EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESIÓN POR PARTE DE PARES

IVONNE VITE TISCAREÑO

PROMOCIÓN 2007-2009

ASESOR:

DR. DAVID CANTALA

DICIEMBRE 2009

Agradecimientos

Antes que nada quiero comenzar por agradecer a mi familia, en especial a mis padres, quienes me han apoyado a largo de mi vida y me han enseñado cómo vivirla. También quiero agradecer a mi hermano, quien siempre ha sido un ejemplo a seguir para mí.

Agradezco al Centro de Estudios Económicos y a todos mis profesores del Colegio de México por haber contribuido a mi formación y en especial al Dr. David Cantala, quien me guió a largo de esta investigación y gracias a sus observaciones fue posible desarrollarla con mayor claridad.

A todos mis compañeros y amigos. En especial a Pablo Sánchez por haber recorrido este camino a mi lado y siempre haberme enseñado algo nuevo.

Resumen

El presente trabajo se propone estudiar el efecto que tienen las presiones activas sobre las decisiones estratégicas de los individuos. Se parte del supuesto de que los individuos reciben una serie de influencias para tomar decisiones en su vida cotidiana. Tales influencias se han denominado como "presión", y la "presión activa" como la influencia que se ejerce de forma intencional.

Calvó-Armengol y Jackson (2008) desarrollaron un juego de dos etapas: en la primera, los jugadores deciden cuánta presión activa ejercen sobre los demás; en la segunda, deciden si participan o no en una actividad. Asimismo, plantean dos tipos de presión activa: la positiva y la negativa. En la positiva, el agente que presiona subsidia la actividad al agente presionado; en la negativa, el agente que presiona aumenta los costos del agente presionado por no realizar la actividad. Los principales resultados del trabajo de estos autores son que el equilibrio con presión positiva domina al equilibrio del juego sin presión y al equilibrio del juego con presión negativa. Por consiguiente, en el modelo planteado por Calvó-Armengol y Jackson no existe motivación teórica para que los individuos ejerzan presión negativa.

Este trabajo desarrolla dos modelos alternos con supuestos menos restrictivos. El primer modelo supone que los individuos tienen gustos heterogéneos, en lugar de homogéneos. Este supuesto permite considerar que los individuos no sólo tienen costos diferentes por participar en cierta actividad, sino también que obtienen diferentes beneficios, reflejando las distintas preferencias que existen en una sociedad. El segundo modelo supone que los individuos pueden elegir entre participar en la actividad *a*, en la *b* o no participar, en lugar de solo tener dos opciones, la de elegir entre participar o no participar. Con este supuesto, el modelo no sólo analiza las decisiones dicotómicas, sino también la elección de una actividad por parte de los individuos. Por ejemplo, se analiza si un individuo trabaja o no y qué tipo de trabajo escoge.

El principal resultado de este trabajo es que ambos modelos sustentan que el equilibrio del juego con presión positiva domina débilmente al equilibrio del juego sin presión y al equilibrio del juego con presión negativa, lo cual es consistente con el resultado del trabajo de Calvó-Armengol y Jackson (2008).

Índice

Presión por parte de pares

1. Introducción

Cuando los individuos toman decisiones en su vida diaria son influenciados por las personas que los rodean y en general por el contexto social en que desenvuelven. Para efectos de este trabajo este tipo de influencia será denominada como "presión", que a su vez puede ser activa o pasiva. La presión pasiva es la influencia que ejercen los otros sin tener intención de hacerlo, por ejemplo, cuando una persona está triste y decide salir con sus amigos, el ánimo de los que la rodean puede alterar el suyo positivamente. En cambio, la presión activa es la influencia que ejercen las demás personas de forma intencional y tiene un costo para quien ejerce dicha presión. Por ejemplo, cuando alguien quiere ir con su amigo al cine, pero éste no tiene dinero, una presión activa sería que la persona que quiere ir al cine le invite la entrada a su amigo. La mayoría de los estudios sobre este tema se ha enfocado en analizar las presiones pasivas, conocidas como externalidades, sin que se haya profundizado lo suficiente en las presiones activas.

Kandel y Lazear (1992) es uno de los autores que analiza la presión activa y examina los problemas relacionados con las agencias, centrándose en las mejoras del comportamiento entre individuos que observan sus acciones debido a las presiones psicológicas que pueden existir a causa de la culpa o la timidez. Otro tipo de trabajos analiza la influencia en las acciones de los individuos debido al ofrecimiento de un pago para que realicen una determinada acción. Al respecto, encontramos el trabajo de Prat y Rustichini (2004), quienes examinan los problemas de las agencias a causa del ofrecimiento de este tipo de transferencias; así como el trabajo de Jackson y Wilkie (2005), quienes realizan una investigación sobre estos problemas, con un enfoque más general de teoría de juegos y el trabajo de Calvó-Armengol y Jackson (2008), quienes se cuestionan si en un juego con presión activa se puede tener a un equilibrio Pareto superior comparado con el equilibrio del juego sin presión, suponiendo juegos de complementos estratégicos.

Además la investigación de Calvó-Armengol y Jackson (2008) explora dos tipos de presiones activas, la presión positiva y la presión negativa. La presión positiva se realiza cuando el costo de la acción es subsidiado por la persona que tiene la intención de que la acción sea realizada, como el caso de quien invita a su amigo al cine porque él quiere ir. En cambio la presión negativa se ejerce cuando el individuo que presiona aumenta los costos de la persona presionada por no tomar una acción determinada, por ejemplo, Hernán Cortés quemó los barcos con los que vinieron de España para presionar a sus tropas a que pelearan a muerte, ya que no había manera de regresar (Reynolds, 1959).

Los principales resultados del trabajo de Calvó-Armengol y Jackson (2008) son que el equilibrio del juego con presión positiva es Pareto débilmente superior al equilibrio del juego sin presión. Por otra parte, el equilibrio del juego con presión negativa no puede ser comparado con el equilibrio del juego sin presión debido a que algunos individuos están débilmente mejor que en el juego sin presión, pero otros están débilmente peor que en el juego sin presión. Por último, comparando el equilibrio del juego de presión negativa con el que carece de presión, los individuos presionados están débilmente peor. Los individuos que deciden no participar están igual y los individuos que participan y no son presionados están débilmente mejor. De estos resultados se deriva que el equilibrio del juego de presión positiva es Pareto débilmente superior al equilibrio del juego con presión negativa.

Debido a este último resultado, parece no existir motivación teórica para que los individuos ejerzan presión negativa, ya que su equilibrio no es eficiente debido a que está dominado débilmente por el equilibrio de presión positiva, por lo que es posible cuestionarnos si modificando algunos de los supuestos originales del trabajo de Calvó-Armengol y Jackson (2008) se llega a un resultado diferente, donde exista alguna motivación para utilizar la presión negativa. Algunos de los modelos interesantes a estudiar sería cuando los individuos tienen gustos heterogéneos, en lugar de tener gustos homogéneos, como se plantea en el trabajo original. Esta modificación permitiría a los individuos no solo tener diferentes costos por participar en una cierta actividad, sino también tener diferentes beneficios, reflejando las distintas preferencias que existen en una sociedad. Por ejemplo, en el modelo con gustos homogéneos si la actividad es dejar de fumar, esto supone que todos los individuos obtienen el mismo beneficio por dejar de hacerlo, ya que recobran la salud o la condición física, pero lo único que cambia es el costo de dejar de fumar, ya que algunos individuos tienen mayor adicción al tabaco que otros. En cambio cuando se suponen gustos heterogéneos se refleja que el beneficio de dejar de fumar es distinto para alguien que tiene enfisema pulmonar que para un deportista, además de seguir suponiendo costos diferentes.

Otro posible modelo sería ver qué pasa cuando en lugar de tener dos acciones disponibles se tienen tres acciones disponibles y los individuos no sólo deciden si participan o no en la actividad, sino en qué tipo de actividad pueden participar. Este modelo no sólo analiza las decisiones dicotómicas, sino también la elección de una actividad por parte de los individuos. Por ejemplo, ya no solo se analiza si un individuo trabaja o no, sino qué tipo de trabajo escoge.

Un tercer modelo puede suponer que la función de beneficios de participar en la actividad sea cóncava, donde a pesar de seguir considerando que se trata de un juego de complementos estratégicos, en el que los beneficios aumentan entre más personas participen. En este caso el beneficio marginal de un individuo es decreciente al número de personas que participen en la actividad y existe menos motivación para presionar a los individuos que tiene como estrategia dominante no participar, modelando lo que ocurre en las actividades grupales, donde los recursos son limitados. Por ejemplo cuando se juega football, quienes participan tienen mayor beneficio que se junten las suficientes personas para que se formen los equipos, pero después de que se completan las veintidós personas, el beneficio que da que participe una persona más va disminuyendo debido a que no tienen espacio para poder correr en la cancha, por lo que se empiezan a estorbar unos a otros.

Siguiendo el trabajo de Calvó-Armengol y Jackson (2008) analizo dos modelos distintos, en el primer supongo gustos heterogéneos y en el segundo supongo tres acciones disponibles.

