. Engle y A. Voronov (2007). "The Underlying Dynamics of Credit Correlations". *Journal of Credit Risk*, Vol. 3, No. 2, pp. 27-62.

Bielecki, T. y R. Rutkowski (2002). *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer.

Bollerslev, T. (1990). "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: a Multivariate Generalized ARCH Model". *Review of Economics and Statistics*, Vol. 72, No. 3, pp. 498-505.

Bollerslev, T., R. Engle y J. Wooldridge (1988). "A Capital-Asset Pricing Model with Time Varying Covariances". *Journal of Political Economy*, Vol. 96, No. 1, pp. 116-131.

Brownlees, C. y R. Engle (2010). "Volatility, Correlation and Tails for Systemic Risk Measurement". Working Paper, NYU Stern School of Business.

Brunnermeier, M. y L. Pedersen (2009). "Market Liquidity and Funding Liquidity". *The Review of Financial Studies*, Vol. 22, No. 6, pp. 2201-2238.

Campbell, J., K. Serfaty-de Medeiros y L. Viceira (2010). "Global Currency Hedging". *The Journal of Finance*, Vol. 65, No.1, pp. 87-121.

Campbell, J., A. Lo y A. MacKinlay (1996). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.

Caouette, J., E. Altman, P. Narayanan y R. Nimmo (2008). *Managing Credit Risk: The Great Challenge for Global Financial Markets*. Wiley Finance.

Carrasco, M., M. Chernov, J. Florens y E. Ghysels (2007). "Efficient Estimation of Jump Diffusions and General Dynamic Models with a Continuum of Moment Conditions". *Journal of Econometrics*, Vol. 140.

Chacko, G. y L. Viceira (2003). "Spectral GMM Estimation of Continuous-Time Processes". *Journal of Econometrics*, Vol. 116, pp. 259 – 292.

Cochrane, J. (2005). *Asset Pricing*. Princeton University Press.

Connor, G., L. Goldberg y R. Korajczyk (2010). *Portfolio Risk Analysis*. Princeton University Press.

Corsetti, G., M. Pericoli y M. Sbracia (2005). " 'Some Contagion, Some Interdependence': More Pitfalls in Tests of Financial Contagion". *Journal of International Money and Finance*, Vol. 24, No. 8, pp. 1177-1199.

Cvitanic, J. y F. Zapatero (2004). *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*. MIT Press.

Credit Suisse / First Boston (1997), "CreditRisk⁺: A Credit Risk Management Framework".

Dai, B., S. Ding y G. Waha (2012). "Multivariate Bernoulli Distribution". Technical Report No. 1170, Department of Statistics, University of Wisconsin.

Das, S. y R. Uppal (2004). "Systemic Risk and International Portfolio Choice". *The Journal of Finance*, Vol. 59, No. 6, pp. 2809-2834.

De Jonghe, O. (2010). "Back to the Basics in Banking? A Micro-analysis of Banking System Stability". *Journal of Financial Intermediation*, Elsevier, Vol. 19, No. 3, pp. 387-417.

De Lara Haro, A. *Medición y control de riesgos financieros*. Limusa.

De Nícolo, G. y M. Lucchetta (2010). "Systemic Risks and Macroeconomy". Working Paper, International Monetary Fund, WP/10/29.

Dempster, A., N. Laird y D. Rubin (1977). "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm". *Journal of the Royal Statistical Society, B*, Vol. 39, No. 1, pp. 1-38.

Diamond, D. y P. Dybvig (1983). "Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity". *Journal of Political Economy*, Vol. 91, No. 3, pp. 401-419.

Duffie, D. (2010). "How Big Banks Fail and What To Do About It". Princeton University Press.

Duffie, D. (2001). *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press.

Elizondo, A. (2003). Coordinador. *Medición Integral del Riesgo de Crédito*. Limusa.

Enders, W. (2004). *Applied Econometric Time Series*. John Wiley and Sons.

Engle, R. (2011). "Long-Term Skewness and Systemic Risk". *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 9, No. 3, pp. 437-468.

Engle, R. (2009). *Anticipating Correlations: A New Paradigm for Risk Management*. Princeton University Press.

Engle, R. (2002). "Dynamic Conditional Correlation: a Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models". *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20, No. 3, pp. 339-350.

Engle, R. y J. Rangel (2011). "The Factor-Spline-GARCH Model for High and Low Frequency Correlations". *Journal of Business and Economic Statistics*, próximo a publicarse.

Engle, R. y K. Sheppard (2008). "Evaluating the Specification of Covariance Models for Large Portfolios". *Working Paper*, University of Oxford.

Engle, R. y K. Sheppard (2001). "Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH". *NYU Working Papers*, No. S-DRP-01-10.

Farhi, E. y J. Tirole (2011). "Collective Moral Hazard, Maturity Mismatch and Systemic Bailouts". *Working Paper*, Harvard University.

Forbes, K. y R. Rigobon (2002). "No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Comovements". *The Journal of Finance*, Vol. 57, No. 15, pp. 2223-2261.

French, K., M. Baily, J. Campbell, J. Cochrane, D. Diamond, D. Duffie, A. Kashyap, F. Mishkin, R. Rajan, D. Scharfstein, R. Shiller, H. Shin, M. Slaughter, J. Stein y René Stulz (2010). *The Squam Lake Report*. Princeton University Press.

Garleanu, N. y L. Pedersen (2007). "Liquidity and Risk Management". *The American Economic Review*, P&P, 97(2)2, 193-197.

Gordy M. (2000). “A Comparative Anatomy of Credit Risk Models”. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, No. 1-2, pp. 119-149.

Graser, M. (2009). “Expectation-Maximization Algorithmus fuer Sprung-Diffusionsmodelle”. Tesis, Stuttgart.

Gray, D., R. Merton y Z. Bodie (2008). “New Framework for Measuring and Managing Macrofinancial Risk and Financial Stability”. Working Paper, Harvard Business School, No. 09-015.

Hafner, C. y O. Linton (2010). “Efficient Estimation of a Multivariate Multiplicative Volatility Model”. *Journal of Econometrics*, Vol. 159, No. 1, pp. 55-73.

Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

Hansen, L. (1982). “Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators”. *Econometrica*, Vol. 50, pp. 1029–1054.

Hart, O. y L. Zingales (2009). “A New Capital Regulation for Large Financial Institutions”. Working paper, University of Chicago.

Hartmann, P., S. Straetmans y C. de Vries (2005). “Banking System Stability: A Cross-Atlantic Perspective”. *Working Paper Series*, European Central Bank, No. 527.

Higham, N. (2002). *Computing the Nearest Correlation Matrix - A Problem From Finance*. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 22, pp. 329–343.

Honoré, P. (1998). “Pitfalls in Estimating Jump-Diffusion Models”. Working Paper Series, No. 18, Centre for Analytical Finance, Aarhus University.

Huang, C. y P. Crooke (1997). *Mathematics and Mathematica for Economists*. Blackwell.

Huang, X., H. Zhou y H. Zhu (2009). “A Framework for Assessing the Systemic Risk of Major Financial Institutions”. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 33, No. 11, pp. 2036-2049.

Huang, X., H. Zhou y H. Zhu (2010). “Systemic Risk Contributions”. FEDS Working Paper, No. 2011-08.

Inui, K. y M. Kijima (2005) “On the Significance of Expected Shortfall as a Coherent Risk Measure”. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 29, No. 4, pp. 853-864.

Jorda, O. y A. Taylor (2009). “The Carry Trade and Fundamentals: Nothing to Fear but FEER Itself”. NBER Working Paper 15518.

Jorion, P. (1988). “On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets”. *Review of Financial Studies*, Vol. 1, No. 4, pp. 427-445.

