Validación y Sorpresa.

Pedro Alberto Ortíz Juárez.

Asesor: Dr. Dragan Branimir Filipovich Zachrisson.

El Colegio de México.

Junio 2008.

Resumen

En este trabajo se presenta un juego psicológico en el cual el jugador enfrenta una disyuntiva: por un lado, desea confirmar lo que otros jugadores esperan de él y, por otro lado, desea sorprenderlos. El modelo desarrollado describe la situación de un Profesor, el cual, debe elegir el tipo de examen que evalúe el desempeño del grupo al cual instruye, de acuerdo a las preferencias que tiene sobre dos objetivos: neutralidad (confirmación de expectativas) e intervención (sorprender). Los resultados obtenidos indican que, el Profesor generalmente aplica un examen con una mayor complejidad de la necesaria de acuerdo a las características del grupo (determinadas por la naturaleza).

---

1. Introducción.

El propósito de este trabajo es determinar la estrategia que sigue un jugador cuando enfrenta una disyuntiva: por un lado, desea confirmar lo que otros jugadores esperan de él y, por otro lado, desea sorprenderlos.

Debido a que en la situación descrita las expectativas que tiene cada jugador (relacionadas con lo que él cree que los otros jugadores esperan que él haga) pueden afectar sus pagos, en este trabajo se utiliza la teoría de los Juegos Psicológicos desarrollada por Geanakoplos, Pearce y Stacchetti –GPS- (1989), debido a que, en la teoría de de Juegos estándar el pago de los jugadores depende únicamente del perfil de estrategias que se juega, en tanto que, en los Juegos Psicológicos, el pago de los jugadores depende directamente del perfil de creencias.

El modelo desarrollado podría describir la situación de un Profesor, el cual, debe elegir el tipo de examen que evalúe el desempeño del grupo al cual instruye; el Profesor inicialmente tiene disponible varios de tipos de exámenes y, determina cual utilizar de acuerdo a las preferencias que tiene sobre dos objetivos: neutralidad (aplicar el tipo de examen que elige la naturaleza, acorde con las características del grupo) e intervención (sorprender con el propósito de asegurar que los alumnos estudien y comprendan los temas del curso , sobre todo, de la parte en la cual tienen más deficiencias).

Los resultados obtenidos indican que el Profesor aplica un examen con una complejidad mayor del que la naturaleza seleccionó y, el nivel de la diferencia existente entre estos dos tipos de exámenes está determinada por la propensión que tiene el Profesor a ser neutral.

Asimismo, se presenta una historia y explicación alternativa para el modelo desarrollado asumiendo que, éste representa el juego de política monetaria del Banco Central, con el propósito de motivar el uso de los juegos psicológicos en la evaluación de situaciones de política económica.

Las siguientes secciones del trabajo están organizadas de la siguiente forma: La sección 2 desarrolla el modelo; la sección 3 caracteriza los equilibrios de este juego y se analizan los resultados obtenidos, cuya comprobación está en el apéndice; finalmente, la sección 4 presenta las conclusiones del trabajo.

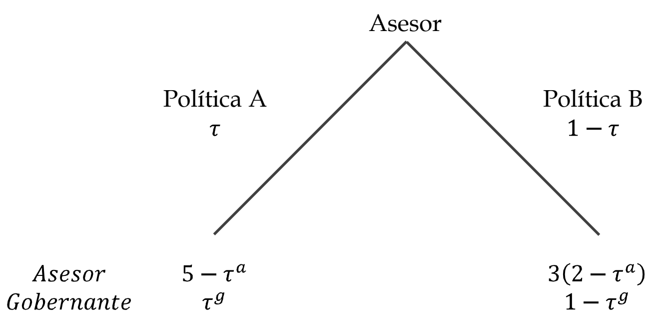
2. Modelo.

El modelo desarrollado en este trabajo es una combinación de un juego psicológico de confirmación de expectativas y, de un juego psicológico de sorpresa; con el motivo de ilustrar las características de este tipo de juegos, se presenta un ejemplo de cada uno de ellos. Es importante mencionar que en los juegos psicológicos, la función de pago de cada jugador está definida de la siguiente forma:

$U^i := B \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ - B: perfil de creencias y, Σ: perfil de estrategias-[1].

2.1. Juego psicológico de Confirmación de expectativas.

Figura 1. Juego de Confirmación de expectativas.



En donde:

$\tau \in [0, 1]$: Probabilidad con la cual el Asesor sugiere la Política A.
$\tau^g \in [0, 1]$: Expectativa del Gobernante de τ.
$\tau^a \in [0, 1]$: Expectativa del Asesor de τ^g.

La figura 1 representa la siguiente situación: Un asesor debe sugerir que política debe ejercer el gobernante para el cual trabaja. Su decisión depende de lo que él cree que el gobernante espera: por ejemplo, si él cree que el gobernante espera la política X, el asesor prefiere proponer esta política y, no la otra opción –no desea oponerse a su jefe- . Por otro lado, el gobernante, no es capaz de distinguir entre la Política A o B (no posee el conocimiento necesario para evaluarlas); la única ayuda con la cual cuenta para tomar su decisión es la de su asesor. El gobernante tiene una creencia sobre lo que el asesor sugerirá y, si el asesor confirma esta creencia, el gobernante se siente contento, ya que, percibe que no está tan "desorientado".