Los principales resultados del modelo de gustos heterogéneos son los mismos que el de gustos homogéneos. Esto es que el equilibrio del juego con presión positiva domina débilmente al equilibrio del juego sin presión, por lo que utilizar presión positiva lleva a los individuos a tener un equilibrio donde todos están mejor débilmente comprados a como estarían sin presiones. Por otra parte, el equilibrio del juego con presión negativa no puede ser comparado con el equilibrio del juego sin presión debido a que algunos individuos están débilmente mejor que en el juego sin presión, pero otros están débilmente peor, por lo que utilizar presión negativa no garantiza llegar a un equilibrio donde todos estén mejor o igual a como estarían sin presión. Por último, comparando el equilibrio del juego con presión positiva con el equilibrio del juego con presión negativa se obtiene que el primero domina débilmente al segundo, lo que implica que el haber cambiado el supuesto de que las personas tienen diferentes beneficios por participar en una actividad no cambia el hecho de que el equilibrio con presión negativa sea ineficiente y en este modelo siga sin haber motivación para utilizar la presión negativa.

La principal diferencia que encontré entre el modelo de gustos heterogéneos y gustos homogéneos fue que en el primero se puede particionar a los individuos a través de sus costos por participar, en cambio en el segundo se necesita utilizar la diferencia de los beneficios y costos de participar para poder particionar a los individuos, utilizando desigualdades en lugar de intervalos numéricos.

En el modelo de tres acciones disponibles, para poder demostrar la existencia del equilibrio perfecto en subjuegos en el juego con presión positiva o negativa fue necesario establecer la condición de que los agentes que participan en una actividad solamente pueden presionar a los demás a que participen en esa misma actividad. La condición anterior siempre se cumple en el equilibrio, ya que como es un juego de complementos estratégicos, los individuos solamente tienen un aumento en sus beneficios cuando hay más individuos participando en su misma actividad, por lo que no presionaría a los demás para que realizaran una actividad distinta a la suya. Sin embargo, se pone esta condición ya que para poder asegurar el equilibrio es necesario que la función de utilidad sea monótona ante cualquier cambio del vector de presión aún fuera del equilibrio.

Uno de los principales resultados del modelo con tres acciones disponibles es que en el equilibrio todos los agentes que participan lo hacen en la misma actividad. Esto como resultado de suponer beneficios simétricos para todos los individuos e iguales para las dos actividades disponibles, además de suponer los mismos costos para las dos acciones disponibles. Debido a este resultado en el equilibrio no es relevante la existencia de más de una actividad, ya que todos participan en la misma, dependiendo en que actividad se pongan a todos los individuos en la primera etapa del algoritmo utilizado para encontrar el equilibrio en subjuego con estrategias puras.

Por este último resultado se explica que en el modelo con tres acciones disponibles se hayan obtenido los mismos resultados generales que se obtuvieron en el trabajo original, donde el equilibrio del juego con presión positiva domina débilmente al equilibrio del juego sin presión. El equilibrio del juego con presión negativa, no puede ser comparado con el equilibrio del juego sin presión debido a que algunos individuos están débilmente mejor que en el juego sin presión, sin embargo, otros están débilmente peor que en el juego sin presión y comparando el equilibrio del juego con presión positiva con el de presión negativa se obtiene que el primero domina débilmente al segundo, por lo tanto, el suponer tres acciones disponibles con beneficios simétricos para todos los individuos e iguales para las dos actividades disponibles, además de costos iguales para las dos acciones disponibles no cambia que el equilibrio con presión negativa sea ineficiente y siga sin haber motivación teórica para utilizarla.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la segunda parte se desarrolla el modelo con gustos heterogéneos y se demuestran los resultados sobre las características que tienen los equilibrios tanto con presión positiva, como con presión negativa. En la tercera parte se desarrolla el modelo con tres acciones disponibles y se demuestran los resultados acerca de las características que tienen los equilibrios tanto con presión positiva, como con presión negativa. Finalmente en la cuarta parte se encuentran las conclusiones donde se plantean los posibles modelos de estudio distintos a los presentados en este trabajo.

2. Modelo con gustos heterogéneos

N es el conjunto de individuos, donde $|N| \geq 2$

Juego de dos etapas

En la primera etapa cada jugador i decide simultáneamente cuánta presión va a ejercer sobre los demás $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}) \in [0,M]^n$ y debido a que ejercer presión sobre los demás implica un costo para el agente que presiona, p_i es un costo para el agente i.

Existen dos juegos donde en la primera etapa los individuos escogen simultáneamente cuánta presión van a ejercer sobre los demás, en uno de los juegos los individuos ejercen presión positiva y en el otro ejercen presión negativa.

La presión positiva se realiza cuando el individuo que presiona baja los costos de quien es presionado para tomar una acción determinada, es decir, que subsidia el costo de la acción de la persona presionada.

La presión negativa se realiza cuando el individuo que presiona aumenta los costos de la persona presionada, por no tomar una acción determinada.

En la segunda etapa cada jugador decide si participar o no, es decir, cada jugador i elige la acción $x_i \in \{0,1\}$ de forma simultánea.

El pago de cada individuo i de la segunda etapa es:

$$v_i(x_i, x_{-i}) - c_i x_i \tag{1}$$

Donde dejamos que el beneficio v_i sea distinto para cada individuo i, que depende de su acción y de la de los demás; también establecimos que el costo de participar c_i sea distinto para cada individuo. El beneficio individual depende de x_{-i} solo en la forma $\sum_{j \neq i} x_j$, por lo que $v_i(x_i, x_{-i}) = v_i(x_i, \sum_{-i} x_{-i})$

Además suponemos que es un juego de complementos estratégicos, por lo que $v_i(1, x_{-i}) - v_i(0, x_{-i})$ es no decreciente en x_{-i}

Otro supuesto es que se trata de un juego de participación, lo que implica que $v_i(0, x_{-i})$ es independiente de x_{-i}

El pago total del juego para el individuo i, si la presión es positiva:

$$v_i(x_i, x_{-i}) - (c_i - \sum_j p_{ji})\, x_i - \sum_j p_{ij} \tag{2}$$

El pago total del juego para el individuo i, si la presión es negativa:

$$v_i(x_i, x_{-i}) - c_i x_i - (\sum_j p_{ji})\,(1 - x_i) - \sum_j p_{ij} \tag{3}$$

La estrategia mixta para el individuo i es (ϕ_i, σ_i), donde $\phi_i \in \Delta$ ($[0,M]^n$) y $\sigma_i(p)$, que es función del vector de presión p, σ_i: $[0,M]^{n^2} \rightarrow [0,1]$.

Sea $u_i(\sigma,p)$ la utilidad esperada para el jugador i en el subjuego siguiente a un vector de presión p cuando los individuos están siguiendo el vector de probabilidad σ en la segunda etapa del juego.

Sea $U_i(\phi,\sigma)$ la utilidad esperada del jugador i cuando se está jugando el perfil de estrategias (ϕ,σ), donde $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n)$ jugado en la primera etapa y $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ jugado en la segunda etapa .

En la solución del juego solamente se toman en cuenta los equilibrios Pareto perfectos, que se definen así.

Sea PE^0 el conjunto de todos los equilibrios perfectos en subjuego. Sea PE^1 un subconjunto de PE^0 tal que un equilibrio $(\phi,\sigma) \in PE^0$ está en PE^1 si no existe una presión p y otro equilibrio $(\phi', \sigma') \in PE^0$ tal que $u_i(\sigma',p) \geq u_i(\sigma,p)$ para todo i con estricta desigualdad para algún i.

Un equilibrio Pareto perfecto es un equilibrio $(\phi,\sigma) \in PE^1$ tal que no hay equilibrio $(\phi', \sigma') \in PE^1$ que $U_i(\phi', \sigma') \geq U_i(\phi,\sigma)$ para toda i con estricta desigualdad para algún i.

Para cualquier nivel dado de p escogido en la primera etapa, existe una estrategia pura "equilibrio maximal" $\bar{x}(p)$, tal que si $\sigma_i(p) > 0$ para cualquier equilibrio en el subjuego, entonces $\bar{x}(p)$=1. Por lo que, un equilibrio maximal es aquel que en las acciones de todos los individuos en la segunda etapa del juego son tan grandes como en cualquier otro equilibrio en este subjuego y dado que estamos trabajando con juegos de complemento estratégico, el equilibrio maximal es Pareto no dominado por algún otro equilibrio en este subjuego.

Debido a la Proposición 1 de Calvó-Armengol y Jackson (2008) sabemos que existe un equilibrio perfecto en subjuegos el cual es Pareto perfecto y equilibrio maximal con estrategias puras en el subjuego.

Proposición 1

Si v_i es creciente en el vector x_{-i} para cada i, entonces todos los equilibrios Pareto perfectos son equilibrios maximales, esto es válido tanto para juegos con presión positiva como negativa.