J. P. Morgan, G. Gupton, C. Finger y M. Bathia (1997). “CreditMetrics - Technical Document”. *J.P. Morgan & Co.*

Judd, K. (1998). *Numerical Methods in Economics*. The MIT Press.

Jurek, J. y L. Viceira (2011). “Optimal Value Growth tilts in Long Horizon Portfolios”. *Review of Finance*, Vol. 15, No. 1, pp. 29-74.

Jurek, J. (2009). “Crash-Neutral Currency Carry Trades”. Working Paper, Princeton University.

Kac, M. (1949). “On Distributions of Certain Wiener Functionals”. *Transactions of The American Mathematical Society*, Vol. 65, pp. 1-13.

Kashyap, A., R. Rajan y J. Stein (2008). "Rethinking Capital Regulation". *Maintaining Stability in a Changing Financial System*, Federal Reserve Bank of Kansas City, pp. 431-471.

Kobayashi, H., B. Mark y W. Turin (2012). *Probability, Random Processes and Statistical Analysis*. Cambridge University Press.

Kole, E., K. Koedijk y M. Verbeek (2006). "Portfolio Implications of Systemic Crises". *Journal of Banking & Finance*, Vol. 30, No. 8, pp. 2347-2369.

Kolmogorov, A. (1931). "Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" ("On Analytical Methods in the Theory of Probability"), *Mathematische Annalen*, Vol. 104, No. 1, pp. 415-458.

Lewis, K. (1999). "Trying to Explain Home Bias in Equities and Consumption". *Journal of Economic Literature*, Vol. 37, pp. 571-608.

Ling, S. y M. McAleer (2002). "Stationarity and the Existence of Moments of a Family of GARCH Processes". *Journal of Econometrics*, Vol. 106, No. 1, pp. 109-117.

Lorenzoni, G. (2008). "Inefficient Credit Booms". *Review of Economic Studies*, Vol. 75, No. 3, pp. 809-833.

Lustig, H., N. Roussanov y A. Verdelhan (2011). "Common Risk Factors in Currency Markets". *Review of Financial Studies*, Vol. 24, No. 11, pp. 3731-3777.

Lustig, H. y A. Verdelhan (2007). "The Cross Section of Foreign Currency Risk Premia and Consumption Growth Risk". *American Economic Review*, Vol. 97, No. 1, pp. 89-117.

Maheu, J. y T. McCurdy (2007). "Modeling foreign exchange rates with jumps," Working Papers tecipa-279, University of Toronto, Department of Economics.

Maheu, J. y T. McCurdy (2004). "News Arrival, Jump Dynamics, and Volatility Components for Individual Stock Returns". *Journal of Finance*, American Finance Association, Vol. 59, No. 2, pp. 755-793, 04.

Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

Márquez, J. (2002). "Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios". *Serie Documentos de Investigación*, Banco de México, documento No.2002-4.

Márquez, J. (2006). *Una Nueva Visión del Riesgo de Crédito*. Limusa.

McNeil, A., R. Frey y P. Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton Series in Finance, Princeton University Press.

Meinderding, C. (2011). "Asset Allocation and Asset Pricing in the Face of Systemic Risk: A Literature Overview and Assesment". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, próximo a publicarse.

Merton, R. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.

Press, W., S. Teukolsky, W. Vetterling y B. Flannery (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Third Edition. Cambridge University Press.

Rangel, J. (2009). *Notas de clase del Curso de Econometría Financiera*. El Colegio de México.

Rochet, J. y J. Tirole (1996). "Interbank Lending and Systemic Risk". *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 28, No. 4, pp. 733-762.

Ross, S. (1976). "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing". *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 341-360.

Segoviano, M. y C. Goodhart (2009). "Banking Stability Measures". Working Paper, International Monetary Fund, WP/09/04.

Sharpe, W. (1964). "Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk". *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.

Shleifer, A. y R. Vishny (2011). "Fire Sales in Finance and Macroeconomics". *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 25, No. 1, pp. 29-48.

Shreve, S. (2010). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous Time Models*. Springer.

Silvennoinen, A. y T. Teräsvirta (2009). "Multivariate GARCH Models". *Handbook of Financial Time Series*, Springer, Parte 1, pp. 201-229.

Singleton, K. (2006). *Empirical Dynamic Asset Pricing: Model Specification and Econometric Assessment*. Princeton University Press.

Singleton, K. (2001). "Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function". *Journal of Econometrics*, Vol. 102, pp. 111-141.

Stein, E. y R. Shakarchi (2005). *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press.

Stein, E. y R. Shakarchi (2003). *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press.

Stroud, A. (1971). *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Su, Ch. (2011). Notas de clase del curso Computational Economics, University of Chicago.

Taylor, S. (2008). *Modelling Financial Time Series*. World Scientific.

Torres, J. M. (2007). “International Portfolio Choice, exchange rate and systemic risks”. *Harvard University*, tesis.

Verdelhan, A. (2011). “The Share of Systematic Variation in Bilateral Exchange Rates”. *Working Paper*.

Wolfram, S. (2003). *The Mathematica Book, The fifth Edition*. Wolfram Media.

Apéndices

1.A Análisis de componentes principales

La técnica de componentes principales es muy útil para analizar sistemas altamente correlacionados, como en el caso del IPC y el S&P 500. Los altos niveles de correlación que pueden apreciarse en el gráfico 1 se traducen en problemas de colinealidad de los factores al momento de hacer las regresiones de los rendimientos individuales.

A pesar de que los componentes principales son ortogonales, la presencia de una fuerte correlación entre los factores fundamentales va a resultar en una componente principal muy “dominante”. Para visualizar esto, recordemos que la variación en los factores explicada por el componente principal i se obtiene mediante el cociente de eigen-valores:

$$VarExplicada_{CP_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

Podemos calcular este cociente de una forma muy sencilla, haciendo cualquiera de los siguientes supuestos simplificadores:

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp IPC,t}^2 &= \sigma_{SP500,t}^2 = \sigma^2 \\ &\text{ó} \\ \sigma_{\perp IPC,t}^2 &= \sigma_{SP500,t}^2 = \sigma_t^2 \end{aligned}$$

De tal forma que:

$$H_t = D_t R_t D_t = \begin{pmatrix} \sigma_{\perp IPC,t}^2 & \sigma_{\perp IPC,t} \sigma_{SP500,t} \rho_t \\ \sigma_{\perp IPC,t} \sigma_{SP500,t} \rho_t & \sigma_{SP500,t}^2 \end{pmatrix} = \sigma_t^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_t \\ \rho_t & 1 \end{pmatrix} = \sigma_t^2 R_t$$

Esta simplificación es equivalente a trabajar con los rendimientos estandarizados y su respectiva matriz de varianzas y covarianzas que, como ya se vió, es la matriz de correlaciones R_t .

Los eigen-valores de H_t son $(1+\rho_t)\sigma_t$ y $(1-\rho_t)\sigma_t$, por lo que los respectivos cocientes de eigenvalores serán:

$$VarExplicada_{CP_{1,t}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{(1+\rho_t)\sigma_t^2}{(1+\rho_t)\sigma_t^2 + (1-\rho_t)\sigma_t^2} = \frac{1}{2}(1+\rho_t)$$

$$VarExplicada_{-CP_{2,t}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{(1 - \rho_t)\sigma_t^2}{(1 + \rho_t)\sigma_t^2 + (1 - \rho_t)\sigma_t^2} = \frac{1}{2}(1 - \rho_t)$$

En los gráficos A y B podemos ver el comportamiento en el tiempo de estos cocientes antes y después de la ortogonalización del IPC.

