EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

RIESGO MORAL DINÁMICO BAJO AVERSIÓN A LAS PERDIDAS

JONATAN CAMPOS RAMÍREZ

PROMOCIÓN 2021-2023

ASESOR:

EDWIN ALEXANDER MUÑOZ RODRÍGUEZ

AGOSTO 2023

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que directamente o indirectamente me han impulsado para llegar hasta este punto. Esta tesis es producto de todas esas pequeñas interacciones que me llevaron hasta aquí y por eso les estaré siempre agradecido. A continuación, me gustaría expresar mi gratitud de manera especial a las siguientes personas:

A mi madre y mi hermana que siempre me han apoyado, creído y confiado en mi. Su apoyo ha sido fundamental para mi éxito académico y personal. A mi padre que ya no está aquí para ver hasta dónde he llegado pero estoy seguro de que se sentiría feliz por mí.

A mi asesor el Dr. Edwin Muñoz, su amplio conocimiento, paciencia y valioso apoyo en todo lo que le fue posible me lleno ánimos para continuar en momentos en los que me sentí perdido. Le estoy agradecido de todo corazón.

A mis amigas de generación que estuvieron en momentos difíciles, particularmente Arlenne, Marlenne y Damaris, ustedes hicieron que la pesada carga académica fuera más agradable. A mis amigos de toda la vida, Jaime, Dai y Diego. Su apoyo en momentos de incertidumbre es algo que valoro mucho. A Daniela, que ya no podrá ver esto.

Finalmente quiero agradecer al Colegio de México (COLMEX) por el conocimiento adquirido y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico otorgado para la realización de mis estudios de maestría.

Resumen

Este trabajo estudia un problema agente-principal con riesgo moral dinámico considerando un agente adverso a las perdidas. Primero, se estudia la forma y las propiedades de la función de utilidad propuesta por la teoría de prospectos. Después se define a su función inversa que llamamos *función de pagos*, esta será fundamental en la solución analítica del problema. Segundo, con la función de pagos se formulan los modelos estático y dinámico en dos periodos y se busca el contrato óptimo. Para el modelo estático, se encuentra que la restricción de incentivos no siempre se cumple en igualdad por lo que hay dos candidatos a solucionar el problema del principal. Hay que destacar que la relajación de la restricción de incentivos genera la posibilidad de generar los mismos incentivos a un menor costo para el principal. Finalmente, en el modelo en dos periodos, el enfoque de solución es mediante programación dinámica. La solución en los dos subproblemas del segundo y del primer periodo se apoyan de los resultados del modelo en un periodo. Encontraremos que tanto la memoria del contrato como la propiedad de Martingala, dos resultados clásicos de la teoría estándar, se mantienen a pesar de la introducción de aversión a las pérdidas en las preferencias del agente.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Antecedentes **3**

3. Utilidad y aversión a las perdidas **7**

3.1. Utilidad de prospectos 7

3.2. Función de pagos 9

4. Modelo estático **11**

4.1. Nivel de producción y esfuerzo 11

4.2. Conjunto de contratos incentivo factibles 13

4.3. El contrato óptimo 15

4.3.1. Ejemplo 18

5. Modelo dinámico en dos periodos **21**

5.1. Formulación del modelo 21

5.2. El subcontrato del segundo periodo 23

5.3. Contrato en el primer periodo 25

5.3.1. Ejemplo (Continuación) 28

6. Conclusiones **31**

Capítulo 1

Introducción

La economía conductual es un campo de estudio interdisciplinario que combina la economía y la psicología para comprender cómo los seres humanos toman decisiones económicas. A diferencia de la economía tradicional, la economía conductual reconoce que los individuos pueden verse afectados por sesgos cognitivos, emociones y limitaciones de información al tomar decisiones económicas. La economía conductual analiza cómo estos factores influyen en las preferencias, la toma de riesgos, la elección intertemporal, la cooperación, la negociación y otros aspectos del comportamiento económico.

Una de las principales teorías dentro de la economía del comportamiento es la *teoría de prospectos* fundamentada ampliamente en evidencia experimental por Kahneman y Tversky (1979, 1991). La teoría plantea tres características esenciales en la forma en que los individuos eligen bajo incertidumbre: miden perdidas y ganancias respecto a punto de referencia; valoran más las perdidas que las ganancias de igual magnitud y están dispuestos a asumir más riesgos con tal de evitar perdidas potenciales. Esta última característica es llamada *aversión a las pérdidas* e implica que, respecto a su punto de referencia, un agente tendrá una función de utilidad convexa a la izquierda de su punto de referencia.