Demostración de la Proposición 1

De la definición de equilibrio Pareto perfecto sabemos que PE^1 es subconjunto de PE^0, donde PE^0 es el conjunto de todos los equilibrios perfectos en el subjuego. Un equilibrio $(\phi,\sigma) \in PE$

^{0} está también en PE^1 si no existe una presión p y otro equilibrio (ϕ′, σ′) ϵ PE^0 tal que $u_i(\sigma', p) \geq u_i(\sigma, p)$ para todo con estricta desigualdad para algún i, donde $u_i = v_i(x_i, x_{-i}) - c_i x_i$, dado que v_i es creciente en x_{-i}, entonces (ϕ,σ) ϵ PE^1 si para todo i, $\sigma_i > 0$, entonces $x_i = 1$ y $x \geq x'$, donde para todo (ϕ′, σ′) ϵ PE^0 cumpliendo que para todo i, $u_i(\sigma, p) \geq u_i(\sigma', p)$ para todo (ϕ′, σ′) ϵ PE^0. Pero si para todo i, $\sigma_i > 0$, entonces $x_i = 1$ y $x \geq x'$, donde para todo (ϕ′, σ′) ϵ PE^0, entonces por definición x es equilibrio maximal.

Proposición 2

I) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras en un juego de complementos estratégicos, si un individuo i es presionado (por lo que $\sum_j p_{ji} > 0$), entonces en la segunda etapa del juego el individuo i toma la acción de participar (x_i =1) y es indiferente entre hacerlo o no, esto es válido tanto para juegos con presión positiva como negativa.

II) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras, si es un juego de participación, entonces el individuo i que ejerce presión escoge participar (es decir, si $p_{ij} > 0$ para algún j, implica x_i =1) y el individuo j quien es presionado no ejerce presión alguna (es decir, si $p_{ij} > 0$ para algún j, implica $\sum_i p_{ji}$=0), esto es válido tanto para juegos con presión positiva como negativa.

III) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras, si es un juego de participación con presión positiva, entonces los individuos que tengan un costo de participar menor al beneficio de participar, escogerán siempre participar y si el costo de hacerlo es mayor que el beneficio de no hacerlo, entonces estos individuos no participaran o serán presionados.

Demostración de la Proposición 2

I) Supongamos que el individuo i que es presionado no es indiferente, entonces algún individuo j con $p_{ji} > 0$, tendría una desviación redituable si disminuyera la presión que ejerce a j, sin modificar que en la segunda etapa se alcance el equilibrio maximal, lo que contradice que es un equilibrio Pareto perfecto. Además, como el individuo presionado es indiferente, entonces participa, ya que si decidiera no participar, debido a que estamos en un equilibrio Pareto perfecto, esto implicaría que la decisión del individuo presionado no afecta la utilidad del individuo que presiona, pero un juego de complementos estratégicos por definición la decisión de participación de los demás afecta el beneficio los individuos de forma no decreciente (es decir, $v_i(1,x_{-i}) - v_i(0,x_{-i})$ es no decreciente en x_{-i} para todo i), por lo que cuando aumenta el beneficio sería un equilibrio Pareto dominado, lo que contradice que estamos en un equilibrio Pareto perfecto y en el caso en que fuera indiferente, el individuo que presiona tendría incentivo a desviarse y no presionar, para maximizar su beneficio, lo que contradice que sea un equilibrio.

II) En un juego de participación, por definición, el beneficio del individuo i que decide no participar en la segunda etapa no es afectado por las acciones de los otros, por lo que i maximiza su pago cuando no ejerce presión a nadie más (es decir, que en un equilibrio si x_i= 0 ⇒ p_{ij}= 0 para toda j), por lo tanto si el individuo i ejerce presión a algún individuo, esto implica que i participará (es decir, $\neg p_{ij}$= 0 ⇒ x_i= 1). Para demostrar que quien es presionado no ejerce ninguna presión, por (I) sabemos que los individuos presionados son indiferentes entre participar y no participar, si el individuo i es presionado, supongamos por contradicción que ejerce presión (es decir, p_{ij}> 0 para algún j), teniendo como pago $v_i(0,x_{-i}(p))$ - $\sum_j p_{ij}$, teniendo una desviación redituable si $\sum_j p_{ij}$= 0, obteniendo de pago $v_i(0,x_{-i}(p))$, contradiciendo la definición de equilibrio.

III) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en un juego de participación con presión positiva, donde m=$\sum_i x_i$. Los individuos que cumplen la siguiente desigualdad

$$c_i \leq v_i(1,\text{m-1}) - v_i(0,\text{m-1}) \tag{4}$$

Entonces su mejor respuesta es x_i=1, ya que $v_i(0,\text{m-1}) \leq v_i(1,\text{m-1}) - c_i$. Además sabemos que los individuos que cumplen (4) no van a ser presionados, pues si así fuera van a preferir estrictamente participar, lo que contradice proposición 2.I. Por lo tanto, para toda i que cumpla con (4) va a elegir participar y no será presionado.

Los individuos que ejercen presión cumplen con (4). Para demostrarlo, por contradicción, suponemos que exista un j que ejerce presión y no cumple con (4), es decir que p_{ji}> 0 para algún i y además

$$c_j > v_j(1,\text{m-1}) - v_j(0,\text{m-1}) \tag{5}$$

Pero si j cumple (5), tendría como desviación redituable no participar, dado que $v_j(0,\text{m-1}) > v_j(1,\text{m-1}) - c_j$ y por proposición 2.II sabemos que en un equilibrio si x_j= 0 ⇒ p_{ji}= 0 para toda j, por lo que los individuos que ejercen presión cumplen (4).

Por otra parte, los individuos que cumplen con (5), debido a que es un juego de complementos estratégicos, sabemos que:

$$v_j(1,\text{m}) - v_j(0,\text{m}) \geq v_j(1,\text{m-1}) - v_j(0,\text{m-1}) \tag{6}$$

Tenemos dos posibles casos:

i. Si $v_j(1,\text{m}) - v_j(0,\text{m}) \geq c_j$, entonces j participará y por proposición 2.I sabemos que no será presionado.

ii. Si $v_j(1,\text{m}) - v_j(0,\text{m}) < c_j$, entonces j toma como acción no participar o j es presionado.

Demostración Proposición 2.III.ii

Supongamos que i cumple (4) entonces,

$$v_i(1,\text{m-1}) - v_i(0,\text{m-1}) - c_i \geq 0 \tag{7}$$

Y dado que es un juego de complementos estratégicos, esto implica que

$$0 \leq v_i(1,m-1)-v_i(0,m-1)-c_i \leq v_i(1,m)-v_i(0,m)-c_i \quad (8)$$

Se pueden dar dos sub-casos

a) Primer caso, si existe individuos i's que cumpla (4), donde j cumple (2), tal que

$$\sum_i[v_i(1,m)-v_i(0,m)-c_i-(v_i(1,m-1)-v_i(0,m-1)-c_i)] \geq c_j - v_j(1,m) - v_j(0,m) \quad (9)$$

Entonces j será presionado por los individuos i's y sabemos por la proposición 2.I que j participará (x_j=1).

Demostración Proposición 2.III.ii.a

Si los individuos i's no presionan a j obtienen como pago $\sum_i[v_i(1,m-1)-v_i(0,m-1)-c_i]$, por lo que les conviene desviarse y presionar $\sum_i p_{ij}= c_j - v_j(1,m)- v_j(0,m)$ y obtener como pago $\sum_i[v_i(1,m)-v_i(0,m)-c_i-p_{ij}]$ y debido a que sabemos que se cumple (9), se tiene la siguiente desigualdad:

$\sum_i[v_i(1,m)-v_i(0,m)-c_i-p_{ij}] \geq \sum_i[v_i(1,m-1)-v_i(0,m-1)-c_i]$

b) Segundo caso, si no existen i's tales que (9) se cumpla, entonces j no será presionado y x_j=0.

Demostración de 2.III.ii.b

Si i's ejercen presión y no cumplen (9).

Los individuos i's tendrían como desviación redituable no ejercer presión, es decir $\sum_i p_{ij}$= 0 y obtener $\sum_i(v_i(1,m-1)-v_i(0,m-1)- c_i)$, ya que:

$\sum_i[v_i(1,m)-v_i(0,m)-c_i-(c_j - v_j(1,m) - v_j(0,m))] < \sum_i(v_i(1,m-1)-v_i(0,m-1)- c_i)$

Proposición 3

I) Bajo presión positiva, un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras nos lleva a un pago débilmente mayor para todos los individuos comparado con el equilibrio del juego sin presión. Es decir, el equilibrio Pareto perfecto domina débilmente el equilibrio del juego sin presión.

II) Bajo presión negativa, hay ejemplos de equilibrios Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras donde algunos individuos están mejor y otros peor comparados con el juego sin presión. Es por eso que la suma de las utilidades de los individuos algunas veces son mayores y otras menores que la suma en el juego sin presión. Por lo tanto el equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras en el juego con presión negativa no puede ser comparado con el equilibrio maximal del juego sin presión.

III) En un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras de un juego de participación con presión negativa, comparado con el equilibrio maximal en el juego sin presión:

- Los individuos presionados están peor
- Los individuos que deciden no participar son indiferentes
- Los individuos que no son presionados y deciden participar están mejor débilmente.