[1] Para una descripción más detallada véase Geanakoplos, Pearce y Stacchetti (1989).

Definición 1.

Un Equilibrio Psicológico de este juego es una pareja (τ, σ) - perfil de creencias y perfil de estrategias-, tal que:

i. Las creencias son consistentes, es decir, $\tau = \tau^g = \tau^a$.

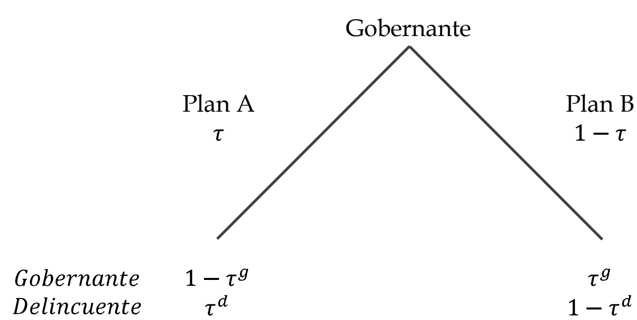
ii. Manteniendo las creencias fijas, la estrategia es un equilibrio de Nash en el sentido tradicional, es decir:

$$U^i[\tau, \sigma] \geq U^i[\tau, (\bar{\bar{\sigma}}^i, \sigma^{-i})], \quad \forall i, \quad \forall \bar{\bar{\sigma}}^i$$

En este caso, un primer equilibrio es: $\{\tau^a,\ \sigma\} = \{0, \textit{Política B}\}$ y, los pagos de cada jugador son $\{6, 1\}$. Un segundo equilibrio es $\{\tau^a,\ \sigma\} = \{1, \textit{Política A}\}$ y, los pagos de cada jugador son $\{4, 1\}$. Por último, el tercer equilibrio -en estrategias mixtas- es $\{\tau^a,\ [\tau, 1-\tau]\} = \{1/2, [1/2, 1/2]\}$ y, los pagos son $\{9/2, 1/2\}$. Como se puede notar las expectativas desempeñan un rol importante en la solución del ejercicio. En este escenario, el asesor se encuentra en una situación similar a una trampa de expectativas: está mejor cuando sugiere la Política B y, cree que el Gobernante espera esta política, sin embargo, si él cree que el Gobernante asigna probabilidad positiva a la Política A, el asesor se ve presionado a sugerir ésta con cierta probabilidad.

2.2. Juego psicológico de Sorpresa.

Figura 2. Juego de Sorpresa.



En donde:

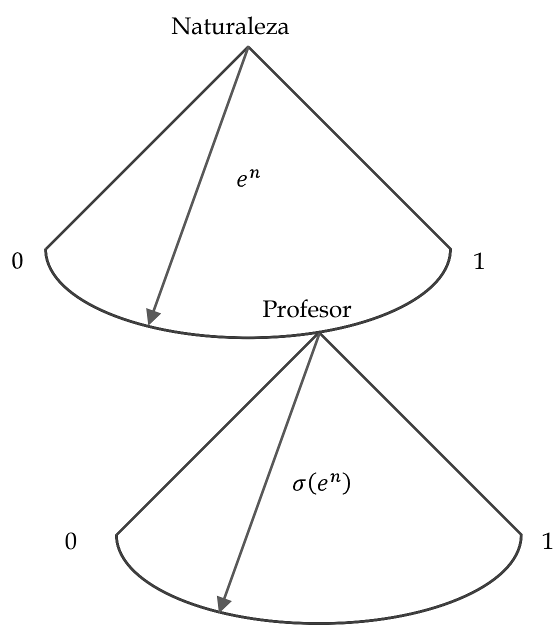
$\tau \ \in [0, 1]$: Probabilidad con la cual el Gobernante elige el Plan A.
$\tau^d \in [0, 1]$: Expectativa del Delincuente de τ.
$\tau^g \in [0, 1]$: Expectativa del Gobernante de τ^d.

La figura anterior representa la siguiente situación: Un Gobernante debe elegir el Plan A ó B, los cuales tienen como objetivo reducir la criminalidad. La efectividad de cada plan depende de cual es el plan esperado por el delincuente. De esta manera, si el delincuente espera el Plan X y, el gobernante lo elige, su efecto en la criminalidad se reduce, ya que, el delincuente ha preparado esquemas que le permitan vulnerar las nuevas medidas implementadas.

En este caso, el único equilibrio psicológico es en estrategias mixtas: $\{\tau^g, [\tau, 1-\tau]\} = \{1/2, [1/2,1/2]\}$, para el cual, los pagos son $\{1/2, 1/2\}$. En este contexto, si Gobernante desea sorprender al Delincuente, su estrategia debe ser completamente mixta: no existen equilibrios en estrategias puras, algo que no sucede en un juego tradicional con un único jugador activo.