La *teoría conductual de contratos* es una novedosa rama de investigación que busca combinar principios de la economía conductual y la teoría de contratos para comprender y diseñar contratos de manera más efectiva (ver Koszegi (2014)). La teoría de contratos conductual considera que los individuos pueden estar sujetos a sesgos, limitaciones de información y preferencias no plenamente racionales al participar en contratos. Así mismo, la teoría se centra en cómo los factores psicológicos y cognitivos influyen en la formación y ejecución de contratos, así como en los resultados de las interacciones contractuales. Por ejemplo, estudios empíricos muestran que la actitud al riesgo de los CEO's no concuerdan con los supuestos asumidos generalmente en los problemas de riesgo moral (ver Brenner (2015)). Por eso es importante introducir consideraciones más realistas de las preferencias de los agentes en este tipo de problemas.

Este trabajo estudia un problema de agente-principal con riesgo moral estático y dinámico en dos periodos, con la particularidad de considerar un agente averso a las perdidas. El enfoque para resolver el modelo dinámico será de forma recursiva cómo lo introdujeron Spear y Srivastava (1987) y que posteriormente Abreu, Pearce y Stacchetti (1990) formaliza para juegos con descuento y monitoreo imperfecto. La idea es introducir una variable que resuma la utilidad que puede obtener el agente para el resto del contrato. A esta utilidad la llamaremos *utilidad prometida* y resume la información de la historia de la producción. Nuestro objetivo es determinar el contrato óptimo, sus características y cómo se diferencia del caso estándar.

La tesis está dividida principalmente en tres capítulos. En el capitulo 3 estudiamos la función de utilidad dada por la teoría de prospectos y sus particularidades. Además, definimos la inversa de está función que será de fundamental la solución analítica del problema del principal. Nuestro modelo sí considera preferencias estrictamente convexas en la región de perdidas, de acuerdo con las ideas originales de Kahneman y Tversky (1979) y que solo el trabajo de Kanbur, Pirttilä y Tuomala (2008) ha considerado. En el capitulo 4, estudiamos el modelo estático y determinamos el contrato óptimo. Cómo aportación a la literatura, se obtiene que a diferencia del modelo estándar sin aversión a las perdidas, la restricción de incentivos no siempre se cumple en igualdad lo que abre la posibilidad de generar los mismos incentivos a un costo menor para el principal. En el capitulo 5 nos apoyamos en los resultados del modelo estático para resolver el modelo dinámico en dos periodos y determinamos las propiedades del contrato. Encontraremos que tanto la memoria del contrato como la propiedad de Martingala, dos resultados clásicos de la teoría estándar, se mantienen a pesar de la introducción de aversión a las pérdidas en las preferencias del agente.

Capítulo 2

Antecedentes

Los primeros trabajos que abordan el problema de riesgo moral en un problema de agente-principal se remontan a los artículos seminales de Ross (1973), Mirrlees (1976), Harris y Raviv (1979) y Holmström (1979). El enfoque de estos trabajos se centro en resolver el problema de información asimétrica mediante la búsqueda de un contrato óptimo que lograra alinear los intereses del agente con los del principal. Este contrato óptimo consta de una esquema de recompensas y castigos de forma que se logra proveer incentivos al agente para actuar en beneficio del principal. De está manera la formulación de un contrato contingente en el estado de la naturaleza puede reducir los problemas relacionados con el riesgo moral preexistente.

En su trabajo Ross (1973) considera una relación bilateral entre un agente y un principal. El pago del agente está influenciado, por un lado, por sus acciones, y por el otro, por el estado de la naturaleza que es estocástico. Ross identifica claramente el problema que surge de la asimetría de la información y las variables clave. Por su parte, Mirrlees (1976) se pregunta por la estructura de incentivos dentro de una organización cuando el desempeño del agente es perfectamente observable y también cuando no lo es. La solución de Mirrlees consiste en un esquema de pagos proporcional al rendimiento del agente y una autoridad eficiente.

Por su parte, Harris y Raviv (1979) abordan un problema de agente-principal en el que existe riesgo moral y divergencia de objetivos, su trabajo hace énfasis en como la información adicional sobre el desempeño del agente afecta la estructura del contrato. Ellos muestran que cuando el agente es neutral al riesgo la información asimétrica la generación de incentivos no genera costos. Cuando el agente es adverso al riesgo sí existen ganancias de monitorizar el esfuerzo del agente para obtener información adicional, el contrato dependerá de una variable dicotómica que determina si es aceptable el desempeño del agente.

Siguiendo la linea de Harris y Raviv, Holmström (1979) encuentra que cuando solo se observan las ganancias, el contrato óptimo será la segunda mejor solución. Además, cualquier información adicional del desempeño del agente, aunque imperfecta, puede mejorar el contrato. Finalmente, Holmström resalta que un contrato de larga duración puede reducir la incertidumbre en las acciones del agente y así reducir el riesgo moral asociado.