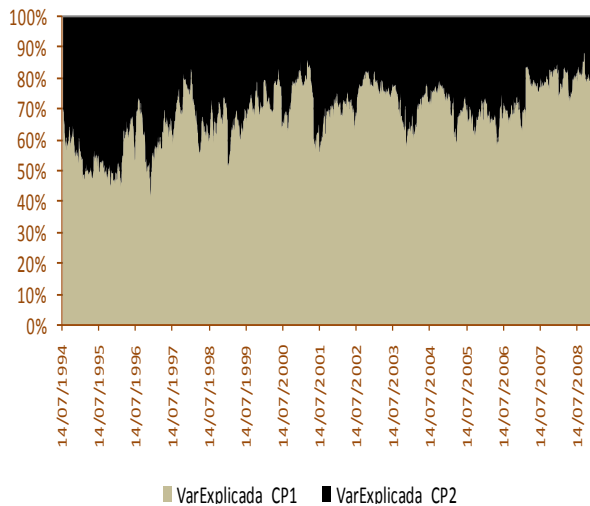


Gráfico A. Variación en los Factores Fundamentales Explicada por los Componentes Principales antes de la ortogonalización del IPC.

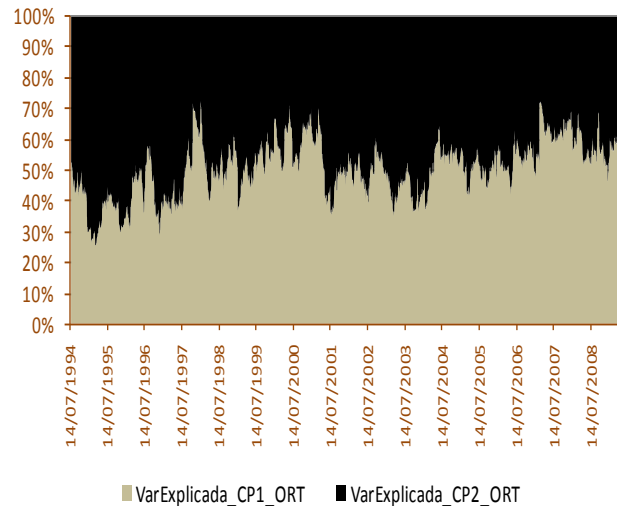


Gráfico B. Variación en los Factores Fundamentales Explicada por los Componentes Principales después de la ortogonalización del IPC.

A medida que el valor absoluto de las correlaciones entre factores fundamentales baja, el poder explicativo de los factores estadísticos va a estar más balanceado. Es decir, después de ortogonalizar el IPC existe mayor evidencia de un modelo de dos factores explicativos bien balanceados desde el enfoque de componentes principales.

2.A Estimador No-Paramétrico

Una de las tres componentes del MES es la dependencia de las innovaciones en la cola de la distribución. A continuación se muestra la forma en que se obtuvo el estimador de $E_{T-1}(\varepsilon_T | S_t)$ que se usa en este trabajo.

Un estimador de la media condicional muy conocido es el de Nadaraya (1964) y Watson (1964). Dicho estimador se basa en la sustitución de la función de densidad condicional por los estimadores de las funciones de densidad basadas en *kernels*.

En nuestro caso, el evento sistémico condicionante involucra la unión o la intersección de variables con truncamiento, por lo que el problema es más complicado. Sin embargo, siguiendo el principio mencionado arriba, se sustituye convenientemente las funciones de densidad por sus estimados basados en *kernels*.

$$\begin{aligned}
E_{T-1} \left(\varepsilon_{i,T} \middle| \left(\varepsilon_{M1,T} < k_1 \right) \vee \left(\varepsilon_{M2,T} < k_2 \right) \right) &= \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i,T} \frac{P \left(\varepsilon_{i,T}, \left(\varepsilon_{M1,T} < k_1 \right) \vee \left(\varepsilon_{M2,T} < k_2 \right) \right)}{P \left(\left(\varepsilon_{M1,T} < k_1 \right) \vee \left(\varepsilon_{M2,T} < k_2 \right) \right)} d\varepsilon_{i,T} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i,T} \frac{P \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M1,T} < k_1 \right) + P \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M2,T} < k_2 \right) - P \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M1,T} < k_1, \varepsilon_{M2,T} < k_2 \right)}{P \left(\varepsilon_{M1,T} < k_1 \right) + P \left(\varepsilon_{M2,T} < k_2 \right) - P \left(\varepsilon_{M1,T} < k_1, \varepsilon_{M2,T} < k_2 \right)} d\varepsilon_{i,T} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{k_1} \varepsilon_{i,T} \frac{f \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M1,T} \right)}{P^*} d\varepsilon_{M1,T} d\varepsilon_{i,T} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{k_2} \varepsilon_{i,T} \frac{f \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M2,T} \right)}{P^*} d\varepsilon_{M2,T} d\varepsilon_{i,T} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{k_1} \varepsilon_{i,T} \frac{f \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M1,T}, \varepsilon_{M2,T} \right)}{P^*} d\varepsilon_{M1,T} d\varepsilon_{M2,T} d\varepsilon_{i,T} \\
&= \frac{1}{P^*} \left\{ \int_{-\infty}^{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i,T} f \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M1,T} \right) d\varepsilon_{i,T} d\varepsilon_{M1,T} + \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i,T} f \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M2,T} \right) d\varepsilon_{M2,T} d\varepsilon_{i,T} \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i,T} f \left(\varepsilon_{i,T}, \varepsilon_{M1,T}, \varepsilon_{M2,T} \right) d\varepsilon_{i,T} d\varepsilon_{M1,T} d\varepsilon_{M2,T} \right\}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las funciones de densidad por sus estimadores kernel (simétricos)

y haciendo el cambio de variable $u = \frac{\varepsilon_{i,s} - \varepsilon_{i,T}}{h}$ con su respectivo Jacobiano h :

$$E_{T-1} \left(\varepsilon_{i,T} \middle| \left(\varepsilon_{M1,T} < k_1 \right) \vee \left(\varepsilon_{M2,T} < k_2 \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{P^*} \left\{ \int_{-\infty}^{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} ((T-1)h^2)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,T} K\left(\frac{\varepsilon_{i,s} - \varepsilon_{i,T}}{h}, \frac{\varepsilon_{M1,s} - \varepsilon_{M1,T}}{h}\right) d\varepsilon_{i,T} d\varepsilon_{M1,T} \right. \\
&\quad + \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{+\infty} ((T-1)h^2)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,T} K\left(\frac{\varepsilon_{i,s} - \varepsilon_{i,T}}{h}, \frac{\varepsilon_{M2,s} - \varepsilon_{M2,T}}{h}\right) d\varepsilon_{i,T} d\varepsilon_{M2,T} \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} ((T-1)h^3)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,T} K\left(\frac{\varepsilon_{i,s} - \varepsilon_{i,T}}{h}, \frac{\varepsilon_{M1,s} - \varepsilon_{M1,T}}{h}, \frac{\varepsilon_{M2,s} - \varepsilon_{M2,T}}{h}\right) d\varepsilon_{i,T} d\varepsilon_{M1,T} d\varepsilon_{M2,T} \right\} \\
&= \frac{1}{P^*} \left\{ \int_{-\infty}^{k_1} ((T-1)h^2)^{-1} h \sum_{s=1}^{T-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_{i,s} - hu) K\left(u, \frac{\varepsilon_{M1,s} - \varepsilon_{M1,T}}{h}\right) du d\varepsilon_{M1,T} \right. \\
&\quad + \int_{-\infty}^{k_2} ((T-1)h^2)^{-1} h \sum_{s=1}^{T-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_{i,s} - hu) K\left(u, \frac{\varepsilon_{M2,s} - \varepsilon_{M2,T}}{h}\right) du d\varepsilon_{M2,T} \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{k_1} ((T-1)h^3)^{-1} h \sum_{s=1}^{T-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_{i,s} - hu) K\left(u, \frac{\varepsilon_{M1,s} - \varepsilon_{M1,T}}{h}, \frac{\varepsilon_{M2,s} - \varepsilon_{M2,T}}{h}\right) du d\varepsilon_{M1,T} d\varepsilon_{M2,T} \right\} \\
&= \frac{1}{P^*} \left\{ \int_{-\infty}^{k_1} ((T-1)h)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} K\left(\frac{\varepsilon_{M1,s} - \varepsilon_{M1,T}}{h}\right) d\varepsilon_{M1,T} \right. \\
&\quad + \int_{-\infty}^{k_2} ((T-1)h)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} K\left(\frac{\varepsilon_{M2,s} - \varepsilon_{M2,T}}{h}\right) d\varepsilon_{M2,T} \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{k_1} ((T-1)h^2)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} K\left(\frac{\varepsilon_{M1,s} - \varepsilon_{M1,T}}{h}, \frac{\varepsilon_{M2,s} - \varepsilon_{M2,T}}{h}\right) d\varepsilon_{M1,T} d\varepsilon_{M2,T} \right\}
\end{aligned}$$