2.3. Juego psicológico Hibrido.

Figura 3. Juego Psicológico Hibrido.



$$\max_{\sigma(e^n)\in[0,1]} \int_0^1 \{[\sigma(e^n) - e^e]^2 - \alpha[\sigma(e^n) - e^n]^2\} de^n$$

En donde:

$e^n \sim U[0,1]$:	Tipo de examen elegido por la naturaleza.
$\sigma(e^n) \in [0,1]$:	Tipo de examen que elige el Profesor.
$e^e \in [0,1]$:	Expectativa del Grupo sobre $\sigma(e^n)$.
$\alpha > 0$:	Importancia relativa de aplicar el examen que ha elegido la naturaleza

El juego consiste de una jugador activo –Profesor (P)- y de un jugador pasivo –Grupo-[2]. La historia procede de la siguiente forma: al inicio del juego la naturaleza elige el examen adecuado $- e^n \sim U[0,1] -$ para evaluar el desempeño del grupo al cual instruye el Profesor, su elección está en función de las deficiencias de los alumnos; por ejemplo, 0 implica que el examen adecuado es únicamente teórico (debido a que el grupo sólo tienen deficiencias teóricas) y 1, tan solo empírico. El profesor observa la elección de la naturaleza y decide cual es el tipo de examen que aplicará $-\sigma(e^n) \in [0,1] -$ balanceado dos objetivos. Por un lado, neutralidad: aplicar el tipo de examen elegido por la naturaleza, confirmando así las expectativas de que él es "justo" hacia el grupo; y, por otro lado, intervención: desea sorprender, es decir, elegir otro tipo de examen del que el grupo espera $- \ e^e -$, con el propósito de que éste sea efectivo: asegurar que los alumnos estudien y comprendan los temas del curso, sobre todo, de la parte en la cual tiene más deficiencias. El Profesor equilibra estos dos objetivos de acuerdo a la importancia relativa que tiene el objetivo neutralidad parametrizado por $\alpha > 0$.

El Profesor elige su estrategia maximizando:

$$\max_{\sigma(e^n)\in[0,1]} \int_0^1 U^P[\sigma(e^n),\ e^e,\ e^n]\, de^n$$

$$\max_{\sigma(e^n)} \int_0^1 \{[\sigma(e^n) - e^e]^2 - \alpha[\sigma(e^n) - e^n]^2\} de^n$$

$$s.a.$$

$$\sigma(e^n) \geq 0, \quad \sigma(e^n) \leq 1,$$

Tomando las creencias del grupo (e^e) al inicio del juego como dadas, es decir, antes de que mueva la naturaleza.

[2] Adicionalmente se incluye a la Naturaleza.

3. Equilibrios.

Definición 2.

Un Equilibrio Psicológico de este juego es una pareja $(e^e, \sigma(e^n))$ - perfil de creencias y perfil de estrategias-, tal que:

i. Las creencias son consistentes, es decir, $e^e = \int_0^1 \sigma(e^n) de^n$.

ii. Manteniendo las creencias fijas, la estrategia es un equilibrio de Nash en el sentido tradicional, es decir:

$$U^P[\sigma(e^n),\ e^e,\ e^n] \geq U^P[\bar{\bar{\sigma}}(e^n),\ e^e,\ e^n], \quad \forall\ \bar{\bar{\sigma}}(e^n).$$

A continuación se desglosan los equilibrios por el parámetro α, es decir, qué tan importante es para el Profesor su objetivo de neutralidad.

Caso 1 El objetivo neutralidad es, al menos, tan importante para el Profesor como el objetivo intervención, es decir, $\boldsymbol{\alpha \geq 1}$.

Proposición 1. La pareja $(e^e, \sigma(e^n))$ tal que:

a) $$\sigma(e^n) = \begin{cases} 0 & si\ e^n \leq \dfrac{1}{2\alpha} \\ \dfrac{\alpha e^n - \frac{1}{2}}{\alpha - 1} & si\ e^n \in \left(\dfrac{1}{2\alpha}, 1 - \dfrac{1}{2\alpha}\right) \\ 1 & si\ e^n \geq \dfrac{1}{2\alpha} \end{cases}$$

b) $$e^e = \frac{1}{2}$$

Es el único equilibrio psicológico de este juego, el cual genera la siguiente utilidad esperada al Profesor[3] :

$$\int_0^1 U^P[\sigma(e^n),\ e^e,\ e^n]\, de^n = \frac{\alpha + 1}{12\alpha}$$

[3] En el apéndice se encuentra la demostración.

Figura 4. Estrategia del Profesor para $\alpha = 4$.