Uno de los primeros trabajos que estudian la relación agente-principal que se repite por varios periodos es el de Radner (1981). El considera un número de periodos finito. Sus resultados muestran que si el agente y el principal no descuentan sus utilidades, para un numero de periodos suficiente grande, se puede alcanzar resultados de horizonte infinito. En cambio, el trabajo de Lambert (1983) sí permite el descuento de las utilidades. Él encuentra que el pago del agente depende de su desempeño en el primer periodo por lo que la memoria tiene un rol importante en la estructura del contrato. Además, permite al principal suavizar el ingreso del agente al repartir el riesgo entre periodos.

Rogerson (1985) muestra que la memoria de las realizaciones de la producción juega un rol importante en la estructura del contrato. El llega al mismo resultado que Lambert. Adicionalmente, demuestra que para alcanzar la eficiencia de Pareto es necesario restringir su acceso al crédito. De otra forma, el agente elige guardar parte de su ingreso en cada periodo y al mismo tiempo disminuir su nivel de esfuerzo proporcionalmente.

Spear y Srivastava (1987) considera un problema de agente-principal bajo riesgo moral que se repite infinitamente con descuento. Lo destacable de este trabajo es el enfoque que usa para resolver el problema. Ellos reducen la historia a una sola variables que toman como la esperanza condicional de la utilidad descontada del agente. Con esto, logran reducir el problema infinito a un problema de optimización en dos periodos. Malcomson y Spinnewyn (1988) también hacen uso de este enfoque para resolver un problema de riesgo moral en horizonte finito.

Por otro lado, en las ultimas décadas se hecho un esfuerzo por introducir modelos de elección basados en observaciones experimentales del comportamiento humano. Los trabajos pioneros de Kahneman y Tversky (1979, 1991) fueron el punto de partida para una amplia gama de aplicaciones en la teoría de contratos. A la corriente de investigación que busca introducir consideraciones conductuales en la formulación de contratos se le conoce como *teoría conductual de contratos* . En particular, existe una linea de investigación dentro de la teoría conductual de contratos que busca estudiar problemas de riesgo moral. Entre los primeros trabajos de está linea de investigación podemos encontrar los de Meza y Webb (2007), Kanbur, Pirttilä y Tuomala (2008) y Herweg, Müller y Weinschenk (2010).

Meza y Webb (2007) consideran un problema de riesgo moral con un agente adverso a las perdidas y estudia diferentes especificaciones del punto de referencia: dado exógenamente, equivalente cierto y promedio de expectativas. Muestran que bajo estás consideraciones existe un conjunto de resultados de producción para los cuales el pago al agente no depende del resultado. Suponen una función de aversión a las perdidas lineal y sobre este supuesto descansa la mayoría de sus resultados. Sin embargo, con estás consideraciones la utilidad en la región de perdidas solo es una transformación lineal de la utilidad cóncava. Por ello no considera el amor al riesgo y la aversión a las perdidas en el sentido estricto. En contraste, este trabajo sí considera la convexidad estricta en la región de perdidas.

Herweg, Müller y Weinschenk (2010) muestran que si el punto de referencia del agente está dado por sus expectativas racionales sobre su salario de acuerdo con Kszegi y Rabin (2006, 2007), el contrato óptimo tiene una estructura de prima con dos niveles salariales. Esto sucede porque una mayor dispersión de pagos reduce la utilidad esperada sin incrementar los incentivos. Kanbur, Pirttilä y Tuomala (2008) investiga un problema de impuestos óptimos con agentes adversos a las perdidas. Ellos sí consideran preferencias estrictamente convexas en la región de perdidas. Encuentran que la aproximación de primer orden no se cumple en la región de perdidas por lo que en está región los impuestos son aleatorizados. En nuestro trabajo al considerar acciones finitas no tenemos este problema y solo tenemos que considerar la restricción de incentivos.

En la frontera de la investigación se encuentran los trabajos que buscan estudiar los problemas de riesgo moral dinámico bajo aversión a las perdidas. Entre los trabajos más relevantes encontramos Jofre, Moroni y Repetto (2015) y Macera (2018). Jofre, Moroni y Repetto (2015) analizan un modelo de agente principal bajo riesgo moral y aversión a las perdidas. Para ello retoman el trabajo de Meza y Webb (2007) para el caso de utilidad lineal. Ellos encuentran que el contrato no depende del resultado de la producción para un intervalo de producción. Por lo tanto, es posible observar un salario persistente en el tiempo. Sin embargo, al igual de Meza y Webb suponen utilidades lineales lo cual genera que las preferencias no sean estrictamente convexas en la región de perdidas. En cambio, en nuestro modelo dinámico sí consideramos la convexidad estricta en la región de perdidas. Finalmente, Macera (2018) considera un agente que experimenta utilidad a partir de sus salarios y esfuerzo presentes y futuros. Bajo restricciones débiles de la utilidad, encuentra que todos los incentivos pueden ser referidos al futuro y así el principal puede pagar un salario fijo. En nuestro trabajo, para el modelo dinámico y preferencias particulares, se encuentra que el contrato mantiene un salario fijo después de la realización de la producción en el primer periodo.

