EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

ESTRUCTURAS COALICIONALES EN MERCADOS BILATERALES

OSCAR MARTÍNEZ QUINTERO

PROMOCIÓN 2005 - 2007

ASESOR:

DR. DAVID RENE MICHEL CANTALA

DICIEMBRE 2007

Estructuras Coalicionales en Mercados Bilaterales

Resumen

Este trabajo analiza la formación de grupos de comercio en un mercado bilateral donde los agentes, quienes tienen preferencias distintas, comercian de acuerdo al mecanismo Shapley-Shubik. Si existe alguna estructuras de comercio estable, en el sentido del núcleo, ésta es única salvo por permutaciones entre grupos y está determinada por el grado de diferenciación de las preferencias por parte de los agentes, además, siempre existe una estructura de comercio estable en el sentido del *weak-ε core*, y de igual forma, está determinado por el grado de diferenciación de las preferencias de los agentes.

1. Introducción

En un mercado tradicional los agentes (comerciantes) no pueden seleccionar el conjunto de agentes con quienes quieran comerciar, sino que están restringidos a interactuar con todo el conjunto de ellos en la economía. En contextos perfectamente competitivos esto está plenamente justificado ya que cualquier equilibrio competitivo pertenece al núcleo. Sin embargo, ante la existencia de cierto poder de mercado el resultado no es obvio. Por ejemplo, el modelo clásico de Cournot nos sugiere que los comerciantes tienen incentivos a organizarse.

Este fue un modelo desarrollado por Francis Bloch y Sayantan Ghosal (1997) el cual se encuentra en un marco de oligopolio bilateral con dos tipos de comerciantes, donde cada tipo tiene un acaparamiento en un bien distinto. Cada agente esta dotado de una cantidad de su bien y lleva una oferta al mercado para intercambiar por el otro bien. El mecanismo de asignación empleado es Shapley-Shubik (1977) el cual establece que la asignación final de cada agente es un promedio ponderado respecto a la oferta propia de cada agente en el mercado. Es decir, la cantidad que un agente tendrá de su propio bien es su dotación inicial menos la proporción que decida intercambiar, mientras que la cantidad total ofrecida del otro bien es repartida proporcionalmente de acuerdo a la cantidad que cada agente ofreció de su bien. Bajo este contexto Bloch y Ghosal llegan a la conclusión de que la gran coalición (comerciar todos con todos) es la única estructura de comercio estable en el sentido del núcleo.

Sin embargo, estos resultados no son robustos ante algunas modificaciones en el modelo. En particular, Bloch y Ghosal suponen preferencias iguales para los dos tipos de agentes (funciones de utilidad idénticas).

En el presente trabajo se suponen preferencias distintas para los dos tipos de agentes y se analiza su comportamiento. Se muestra que si existen alguna estructura de comercio estable en el sentido del núcleo, ésta es única, salvo por permutaciones entre grupos, y su tamaño está determinado por el grado de diferenciación de las preferencias por parte de los agentes.

Sin embargo, no es posible garantizar la existencia de una estructura de comercio estable en el sentido del núcleo. Por esto, adicionalmente se introdujo otro concepto de estabilidad llamado *weak-ε core*, desarrollado por Shapley-Subick (1966). Este es un concepto de estabilidad mas débil el cual establece la condición de que cambiarse de grupo conlleva un pequeño costo ε. Dado esto, se muestra que siempre existe una estructura de comercio estable en el sentido del *weak-ε core*, y que, de igual forma, está determinado por el grado de diferenciación de las preferencias de los agentes.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente forma: en la sección 2 se enuncian los supuestos del modelo base, y en el apartado 2.1 se presenta su resultado básico; en la sección 3 se explican los distintos tipos de conceptos de estabilidad utilizados en el modelo; en la sección 4 se desarrollan e indican los resultados de nuestro modelo en particular; en la sección 5 se dan las conclusiones y en el apéndice se desarrollan las pruebas de las proposiciones y teoremas.