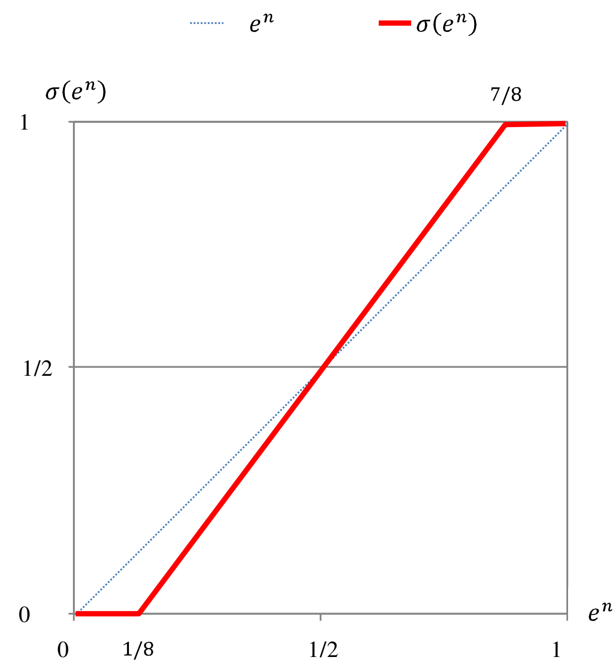
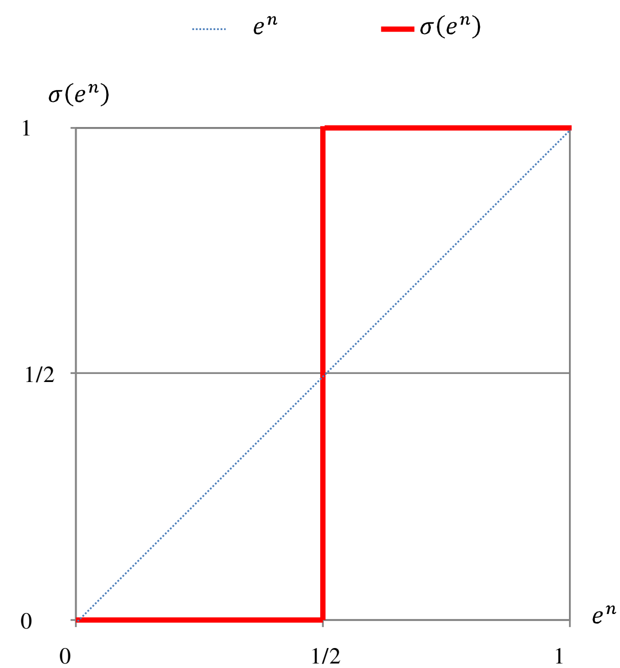


Figura 5. Estrategia del Profesor cuando $\alpha \to 1$.



La estrategia descrita en la Proposición 1 indica cual es la elección del Profesor dado que, por un lado, desea ser neutral ante el grupo y, por otro, desea intervenir, con el propósito de fomentar que el grupo estudie temas para los cuales tiene dificultades. Esta estrategia implica que, cuando el Profesor determina cual es el examen que aplicará, éste puede elegir un examen con una complejidad mayor del que la naturaleza seleccionó. El nivel de dificultad del examen que elige el profesor está determinado por el parámetro α; de tal forma que, cuando $\alpha \to \infty$, el examen que elige el profesor es el mismo que ha elegido la naturaleza; conforme el valor de este parámetro comienza a disminuir, se incrementa la brecha entre el tipo de examen que elige la naturaleza y el que elige el profesor, de tal forma que, si $\alpha \to 1$ la elección del profesor es casi dicotómica: su estrategia es elegir $\sigma(e^n) = \{0, 1\}$, dependiendo de cual sea la mayor deficiencia; únicamente cuando las deficiencias teóricas son iguales a las empíricas, es decir, $e^n = 1/2$, el profesor puede elegir cualquier tipo de examen.

Caso 2. El objetivo intervención es más importante para el Profesor que el objetivo neutralidad, es decir, $\boldsymbol{\alpha} < 1$.

Proposición 2.

La pareja $\left(e^e, \sigma(e^n)\right)$ tal que:

a) $$\sigma(e^n) = \begin{cases} 0 & si\ e^n < \dfrac{1}{2} \\ \\ 1 & si\ e^n \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

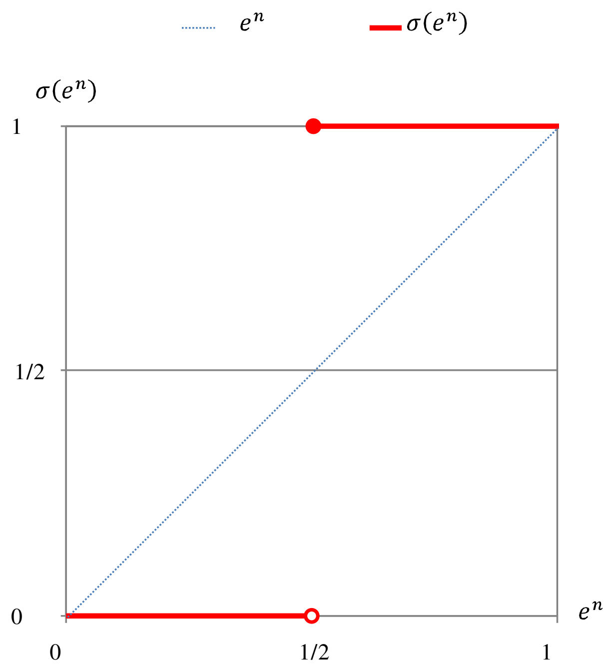
b) $$e^e = \frac{1}{2}$$

Es el único equilibrio psicológico, el cual genera la siguiente utilidad esperada para el Profesor[4]:

$$\int_0^1 U^P[\sigma(e^n),\ \ e^e,\ \ e^n]\, de^n = \frac{3-\alpha}{12}$$

[4] En el apéndice se encuentra la demostración.