Capítulo 3

Utilidad y aversión a las perdidas

En este capítulo vamos a describir con más detalle la forma de la función de utilidad respecto a la teoría de prospectos. Partimos de una función de utilidad VNM que exhibe aversión al riesgo y de un punto de referencia. El nivel referencia determinará la *región de perdidas* y la *región de ganancias*. En el camino definiremos el *coeficiente de aversión a las perdidas* y qué papel juega en el grado de aversión a las perdidas. Finalmente definiremos la *función de pagos* que nos ayudara a formular el problema del principal en términos de la utilidad del pago que el principal entrega al agente en lugar del pago mismo. La ventaja de esto es que las restricciones serán lineales en la utilidad.

3.1. Utilidad de prospectos

Consideremos el espacio de loterías cuyos posibles resultados consisten de diferentes niveles de riqueza (t), por lo tanto el conjunto de posibles resultados será $\mathbb{R}_+$. Asumimos que la función de utilidad $(u(\cdot))$ es VNM y C^2 con $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) < 0$. Bajo estos supuestos la utilidad es cóncava y exhibe aversión al riesgo (ver Figura 3.1). Como condición adicional pediremos que la función este normalizada en cero, es decir, que $u(0) = 0$.

Según la teoría de prospectos, los agentes normalizan la utilidad con respecto a un nivel de referencia. Por encima son aversos al riesgo y por debajo de este nivel son amantes al riesgo y el efecto de las perdidas es mayor que el de las ganancias. Dicho de otra manera, por encima del punto de referencia la función es cóncava y por debajo la función es convexa y

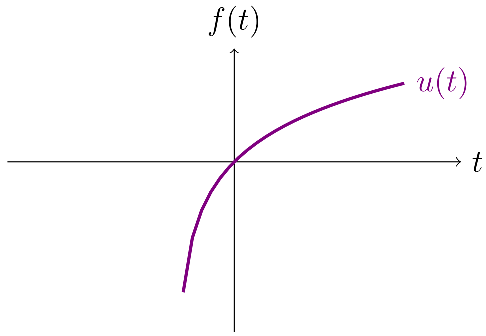

Figura 3.1: Función de utilidad cóncava

con mayor pendiente cuando es convexa. Llamaremos a la parte convoca *región de ganancias* y a la parte convexa *región de perdidas*.

Para valores positivos de t tomamos simplemente $u(t)$. Para valores de t menores que cero la función debe ser convexa y la pendiente de la función en un punto negativo es mayor que la pendiente de un punto positivo de igual magnitud. Podemos usar la misma función de utilidad para definir la parte convexa de la utilidad. Tomamos el negativo del argumento de la utilidad y lo multiplicamos por el negativo de una constante $a > 1$. A la constante a se le conoce cómo *coeficiente de aversión a las perdidas*.

La expresión genérica de una función de utilidad con aversión a las perdidas construida de está manera es

$$v(t) = \begin{cases} -au(-t) & \text{si } t \leq 0 \\ u(t) & \text{si } t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

En la Figura 3.2 se muestra la gráfica de una función de utilidad de acuerdo a la teoría de prospectos. Nótese que en la región de perdidas el coeficiente de aversión al riesgo de Arrow-Pratt es negativo puesto que la función de utilidad en está región es convexa. Esto refleja el hecho de que un agente es amante al riesgo en la región de perdidas. En la misma región, la pendiente de la utilidad es más pronunciada pues para un valor $\tau > 0$ es evidente que $v(-\tau) = au'(\tau) > u'(\tau) = v(\tau)$ pues $a > 1$. Esto refleja el hecho de que las perdidas se experimentan más duramente que las ganancias.

No hay que perder de vista los supuestos implícitos en la construcción de la función de utilidad. Hemos asumido que las preferencias son similares en la región de perdidas que en ganancias hasta una constante y que el efecto de aversión a las perdidas es multiplicativo.