2. Modelo

El modelo de oligopolio bilateral que se utiliza cuenta con dos tipos de agentes (comerciantes). Se denota a M y N, con cardinalidad m y n, al conjunto universal de comerciantes de tipo I y tipo II respectivamente. Donde K y L son subconjuntos respectivos de M y N. Asumimos además que el numero potencial de agentes de tipo I y tipo II es el mismo $m = n$.

Existen dos tipos de bienes, x y y. Los agentes de tipo I tienen una dotación inicial del bien x y los agentes de tipo II una dotación inicial del bien y. Cada agente es dotado por la misma cantidad del bien, es decir, cada comerciante de tipo I posee la misma cantidad que cada comerciante de tipo II. Las funciones de utilidad de los dos tipos de agentes están denotadas por $u(x, y)$ para los de tipo I, y $v(x, y)$ para los de tipo II. Además, estas funciones deberán cumplir con algunas restricciones:

- Las función de utilidad u es continua, dos veces diferenciable, creciente y estrictamente cóncava.
- La función de utilidad u satisface las condiciones en el límite:
$$\lim_{x \to 0} -u_x + u_y y < 0$$
$$\lim_{x \to 1} -u_x + u_y y > 0$$
- Los dos bienes x y y son complementarios, es decir: $u_{xy} \geq 0$
- La función de utilidad satisface $u_x + yu_{yy} - 2u_{xy} > 0$

Esto aplica de forma simétrica para v.

Dado que ambos bienes son complementarios, cada agente ofrece una cantidad estrictamente positiva, sin llegar a ofrecer toda su dotación. Además, la utilidad de cada agente, depende de la cantidad de su propio bien (del que esta dotado inicialmente), y de la cantidad del bien de los del otro tipo, y la función de reacción es creciente respecto a las ofertas del otro lado del mercado.

2.1 Equilibrio

En este modelo los agentes de tipo I y tipo II forman grupos de comercio (K, L) en los cuales, aquellos agentes que se encuentran dentro de un grupo solo pueden intercambiar con los comerciantes que se encuentran dentro de su mismo grupo.

Para algún par (K, L) fijos para $i = 1,2,\ldots,k$ y $j = 1,2,\ldots,l$, donde k y l denotan la cardinalidad de K y L, la decisión que cada agente toma es la cantidad que va a intercambiar dentro de su grupo, cada comerciante de tipo I ofrece una proporción de su dotación b_i y cada comerciante de tipo II una proporción g_j. Dado esto, el conjunto de estrategias para todos los agentes esta dado por:

$$S_I^{k,l} = \{b_i \in \Re / 0 \le b_i \le 1\} \quad \text{para los comerciantes de Tipo I}$$
$$S_{II}^{k,l} = \{g_j \in \Re / 0 \le g_j \le 1\} \quad \text{para los comerciantes de Tipo II}$$

El mecanismo de asignación que se emplea para distribuir las ofertas totales en el mercado por parte de los comerciantes es el de Shapley-Shubik. El mecanismo establece que la cantidad que un agente tendrá de su propio bien es su dotación inicial menos la proporción que decida intercambiar, mientras que la cantidad total ofrecida del otro bien es repartida proporcionalmente de acuerdo a la cantidad que cada agente ofreció de su bien, de modo que la asignación final obtenida por los agentes esta dada por:

$$(x, y) = \left(1 - b_i, b_i \frac{\sum_{j=0}^{l} g_j}{\sum_{i=o}^{k} b_i}\right) \qquad (x, y) = \left(g_j \frac{\sum_{i=0}^{k} b_i}{\sum_{j=o}^{l} g_j}, 1 - g_j\right)$$

Dada una coalición de tamaño (k, l), un equilibrio de Nash es un vector de ofertas $(b_1^*, \ldots, b_k^*, g_1^*, \ldots, g_l^*)$ tal que:

Para cada comerciante $i \in K$, b_i^* maximice $u\left(1 - b_i, b_i \frac{\sum g_j^*}{\sum_{t \ne i} b_t^* + b_i}\right)$, y

Para cada comerciante $j \in L$, g_j^* maximice $v\left(g_j \frac{\sum b_i^*}{\sum_{t \ne j} g_t^* + g_j}, 1 - g_j\right)$

Por lo tanto para cualquier tamaño de coalición los agentes conocen su función característica $U(K, L)$ para los de tipo I y $V(K, L)$ para los de tipo II.