Figura 6. Estrategia del Profesor para $\alpha < 1$.



Nótese que, la estrategia indicada en la Proposición 2 posee, en términos generales, las mismas características a la estrategia presentada en la Proposición 1, sin embargo, en este caso la elección del profesor es completamente dicotómica, la cual elige, dependiendo de cual es la mayor deficiencia del grupo.

Interpretación alternativa.

A continuación se analizan los resultados anteriores, asumiendo que, el modelo anteriormente descrito representa el juego de política monetaria del Banco Central[5]. El propósito de realizar esta interpretación es motivar el uso de los juegos psicológicos para modelar situaciones de política económica.

La historia procede de la siguiente forma: Al comienzo del juego la naturaleza elige la tasa de interés natural $-e^n-$ de la economía para el periodo, el Banco central observa esta tasa de interés y fija la tasa de interés vigente para ese periodo $-\sigma(e^n)-$, balanceado dos objetivos. Por un lado, neutralidad:

[5] Supuesto bastante fuerte, dado que no se consideran ecuaciones de oferta y demanda agregada, desempleo, etc.

establecer la tasa de interés natural, la cual es consistente con inflación estable[6]; y, por otro lado, intervención: desea sorprender, es decir, elegir otra tasa de interés a la que espera el público $-\ e^e\ -$, con el propósito de reducir los efectos de las fluctuaciones del producto y empleo en la sociedad. El Banco Central equilibra estos dos objetivos de acuerdo a la importancia relativa que tiene el objetivo neutralidad parametrizado por $\alpha > 0$.

Dado este escenario, las estrategias descritas en las Proposiciones 1 y 2 indican que, cuando el Banco Central determina cual es su postura de política, a través de fijar la tasa de interés (dada la acción elegida por la naturaleza), éste actúa de forma contracíclica: cuando existen brechas positivas (o negativas) entre el producto y el producto potencial, la postura del Banco Central es fijar una tasa de interés tal que, exista una brecha positiva (o negativa) con la tasa de interés natural, con el propósito de frenar (o estimular) a la economía y, así, disminuir los efectos de las fluctuaciones de la producción y del desempleo en la sociedad. La magnitud de la respuesta del Banco Central a las fluctuaciones está determinada por el parámetro α, es decir, por la sensibilidad que tiene el Banco Central al objetivo de neutralidad, de tal forma que, cuando $\alpha \to \infty$, la política que sigue el Banco Central es fijar en cada periodo la tasa de interés natural, es decir, a mantener la inflación estable; conforme el valor de este parámetro comienza a disminuir, empieza a incrementarse la brecha entre la tasa de interés vigente para el periodo y la tasa de interés elegida por la naturaleza, de tal forma que, si $\alpha \to 1$, la respuesta del Banco Central se vuelve casi dicotómica; su estrategia es elegir $\sigma(e^n) = \{0, 1\}$, dependiendo de si la actividad económica está disminuyendo o aumentando; únicamente cuando la tasa de interés $e^n = 1/2$, el Banco Central puede elegir cualquier tasa de interés. Finalmente, si $\alpha < 1$, la estrategia del Banco Central es completamente dicotómica, es decir, $\sigma(e^n) = \{0, 1\}$.

4. Conclusiones.

En este trabajo se modela un juego que captura situaciones, en las cuales los individuos enfrentan conflictos cuando deben decidir que acción elegir entre varias opciones disponibles: en un extremo desean elegir acciones que los demás esperan con el propósito de evitar sentimientos adversos (e.g. culpabilidad), mientras que en otro, necesitan elegir acciones que los otros no esperan con el fin de generar incertidumbre que permita que sus acciones tengan una mayor

[6] Para una descripción del concepto de tasa de interés natural, así como, de las implicaciones que tienen los movimientos de la actividad económica en ésta véase, Weber A., "The role of interest rates in theory and practice – How useful is the concept of the natural real rate of interest for monetary policy?", *Cambridge Lectures*, 2006.

efectividad. De acuerdo con los resultados obtenidos, si las preferencias del jugador son tales que, sorprender es relativamente más importante que la confirmación de expectativas, la estrategia que elige el jugador es completamente extrema: elige opciones que se encuentran en la frontera de sus posibilidades de elección; por otra parte, cuando confirmar las expectativas de los otros es relativamente más importante que sorprender, el individuo elige una acción intermedia, la cual está en función de sus preferencias sobre estos dos objetivos.