Tomando un kernel normal estándar (univariados y bivariados) y haciendo

los cambios de variable $v = \frac{\varepsilon_{M1,s} - \varepsilon_{M1,T}}{h}$ y $w = \frac{\varepsilon_{M2,s} - \varepsilon_{M2,T}}{h}$ con su respectivos

Jacobianos, h :

$$\begin{aligned}
&E_{T-1} \left(\varepsilon_{i,T} \mid (\varepsilon_{M1,T} < k_1) \vee (\varepsilon_{M2,T} < k_2) \right) = \\
&= \frac{1}{P^*} \left\{ ((T-1)h)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} h \int_{-\infty}^{\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}} K(v) dv + ((T-1)h)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} h \int_{-\infty}^{\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}} K(w) dw \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{k_2} \int_{-\infty}^{k_1} ((T-1)h^2)^{-1} h^2 \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} K(v, w) dv dw \right\} \\
&= \frac{1}{P^*} \left\{ (T-1)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) + (T-1)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right. \\
&\quad \left. - (T-1)^{-1} \sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}
\end{aligned}$$

Análogamente, se deriva $P^* = P(\varepsilon_{M1,T} < k_1) + P(\varepsilon_{M2,T} < k_2) - P(\varepsilon_{M1,T} < k_1, \varepsilon_{M2,T} < k_2)$

$$E_{T-1}(\varepsilon_{i,T} | (\varepsilon_{M1,T} < k_1) \vee (\varepsilon_{M2,T} < k_2)) = \frac{\sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) + \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}}{\sum_{s=1}^{T-1} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) + \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}}$$

De la misma forma, podemos obtener el estimador para otros condicionamientos sistémicos:

$$E_{T-1}(\varepsilon_{i,T} | (\varepsilon_{M1,T} < k_1) \wedge (\varepsilon_{M2,T} < k_2)) = \frac{\sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}}{\sum_{s=1}^{T-1} \left\{ \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{M1,s}}{h}\right) \Phi\left(\frac{k_2 - \varepsilon_{M2,s}}{h}\right) \right\}}$$

$$E_{T-1}(\varepsilon_{i,T} | \varepsilon_{Mj,T} < k_1) = \frac{\sum_{s=1}^{T-1} \varepsilon_{i,s} \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{Mj,s}}{h}\right)}{\sum_{s=1}^{T-1} \Phi\left(\frac{k_1 - \varepsilon_{Mj,s}}{h}\right)} \quad j = 1, 2$$

Los estimadores $E_{T-1}(\varepsilon_{M1,T} | S)$ y $E_{T-1}(\varepsilon_{M2,T} | S)$ siguen la misma lógica.

2.B Correlaciones Ajustadas

La especificación de los rendimientos de la ecuación (6) permite expresar el MES como en la ecuación (8):

$$MES_{i,t-1} = \sigma_{i,t} \rho_{M1,i,t} E_{t-1}(\varepsilon_{M1,t} | S_t) + \sigma_{i,t} \rho_{M2,i,t}^* E_{t-1}(\varepsilon_{M2,t} | S_t) + \sigma_{i,t} \sqrt{1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2} E_{t-1}(\varepsilon_{i,t} | S_t)$$

$$\text{con } \rho_{M2,i,t}^* = \frac{\rho_{M2,i,t} - \rho_{M1,M2,t} \rho_{M1,i,t}}{\sqrt{1 - \rho_{M1,M2,t}^2}}$$

A diferencia de la versión de un factor del MES, donde las correlaciones están acotadas por las propiedades del estimador DCC, en este caso no usamos directamente las correlaciones $\rho_{M2,i,t}$ sino las correlaciones transformadas $\rho_{M2,i,t}^*$, las cuales toman en cuenta las correlaciones entre la institución y el índice externo, y entre el índice externo y el índice local. En el análisis siguiente se demuestra que las correlaciones transformadas se mantienen dentro del círculo unitario y por lo tanto el tercer sumando del MES está bien definido.

La prueba es directa si recordamos que una matriz de correlaciones es a su vez una matriz de varianzas y covarianzas (de los rendimientos estandarizados) y por lo tanto podemos recurrir a las propiedades de las matrices positivas semi-definidas.

Sea R_t la matriz de correlaciones de los rendimientos:

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{M1,M2,t} & \rho_{M1,i,t} \\ \rho_{M1,M2,t} & 1 & \rho_{M2,i,t} \\ \rho_{M1,i,t} & \rho_{M2,i,t} & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de R_t va a ser no negativo:

$$\begin{aligned} \det(R_t) &= (-1)^2 (1 - \rho_{M2,i,t}^2) + (-1)^3 (\rho_{M1,M2,t}) (\rho_{M1,M2,t} - \rho_{M1,i,t} \rho_{M2,i,t}) \\ &\quad + (-1)^4 (\rho_{M1,i,t}) (\rho_{M2,i,t} \rho_{M1,M2,t} - \rho_{M1,i,t}) \\ \det(R_t) &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \rho_{M1,i,t}^2 + \rho_{M2,i,t}^2 + \rho_{M1,M2,t}^2 - 2\rho_{M1,i,t} \rho_{M2,i,t} \rho_{M1,M2,t} &\leq 1 \\ &\Leftrightarrow \\ (\rho_{M1,i,t}^2 \rho_{M1,M2,t}^2 - \rho_{M1,i,t}^2 \rho_{M1,M2,t}^2) + \rho_{M2,i,t}^2 - 2\rho_{M1,i,t} \rho_{M2,i,t} \rho_{M1,M2,t} + \rho_{M1,i,t}^2 &\leq 1 - \rho_{M1,M2,t}^2 \\ &\Leftrightarrow \\ (\rho_{M2,i,t} - \rho_{M1,i,t} \rho_{M1,M2,t})^2 + \rho_{M1,i,t}^2 (1 - \rho_{M1,M2,t}^2) &\leq 1 - \rho_{M1,M2,t}^2 \\ &\Leftrightarrow \\ \rho_{M1,i,t}^2 + \frac{(\rho_{M2,i,t} - \rho_{M1,i,t} \rho_{M1,M2,t})^2}{(1 - \rho_{M1,M2,t}^2)} &\leq 1 \\ &\Leftrightarrow \\ 1 - \rho_{M1,i,t}^2 - (\rho_{M2,i,t}^*)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El que las correlaciones transformadas, $\rho_{M2,i,t}^*$, estén acotadas también impone restricciones sobre los otros tres tipos de correlaciones. Las correlaciones $\rho_{M1,i,t}$, $\rho_{M2,i,t}$ y $\rho_{M1,M2,t}$ sólo pueden tomar valores que aseguren una matriz de correlaciones positiva semi-definida.