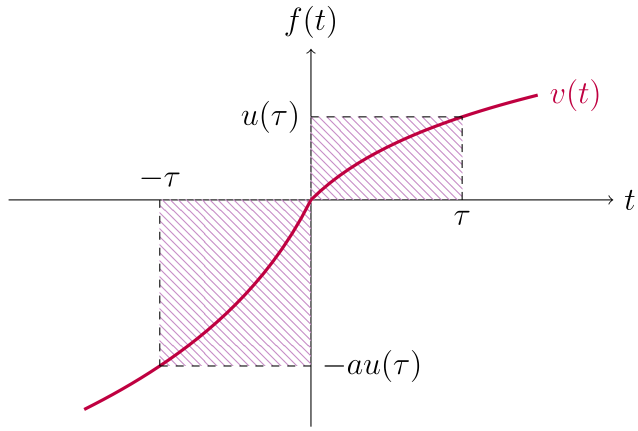

Figura 3.2: Función de utilidad con aversión a las perdidas

Por ello el valor absoluto del coeficiente de Arrow-Pratt tiene el mismo valor para valores de igual magnitud:

$$|R_a(-\tau)| = R_a(\tau)$$

Bien podría ser el caso que la utilidad en la región de perdidas estuviera dada por una función convexa diferente y que el coeficiente de aversión no dependiera linealmente de la utilidad. Además, la función tiene un cambio abrupto en $t = 0$ por lo que se genera una discontinuidad de la utilidad marginal en ese punto. Así que se tiene la libertad de definir el valor de la utilidad marginal en ese punto como sea conveniente, posiblemente el punto medio entre el valor más grande y el más pequeño. Otra alternativa es introducir la condición $\lim_{t \to 0} u'(t) \to \infty$, esto asegura la continuidad de la utilidad marginal en todo el dominio a costa de introducir una singularidad en cero. Esta condición puede interpretarse como que los individuos valoran altamente cambios en su nivel de riqueza cuando están cerca de no tener nada.

3.2. Función de pagos

Ya que la utilidad de prospectos es estrictamente creciente podemos asegurar que su inversa existe. Llamaremos a la inversa de la función de utilidad *la función de pagos*, $H : v \to t$ y la denotaremos por $H(v)$. Está función nos permite encontrar el nivel de ingreso t dado un nivel de utilidad v. Está función es cóncava en la zona de utilidad en perdidas, convexa en la de ganancias, estrictamente creciente en todo su dominio y con una pendiente

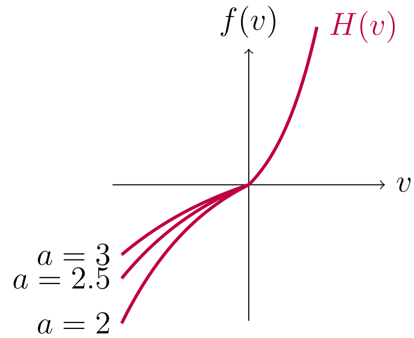

Figura 3.3: Función de pagos y efecto de la aversión a las perdidas

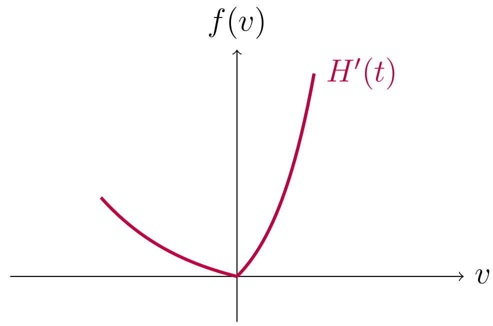

Figura 3.4: Derivada de la función de pagos.

menos pronunciada en la zona de perdidas que en la de ganancias (ver Figura 3.3).

Podemos construir la función de pagos tomando la inversa de la función de utilidad $u(t)$ en cada región. Sea $h(\cdot)$ la inversa de $u(\cdot)$; la expresión genérica para la función de pagos es

$$H(v) = \begin{cases} -h(-\frac{v}{a}) & \text{si } v \leq 0 \\ h(v) & \text{si } v > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Nótese que como la función de pagos es estrictamente creciente, su derivada es siempre positiva, pues $h'(\cdot) = \frac{1}{u'(\cdot)}$ (ver Figura 3.4).

$$H'(v) = \begin{cases} \frac{h'(-\frac{v}{a})}{a} & \text{si} \quad v \leq 0 \\ h'(v) & \text{si} \quad v > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Capítulo 4

Modelo estático

En este capítulo introducimos un modelo de riesgo moral estático con dos niveles de producción y esfuerzo, las preferencias del agente estarán dadas por la teoría de prospectos. Primero, presentamos las características básicas del modelo que son comunes con el caso estándar (ver Laffont y Martimort (2002)) con la novedad de considerar que el agente es averso a las perdidas. Introducimos la *restricción de participación* y la *restricción de incentivos* que van a caracterizar al conjunto de *contratos incentivo-factibles*. Este conjunto será sobre el cual buscaremos minimizar el pago del principal. Luego, buscaremos el contrato óptimo sobre este conjunto. Cómo contribución, se obtiene que la restricción de incentivos no siempre se cumple en igualdad y habrá dos candidatos a óptimos, este resultado difiere de la teoría estándar en la que las restricciones siempre se cumplen en igualdad. Finalmente, presentamos un ejemplo y lo comparamos con la teoría estándar.