La situación descrita en este trabajo puede aplicarse a varios escenarios en los cuales intervienen conflictos de decisión, como por ejemplo, la política económica. Dado que en este trabajo se asume que la decisión del Banco Central sólo se basa en estos dos objetivos, sería importante que en futuras investigaciones se desarrolle un modelo macroeconómico de Política Monetaria, el cual, considere a los juegos psicológicos como la principal herramienta para determinar cual debería ser la política que debe seguir el Banco Central.

5. Referencias.

[1] Dufwenberg M. y Battigalli P. (2007): "Dynamic Psychological Games", *Journal of Economic Theory.*

[2] Geanakoplos, Pearce y Stacchetti (1989): "Psychological Games", *Games and Economic Behavior.*

[3] Weber A. (2006): "The role of interest rates in theory and practice – How useful is the concept of the natural real rate of interest for monetary policy?", *Cambridge Lectures*.

Apéndice.

A continuación se presenta la demostración de la Proposición 1 y 2.

Dado que el Profesor desea:

$$\max_{\sigma(e^n)} \int_0^1 \{[\sigma(e^n) - e^e]^2 - \alpha[\sigma(e^n) - e^n]^2\} de^n$$

$$s.a.$$

$$\sigma(e^n) \geq 0, \quad \sigma(e^n) \leq 1$$

El problema de optimización es:

$$\mathcal{L} = [\sigma(e^n) - e^e]^2 - \alpha[\sigma(e^n) - e^n]^2 + \lambda_1[\sigma(e^n)] + \lambda_2[1 - \sigma(e^n)]$$

Por lo cual las condiciones de Kuhn-Tucker son:

i. $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma(e^n)} := 2[\sigma(e^n) - e^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$

ii. $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda_1} := \sigma(e^n) \geq 0$

iii. $\sigma(e^n)\{2[\sigma(e^n) - i^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2\} = 0$

iv. $\lambda_1\sigma(e^n) = 0$

v. $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda_2} := 1 - \sigma(e^n) \geq 0$

vi. $[1 - \sigma(e^n)]\{2[\sigma(e^n) - e^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2\} = 0$

vii. $\lambda_2[1 - \sigma(e^n)] = 0$

Nótese que, calculando la segunda derivada se obtiene que:

$$\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\sigma(e^n)^2} := 2(1 - \alpha) \lesseqgtr 0, \qquad si\ \alpha \gtreqless 1$$

Se sabe que la función es:

- Cóncava, si la segunda derivada de la función es negativa, por lo tanto, si $\alpha > 1$, el valor que se obtiene al resolver el problema anterior es un máximo.
- Convexa, si la segunda derivada de la función es positiva, por lo tanto, si $\alpha < 1$, el valor que se obtiene al resolver el problema anterior es un mínimo.

- Cóncava y, al mismo tiempo, convexa si la segunda derivada es igual a cero: en este trabajo se asume que, si la segunda derivada es cero, entonces la función es cóncava.

Caso 1. $\boldsymbol{\alpha \geq 1}$.

Cuando el problema anterior tiene solución interior, es decir, $\sigma(e^n) \in (0, 1)$ se tiene que:

$$\xRightarrow{Por\ iv.\ y\ vii.} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\xRightarrow{De\ i.} \quad 2[\sigma(e^n) - e^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] = 0$$

$$\sigma(e^n) = \frac{\alpha e^n - e^e}{\alpha - 1}$$

La cual debe satisfacer:

$$\frac{\alpha e^n - e^e}{\alpha - 1} > 0 \Rightarrow e^n > \frac{1}{\alpha} e^e$$

$$\frac{\alpha e^n - e^e}{\alpha - 1} < 1 \Rightarrow e^n < \frac{1}{\alpha}(e^e + \alpha - 1)$$

Cuando la solución del problema es de esquina, es decir, $\sigma(e^n) = \{0\ , 1\}$, se tiene que:

Si $\sigma(e^n) = 0$:

$$\xRightarrow{Por\ vi.} 2[0 - e^e] - 2\alpha[0 - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad (viii)$$

$$\xRightarrow{Por\ vii.} \lambda_2 = 0$$

Por lo tanto, de viii:

$$\lambda_1 = 2e^e - 2\alpha e^n \geq 0$$

Lo cual implica que:

$$e^n \leq \frac{1}{\alpha} e^e$$

En tanto que, si $\sigma(e^n) = 1$:

$$\xRightarrow{Por\ vi.} 2[1 - e^e] - 2\alpha[1 - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad \textit{(ix)}$$

$$\xRightarrow{Por\ iv.} \lambda_1 = 0$$

Por lo tanto, de ix:

$$\lambda_2 = 2[1 - e^e] - 2\alpha[1 - e^n] \geq 0$$

Lo cual implica que:

$$e^n \geq \frac{1}{\alpha}(e^e + \alpha - 1)$$

Englobando los resultados anteriores se tiene que, la estrategia que sigue el Profesor es:

$$\sigma(e^n) = \begin{cases} 0 & si\ e^n \leq \frac{1}{\alpha}\ e^e \\ \dfrac{\alpha e^n - e^e}{\alpha - 1} & si\ e^n \in \left(\frac{1}{\alpha} e^e,\ \frac{1}{\alpha}(e^e + \alpha - 1)\right) \\ 1 & si\ e^n \geq \frac{1}{\alpha}(e^e + \alpha - 1) \end{cases}$$