Tomando en cuenta este resultado y dadas las restricciones de las funciones de utilidad, Bloch y Ghosal desarrollan la siguiente proposición:

Proposición:
Sea (K,L) un grupo de tamaño (k,l). Si $k>1$ y $l>1$, existe un único equilibrio el cual es simétrico y esta dado por $\left(b_1^*,\ldots,b_k^*,g_1^*,\ldots,g_l^*\right)$, donde $b^*=b_i^*$ y $g^*=g_l^*$ para $\forall i,l$, los cuales están definidos implícitamente por:

$$-u_x\left(1-b^*,\frac{lg^*}{k}\right)+u_y\left(1-b^*,\frac{lg^*}{k}\right)\frac{lg^*}{k}\frac{k-1}{kb^*}=0$$
$$-v_y\left(\frac{kb^*}{l},1-g^*\right)+v_x\left(\frac{kb^*}{l},1-g^*\right)\frac{kb^*}{l}\frac{l-1}{lg^*}=0$$

Dado que el agente pertenece a una coalición (K,L) el nivel de utilidad de equilibrio (el valor de la coalición para cada comerciante) es conocido por parte de los agentes.

$$U(K,L)\equiv u\left(1-b^*(k,l),\frac{lg^*(k,l)}{k}\right) \qquad \text{y} \qquad V(K,L)\equiv v\left(\frac{kb^*(k,l)}{l},1-g^*(k,l)\right)$$

3. Estructuras de comercio estable

El concepto de estabilidad que se emplea es el del núcleo, sin embargo, como ya se mencionó, bajo este contexto no es posible garantizar la existencia de una estructura de comercio estable en el sentido del núcleo. Por esto, adicionalmente se analiza el concepto de *weak-ε core*.

3.1 Conceptos de Estabilidad (Núcleo)

Nos limitaremos a analizar grupos de comercio que se encuentren en el núcleo, es decir grupos en los cuales ningún agente (o grupo de agentes) dentro de éste pudiera estar mejor si se cambiara o formara un nuevo grupo y todos los demás agentes mantuvieran por lo menos su mismo nivel de utilidad. Esto lo podemos hacer dado que, a priori, conocemos el valor de una coalición de cada agente para algún tamaño dado.

Diremos que una estructura de comercio es una colección de grupos de comercio $B=\{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ tal que $\bigcup_{t=1}^{T}K_t=M$ y $\bigcup_{t=1}^{T}L_t=N$, y para todo *t*, $K_t\neq\phi$ y $L_t\neq\phi$. Además, para cualquier estructura de comercio *B* y cualquier subconjunto *S* de comerciantes, denotaremos por $B(S)$ a aquellos grupos de comercio los cuales sean miembros de *S*, es decir: $B(S)=\{(K_t,L_t)\mid K_t\cap S\neq\phi \text{ o } L_t\cap S\neq\phi\}$.

Una estructura de comercio es estable si no existe alguna posible coalición de agentes que puedan formar un grupo de comercio en el cual todos ellos tengan una utilidad mayor o igual, con alguna desigualdad estricta para por lo menos uno. Esto lleva a que en una estructura de comercio estable los agentes no tienen incentivos a desviarse del mercado en el que ellos se encuentran. Específicamente:

Una estructura de comercio B es estable si no existe un grupo de comercio (K,L) tal que

1. Para toda coalición (K_t, L_t) en $B(K)$, $U(k,l) \geq U(k_t, l_t)$.
2. Para toda coalición (K_t, L_t) en $B(L)$, $V(k,l) \geq V(k_t, l_t)$.
3. Para algún (K_t, L_t) en $B(K)$, $U(k,l) \geq U(k_t, l_t)$ o para algún (K_t, L_t) en $B(L)$, $V(k,l) \geq V(k_t, l_t)$.