Podemos entender mejor la forma en que se ajustan las correlaciones $\rho_{M2,i,t}$, tomemos las derivadas respecto a $\rho_{M1,i,t}$ y a $\rho_{M1,M2,t}$:

$$\frac{\partial \rho_{M2,i,t}^*}{\partial \rho_{M1,i,t}} = - \frac{\rho_{M1,M2,t}}{\sqrt{1 - \rho_{M1,M2,t}^2}}$$

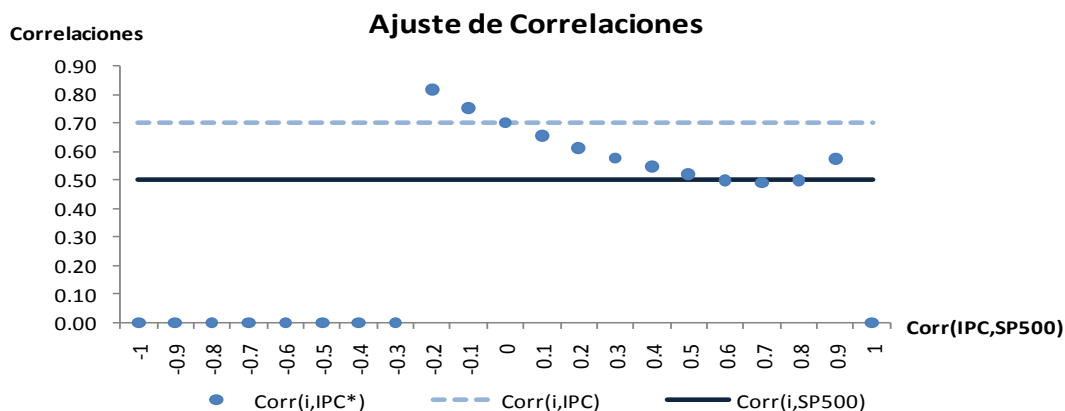
$$\frac{\partial \rho_{M2,i,t}^*}{\partial \rho_{M1,M2,t}} = \frac{\rho_{M2,i,t} \rho_{M1,M2,t} - \rho_{M1,i,t}}{1 - \rho_{M1,M2,t}^2}$$

De la primera ecuación se observa que, *ceteris paribus*, debido a la especificación trivariada de los rendimientos y los factores, las correlaciones de la institución con el mercado local se ajustan hacia abajo ante aumentos en la correlación con el mercado externo⁵³. Es decir, el peso del factor local disminuye a medida que el factor externo se vuelve más explicativo.

La segunda ecuación nos dice que, *ceteris paribus*, el efecto de un aumento en la correlación entre mercados es ambiguo, pues va a depender del signo del numerador. Aunque para los valores promedio⁵⁴ de las correlaciones estimadas en este trabajo, dicho efecto va a ser negativo como lo indica el siguiente diagrama. Si fijamos el valor de las correlaciones de las instituciones con el mercado local en 0.70 y las correlaciones de las instituciones con el mercado externo en 0.50, podemos determinar la zona factible de las correlaciones corregidas de acuerdo a la condición que impone el determinante positivo de la matriz de correlaciones.

⁵³ Los resultados de la estimación de las correlaciones son, en general, números positivos. Por lo tanto podemos suponer que trabajamos con números positivos. El análisis es análogo para el caso de todas las combinaciones factibles de signos en las correlaciones.

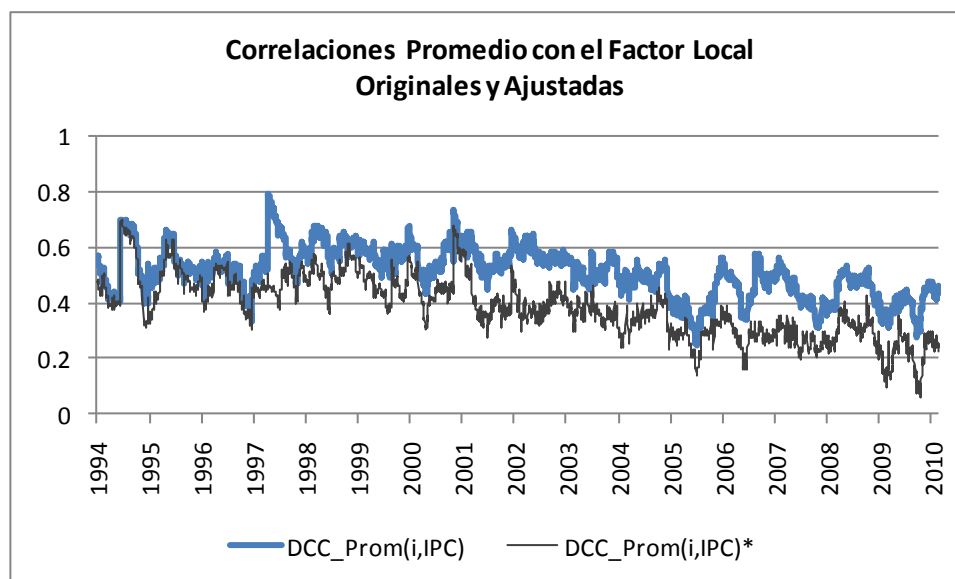
⁵⁴ Para este ejercicio se considera el promedio de las 4 empresas.



El eje horizontal representa el intervalo $(-1,1)$ para la correlación entre mercados.

Los puntos distintos a cero indican la zona factible para las correlaciones entre mercados y los valores correspondientes de las correlaciones ajustadas de la institución con el mercado local. Los puntos sobre el eje horizontal indican valores no factibles de acuerdo a la condición del determinante positivo. Como puede observarse en el diagrama anterior, para los valores dados, las correlaciones ajustadas van a ser menores que las correlaciones originales.

Las estimaciones de estas correlaciones confirman lo que esperábamos teóricamente, como puede apreciarse en el siguiente gráfico. Las correlaciones ajustadas se hacen cada vez menores como resultado del aumento de la correlación en el tiempo. Aunque el efecto se revierte para aquellos valores donde la correlación entre mercados es mayor a 0.7142 $(0.5/0.7)$. Por supuesto el diagrama anterior muestra un ejercicio teórico estático, por lo que no es posible capturar el efecto que vemos en las correlaciones estimadas.