Demostración de la Proposición 3

I) Considerando un equilibrio maximal de un juego de complementos estratégicos con presión positiva. Sea x el equilibrio maximal en el juego sin presión. Nota $v_i(x)$-$c_i x_i$ es mayor en x comparado con cualquier otro equilibrio en el juego sin presión, dado que es un juego de complementos estratégicos, por lo que v_i es no decreciente en x_{-i}.
Considerando cualquier subjuego después del vector de presión p' en el juego con presión, si $x(p')$ es el equilibrio maximal, dado que ahora los costos por participar son $c_i - \sum_j p'_{ji}$ para cada i y $x(p')$ el equilibrio máximo bajo p', entonces $x(p') \geq x$.

Por definición, un equilibrio cumple con lo siguiente:

$$v_i\big(x(p)\big) - (c_i - \textstyle\sum_j p_{ji})x_i(p) - \sum_j p_{ij} \geq v_i\big(x(0,p_{-i})\big) - (c_i - \sum_j p_{ji})x_i(0,p_{-i}) \quad (10)$$

Por ser un juego de complementos estratégicos tenemos:

$$v_i\big(x(0,p_{-i})\big) - (c_i - \textstyle\sum_j p_{ji})x_i(0,p_{-i}) \;\geq\; v_i(x) - (c_i - \sum_j p_{ji})x_i \quad (11)$$

Finalmente

$$v_i(x) - (c_i - \textstyle\sum_j p_{ji})x_i \;\geq\; v_i(x) - c_i x_i \quad (12)$$

Por lo tanto el pago del equilibrio Pareto perfecto es mejor débilmente que el pago máximo del equilibrio del juego sin presión.

II) Ejemplo
Si tenemos un juego con n=2, y las siguientes utilidades $v_1(1,0)=2$, $v_2(1,0)=1$, $v_1(1,1)=3$, $v_2(1,1)=2$, $v_{1,2}(0,\bullet)=0$, y los siguientes costos $c_1=0$, $2<c_2\leq 3$

El único equilibrio sin presión es x=(1,0) , donde los pagos son U=(2,0), por lo que $\sum_i u_i = 2$

Con presión negativa, el equilibrio Pareto perfecto es x=(1,1) y p=(c_2-2, 0), donde los pagos son U=(3-(c_2-2), 2-c_2), por lo que $\sum_i u_i = 7 - 2c_2$

Si c_2=2.3 ⇒ U=(2.7, -0.3) ⇒ $\sum_i u_i = 2.4$

Si c_2=3 $\Rightarrow$ U=(2, -1) $\Rightarrow$ $\sum_i u_i = 1$

III) De la proposición 2 sabemos que en un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal con estrategias puras, un individuo que es presionado participa y debe ser indiferente entre participar y no participar. Así que el pago del individuo por no participar en el juego con presión negativa es menor que en el juego sin presión, dado que es un juego de participación, por lo que el beneficio de no participar es independiente de la acción de los demás y es presionado, es decir, aumenta el costo por no participar, por lo que el individuo debe tener un pago menor.

El individuo que presiona debe estar mejor débilmente, ya que, por la proposición 2 sabemos que quien presiona es porque participa.

Por definición, el pago para un individuo que presiona en un equilibrio Pareto perfecto cumple que:

$$v_i\big(x(p)\big) - c_i x_i(p) - \textstyle\sum_j p_{ij} \geq v_i\big(x(0, p_{-i})\big) - c_i x_i(0, p_{-i}) \qquad (13)$$

Por ser un juego de complementos estratégicos tenemos:

$$v_i\big(x(0, p_{-i})\big) - c_i x_i(0, p_{-i}) \;\geq\; v_i(x) - c_i x_i \qquad (14)$$

Ya que $x(p) \geq x$, dado que por la proposición 2 sabemos que los participantes en el juegos sin presión, siguen participando y porque los individuos presionados van a participar.

Los individuos que deciden no participar en un equilibrio Pareto perfecto y/o maximal, por la proposición 2, son indiferentes con el equilibrio sin presión, ya que en ambos juegos deciden no participar y al estar en un juego de participación, su utilidad es independiente de las acciones de los demás.

Corolario 1

El equilibrio Pareto perfecto y/o equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión positiva domina débilmente al equilibrio Pareto perfecto y/o equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión negativa.

Por lo tanto, la modificación del modelo original mantiene el resultado del trabajo original de Calvó-Armengol y Jackson (2008), donde el equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión positiva domina débilmente al equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión negativa.

El único resultado distinto con este modelo de gustos heterogéneos comparado con el modelo de gustos homogéneos es en la proposición 2.III, donde en el modelo de gustos homogéneos se pueden obtener intervalos de costos, donde si los costos de participar de los agentes están por debajo de C_1 entonces siempre participan, si se encuentran entre C_1 y C_2 entonces los agentes son presionados y participan y si están por debajo de C_2 los agentes no son presionados y no participan. Debido a que en el modelo de gustos heterogéneos la diferencia de la utilidad entre los individuos no solo se debe a la diferencia de costos, como en el modelo de gustos homogéneos, sino también a la diferencia en los beneficios, entonces en este modelo no se pueden comparar a los individuos solamente tomando en cuenta sus costos, sino que se tiene que tomar en cuenta la diferencia entre los beneficios de participar y sus costos, por esta razón es que la proposición 2.III en este modelo de gustos heterogéneos en lugar de utilizar rangos utilice desigualdades para caracterizar a los individuos que participan, los que son presionados y los que no participan.

3. Modelo con dos actividades y gustos homogéneos

N es el conjunto de individuos, donde $|N| \geq 2$

Juego de dos etapas

En la primera etapa cada jugador decide cuánta presión va a ejercer sobre los demás para que realicen la actividad a y cuánta para que realicen la actividad b, entonces $\boldsymbol{p}=(p^a, p^b)$, donde el individuo i elije $p_i^a = (p_{i1,\dots,}^a p_{in}^a) \in [0,M]^n$, $p_i^b = (p_{i1,\dots,}^b p_{in}^b) \in [0,L]^n$, donde debido a que ejercer presión implica un costo para el agente que lo hace, $\mathbf{p}_i$ es un costo para el agente i.

Existen dos juegos donde en la primera etapa los individuos escogen simultáneamente cuánta presión van a ejercer sobre los demás, en uno de los juegos ejercen presión positiva y en el otro ejercen presión negativa.

La presión positiva se realiza cuando quien presiona baja los costos de quien es presionado para tomar una acción determinada, es decir, que subsidia el costo de la acción a la persona presionada.

La presión negativa se realiza cuando el individuo que presiona aumenta los costos de quien es presionado, por no tomar una acción determinada.

En la segunda etapa cada jugador decide si no participa, si participa en la actividad a o en la actividad b. Cada jugador i elige de forma simultánea la acción $x_i \in \{x_i^o, x_i^a, x_i^b\}$, donde x_i^o quiere decir que no participa, x_i^a que participa en la actividad a, x_i^b que participa en actividad b y el valor que toman en las funciones es x_i^o=0, x_i^a=1 y x_i^b=1.

El pago de cada individuo i de esta segunda etapa es:

$$v_i(x_i, x_{-i}) - c_i x_i$$

Estamos dejando que el costo c_i sea distinto para cada individuo, donde el costo del individuo i solo depende de si decide participar en alguna actividad, es decir que el costo es igual por hacer la actividad a o la actividad b.

Suponemos un juego de participación, en el que $v_i(0, x_{-i})$ es independiente de x_{-i}.

Además suponemos que el beneficio del individuo i que elige participar en una actividad, dependerá de lo que hagan los demás, en medida de cuantos individuos más escojan la misma actividad, es decir, si $x_i = x_i^a \Rightarrow v_i(x_i^a, x_{-i}) = v_i(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a)$, análogamente si $x_i = x_i^b \Rightarrow v_i(x_i^b, \sum_{j\neq i} x_j^b)$.

También se supone que el beneficio de participar en la actividad a es igual al beneficio de participar en la actividad b, por lo que cuando hay el mismo número de individuos participando en la actividad a y participando en la b, obtienen el mismo beneficio. Formalmente esto se puede escribir como si $\sum_{j\neq i} x_j^a = \sum_{j\neq i} x_j^b \Rightarrow v_i(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a) = v_i(x_i^b, \sum_{j\neq i} x_j^b)$.

Por otra parte, también se supone un juego de complementos estratégicos, lo que quiere decir que el beneficio del individuo i cuando elige participar en una actividad, es no decreciente en cuanto a lo que decidan los demás, es decir si $x_i = x_i^k \Rightarrow v_i(x_i^k, x_{-i}) - v_i(x_i^0, x_{-i}) \geq 0$ en x_{-i}, donde $k = \{a,b\}$. Pero debido al supuesto de cómo afectan las decisiones de los demás al individuo i que elige una actividad, entonces el supuesto de complementos estratégicos se puede formular de la siguiente manera $v_i(x_i^k, \sum_{j\neq i} x_j^k) - v_i(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^k) \geq 0$ en $\sum_{j\neq i} x_j^k$.