Es decir que para cualquier coalición de tamaño (k,l) dentro de una estructura de comercio estable, la utilidad que genera estar en esa coalición es mayor o igual para todos los agentes.

3.2 Weak-ε core

En nuestro contexto, una última condición para definir estructuras de comercio estable es considerar el caso donde el tamaño de los grupos dentro de una coalición de comercio estable no es un múltiplo exacto del total de agentes. La formación de coaliciones será inestable en el sentido de que algún grupo de agentes tendrá incentivos a formar un nuevo grupo. En este caso, los agentes quienes están en un grupo más pequeño que (k^*, l^*), dado el supuesto de comportamiento estratégico, podrán "sobornar" a algunos de los otros agentes para unírseles y así, formar un nuevo grupo de tamaño (k^*, l^*).

Para estos casos se introducirá un concepto llamado *weak-ε core*, desarrollado por Shapley-Shubik. Esta es una noción de estabilidad basada en la idea del núcleo sólo que ésta supone que la formación de grupos es ligeramente costosa. Ningún grupo de agentes tiene incentivos de irse a un nuevo grupo si ellos deben pagar ε por miembro que decida cambiarse de grupo, lo cual garantiza que no haya desviaciones conjuntas por parte de los comerciantes y que por lo tanto el núcleo no se encuentre vacío ya que los agentes restantes se repartirán de manera aleatoria en los grupos de comercio ya establecidos. Más precisamente:

Sea $B(M,N)$ una estructura de comercio no estable en el sentido del núcleo, y sea c la máxima ganancia de agentes en una coalición bloqueadora. Si existe un costo ε para todos los agentes de cambiarse de coalición, y $\varepsilon > c$, entonces $B(M,N)$ es una estructura de comercio estable en el sentido *del weak-ε core*.

4. Estructuras de Comercio Estable con una Función de Utilidad Cobb-Douglas

A partir de estos resultados, ahora se analizará el comportamiento de las estructuras de comercio estable asumiendo preferencias distintas entre los agentes de tipo I y los de tipo II. En particular, supondremos formas funcionales específicas del tipo Cobb-Douglas:

$u(x,y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$ y $v(x,y) = x^{\beta} y^{1-\beta}$

Dado el mecanismo de asignación Shapley-Shubik, las funciones de utilidad quedan expresadas de la siguiente forma:

$$u(x,y)=(1-b_i)^{\alpha}\left(b_1\frac{\sum g_j}{\sum b_i}\right)^{1-\alpha} \qquad v(x,y)=\left(g_j\frac{\sum b_i}{\sum gj}\right)^{\beta}(1-g_j)^{1-\beta}$$

Lo que buscan los agentes es maximizar su utilidad en función de sus propias ofertas, por lo tanto cada comerciante de tipo I maximizarán su utilidad con respecto a su oferta, b_i, y los de tipo II maximizará también su utilidad con respecto a su propia oferta, g_j.

Los resultados obtenidos después de la maximización son la ecuación (1) para los de tipo 1 y la ecuación (2) para los de tipo II.

$$\left(\frac{\alpha}{\sum_{t\neq i} b_t}\right)b_1^2+b_i-(1-\alpha)=0 \qquad \text{Ecuación (1)}$$

$$\left(\frac{1-\beta}{\sum_{t\neq j} g_t}\right)g_j^2+g_j-\beta=0 \qquad \text{Ecuación (2)}$$

Como sabemos, en el equilibrio todas las ofertas de los agentes de tipo I serán iguales, y lo mismo para los agentes de tipo II, por lo tanto las ecuaciones (1) y (2) quedan expresadas como la ecuación (3) y (4).