2.C MES para empresas no financieras

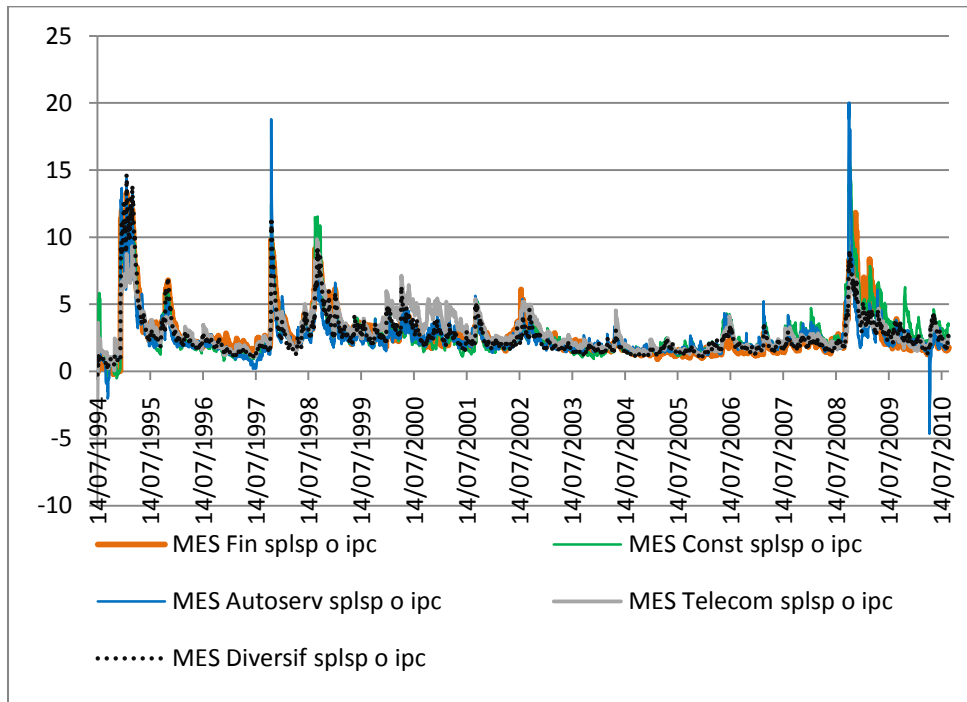
En el documento presentado el análisis del MES se enfoca en las instituciones financieras ya que por su papel de intermediación son las que se encargan de conectar la liquidez de fondeo con la liquidez de mercado. Además de indicarnos la caída esperada en el capital dada una situación estresada del mercado, el MES puede ser visto en términos más generales como la respuesta esperada de los rendimientos accionarios de una empresa (financiera o no) ante la caída de un índice accionario. Si tenemos en cuenta que existen empresas no financieras que por su tamaño, interconexiones y su papel activo en los mercados financieros pueden retroalimentar un evento sistémico, entonces también es necesario dar un seguimiento al MES de estas empresas. Aunque es importante recalcar que el modelo teórico que liga al MES con el riesgo sistémico de forma explícita (Acharya et al., 2010) se construye con base en las instituciones financieras.

En este anexo se presentan las estimaciones del MES y un ranking más amplio, correspondientes a las siguientes empresas grandes que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores:

- Sector Financiero: BBVA, C, GFINBURSA, GFBANORTE, QUA.
- Sector Construcción: ARA, CEMEX, GEO, ICA.
- Sector Autoservicio: COMER, SORIANA, WALMEX.
- Sector Telecomunicaciones: AZTECA, TELMEX, TELEVISA.
- Sector Diversos: BIMBO, ELEKTRA, GCARSO, GMEXICO, GMODELO.

En la siguiente gráfica se presentan los resultados del MES promedio por sector. El MES del sector financiero es, en promedio, el más alto para los períodos de finales de 1994 a finales de 1999 y de octubre de 2008 a los primeros meses de 2009, mientras que tuvo el MES más bajo de principios de 2005 a mediados de 2008. El MES del sector construcción fue muy alto durante la crisis de 1995 pero también lo fue el MES de los otros sectores (con excepción del sector telecomunicaciones), tuvo la reacción más alta durante agosto de 1998 y durante octubre de 2010 (junto con el sector autoservicio), tuvo los niveles más altos para los períodos de mediados de 2007 a principios de 2008 y de principios de 2009 al final de la muestra. El

MES del sector autoservicio tuvo la reacción más alta en octubre de 1997 y en octubre de 2008, mientras que en promedio tuvo el MES más bajo para el período de mediados de 1995 a finales de 2001. El MES del sector telecomunicaciones fue el más bajo de finales de 1994 a mediados de 1995, mientras que para el período de principios del 2000 a finales del 2004 fue el más alto. El sector de diversos sigue, en general, un comportamiento promedio respecto a los otros sectores.



La anterior es una forma de clasificar la reacción de los rendimientos por sector ante eventos estresantes en el mercado.

También podemos hacer un ranking para un día en particular y por empresas.

	31/07/2008			07/10/2008		02/09/2010	
	Ranking	Empresa	MES	Empresa	MES	Empresa	MES
Financieras	1	CITYMX	4.937505441	COMER	18.86654601	ELEKTRA	4.459885238
Construcción	2	ICA	3.935289626	WALMEX	13.67848725	CEMEX	4.041897313
Autoservicio	3	GCARSO	3.644279066	GEO	13.34205589	GEO	3.654545758
Telecomunicaciones	4	ARA	3.044442068	CEMEX	12.30672938	GMEXICO	3.007378348
Diversificadas	5	CEMEX	2.991770731	BANORTE	11.43896627	ARA	2.893339678
	6	ELEKTRA	2.872313093	CITYMX	10.24485093	ICA	2.736719804
	7	TELEVISA	2.805263032	GMODELO	9.26886876	SORIANA	2.492472377
	8	SORIANA	2.555567321	ICA	9.266871447	GCARSO	2.339305179
	9	BANORTE	2.238710298	SORIANA	8.767097852	GMODELO	2.314082331
	10	AZTECA	2.232231169	GCARSO	8.607209604	TELEVISA	2.306966803
	11	BIMBO	2.223659843	ARA	6.782880684	BIMBO	2.303979238
	12	GEO	2.198043724	AZTECA	6.50230329	INBURSA	2.133174915
	13	QUA	2.167960307	BIMBO	6.381383157	COMER	2.0180147
	14	COMER	1.855641379	TELEVISA	6.380380663	CITYMX	1.794724853
	15	GMODELO	1.807960021	ELEKTRA	5.170762147	WALMEX	1.69401975
	16	WALMEX	1.558893463	INBURSA	3.986156219	QUA	1.399159887
	17	TELMEX	1.425985604	GMEXICO	3.823310628	BBVA	1.127609388
	18	INBURSA	1.345755585	TELMEX	3.281789236	BANORTE	
	19	GMEXICO	0.972435879	QUA	2.351392209	AZTECA	
	20	BBVA	0.733550172	BBVA	1.524999189	TELMEX	

En este ranking podemos observar que unos días antes del evento de Comercial Mexicana (el 10 de octubre de 2008 la empresa solicita entrar en concurso mercantil debido a las pérdidas millonarias generadas por operaciones en derivados sobre el tipo de cambio peso/dólar), el MES la clasificaba en la posición número uno, seguida de otra empresa del mismo sector. A finales de agosto de 2008 tenemos una distribución bastante diversificada de los sectores dentro del ranking, siendo CITYMX la empresa con el MES más alto. Al final de la muestra el sector construcción se agrupa en las primeras posiciones. Es importante tener en cuenta que este ranking se hace en términos porcentuales y que también es importante tener en cuenta el tamaño de la empresa.

3.A Dinámica de los precios en divisas

La regla de producto para dos procesos con saltos es la siguiente:

$$dXY = YdX^C + XdY^C + dX^C dY^C + \sum_{0 \leq s \leq t} (X(s)Y(s) - X(s-)Y(s-))$$

donde el superíndice C indica que se trata de la parte continua del proceso correspondiente.