Además suponemos beneficios simétricos, es decir $v_i(x_i, x_{-i}) = v(x_i, x_{-i})$, donde

$$v(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} v(x_i^0, \cdot), & cuando\ x_i = x_i^0 \\ v(x_i^k, \sum_{j\neq i} x_j^k), & cuando\ x_i = x_i^k, donde\ k = \{a, b\} \end{cases}$$

Por último, suponemos que los participantes en una actividad solamente pueden ejercer presión a los demás agentes para que lo hagan en la misma actividad. Esto será denominado condición de no desperdicio de presión por parte de los agentes que participan en una actividad, es decir si $x_i = x_i^k \Rightarrow \boldsymbol{p}_i = (p_i^k, p_i^{-k})$ donde $p_i^k = (p_{i1,\dots,}^k p_{in}^k)$ y $p_i^{-k} = (0, \dots, 0)$, donde $k = \{a,b\}$.

El pago total del juego para el individuo i, si la presión es positiva:

$$v_i(x_i, x_{-i}) - c_i x_i + \mathrm{I} \sum_j p_{ji}^a\, x_i + (1-\mathrm{I}) \sum_j p_{ji}^b\, x_i - \mathrm{I} \sum_j p_{ij}^a - (1-\mathrm{I}) \sum_j p_{ij}^b \text{, donde } \mathrm{I} = \begin{cases} 0\ si\ x_i \neq x_i^a \\ 1\ si\ x_i = x_i^a \end{cases} \quad (15)$$

El pago total del juego para el individuo i, si la presión es negativa:

$$v_i(x_i, x_{-i}) - c_i x_i - \sum_j p_{ji}^a\, (1-\mathrm{I}\, x_i) - \sum_j p_{ji}^b\, (1-(1-\mathrm{I}) x_i) - \mathrm{I} \sum_j p_{ij}^a - (1-\mathrm{I}) \sum_j p_{ij}^b \text{, donde } \mathrm{I} = \begin{cases} 0\ si\ x_i \neq x_i^a \\ 1\ si\ x_i = x_i^a \end{cases} \quad (16)$$

La estrategia mixta para i es (ϕ_i,(σ_i, δ_i)) donde $\phi_i \in \Delta$ ($\Delta[0,M]^n$) x ($\Delta[0,L]^n$) y $\sigma_i(p^a)$ que es función del vector de presión p^a, σ_i: $[0,M]^{n^2} \rightarrow [0,1]$ y $\delta_i(p^b)$ que es función del vector de presión p^b, δ_i: $[0,L]^{n^2} \rightarrow [0,1]$.

Sea $u_i((\sigma,\delta),\boldsymbol{p})$ la utilidad esperada para el jugador i en el subjuego siguiente a un vector de presión $\boldsymbol{p}$ cuando los individuos están siguiendo el vector de probabilidad (σ,δ) en la segunda etapa del juego.

Sea $U_i(\phi,\sigma)$ la utilidad esperada del jugador i cuando donde $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n)$ jugado en la primera etapa y $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ jugado en la segunda etapa .

Sea $U_i(\phi,(\sigma,\delta))$ la utilidad esperada del jugador i cuando está jugando el perfil de estrategias (ϕ,(σ,δ), donde $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n)$ jugado en la primera etapa y $(\sigma,\delta)=((\sigma_1,\delta_1),\ldots,(\sigma_n,\delta_n))$ jugado en la segunda etapa.

Para resolver el juego, solamente se toman en cuenta los equilibrios Pareto perfectos, los cuales se definen así.

Sea PE^0 el conjunto de todos los equilibrios perfectos en el subjuego. Sea PE^1 un subconjunto de PE^0 tal que un equilibrio $(\phi,(\sigma,\delta)) \in PE^0$ está en PE^1 si no existe una presión $\boldsymbol{p}$ y otro equilibrio $(\phi', (\sigma',\delta')) \in PE^0$ tal que $u_i((\sigma',\delta'),\boldsymbol{p}) \geq u_i((\sigma,\delta),\boldsymbol{p})$ para todo i con estricta desigualdad para algún i.

Un equilibrio Pareto perfecto es un equilibrio $(\phi,(\sigma,\delta)) \in PE^1$ tal que no hay equilibrio (ϕ', $(\sigma',\delta')) \in PE^1$ tal que $U_i(\phi',(\sigma',\delta')) \geq U_i(\phi,(\sigma,\delta))$ para toda i con estricta desigualdad para algún i.

Para cualquier nivel dado de $\boldsymbol{p}$ escogido en la primera etapa, existe una estrategia pura "equilibrio maximal" $\bar{x}(\boldsymbol{p})$, tal que si $\sigma_i(p^a) > 0$ para cualquier equilibrio en el subjuego, entonces $\bar{x}(\boldsymbol{p})$=1, lo que implica que $\delta_i(p^b) = 0$. Análogamente para cualquier nivel dado de $\boldsymbol{p}$ escogido en la primera etapa, existe una estrategia pura "equilibrio maximal" $\bar{x}(\boldsymbol{p})$, tal que si $\delta_i(p^b) > 0$ para cualquier equilibrio en el subjuego, entonces $\bar{x}(\boldsymbol{p})$=1, lo que implica que $\sigma_i(p^a) = 0$. Por lo que un equilibrio maximal es aquel que en las acciones de todos los individuos en la segunda etapa del juego son tan grandes como en cualquier otro equilibrio en este subjuego y dado que estamos trabajando con juegos de complemento estratégico, el equilibrio maximal es Pareto no dominado por algún otro equilibrio en este subjuego.

Proposición 4

Si los agentes que participan en una actividad solamente pueden presionar a los demás agentes a que participen en esa misma actividad, entonces existe un equilibrio Pareto perfecto de todo el juego con presión positiva o negativa y se trata de un equilibrio maximal en estrategias puras en el subjuego, donde todos los agentes que participan en la misma actividad.

Demostración de la Proposición 4

Seguido de cualquier $\boldsymbol{p}$ jugada en la primera etapa existe en la segunda etapa dos equilibrios maximales con estrategias puras, que se pueden encontrar con el siguiente algoritmo. En el primer paso se pone a todos los individuos en la actividad a ó b, es decir x_i=x_i^k, donde k={a,b} para todo i y le llamamos a este perfil de acciones $x^1(\boldsymbol{p})$, por lo que $x^1(\boldsymbol{p})$= (1,…1). Si para alguno de los individuos no participar, x_i=x_i^o, es estrictamente mejor respuesta cuando los demás juegan $x^1(\boldsymbol{p})$, entonces en el segundo paso del algoritmo los individuos cambian a la acción no participar. A este perfil de acciones le llamaremos $x^2(\boldsymbol{p})$. Iteramos este proceso, el cual va a converger en a lo mas n pasos, donde $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ es el último perfil de acciones, por lo que en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ se detiene el algoritmo.

Si k=a, es decir, que en el primer paso del algoritmo todos los individuos juegan la acción de participar en la actividad a, entonces $\sigma^m(\boldsymbol{p})$ es el perfil de acciones con probabilidad uno de la segunda etapa del juego encontrado por medio de este algoritmo en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$, en el cual todos los individuos participan en la actividad a o no. Del mismo modo si k=b, es decir, que en el primer paso del algoritmo todos los individuos juegan la acción de participar en la actividad b, entonces $\delta^l(\boldsymbol{p})$ es el perfil de acciones con probabilidad uno de la segunda etapa del juego encontrado por medio de este algoritmo en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$, en que todos los individuos o participan en la actividad b o no participan.

Demostración que $\sigma^m(\boldsymbol{p})$ es equilibrio del subjuego cuando k=a

En el perfil de acciones resultante del algoritmo $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ los individuos pueden participar en la actividad a o no participar.

Analizando si existe alguna desviación redituable para los individuos que en el perfil de acciones $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ participan en la actividad a, vemos que hay dos posibles desviaciones, ya sea que no participen o que participen en la actividad b.

Para analizar la desviación a no participar, sabemos que el algoritmo primero hace que todos los individuos participen en la actividad a y en los pasos subsecuentes los individuos que prefieren estrictamente no participar dado lo que hacen los demás cambian de acción a no participar, por lo tanto si en el paso g el individuo i tiene $u_i^g(x_i^0, x_{-i}) > u_i^g(x_i^a, x_{-i}) \Rightarrow x_i$=$x_i^0$, por lo tanto los individuos que siguen participando en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ es porque participar en la actividad a es débilmente preferido a no participar en cualquier paso g del algoritmo y esto es debido a que $\neg(x_i$=$x_i^o) \Rightarrow \neg[u_i^g(x_i^o, x_{-i}) > u_i^g(x_i^a, x_{-i})]$, entonces x_i=$x_i^a \Rightarrow u_i^g(x_i^0, x_{-i}) \leq u_i^g(x_i^a, x_{-i})$, por lo tanto en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ los individuos que participan en la actividad a no les conviene desviarse a no participar ya que el algoritmo hace que si x_i=$x_i^a \Rightarrow u_i^g(x_i^0, x_{-i}) \leq u_i^g(x_i^a, x_{-i})$ para todo paso g del algoritmo.