$$b^*=\frac{(1-\alpha)(k-1)}{k+\alpha-1} \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$g^*=\frac{\beta(l-1)}{l-\beta} \qquad \text{Ecuación (4)}$$

Dado que ya conocemos los niveles de las ofertas óptimas la función característica para ambos tipos de comerciantes queda expresada de la siguiente forma:

$$U(K,L)=\left(\frac{\alpha k}{k+\alpha-1}\right)^{\alpha}\left(\frac{l\beta(l-1)}{k(l-\beta)}\right)^{1-\alpha} \qquad V(K,L)=\left(\frac{k(1-\alpha)(k-1)}{l(k+\alpha-1)}\right)^{\beta}\left(\frac{l(1-\beta)}{l-\beta}\right)^{1-\beta}$$

Dado esto, es posible encontrar los siguientes resultados acerca de la forma de las estructuras de comercio estable.

Proposición 1.

Sea $B^*=\{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *una estructura de comercio estable, en el sentido del núcleo, entonces para cualquier valor de α y β:*

1. $k_i=l_i \ \forall\, i$
2. $k_i=k_j\left(l_i=l_j\right) \ \forall\, i,j$

Proposición 2.

Sea $B^* = \{(K_1, L_1), \ldots, (K_T, L_T)\}$ *una estructura de comercio estable, en el sentido del weak-ε core, para cualquier valor de α y β:*

1. $k_i = l_i \;\; \forall\, i$
2. $k_i = k\,,\, k+1 (l_i = l, l+1)$ *en donde* $k(l)$ *es el mayor entero de* ${}^{m}\!/_{T}$

De estos dos resultados podemos concluir lo siguiente.

Lema 1.

Para cualquier valor de α y β,

1. *Si existe una estructura de comercio estable, en el sentido del núcleo, es única (salvo por permutaciones entre grupos).*
2. *Siempre existe una estructura de comercio estable en el sentido de weak-ε core*

Si $\alpha > (1-\beta)$ la función valor de los comerciantes de tipo II, $V(K, L)$, será creciente para cualquier par (K, L), de modo que no tendrán un tamaño óptimo de coalición ya que entre más grande sea el grupo mayor utilidad perciben. Por el contrario, los comerciantes de tipo I tendrán un par (K, L) para el cual maximizan su función valor $U(K, L)$, por lo que para ellos sí habrá un grupo de tamaño optimo k^*.

Dado la proposición 1, para encontrar el tamaño de grupo que maximiza la utilidad para los agentes de tipo I, éstos se enfrentarán a la siguiente función de utilidad:

$$u(x, y) = \left(\frac{\alpha k}{k + \alpha - 1} \right)^{\alpha} \left(\frac{\beta(k-1)}{(k-\beta)} \right)^{1-\alpha}$$

Donde lo que buscan es maximizar el tamaño del grupo, es decir, encontrar la condición de primer orden con respecto a *k*.

CPO.

$$(\alpha + \beta - 1)k^2 + (-2\alpha - b + 1)k + (\alpha\beta) = 0$$

De aquí obtenemos que el tamaño óptimo de las coaliciones en la economía será (k^*, k^*) donde k^* es igual a:

$$k^* = \frac{-(-2\alpha - \beta + 2) - \sqrt{(-2\beta - \alpha + 2)^2 - 4(\alpha + \beta - 1)(\beta + \alpha - \alpha\beta - 1)}}{2(\alpha + \beta - 1)}$$

Si por el contrario, $\alpha < (1-\beta)$, la función valor de los comerciantes de tipo I $U(K,L)$, será creciente para cualquier par (K,L), por lo que no tendrán un tamaño óptimo de coalición, ya que entre más grande sea el grupo mayor utilidad perciben. Ahora serán los comerciantes de tipo II los cuales tendrán un par (K,L) para el cual maximizan su función valor $V(K,L)$, por lo que para ellos si habrá un grupo de tamaño optimo l^*.