Aplicando esta regla a los procesos de precios de las acciones y tipo de cambio:

$$\begin{aligned} dP_i &= P_i \mu_i^a dt + P_i \sigma_i^a dz_i^a \\ dS_i &= S_i \mu_i^s + S_i \sigma_i^s dz_i^s + S_i J_i dN \end{aligned}$$

tenemos que los rendimientos en dólares de la acción del país i está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dP_i^n}{P_i^n} &= \frac{dP_i S_i}{P_i S_i} = S_i \frac{dP_i^C}{P_i S_i} + P_i \frac{dS_i^C}{P_i S_i} + P_i S_i \sigma_i^a \sigma_i^s \rho_{ii}^{as} \frac{dt}{P_i S_i} + P_i(t)(S_i(t) - S_i(t-)) \\ &= \frac{dP_i}{P_i} + \frac{(dS_i^C + dJ_i)}{S_i} + \sigma_{ii}^{as} dt \\ &= (\mu_i^a + \mu_i^s + \sigma_{ii}^{as}) dt + \sigma_i^a dz_i^a + \sigma_i^s dz_i^s + J_i dN \end{aligned}$$

De manera análoga e incluso más simplificada por la ausencia de términos Brownianos o de salto en los bonos, los rendimientos en dólares del bono del país i son

$$\begin{aligned} \frac{dB_i^n}{B_i^n} &= \frac{dB_i^C}{B_i} + \frac{dS_i^C}{S_i} + \frac{dB_i^C dS_i}{B_i S_i} \\ &= \frac{dB_i}{B_i} + \frac{dS_i}{S_i} \\ &= (r_i + \mu_i^s) dt + \sigma_i^s dz_i^s + J_i dN \end{aligned}$$

2.B Solución Óptima en V , y^{JB*} .

El punto de partida es la ecuación (3.27):

$$0 = -\boldsymbol{\mu}^{JB} + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB} \mathbf{y}^{JB*} - \sum_{l=1}^m \lambda_l E \left[\frac{1}{(1 + \mathbf{y}^{JB*t} \mathbf{J}_l)^2} \mathbf{J}_l \right]$$

Suponiendo que el parámetro es el mismo para todos los sectores, y que el tamaño de los saltos es $J=j$ con probabilidad p y $J=0$ con probabilidad $1-p$; obtenemos la siguiente ecuación:

$$0 = +2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB} \mathbf{y}^{JB*} - \lambda E \left[\frac{J}{(1 + \mathbf{y}^{JB*t} \mathbf{J})^2} \mathbf{I} \right] \quad (3.27.1)$$

usando el supuesto sobre la distribución del tamaño de los saltos:

$$0 = -\boldsymbol{\mu}^{JB} + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB} \mathbf{y}^{JB*} - \lambda p \frac{j}{(1 + \bar{j}' \mathbf{y}^{JB*})^2} \mathbf{I} \quad (3.27.2)$$

$$0 = -\boldsymbol{\mu}^{JB} + 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB} \mathbf{y}^{JB*} - \frac{\lambda p}{(1 + \varphi)^2} \bar{j} \quad \text{con el escalar } \varphi = \bar{j}' \mathbf{y}^{JB*} \quad (3.27.3)$$

Nótese que \mathbf{J} es vector aleatorio y \bar{j} es la realización del vector aleatorio.

Pre-multiplicando (27.3) por $\bar{j}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1}$,

$$0 = \bar{j}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1} (\boldsymbol{\mu}^{JB} - 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB}) - 2\varphi + \frac{\lambda p}{(1 + \varphi)^2} \bar{j}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1} \bar{j} \quad (3.27.4)$$

$$\text{Despejando, } \frac{\lambda p}{(1 + \varphi)^2} = \frac{-\bar{j}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1} (\boldsymbol{\mu}^{JB} - 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB}) + 2\varphi}{\bar{j}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1} \bar{j}} \quad (3.27.5)$$

Resolviendo (27.3) para y^{JB*} ,

$$y^{JB*} = \frac{1}{2} \Sigma_{ss}^{JB-1} (\mu^{JB} - 2a_n \sigma_n^{as JB}) + \frac{1}{2} \frac{\lambda p}{(1+\varphi)^2} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j} \quad (3.27.6)$$

Sustituyendo (3.27.5) en (3.27.6) y arreglando:

$$y^{JB*} = \frac{1}{2} \Sigma_{ss}^{JB-1} (\mu^{JB} - 2a_n \sigma_n^{as JB}) + \frac{1}{2} \frac{-\Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} (\mu^{JB} - 2a_n \sigma_n^{as JB}) \bar{j}}{\bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j}} + \varphi \frac{1}{\bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j}} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j} \quad (3.27.7)$$

$$y^{JB*} = \frac{1}{2} \Sigma_{ss}^{JB-1} \left[(\mu^{JB} - 2a_n \sigma_n^{as JB}) - \frac{\bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} (\mu^{JB} - 2a_n \sigma_n^{as JB}) \bar{j}}{\bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j}} \right] + \varphi \frac{1}{\bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j}} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j} \quad (3.27.8)$$

Recordemos que para polinomios de orden 3:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$$

$$-27a^2\delta = (2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3 = Q^2$$

Si $\delta < 0$: 1 raíz real y 2 raíces no reales conjugadas

Si $\delta = 0$: 3 raíces reales, pero hay 1 raíz múltiple

Si $\delta > 0$: 3 raíces reales distintas

$$x_1 = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{3a} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d + Q)} + \frac{1}{3a} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d - Q)}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{1+i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d + Q)} + \frac{1-i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d - Q)}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a} + \frac{1-i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d + Q)} + \frac{1+i\sqrt{3}}{6a} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d - Q)}$$

Definimos: $\Psi = 1 + \varphi$, $A = -1$, $B = \frac{1}{2} \bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} (\mu^{JB} - 2a_n \sigma_n^{as JB}) + 1$, $C = 0$ y $D = \frac{1}{2} \lambda p \bar{j} \Sigma_{ss}^{JB-1} \bar{j}$

y sustituimos en (3.27.4),

$$-\Psi^3 + B\Psi^2 + D = 0$$

$$\delta = -4B^3D - 27D^2$$

$$\delta = \frac{(2B^3 + 27D)^2 - 4B^6}{-27}$$

$$\delta < 0 \quad \text{sii} \quad (2B^3 + 27D)^2 - 4B^6 > 0 \quad \text{sii} \quad |2B^3 + 27D| > |2B^3| \quad \text{solo si } B > 0, \text{ ya que } D > 0$$

$$\delta = 0 \quad \text{sii} \quad -4B^3D - 27D^2 = 0 \quad \text{sii} \quad D = -\frac{4}{27}B^3 \quad \text{sólo si } B < 0, \text{ ya que } D > 0$$

$$\delta > 0 \quad \text{sii} \quad (2B^3 + 27D)^2 - 4B^6 < 0 \quad \text{sii} \quad |2B^3 + 27D| < |2B^3| \quad \text{solo si } B < 0, \text{ ya que } D > 0$$

Restricción de solvencia, para algún proceso de riqueza en V^P , que no puede ser negativo:

$$|\varphi| = |\mathbf{y}^{JB*} \bar{\mathbf{j}}| < 1 \quad \text{sii} \quad \left| \bar{\mathbf{j}} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^{JB*} \right| < 1$$

$$\text{Por lo tanto } 0 < |\Psi| = |1 + \varphi| < 2$$

Sustituyendo $\varphi^* = \Psi^* - 1$ en la ecuación (3.27.8) llegamos a una forma solución cerrada para la demanda de divisas en V^\perp :

$$y^{JB*} = \frac{1}{2} \sum_{ss}^{JB-1} \left[(\boldsymbol{\mu}^{JB} - 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB}) - \frac{\bar{\mathbf{j}}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1} (\boldsymbol{\mu}^{JB} - 2a_n \boldsymbol{\sigma}_n^{as JB})}{\bar{\mathbf{j}}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1} \bar{\mathbf{j}}} \bar{\mathbf{j}} \right] + \varphi^* \frac{1}{\bar{\mathbf{j}}' \boldsymbol{\Sigma}_{ss}^{JB-1} \bar{\mathbf{j}}} \sum_{ss}^{JB-1} \bar{\mathbf{j}} \quad (3.27.9)$$