Analizando la desviación a participar en la actividad b, si el individuo que participa en la actividad a se desvía a participar en la actividad b, dado lo que hacen los demás, ya que la función de beneficios de los que participan en alguna actividad depende de lo que hagan los demás, en medida de cuantos individuos más escojan la actividad que el escoge, teniendo la función de beneficios esta forma $v_i(x_i^k, \sum_{j\neq i} x_j^k)$, donde k ={a,b} y dado que el algoritmo en el primer paso hace que todos participen en la actividad a, tenemos dos posibles casos.

Primero que en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ solo el individuo i juega a participar en la actividad a y todos los demás individuos no participan, entonces la utilidad de este individuo es $v_i(x_i^a, 0) - c_i$, pero debido a que si $\sum_{j\neq i} x_j^a = \sum_{j\neq i} x_j^b \Rightarrow v_i(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a) = v_i(x_i^b, \sum_{j\neq i} x_j^b)$, entonces si el individuo i se desviara a participar en la actividad b como $\sum_{j\neq i} x_j^a = \sum_{j\neq i} x_j^b = 0 \Rightarrow v_i(x_i^a, 0) = v_i(x_i^b, 0)$, lo que significa que obtiene el mismo beneficio que si permanece participando en la actividad a y dado que el costos por actividad es el mismo obtendría el mismo pago por lo que no tiene incentivos a desviarse.

Segundo que haya más de un individuo participando en la actividad a en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$, por lo que $\sum_{j\neq i} x_j^a > 0$, mientras que $\sum_{j\neq i} x_j^b = 0$ ya que el resultado del algoritmo $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ en su perfil de acciones los individuos solo o participan en la actividad a o no participan y debido a que es un juego de complementos estratégicos sabemos que $v_i(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a) - v_i(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) \geq v_i(x_i^b, 0) - v_i(x_i^0, 0) \Rightarrow \text{como } v_i(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) = v_i(x_i^0, 0)$ ya que es un juego de participación, tenemos que $v_i(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a) \geq v_i(x_i^b, 0)$, por lo que si los individuos que participan en la actividad a se desvían a participar en la actividad b están débilmente peor, por lo tanto no existe incentivos a desviarse de la actividad a.

Analizando si existe alguna desviación redituable para los individuos que en el perfil de acciones $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ no participan, vemos que hay dos posibles desviaciones, primero que participen en la actividad a o que participen en la actividad b.

Primero que los individuos que no participan en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ se desvíen a participar en la actividad a. Sabemos que como funciona el algoritmo, en el paso g el individuo i prefiere estrictamente no participar, entonces cambia de acción y no participa, esto es si $u_i^g(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) > u_i^g(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a)$ $\Rightarrow x_i = x_i^0$, por lo que si al individuo i en el paso g prefería dejar de participar, en el paso n donde los individuos que participan en la actividad a son menores o iguales y debido a que es un juego de complementos estratégicos, tenemos que la utilidad que obtendría el individuo i en el paso g sería menor o igual a la que obtendría en el paso n, por lo tanto en el paso n debe seguir prefiriendo no participar estrictamente a participar en la actividad a. Formalmente lo anterior lo podemos escribir así, dado que $x^g(\boldsymbol{p}) \geq x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p}) \Rightarrow$ por ser un juego de complementos estratégicos sabemos que $u_i^g(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a) \geq u_i^n(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a)$ y por hipótesis sabemos que en el paso g el individuo i tiene $u_i^g(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) > u_i^g(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a) \Rightarrow u_i^g(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) > u_i^n(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a)$ y debido a que es un juego de participación tenemos que $u_i^g(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) = u_i^n(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) \Rightarrow u_i^n(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a) > u_i^n(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a)$, por lo tanto no hay incentivo a desviarse de no participar.

Segundo que los individuos que no participan en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ se desvíen a participar en la actividad b. Sabemos por el caso anterior que los individuos que no participan en $x^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{p})$ no tienen como desviación redituable cambiarse a participar en la actividad a, ya que para estos individuos se cumple que en el último paso del algoritmo, en el paso n tienen $u_i^n\left(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a\right) >$ $u_i^n(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a)$ y debido a que es un juego de complementos estratégicos tenemos que $u_i^n\left(x_i^a, \sum_{j\neq i} x_j^a\right) \geq u_i^n\left(x_i^b, 0\right)$, ya que en el paso n tenemos que $\sum_{j\neq i} x_j^a \geq 0$, lo que implica que $u_i^n\left(x_i^0, \sum_{j\neq i} x_j^a\right) > u_i^n(x_i^b, 0)$, por lo tanto no es redituable para los individuos que en $x^n(\boldsymbol{p})$ no participan se desvíen a participar en la actividad b.

Una vez demostrado que no existe desviación redituable del perfil de acciones $x^n(\boldsymbol{p})$ resultante del algoritmo cuando k=a, que implica que en el primer paso todos los individuos participan en la actividad a, queda demostrado que $\sigma^m(\boldsymbol{p})$ es equilibrio de Nash en el subjuego.

La demostración para ver que $\delta^l(\boldsymbol{p})$ también es equilibrio de Nash en el subjuego, es análoga a $\sigma^m(\boldsymbol{p})$.

Una vez teniendo el equilibrio del subjuego, si la función de utilidad del subjuego es no decreciente en las acciones que hacen los demás dado una $\boldsymbol{p}$, lo cual se cumple ya que es un juego de complementos estratégicos, entonces $u_i(\sigma^m(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})$ es una función semicontinua por arriba, pero además con la condición de que los agentes que participan en la actividad *k* solo puedan ejercer presión a los demás agentes para que participen en la actividad *k*, se tiene que $\sum_i U_i(\phi, \sigma^m)$ también es semicontinua por arriba (ver proposición 5.1 Reny 1999).

Si se tiene una función de utilidad de todo el juego no decreciente en x_{-i}, lo cual es cierto debido a que es un juego de complementos estratégicos y la función es monótona cuando se le pone la condición de que los agentes que participan en la actividad *k* solo pueden ejercer presión a los demás agentes para que participen en la actividad *k,* se cumple que $U_i(\phi, \sigma^m)$ es pago seguro, entonces por proposición 5.1 Reny 1999 se sabe que existe un equilibrio de Nash que anticipa $\sigma^m(\boldsymbol{p})$ ó $\delta^l(\boldsymbol{p})$ en la segunda etapa, dependiendo del primer paso del algoritmo.

Lo que requiere un pago seguro es que $U_i(\boldsymbol{p}'_i, \phi'_{-i}, \sigma^m) \geq U_i(\boldsymbol{p}_i, \phi_{-i}, \sigma^m) - \varepsilon$ para cualquier vecindario ϕ'_{-i} muy cercano a ϕ_{-i}. Pero esto se cumple ya que si definimos $\boldsymbol{p}_{ij}^{\varepsilon} = \boldsymbol{p}_{ij} + \frac{\varepsilon}{2n}$, entonces $\boldsymbol{p}_{ir}^{\varepsilon} + \sum_j \boldsymbol{p}_{jr} \geq \boldsymbol{p}_{ir} + \sum_j \boldsymbol{p}_{jr} + \frac{\varepsilon}{2n}$, con un $\boldsymbol{p}'_{-i}$ en un vecindario muy cercado a $\boldsymbol{p}_{-i}$, entonces $\boldsymbol{p}_{ir}^{\varepsilon} + \sum_j \boldsymbol{p}'_{jr} \geq \boldsymbol{p}_{ir} + \sum_j \boldsymbol{p}_{jr}$ y por lo tanto $x\left(\boldsymbol{p}_i^{\varepsilon}, \boldsymbol{p}'_{-i}\right) \geq x(\boldsymbol{p})$, y dado que la función de utilidad es no decreciente en x_{-i}, entonces se cumple la condición de pago seguro y por la proposición 5.1 y Corolario 5.2 Reny 1999 se demuestra que existe un equilibrio Perfecto en subjuegos.

Por último, debido a que el conjunto de vector de utilidades correspondiente a equilibrios Pareto eficiente en ambas etapas es cerrado, entonces se puede encontrar un vector de utilidades Pareto no dominado, el cuál es el equilibrio Pareto perfecto.

Proposición 5

I) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras en un juego de complementos estratégicos donde todos los que participan están en la actividad *k*, donde k ={a,b}, si un individuo i es presionado (por lo que $\sum_j p_{ji}^k$ > 0), entonces en la segunda etapa del juego el individuo i toma la acción de participar en la actividad k ($x_i^k = 1$) y es indiferente entre participar en la actividad *k* y no participar, esto es válido tanto para juegos con presión positiva como negativa.

II) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras donde todos los que participan están en la actividad *k*, donde k ={a,b}, en un juego de participación, entonces el individuo i que ejerce presión escoge participar en la actividad *k* (es decir, si p_{ij}^k> 0 para algún j, implica $x_i^k = 1$) y el individuo j quien es presionado no ejerce presión alguna (es decir, si p_{ij}^k > 0 para algún j, implica $\sum_i p_{ji}^k$=0). Esto es válido tanto para juegos con presión positiva como negativa.

III) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras, donde todos los que participan están en la actividad *k*, donde k ={a,b}, si es un juego de participación con presión positiva, entonces los individuos que tengan un costo de participar menor al beneficio de participar en la actividad *k*, escogerán siempre participar en *k* y si el costos de participar es mayor que el beneficio de participar en la actividad *k*, entonces estos individuos no participaran y/o serán presionados.

Demostración de la Proposición 5

I) Supongamos que el individuo i que es presionado no es indiferente, entonces algún individuo j con p_{ji} > 0, tendría una desviación redituable si disminuyera la presión que ejerce a j, sin modificar que en la segunda etapa se alcance el equilibrio maximal, lo que contradice que es un equilibrio Pareto perfecto. Además, como el individuo presionado es indiferente entre participar en la actividad *k* y no participar, entonces decide participar en la actividad *k*, ya que si no decidiera participar, debido a que estamos en un equilibrio Pareto perfecto, esto implicaría que la decisión del individuo presionado no afecta la utilidad del individuo que presiona, pero un juego de complementos estratégicos por definición la decisión de participación en la misma actividad afecta el beneficio de los individuos que participan en la actividad *k* de forma no decreciente (es decir, $v_i(x_i^k, \sum_{j \neq i} x_j^k) - v_i(x_i^0, \sum_{j \neq i} x_j^k) \geq 0$ para todo i), por lo que si no participa en la actividad *k* este sería un equilibrio Pareto dominado, lo que contradice que estamos en un equilibrio Pareto perfecto y en el caso en que lo dejará indiferente, el individuo que presiona tendría incentivo a desviarse y no presionar, para maximizar su beneficio, lo que contradice que sea un equilibrio.

II) Para demostrar que el individuo que es presionado no ejerce ninguna presión, por proposición 5.I sabemos que los individuos presionados son indiferentes entre participar y no participar, si el individuo i es presionado, supongamos por contradicción que ejerce presión (es decir, p_{ij}> 0 para algún j), teniendo como pago $v_i(0,x_{-i}(p))$ - $\sum_j p_{ij}$, teniendo una desviación redituable si $\sum_j p_{ij}$= 0, obteniendo de pago $v_i(0,x_{-i}(p))$, contradiciendo la definición de equilibrio. Esto demuestra que en un juego de participación si el agente i decide no participar, el agente *i* maximiza su pago cuando no ejerce presión a ningún individuo (es decir, que en un equilibrio si $x_i= x_i^0 \Rightarrow p_{ij}^a = 0$ y $p_{ij}^b = 0$ para toda j), lo que implica que si un individuo i ejerce presión a algún individuo *j*, entonces el individuo i participará en alguna actividad (es decir, $\neg p_{ij}= 0 \Rightarrow \neg x_i= x_i^0$), pero además como en este modelo se supone que si un agente i participa en la actividad k solo puede presionar para que los demás agentes participen en la actividad k, entonces el agente i que presiona para que participe en la actividad k, es porque i participa en la actividad k.

III) Considerando un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en un juego de participación con presión positiva, donde $m^k=\sum_i x_i^k$, donde k ={a,b}. Los individuos que cumplen la siguiente desigualdad

$$c_i \leq v_i(x_i^k,m-1)- v_i(0,m-1) \tag{17}$$

Entonces su mejor respuesta es $x_i=x_i^k$, ya que $v_i(0,m-1) \leq v_i(x_i^k,m-1)-c_i$. Además sabemos que los individuos que cumplen (17) no va a ser presionado, ya que si es presionado va a preferir estrictamente participar, lo que contradice proposición 5.I. Por lo tanto, para toda i que cumpla con (17) va a elegir participar en la actividad *k* y no será presionado.

Los individuos que ejercen presión cumplen con (17). Para demostrarlo, por contradicción, suponemos que exista un j que ejerce presión y no cumple con (17), es decir que p_{ji}^k > 0 para algún i y además

$$c_i > v_i(x_i^k,m-1)- v_i(0,m-1) \tag{18}$$

Pero si j cumple (18), tendría como desviación redituable no participar dado que $v_i(0,m-1) > v_i(x_i^k,m-1)- c_i$ y por proposición 5.II sabemos que en un equilibrio si $x_i= x_i^0 \Rightarrow p_{ij}^a = 0$ y $p_{ij}^b = 0$ para toda j, por lo que los individuos que ejercen presión cumplen (17).

Por otra parte, los individuos que cumplen con (18), debido a que es un juego de complementos estratégicos sabemos que:

$$v_j(x_i^k,m)-v_j(0,m) \geq v_j(x_i^k,m-1)-v_j(0,m-1) \tag{19}$$

Tenemos dos posibles casos:

i. Si $v_j(x_i^k,m)-v_j(0,m) \geq c_j$, entonces j participará en la actividad *k* y por proposición 5.I sabemos que no será presionado.

ii. Si $v_j(x_i^k,m)-v_j(0,m) < c_j$, entonces j toma como acción no participar o j es presionado.

Demostración de la Proposición 5.III.ii

Supongamos que i cumple (17) entonces,

$$v_i(x_i^k,\text{m-1})\text{-}v_i(0,\text{m-1})\text{-}\,c_i \geq 0 \tag{20}$$

Y dado que es un juego de complementos estratégicos, esto implica que

$$0 \leq v_i(x_i^k,\text{m-1})\text{-}v_i(0,\text{m-1})\text{-}\,c_i \leq v_i(x_i^k,\text{m})\text{-}v_i(0,\text{m})\text{-}\,c_i \tag{21}$$

Puede haber dos sub-casos:

a) Primer caso, si existe individuos i's que cumpla (a), donde j cumple (2), tal que

$$\sum_i[v_i(x_i^k,m)-v_i(0,m)-c_i-(v_i(x_i^k,m-1)-v_i(0,m-1)-c_i)] \geq c_j-v_j(x_j^k,m)-v_j(0,m) \tag{22}$$

Entonces j será presionado y por proposición 5.I x_j=x_j^k.

Demostración de la Proposición 5.III.ii.a

Si los individuos i's no presionan a j obtienen como pago $\sum_i[v_i(x_i^k,m-1)-v_i(0,m-1)-c_i]$, por lo que les conviene desviarse y presionar $\sum_i p_{ij}^k$= c_j - $v_j(x_j^k$,m)-v_j(0,m) y obtener como pago $\sum_i[v_i(x_i^k,m)-v_i(0,m)-c_i-p_{ij}^k]$, y debido a que se cumple (22), tenemos la siguiente desigualdad

$$\sum_i[v_i(x_i^k,m)-v_i(0,m)-c_i-p_{ij}^k] \geq \sum_i[v_i(x_i^k,m-1)-v_i(0,m-1)-c_i]$$

b) Segundo caso, si no existen i's tales que (22) se cumpla, entonces j no será presionado y x_j=x_j^o.

Demostración de la Proposición 5.III.ii.b

Si i's ejercen presión y no cumplen (22). Los individuos i's tendrían como desviación redituable no ejercer presión, es decir $\sum_i p_{ij}^k$= 0 y obtener $\sum_i(v_i(x_i^k,m-1)-v_i(0,m-1)-\ c_i)$, ya que:

$$\sum_i[v_i(x_i^k,m)-v_i(0,m)-c_i-(c_j-\ v_j(x_j^k,m)-\ v_j(0,m))] < \sum_i(v_i(x_i^k,m-1)-v_i(0,m-1)-\ c_i)$$

Proposición 6

I) Bajo presión positiva, un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras, donde todos los que participan están en la actividad k, donde k ={a,b}, nos lleva a un pago débilmente mayor para todos los individuos comparado con el equilibrio del juego sin presión, es decir, el equilibrio Pareto perfecto domina débilmente al equilibrio del juego sin presión.

II) Bajo presión negativa, hay ejemplos de equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras, donde todos los que participan están en la actividad k, donde algunos individuos están mejor y otros peor comparados con el juego sin presión y es por eso que la suma de las utilidades de los individuos son algunas veces mayores y otras menores que la suma en el juego sin presión, por lo tanto el equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras en el juego con presión negativa, donde todos los que participan están en la actividad *k*, no puede ser comparado con el equilibrio maximal del juego sin presión.

III) Con presión negativa, en un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras de un juego de participación, donde todos los que participan están en la actividad *k*, donde $k=\{a,b\}$, comparado con el equilibrio maximal en el juego sin presión tenemos que:
- Los individuos presionados están peor
- Los individuos que deciden no participar son indiferentes
- Los individuos que no son presionados y deciden participar en la actividad *k* están mejor débilmente.

Demostración de la Proposición 6

I) Considerando un equilibrio maximal de un juego de complementos estratégicos con presión positiva. Sea $\boldsymbol{x}$ el equilibrio maximal en el juego sin presión, donde sabemos por el algoritmo de la primera etapa de la demostración de la proposición 4 que el equilibrio maximal de este juego es cuando todos los agentes que participan están en la actividad *k*, donde $k=\{a,b\}$. Nota $v(\boldsymbol{x})$-$c_i x_i$ es mayor en $\boldsymbol{x}$ comparado con cualquier otro equilibrio en el juego sin presión, dado que es un juego de complementos estratégicos, por lo que v_i es no decreciente en x_{-i}.