La función de utilidad a la que se enfrentan los agentes de tipo II, dado lo que ya conocemos de la proposición 1, esta representada por:

$$v(x,y) = \left(\frac{(1-\alpha)(l-1)}{l+\alpha-1}\right)^{\beta}\left(\frac{l(1-\beta)}{l-\beta}\right)^{1-\beta}$$

La CPO con respecto a l esta dada por:

$$(\alpha+\beta-1)l^2 + (-2\beta-\alpha+2)l + (\beta+\alpha-\alpha\beta-1) = 0$$

De aquí obtenemos que el tamaño óptimo de las coaliciones en la economía será (l^*, l^*) donde l^* es igual a:

$$l^* = \frac{-(-2\beta-\alpha+2) - \sqrt{(-2\alpha-\beta+1)^2 - 4(\alpha+\beta-1)\alpha\beta}}{2(\alpha+\beta-1)}$$

Si $\alpha = (1-\beta)$ ninguno de los agentes tendrá un tamaño de grupo óptimo, por lo que la única estructura de comercio estable será la gran coalición, en donde todos los agentes de tipo I comercian con todos los agentes de tipo II[1].

Teorema 1

Para cualquier conjunto de comerciantes M y N y una estructura de comercio estable $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *que pertenezca al núcleo:*

1. *Si* $m/_{k^*,l^*} \in \aleph$, *entonces:*
    a. *Si* $\alpha > (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *donde para cualquier* (K_i,L_i), $k_i = l_i$. *Además,* $k_i = k^* = \overline{k}^*, \underline{k}^*$ $\forall i$.
    b. *Si* $\alpha < (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *donde para cualquier* (K_i,L_i), $k_i = l_i$. *Además,* $l_i = l^* = \overline{l}^*, \underline{l}^*$ $\forall i$.

[1] Nótese que si esto pasa, estaremos en el caso donde $\alpha = \beta$, es decir, asumiríamos preferencias iguales para ambos tipos de agentes.

c. *Si* $\alpha = (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K,L)\}$ *donde* $(K,L) = (M,N)$ *y* $k = l = m = n$.

2. *Si* $m/_{k^*,l^*} \notin \aleph$, *el núcleo se encuentra vació*

Donde $\overline{k}^*, \underline{k}^*$ *y* $\overline{l}^*, \underline{l}^*$ *se definen como los* $\aleph$ *más cercanos para los cuales* $U(k,l) \approx U(k^*,l^*)$ y $V(k,l) \approx V(k^*,l^*)$.

Teorema 2

Para cualquier conjunto de comerciantes M y N y una estructura de comercio estable $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *que pertenezca al weak-ε core:*

1. *Si* $m/_{k^*,l^*} \in \aleph$, *entonces:*
   a. *Si* $\alpha > (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *donde para cualquier* (K_i,L_i), $k_i = l_i$ *además de que* $k_i = k^* = \overline{k}^*, \underline{k}^*$ *para* $\forall i$.
   b. *Si* $\alpha < (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *donde para cualquier* (K_i,L_i), $k_i = l_i$ *además de que* $l_i = l^* = \overline{l}^*, \underline{l}^*$ *para* $\forall i$.
   c. *Si* $\alpha = (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K,L)\}$ *donde* $(K,L) = (M,N)$ *y* $k = l = m = n$.
2. *Si* $m/_{k^*,l^*} \notin \aleph$, *el núcleo se encuentra vacio*
   a. *Si* $\alpha > (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *donde para cualquier* (K_i,L_i), $k_i = l_i$ *además de que* $k_i = k^* = \overline{k}^*, \underline{k}^* + c, c'$ *para* $\forall i$.
   b. *Si* $\alpha < (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K_1,L_1),\ldots,(K_T,L_T)\}$ *donde para cualquier* (K_i,L_i), $k_i = l_i$ *además de que* $l_i = l^* = \overline{l}^*, \underline{l}^* + c, c'$ *para* $\forall i$.
   c. *Si* $\alpha = (1-\beta)$, *la estructura de comercio estable será* $B^* = \{(K,L)\}$ *donde* $(K,L) = (M,N)$ *y* $k = l$.