3.C Significancia económica de ignorar los saltos en el tipo de cambio

De acuerdo a Das y Uppal (2004) existe una forma muy sencilla e intuitiva para calcular el costo en dólares de una estrategia sub-óptima que ignora la presencia de saltos en los precios. Para lograr lo anterior se vale de un concepto bien conocido en economía: el equivalente cierto. Es decir, la cantidad adicional en riqueza con la que seríamos indiferentes respecto a la opción óptima, entendida esta como la asignación del problema con saltos en los precios. Al tratarse de un problema de control óptimo estocástico, la regla de indiferencia queda en términos de la utilidad final esperada maximizada. Es decir, en términos de la ecuación valor definida en (3.1) tenemos la siguiente relación de indiferencia:

$$V((1 + EqC)W_t, t; \boldsymbol{\Pi}_{no-salto}) = V(W_t, t; \boldsymbol{\Pi}_{salto}) \quad (C.1)$$

y recordando que propusimos la siguiente forma para la solución,

$$V(w, t) = A(t, \boldsymbol{\Pi}) \frac{w(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

y resolviendo para A(t) en (3.11) el Equivalente Cierto es:

$$EqC = \left[\frac{A(t; \boldsymbol{\Pi}_{salto})}{A(t; \boldsymbol{\Pi}_{no-salto})} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1$$

donde

$$A(t, \boldsymbol{\Pi}) = e^{\left((1-\gamma)[r_n + \boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{\mu}] - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)[\boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Pi}] + \lambda E_J[(1+y'J)^{1-\gamma} - 1] \right) (T-t)}$$

3.D Parámetros de los procesos de difusión

Parámetros	De los activos	Normal	t	BernoulliMod	t	No-Salto	t
Alfa	a1	0.7624	11.9101	0.7372	20.8796	0.7983	12.1800
	a2	1.2670	14.3679	1.2576	23.5553	1.3165	14.6264
	a3	1.1201	12.0288	1.1366	20.9813	1.2076	11.9464
	a4	0.6598	10.4509	0.6665	19.7199	0.7171	10.7159
	a5	0.8011	10.8419	0.7948	20.0294	0.8541	11.0440
	s1	0.1410	0.0261	0.1923	2.1755	0.1817	15.3029
	s2	0.1686	0.0186	0.2282	8.5123	0.2364	16.3105
	s3	0.1542	0.0088	0.2328	4.4108	0.2976	12.4966
	s4	0.1134	0.0201	0.1666	1.9730	0.1614	11.9119
Sigma	a1,a1	1.5019	11.1453	1.4269	22.6908	1.5634	11.3809
	a1,a2	1.4950	11.1180	1.4405	20.9834	1.5535	11.3681
	a1,a3	0.5326	6.0648	0.5200	10.3681	0.5825	6.3213
	a1,a4	0.7442	8.7186	0.6906	15.2289	0.7865	8.9898
	a1,a5	0.8348	9.2356	0.7686	14.3521	0.8688	9.4100
	a1,s1	0.0139	0.5845	-0.0147	-0.9645	0.0255	1.0241
	a1,s2	-0.0042	-0.1528	-0.0356	-2.0021	0.0058	0.2049
	a1,s3	-0.1326	-5.1236	-0.1306	-6.9013	-0.1436	-5.3729
	a1,s4	0.1928	6.3104	0.1689	10.6614	0.2200	6.6874
	a2,a2	2.4725	13.2121	2.4257	24.6266	2.5681	13.4747
	a2,a3	0.6738	7.7065	0.6901	11.5964	0.7289	7.9347
	a2,a4	0.9376	10.3350	0.8893	16.8283	0.9848	10.5697
	a2,a5	1.1206	9.5122	1.0439	15.0898	1.1776	9.6867
	a2,s1	0.0361	1.2999	0.0150	0.7892	0.0503	1.7295
	a2,s2	-0.0421	-1.2242	-0.0654	-2.8005	-0.0271	-0.7636
	a2,s3	-0.1520	-4.7053	-0.1521	-6.2816	-0.1773	-5.0054
	a2,s4	0.2343	6.7939	0.2203	10.9700	0.2587	7.1870
	a3,a3	2.2799	11.9491	2.3156	22.8840	2.4561	11.8761
	a3,a4	0.3804	4.7561	0.3791	7.1260	0.4372	5.0217
	a3,a5	0.2428	5.3963	0.2470	5.3646	0.2815	5.6079
	a3,s1	0.0488	1.9406	0.0501	2.8947	0.0830	2.7737
	a3,s2	0.0040	0.1676	0.0064	0.3314	0.0305	1.1338
	a3,s3	-0.0383	-1.4823	-0.0198	-0.7771	-0.0353	-1.1953
	a3,s4	0.0776	2.8243	0.0570	3.0272	0.1110	3.5551
	a4,a4	1.2703	9.3877	1.2541	19.4823	1.3793	9.7221
	a4,a5	1.0014	9.1749	0.9769	17.6450	1.0906	9.4553
	a4,s1	0.0904	3.6708	0.0746	4.2860	0.1227	4.3472
	a4,s2	0.0787	3.3003	0.0552	3.4306	0.0944	3.7484
	a4,s3	-0.0871	-2.6900	-0.0985	-4.8686	-0.1070	-3.0569
	a4,s4	0.1966	6.1902	0.1848	11.5722	0.2303	6.6621
	a5,a5	1.5560	10.0217	1.5074	20.6082	1.6577	10.2325
	a5,s1	0.0662	2.3685	0.0427	2.3256	0.0914	3.0315
a5,s2	0.0572	1.9205	0.0314	1.7018	0.0738	2.3686	
a5,s3	-0.1658	-4.2804	-0.1761	-8.0169	-0.1988	-4.6392	
a5,s4	0.2610	6.3227	0.2493	12.9183	0.2934	6.7375	
s1,s1	0.2531	0.0179	0.2880	4.2639	0.3632	18.2424	
s1,s2	0.2824	0.0490	0.2180	10.7499	0.2595	18.7582	
s1,s3	0.0964	0.2717	0.0956	4.0677	0.0907	6.4047	
s1,s4	0.0715	0.0129	0.0577	0.9674	0.1188	7.6767	
s2,s2	0.3250	0.0158	0.4250	41.8347	0.4692	23.4972	
s2,s3	0.1137	0.0135	0.1479	12.3563	0.1699	10.3921	
s2,s4	0.1609	0.0285	0.1078	5.9108	0.1383	8.8311	
s3,s3	0.3329	0.0105	0.4874	28.9263	0.5787	16.2324	
s3,s4	0.1080	0.0054	-0.0020	-0.0866	-0.0188	-1.2004	
s4,s4	0.1957	0.0128	0.2428	4.3532	0.3123	12.9980	
Mu	a1	-0.0798	-0.0060	-1.0000	-0.6286		
	a2	-0.0593	-0.0060	-0.2064	-0.6530		
	a3	0.0782	0.0061	0.4019	0.5137		
	a4	-0.0986	-0.0060	-0.8928	-0.6512		
Gama	s1,s1	0.6743	0.0061				
	s1,s2	-0.2739	-0.0062				
	s1,s3	-0.0131	-0.0073				
	s1,s4	0.2639	0.0062				
	s2,s2	0.9907	0.0061				
	s2,s3	0.4081	0.0061				
	s2,s4	-0.2713	-0.0061				
	s3,s3	1.5284	0.0061				
s3,s4	-0.9543	-0.0061					
s4,s4	0.7302	0.0062					
Lambda		0.1260	0.0030	0.8405	0.0000		
p				0.0464	0.0000		
Parámetros significativos			35/69		46/60		47/54
			50.7%		76.7%		87.0%