Considerando cualquier subjuego después del vector de presión $\boldsymbol{p}$ en el juego con presión, si $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ es el equilibrio maximal, lo que quiere decir que todos los que participan en una actividad se encentran en la actividad *k*, dado que ahora los costos por participar son $c_i - \sum_j p_{ji}^k$ para cada i y $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ el equilibrio maximal bajo $\boldsymbol{p}$, entonces $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})\geq\boldsymbol{x}$.

Por definición, un equilibrio cumple con lo siguiente:

$$v\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})\big) - (c_i - \textstyle\sum_j \boldsymbol{p}_{ji}^k)x_i(\boldsymbol{p}) - \sum_j \boldsymbol{p}_{ij}^k \geq v\big(\boldsymbol{x}(0,\boldsymbol{p}_{-i})\big) - (c_i - \sum_j \boldsymbol{p}_{ji}^k)x_i(0,\boldsymbol{p}_{-i}) \quad (23)$$

Por ser un juego de complementos estratégicos tenemos:

$$v\big(\boldsymbol{x}(0,\boldsymbol{p}_{-i})\big) - (c_i - \textstyle\sum_j \boldsymbol{p}_{ji}^k)x_i(0,\boldsymbol{p}_{-i}) \;\geq\; v(\boldsymbol{x}) - (c_i - \sum_j \boldsymbol{p}_{ji}^k)x_i \quad (24)$$

Finalmente también sabemos que

$$v(\boldsymbol{x}) - (c_i - \textstyle\sum_j \boldsymbol{p}_{ji}^k)x_i \;\geq\; v(\boldsymbol{x}) - c_i x_i \quad (25)$$

Por lo tanto, con las tres desigualdades llegamos a que el pago del equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras, donde todos los que participan realizan la actividad *k*, donde $k=\{a,b\}$, es mejor débilmente que el pago máximo del equilibrio del juego sin presión.

II) Ejemplo

Si tenemos un juego con n=2, y las siguientes utilidades $v(x^k,0)=2$, $v(x^k, x^k)=3$, donde $k=\{a,b\}$, $v_{1,2}(0,\bullet)=0$, y los siguientes costos $c_1=0$, $3<c_2\leq 4$

El único equilibrio sin presión es $x=(x_1^k,0)$, donde los pagos son U=(2,0), por lo que $\sum_i u_i = 2$

Con presión negativa, el equilibrio Pareto perfecto es $x=(x_1^k,x_2^k)$ y $\boldsymbol{p}=(c_2-3,\ 0)$, donde los pagos son U=(3-(c_2-3), 3-c_2), por lo que $\sum_i u_i = 6-2c_2$

Si $c_2=3.3 \Rightarrow$ U=(2.7, -0.3) $\Rightarrow \sum_i u_i = 2.4$
Si $c_2=4 \Rightarrow$ U=(2, -1) $\Rightarrow \sum_i u_i = 1$

III) De la proposición 5 sabemos que en un equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal, un individuo que es presionado participa y debe ser indiferente entre participar y no participar. Así que el pago del individuo por no participar en el juego con presión negativa es menor que en el juego sin presión, dado que es un juego de participación, por lo que el beneficio de no participar es independiente de la acción de los demás y es presionado negativamente, es decir, aumenta el costo por no participar, por lo que el individuo debe tener un pago menor.

El individuo que presiona debe estar mejor débilmente, ya que, por la proposición 5 sabemos que quien presiona es porque participa en la actividad *k*.

Por definición, el pago para un individuo que presiona en un equilibrio Pareto perfecto cumple que:

$$v\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})\big) - c_i x_i(\boldsymbol{p}) - \textstyle\sum_j \boldsymbol{p}_{ij}^k \geq v\big(\boldsymbol{x}(0,\boldsymbol{p}_{-i})\big) - c_i x_i(0,\boldsymbol{p}_{-i}) \qquad (26)$$

Por ser un juego de complementos estratégicos tenemos:

$$v\big(\boldsymbol{x}(0,p_{-i})\big) - c_i x_i(0,p_{-i}) \ \geq\ v(\boldsymbol{x}) - c_i x_i \qquad (27)$$

Ya que $x(p)\geq x$, dado que por la proposición 5 sabemos que los individuos que participaban en el juegos sin presión, siguen participando y porque además los individuos presionados van a participar.

Los individuos que deciden no participar en un equilibrio Pareto perfecto y/o maximal, por la proposición 5, son indiferentes con el equilibrio sin presión, ya que en ambos juegos deciden no participar y al estar en un juego de participación, su utilidad es independiente de las acciones de los demás.

Corolario 2

El equilibrio Pareto perfecto y/o equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión positiva, donde todos los que participan están en la actividad *k*, donde $k = \{a,b\}$, domina débilmente al equilibrio Pareto perfecto y/o equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión negativa, donde todos los que participan están en la actividad *k*, donde $k = \{a,b\}$.

Por lo tanto, la modificación del modelo original con dos acciones disponibles a tres acciones disponibles mantiene el resultado del trabajo original de Calvó-Armengol y Jackson (2008) donde el equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión positiva domina débilmente al equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal con estrategias puras del juego con presión negativa.

Analizando el equilibrio de este modelo con tres acciones disponibles, tenemos que el supuesto de condición de no desperdicio de presión por parte de los agentes que participan en una actividad, donde solamente pueden ejercer presión a los demás agentes para que participen en su misma actividad, es un supuestos suficiente, junto con el supuesto de complementos estratégicos, para poder demostrar la existencia del equilibrio perfecto en subjuegos.

Por otra parte, debido al supuesto de que los agentes tienen beneficios simétricos y los beneficios por hacer la actividad *a* ó *b* son los mismos, además de que el costo es igual por participar en la actividad *a* ó en la *b*, junto con el supuesto de complementos estratégicos, el equilibrio en subjuego y por lo tanto en el equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal con estrategias puras tiene la característica de que los agentes que participan, lo hacen en la misma actividad. Este resultado hace que en el equilibrio no importe si existe más de una actividad disponible, ya que dependiendo de la actividad en donde se pongan a todos los individuos según la primera etapa del algoritmo utilizado para encontrar el equilibrio en subjuego con estrategias puras, será la actividad del equilibrio Pareto perfecto y/o equilibrio maximal con estrategias puras.

4. Conclusiones

Al analizar el modelo con gustos heterogéneos y el modelo con tres acciones disponibles, podemos darnos cuenta que los resultados principales del trabajo de Calvó-Armengol y Jackson (2008) no cambiaron, lo que parece indicar que son resultados robustos, ya que en estos modelos se sostiene que el equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras del juego con presión positiva domina débilmente al equilibrio Pareto perfecto y equilibrio maximal en estrategias puras del juego con presión negativa, por lo que sigue sin haber motivación teórica para que los agentes utilicen la presión negativa.

Sin embargo, todavía quedan varios modelos por analizar y ver si la presión activa sigue teniendo un equilibrio mejor comparado con el equilibrio del juego sin presión o del juego con presión negativa. Por ejemplo, en el modelo de tres acciones disponibles si no se supusieran beneficios simétricos para todos los individuos e iguales para las dos actividades disponibles, además de suponer los mismos costos para las dos acciones disponibles y se dejara que tanto los beneficios fueran diferentes por acción, como los costos , se podría tener un equilibrio perfecto en subjuegos en donde no necesariamente todos los que realizan una actividad estén en la misma, por lo que las comparaciones entre los posibles equilibrios podría diferir a los obtenidos en estos modelos.

Otro posible modelo que podría examinarse es cuando se supone una función de beneficios por participar cóncava, donde la estrategia dominante no sea que todos los individuos participen, a pesar de tratarse de un juego de complementos estratégicos.

Bibliografía

Calvó-Armengol A. y M.O. Jackson (2008) “Peer Pressure”, proximamente en *Journal of the European Economic Association*

Jackson M.O. y S. Wilkie (2005) “Endogenous Games and Mechanisms: Side Payments among Players”, *Review of Economic Studies*, 72:2, 543-566.

Kandel E. y E.P. Lazear (1992) “Peer Pressure and Partnerships”, *Journal of Political Economy*, 100:4, 801-817.

Osbourn M.J y A. Rubinstein, (1994) “A Course in Game Theory”, The MIT Press, 5th edición, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Prat A. y A. Rustichini (2003) “Games Played Through Agents” *Econometrica*, 71, pp. 989-1026.

Reynolds, W.A. (1959) “The Burning Ships of Hernán Cortés”, Hispania, 424:3, 317-324.

Reny P. (1999), On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games“ *Econometrica*, Vol. 67, No.5, pp 1029-1056

Van Zandt T y X Vives (2007) “Monotone Equilibria in Bayesian Games with Strategic Complementaritiesm” *Journal of Economic Theory*, 134, 339-360.

Vives X. (1990) “Nash Equilibrium with Strategic Complementarities”, *Journal of Mathematical Economics*, 19, 305-321.

Vives X. (2005) “Complementarities and Games: New Developments” *Journal of Economic Literature*, 43:2, 437-479.