Donde $\overline{k}^*, \underline{k}^*$ *y* $\overline{l}^*, \underline{l}^*$ *se definen como los* $\aleph$ *más cercanos para los cuales* $U(k,l) \approx U(k^*,l^*)$ y $V(k,l) \approx V(k^*,l^*)$. *Y c es una constante que pertenece a los naturales tal que* $0 < c < k_i, l_i$ *y* $c' = c + 1$.

Estos resultados son derivados de las dos proposiciones anteriores y nos dicen que, en general, existirá una única estructura de comercio estable en la cual todos los grupos serán simétricos, su tamaño estará en función de α y β, y quedaran determinados por el grado de distinción entre las preferencias.

5. Conclusiones

En el presente trabajo se demostró que al existir heterogeneidad en las preferencias de los distintos tipos de agentes la gran coalición ya no es sostenible como una estructura de comercio estable en el sentido del núcleo, además de que bajo ciertas características no existe estabilidad en este sentido. Por esto, se introdujo una noción de estabilidad más débil, *weak-ε core*, con la cual es posible garantizar siempre la existencia de estabilidad en los grupos.

Sin embargo es importante señalar el hecho de que esto no es probado para funciones de utilidad distintas a las de tipo Cobb-Douglas, en este sentido hace falta ver la robustez de los resultados aquí obtenidos. Esto podría ser el tópico de futuras investigaciones al respecto, en las cuales se pueda llegar a una conclusión más general.

Apéndice A

Proposición y Teorema 1

<u>Prueba.</u>
Supongamos que estamos en alguna estructura de comercio estable en el sentido del núcleo, de modo que 1 y 2 se cumplen. Primero analizaremos que no puede haber desviaciones redituables por parte de algún(nos) comerciante(s) del mismo tipo, es decir probaremos que $k_i = l_i \ para \ \forall i$. Como $\frac{\partial U}{\partial k}, \frac{\partial V}{\partial l} < 0$, para cualquier $k, l > 1$ es posible hacer las siguientes afirmaciones:

1. Considere dos mercados (K, L) de tamaño (k, l) y (k', l), con $k = l$ y $k' > k$. Para cualquier $k, l > 1$, $U(K, L) > U(K', L)$.
2. De forma simétrica, considere dos mercados (K, L) de tamaño (k, l) y (k, l'), con $k = l$ y $l' > l$. Para cualquier $k, l > 1$, $V(K, L) > V(K, L')$.

Dado que supusimos un número potencial de agentes de tipo I y tipo II igual, $m = n$, es posible suponer que tenemos una estructura de comercio $B = \{(K_1, L_1), \ldots, (K_T, L_T)\}$ donde para todo (K_i, L_i), $k = l \ \ \forall i$ donde $i = 1, 2, \ldots, T$. Dadas las afirmaciones 1 y 2, no existirá ninguna posible desviación redituable para ningún grupo de agentes del mismo tipo en ningún caso, ya que el estar en un par con $k \neq l$ genera una menor utilidad para alguno de los agentes.

Falta por analizar desviaciones en bloque por parte de los agentes en donde algún comerciante de tipo I se desvié con algún comerciante de tipo II.

Si $\alpha > (1 - \beta)$, $\frac{\partial U}{\partial l \partial k} > 0$ pero $\frac{\partial V}{\partial k \partial l}$ presenta un máximo en k^*. Si nos encontramos en una estructura de comercio estable en el sentido del núcleo tendremos que encontrarnos en el máximo (o en una vecindad para el caso donde el máximo no pertenezca a los números naturales, $\bar{k}^*, \underline{k}^*$) de los agentes de tipo I, por lo que movimientos (aún en bloque) hacia cualquier punto distinto ocasiona una menor utilidad para éstos, lo que garantizará que no existan desviaciones redituables.