Utilizando el hecho de que, en equilibrio, las creencias deben ser correctas, es decir, $e^e = \int_0^1 \sigma(e^n) de^n$, se obtiene que:

$$e^e = \int_0^{\frac{1}{\alpha}e^e} 0 de^n + \int_{\frac{1}{\alpha}e^e}^{\frac{1}{\alpha}(e^e+\alpha-1)} \frac{\alpha e^n - e^e}{\alpha - 1} de^n + \int_{\frac{1}{\alpha}(e^e+\alpha-1)}^{1} 1 de^n$$

Lo cual implica:

$$e^e = \frac{1}{2}$$

Tomando en consideración este resultado, la estrategia del Profesor es:

$$\sigma(e^n) = \begin{cases} 0 & si\ e^n \leq \dfrac{1}{2\alpha} \\ \dfrac{\alpha e^n - \frac{1}{2}}{\alpha - 1} & si\ e^n \in \left(\dfrac{1}{2\alpha}, 1 - \dfrac{1}{2\alpha}\right) \\ 1 & si\ e^n \geq \dfrac{1}{2\alpha} \end{cases}$$

La cual genera la siguiente utilidad esperada:

$$\int_0^1 U^P[\sigma(e^n),\ \ e^e,\ \ e^n]\, de^n$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2\alpha}} \left\{\left[0 - \frac{1}{2}\right]^2 - \alpha[0 - e^n]^2\right\} de^n$$

$$+ \int_{\frac{1}{2\alpha}}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \left\{\left[\frac{\alpha e^n - e^e}{\alpha - 1} - \frac{1}{2}\right]^2 - \alpha\left[\frac{\alpha e^n - e^e}{\alpha - 1} - \frac{1}{2}\right]^2\right\} de^n$$

$$+ \int_{1-\frac{1}{2\alpha}}^{1} \left\{\left[1 - \frac{1}{2}\right]^2 - \alpha[1 - e^n]^2\right\} de^n = \frac{\alpha + 1}{12\alpha}$$

Caso 2. $\boldsymbol{\alpha} < 1$.

Cuando $\alpha < 1$ implica que la función es convexa en $\sigma(e^n)$, por lo cual, el máximo se alcanza para puntos extremos de $\sigma(e^n)$. Nótese que el valor de la función debe ser el mismo en 0 y 1[7]. Debido a esto, es necesario que:

$$e^e = \int_0^1 \sigma(e^n) de^n = \frac{1}{2}$$

$$e^e = \frac{1}{2} = \int_0^a 0de^n + \int_a^1 1de^n = 1 - a$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

[7] De lo contrario, la elección óptima sería 0 ó 1 y, dado que $e^e = \int_0^1 \sigma(e^n)de^n$, la utilidad esperada sería: $-\alpha \int_0^1 [\sigma(e^n) - e^n]^2 de^n < 0$

Utilizando estos resultados se obtiene:

$$\sigma(i^n) = \begin{cases} 0 & si\ e^n < \dfrac{1}{2} \\ \\ 1 & si\ e^n \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La cual genera la siguiente utilidad esperada:

$$\int_0^1 U^P[\sigma(e^n),\ \ e^e,\ \ e^n]\, de^n =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[0 - \frac{1}{2}\right]^2 - \alpha[0 - e^n]^2 \right\} de^n$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ \left[1 - \frac{1}{2}\right]^2 - \alpha[1 - e^n]^2 \right\} de^n = \frac{3-\alpha}{12}$$

Respuesta Procíclica.

El propósito de este apartado es analizar como varía la estrategia elegida por el Banco Central cuando sorprender al público le genera desutilidad, es decir, el Banco Central desea maximizar:

$$\max_{\sigma(e^n)} \quad \int_0^1 \{-[\sigma(e^n) - e^e]^2 - \alpha[\sigma(e^n) - e^n]^2\} de^n$$

$$s.a.$$

$$\sigma(e^n) \geq 0, \quad \sigma(e^n) \leq 1$$

Por lo cual, el problema de optimización es:

$$\mathcal{L} = -[\sigma(e^n) - e^e]^2 - \alpha[\sigma(e^n) - e^n]^2 + \lambda_1[\sigma(e^n)] + \lambda_2[1 - \sigma(e^n)]$$

Por lo cual las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$i'.\qquad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma(e^n)} := -2[\sigma(e^n) - e^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$$

$$ii'.\qquad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda_1} := \quad \sigma(e^n) \geq 0$$

$$iii'.\qquad \sigma(e^n)\{-2[\sigma(e^n) - i^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2\} = 0$$

$$iv'.\qquad \lambda_1\sigma(e^n) = 0$$

$$v'.\qquad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda_2} := \quad 1 - \sigma(e^n) \geq 0$$

$$vi'.\qquad [1 - \sigma(e^n)]\{-2[\sigma(e^n) - e^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] + \lambda_1 - \lambda_2\} = 0$$

$$vii'.\qquad \lambda_2[1 - \sigma(e^n)] = 0$$

Nótese que, calculando la segunda derivada se obtiene que:

$$\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\sigma(e^n)^2} := 2(-1-\alpha) < 0, \qquad \forall\alpha > 0$$