4.1. Nivel de producción y esfuerzo

Consideremos un principal que delega una tarea a un agente a cambio de un pago, esté pago estará en función de alguna señal que refleje el desempeño del agente. El agente puede ejercer dos niveles de esfuerzo $e \in \{0, 1\}$ que producen una desutilidad al agente $\psi(e)$. Para simplificar los cálculos se considera que la desutilidad está normalizada, entonces $\psi(1) = \psi$ y $\psi(0) = 0$.

Representamos al pago recibido por el agente por parte del principal como t y además

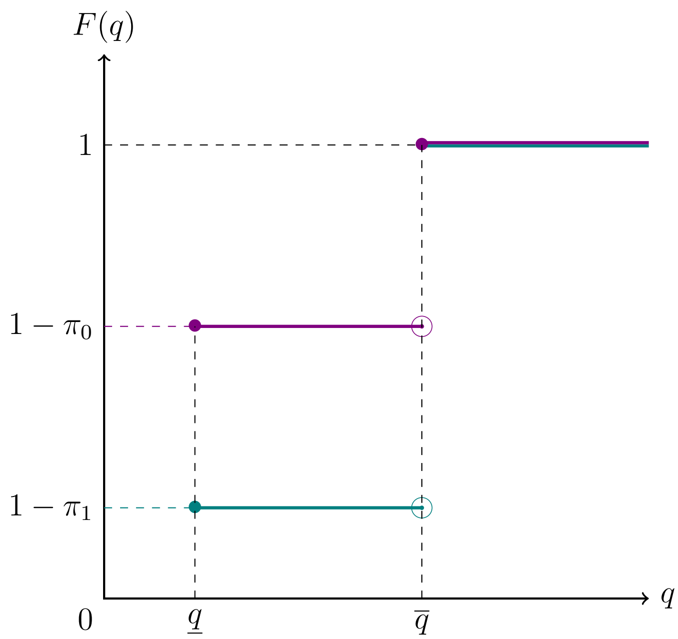

Figura 4.1: Distribuciones de probabilidad de la producción inducidas por el esfuerzo ejercido

suponemos que la utilidad del agente es aditivamente separable entre utilidad del pago y desutilidad del esfuerzo $U = v(t) - \psi(e)$. La utilidad del pago es una función del tipo de la teoría de prospectos. Sea $H = v^{-1}$ la inversa de la función de utilidad. Evidentemente será creciente y estará normalizada en cero ($H(0) = 0$, $H' > 0$).

Consideramos como indicador del desempeño del agente al nivel de producción q. Este será representado por una variable aleatoria que puede tomar dos posibles valores $q \in \{\overline{q}, \underline{q}\}$, en dónde el primero es mayor que el segundo. El esfuerzo influye en la probabilidad de obtener una producción alta de forma que $\mathbb{P}(q = \overline{q}|e = 1) = \pi_1 > \pi_0 = \mathbb{P}(q = \overline{q}|e = 0)$. Representamos la diferencia de probabilidad de obtener una producción alta con y sin esfuerzo como $\Delta\pi = \pi_1 - \pi_0 > 0$.

Un aspecto importante que hay que considerar es el hecho de que la distribución de probabilidad generada por un esfuerzo alto *domina estocásticamente de primer orden* a la distribución de un esfuerzo bajo. De $\pi_1 > \pi_0$ es evidente que $1 - \pi_1 < 1 - \pi_0$. De esta forma, un principal con una función de utilidad creciente en el nivel de producción prefiere la distribución generada por un nivel de esfuerzo alto que la generada por un esfuerzo bajo (ver Figura 4.1).

4.2. Conjunto de contratos incentivo factibles

Como el esfuerzo del agente no es directamente observable por el principal, este ofrece un esquema de pagos (un contrato) que estará directamente relacionado con el nivel de producción observado, es decir, el pago es una función del nivel de producción observado $t(q)$. Para simplificar notación se define al pago en el nivel de producción alto como $\bar{t}$ y en el nivel de producción bajo como $\underline{t}$. El pago esperado que el principal transfiere al agente, suponiendo que el principal es neutral al riesgo, cuando quiere implementar un nivel de esfuerzo alto es

$$P_1 = \pi_1 \bar{t} + (1 - \pi_1)\underline{t}. \tag{4.1}$$

Sabemos que el principal siempre está interesado en implementar un nivel de esfuerzo alto por la dominancia estocástica, por lo que el contrato que ofrece al agente debe asegurar dos cosas; que el agente acepte el contrato y que una vez aceptado realice su mayor esfuerzo. A los contratos que cumplen con estás dos características se les llama *contratos incentivo-factibles*.