Si $\alpha < (1-\beta)$, $\frac{\partial U}{\partial k \partial l} > 0$ pero de manera simétrica al caso anterior $\frac{\partial V}{\partial l \partial k}$ presenta un máximo en l^*. Si nos encontramos en una estructura de comercio estable en el sentido del núcleo tendremos que encontrarnos en el máximo de los agentes de tipo II (o en las vecindades $\bar{l}^*, \underline{l}^*$), por lo que movimientos (aún en bloque) hacia cualquier punto distinto ocasiona una menor utilidad para éstos, lo que de igual forma garantizará que no existan desviaciones redituables.

Nótese que cuando $\alpha \neq (1-\beta)$ existe la posibilidad de que, si no es posible situarse en el máximo, haya más de un punto para el cual algún agente maximice su utilidad (es decir; $U(\bar{k}^*, l) = U(\underline{k}^*, l)$ ó $V(k, \bar{l}^*) = V(k, \underline{l}^*)$). Sin embargo dado que la utilidad del otro tipo de agente es creciente, la estabilidad se encontrará en el mayor entero para el cual estos últimos maximicen su utilidad.

Si $\alpha = (1-\beta)$, $\frac{\partial U}{\partial k \partial l} > 0$ y $\frac{\partial V}{\partial l \partial k} > 0$. Si nos encontramos en una estructura de comercio estable en el sentido del núcleo tendremos que encontrarnos en el máximo de los agentes de tipo I y II, el cual es el mismo para ambos y es una solución de esquina. Por lo que movimientos (aun en bloque) hacia cualquier punto distinto ocasiona una menor utilidad para éstos, lo que de igual forma garantizará que no existan desviaciones redituables. $\blacksquare$

Proposición y Teorema 2

<u>Prueba.</u>
A diferencia de la proposición 1, aquí se contempla la posibilidad de que $m/T \notin \aleph$. Lo que introduce este cambio es el hecho de que el tamaño de los grupos pueda ser distinto, en particular: $k_i = k, k+1 (l_i = l, l+1)$, por lo que esta parte es la única que falta por probar.

Si nos encontramos en una estructura de comercio estable en el sentido del *weak-ε core* tendremos que encontrarnos en el máximo (o en una vecindad para el caso donde el máximo no pertenezca a los números naturales) de los agentes de tipo I o tipo II dependiendo de los valores de α y β. Dado que, a diferencia del caso del núcleo, no todos los agentes pueden ser acomodados en grupos de tamaño óptimo, los agentes sobrantes estarán repartidos sobre los grupos existentes, de modo que se acerquen lo más posible al nivel máximo de utilidad (para los de tipo I si $\alpha > (1-\beta)$, o para los de tipo II si $\alpha < (1-\beta)$). Para que no existan desviaciones redituables por parte de los agentes, la diferencia entre el tamaño de los grupos no debe rebasar la unidad ya que si esto se da podría existir una desviación en bloque para algún grupo en la cual se acercaran más al nivel máximo de utilidad. $\blacksquare$

Referencias:

Francis Bloch; Sayantan Ghosal, "Stable Structures in Bilateral Oligopolies". *Journal of Economic Theory*, 74, pp. 368-364. 1997.

Lloyd Shapley; Martin Shubik, "Quasi-Cores in a Monetary Economy with Nonconvex Preferences". *Econometrica*, Vol. 34, No. 4. pp. 805-827. 1966.

Lloyd Shapley; Martin Shubik, "Trade Using One Commodity as a Means of Payment". *The Journal of Political Economy*, Vol. 85, No. 5. pp. 937-968. 1977.

Suzanne Scotchmer, "Local Public Goods and Clubs". *Handbook of Public Economics*, Vol IV. Ch. 29, pp. 1997-2042. Amsterdam: North-Holland Press. 2002.