Por lo tanto, la solución a este problema de optimización es interior, es decir, $\sigma(e^n) \in (0,1)$, por consiguiente:

$$\xRightarrow{Por\ iv\prime.\ y\ vii\prime.} \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\xRightarrow{De\ i\prime.} -2[\sigma(e^n) - e^e] - 2\alpha[\sigma(e^n) - e^n] = 0$$

$$\sigma(e^n) = \frac{\alpha e^n + e^e}{\alpha + 1} \in (0,1)$$

En este caso, la estrategia que sigue el Banco Central es:

$$\sigma(e^n) = \begin{cases} \dfrac{\alpha e^n + e^e}{\alpha + 1} \end{cases}$$

Utilizando que, en equilibrio, las creencias son correctas, es decir, $e^e = \int_0^1 \sigma(e^n) de^n$, se obtiene que:

$$e^e = \int_0^1 \frac{\alpha e^n + e^e}{\alpha + 1} de^n \quad \Longrightarrow \quad e^e = \frac{1}{2}$$

Proposición 3. La pareja $\left(e^e, \sigma(e^n)\right)$ tal que:

a) $\sigma(e^n) = \left\{ \frac{\alpha e^n + \frac{1}{2}}{\alpha + 1} \right.$

b) $e^e = \frac{1}{2}$

Es el único equilibrio psicológico de este juego, el cual genera la siguiente utilidad esperada al Banco Central:

$$\int_0^1 U^P[\sigma(e^n),\ e^e,\ e^n]\, de^n =$$

$$= \int_0^1 \left\{ -\left[\frac{\alpha e^n + \frac{1}{2}}{\alpha + 1} - \frac{1}{2} \right]^2 - \alpha \left[\frac{\alpha e^n + \frac{1}{2}}{\alpha + 1} - e^n \right]^2 \right\} de^n$$

$$= -\frac{\alpha}{12(\alpha + 1)}$$

Esta estrategia implica que, cuando el Banco Central determina cual es la tasa de interés para el periodo, éste puede elegir una tasa de interés menor de la que seleccionó la naturaleza, actuando de forma procíclica: cuando existen brechas positivas (o negativas) entre el producto y el producto potencial, la postura del Banco Central es fijar una tasa de interés tal que, exista una brecha negativa (o positiva) con la tasa de interés natural, con lo cual estaría estimulando (o frenando) a la economía, lo cual, en el largo plazo, tiene un efecto negativo en el crecimiento del producto y el empleo.

La magnitud de la respuesta del Banco Central a las fluctuaciones está determinada por el parámetro α, es decir, por la sensibilidad que tiene el Banco Central al objetivo de neutralidad, de tal forma que, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, la política que sigue el Banco Central es fijar en cada periodo la tasa de interés natural, es decir, a mantener la inflación estable; conforme el valor de este parámetro comienza a disminuir, empieza a incrementarse la brecha entre la tasa de interés vigente para el periodo y la tasa de interés elegida por la naturaleza, de tal forma que, si $\alpha \to 0$, la respuesta del Banco Central se vuelve casi fija; su estrategia es elegir $\sigma(e^n) = 1/2$, independientemente de si la actividad económica está disminuyendo o aumentando.

Figura 5. Estrategia del Banco Central para $\alpha = 4$.

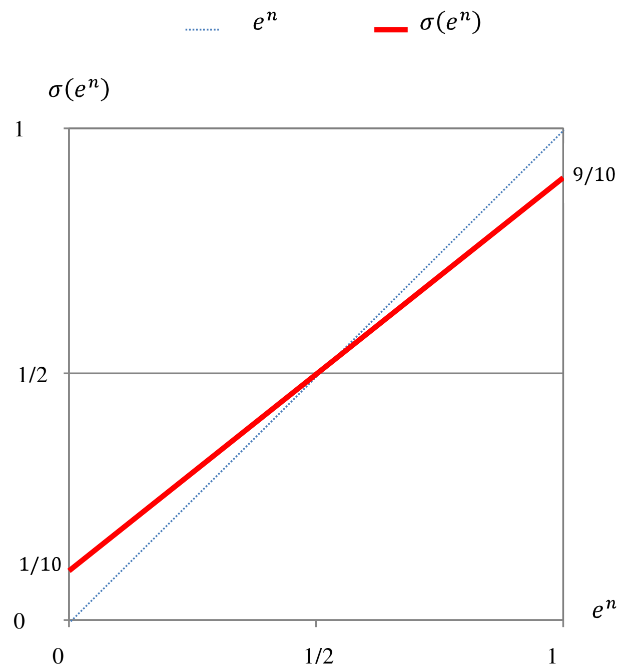


Figura 6. Estrategia del Banco Central cuando $\alpha \to 0$.