Primero, para asegurar la participación del agente, la utilidad esperada que obtiene (utilidad esperada del pago menos el costo del esfuerzo) debe ser igual o mayor de un cierto nivel que se conoce como *utilidad de reserva*. La utilidad de reserva es aquella que un agente puede asegurarse sin participar en el contrato. Para simplificar consideramos que este nivel es cero. Entonces, la *restricción de participación* (RP) es

$$\pi_1 v(\bar{t}) + (1 - \pi_1) v(\underline{t}) - \psi \geq 0. \tag{4.2}$$

Segundo, si el agente acepta el contrato, la utilidad esperada que obtiene de ejercer un esfuerzo alto debe ser mayor que la que obtendría si ejerciera un esfuerzo bajo. Hay que notar que cuando el agente no ejerce esfuerzo no incurre en ninguna desutilidad, entonces la *restricción de incentivos* (RI) es

$$\pi_1 v(\bar{t}) + (1 - \pi_1) v(\underline{t}) - \psi \geq \pi_0 v(\bar{t}) + (1 - \pi_0) v(\underline{t}). \tag{4.3}$$

Las restricciones (4.2) y (4.3) determinan el conjunto de contratos incentivo factibles,

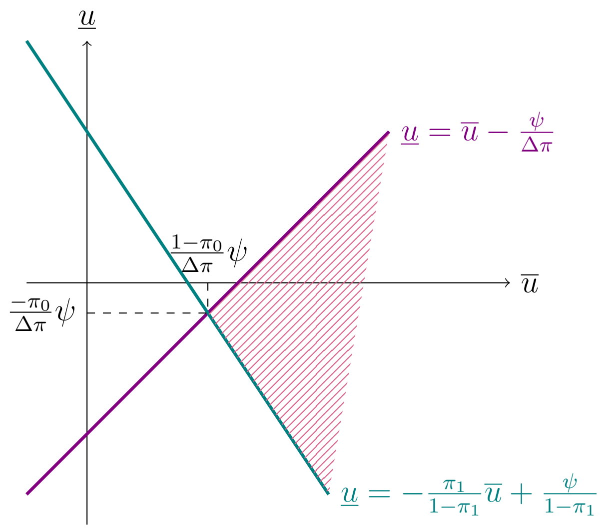

Figura 4.2: Conjunto de contratos incentivo factibles

este conjunto estará en la intersección de los conjuntos determinados por las restricciones anteriores.

Sea ahora $\overline{v} = v(\overline{t})$ y $\underline{v} = v(\underline{t})$ los niveles de utilidad asociados a cada uno de los pagos en las posibles realizaciones del nivel de producción. Consideremos la igualdad de las restricciones (4.2) y (4.3), pensemos al nivel de utilidad alto como variable independiente y al nivel de utilidad bajo como variable dependiente. Las rectas RP y RI determinan la frontera de los niveles de utilidad incentivo factibles. La recta RP: $\underline{v} = -\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\overline{v} + \frac{\psi}{1-\pi_1}$ tiene pendiente negativa y ordenada al origen positiva, la recta RI: $\underline{v} = \overline{v} - \frac{\psi}{\Delta\pi}$ tiene pendiente positiva y ordenada al origen negativa, por lo que el sistema de ecuaciones siempre tiene solución. Nótese que los valores de utilidad que cumplen RP estarán por encima de esta recta y los valores que cumplen RI estarán por debajo de esta última.

El conjunto de contratos incentivo factibles estará en la intersección de las regiones determinadas por las dos restricciones RP y RI (ver Figura 4.2). Los *contratos eficientes* son aquellos que se encuentran en los segmentos de recta a la derecha del punto de intersección. El punto de intersección de las restricciones es $(\frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi \ , \ \frac{-\pi_0}{\Delta\pi}\psi)$. Nótese que en el punto de intersección, el valor de utilidad alta es siempre positivo y el de utilidad baja es siempre negativo y por ello la región de interés se sitúa a la derecha del eje de las ordenadas (primer y cuarto octante).

4.3. El contrato óptimo

Para comenzar, expresamos los pagos transferidos al agente, en términos de la función de pagos evaluada en el nivel de utilidad asociado a cada pago. Con está transformación las restricciones ahora son lineales respecto a los niveles de utilidad. Reescribiendo el pago esperado del principal (4.1) y las restricciones (4.2) y (4.3), tenemos que el problema del principal es

$$\min_{\{\overline{v},\underline{v}\}}\{\pi_1 H(\overline{v}) + (1-\pi_1)H(\underline{v})\} \tag{4.4}$$

sujeto a:

$$\pi_1\overline{v} + (1-\pi_1)\underline{v} - \psi \geq 0. \tag{4.5}$$

$$\overline{v} - \underline{v} \geq \frac{\psi}{\Delta\pi}. \tag{4.6}$$

Representamos por μ y λ a los multiplicadores de las restricciones (4.5) y (4.6), respectivamente. Entonces, las condiciones de primer orden con respecto a $\overline{v}$ y $\underline{v}$ son:

$$\pi_1 H'(\overline{v}^*) - \pi_1\mu - \lambda = 0$$
$$(1-\pi_1)H'(\underline{v}^*) - (1-\pi_1)\mu + \lambda = 0.$$

Ahora, hay que determinar el signo de los multiplicadores. Si sumamos las ecuaciones anteriores y despejamos para μ obtenemos que

$$\mu = \pi_1 H'(\overline{v}^*) + (1-\pi_1)H'(\underline{v}^*).$$

Debido a que cada sumando es una cantidad positiva concluimos que $\mu > 0$, por lo que la restricción (4.5) debe cumplirse en igualdad. El multiplicador μ se anula en el origen, sin embargo, esté punto no está dentro de nuestro conjunto de interés.

Continuando, si se sustituye la expresión para μ en la primera ecuación y se resuelve para

λ obtenemos que

$$\lambda = \pi_1(1-\pi_1)(H'(\overline{v}^*) - H'(\underline{v}^*)).$$

Para que $\lambda > 0$ se tiene que cumplir que $H'(\overline{v}^*) > H'(\underline{v}^*)$. Analicemos bajo que condiciones se cumple que $H'(\overline{v}) \geq H'(\underline{v})$. Se distinguen dos casos en función de cuando $\underline{v}$ entra en perdidas o ganancias.

Primero, cuando ambos niveles de utilidad están en la zona de ganancias las funciones de pago coinciden, por lo que estamos en el caso $v > 0$ de la ecuación (3.2) para ambas utilidades. Recordemos que $h(\cdot)$ es la función inversa de $u(\cdot)$, entonces

$$h'(\overline{v}) \geq h'(\underline{v}).$$

Cómo h' es estrictamente creciente la condición se cumple si y solo si $\overline{v} \geq \underline{v}$, es decir, se cumple para aquellos valores de utilidad que están por debajo de la función identidad.

Segundo, cuando la utilidad $\underline{v}$ entra en la región de perdidas se tiene que cumplir que

$$h'(\overline{v}) \geq \frac{h'(-\frac{\underline{v}}{a})}{a}.$$

Cómo h' es estrictamente creciente su inversa existe y además también es creciente, entonces por el teorema de la función inversa $(h'^{-1})' = \frac{1}{h''} > 0$. Resolviendo para $\underline{v}$ en la desigualdad anterior obtenemos que $\underline{v} \geq -ah'^{-1}(ah'(\overline{v}))$. Los valores de utilidad que cumplen está segunda desigualdad estarán por encima de la función $f(\overline{v}) = -ah'^{-1}(ah'(\overline{v}))$. Veamos que la función $f(\overline{v})$ es estrictamente decreciente. Recordemos que la derivada de la inversa de una función es el reciproco de la derivada de la función original, tenemos

$$\begin{aligned} f'(\overline{v}) &= [-ah'^{-1}(ah'(\overline{v}))]' \\ &= -a^2 \frac{h''(\overline{v})}{h''(ah'(\overline{v})} < 0. \end{aligned}$$

Como h es estrictamente convexa entonces $h'' > 0$, por lo que la derivada de la función está bien definida y es estrictamente negativa por lo que es estrictamente decreciente.

Bajo este par de consideraciones, el conjunto de utilidades que cumplen con la condición

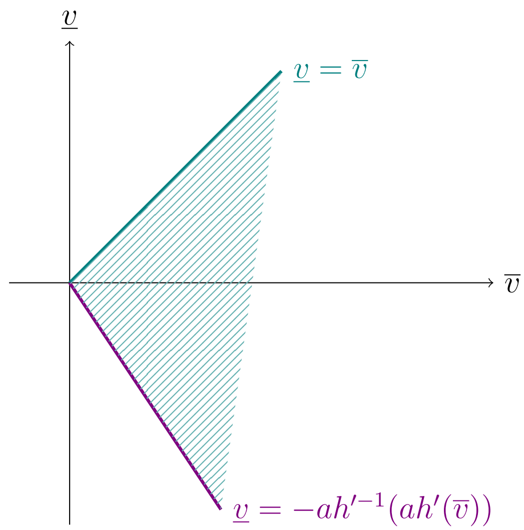

Figura 4.3: Conjunto de utilidades que cumplen la restricción de incentivos en igualdad

$H'(\overline{v}^*) > H'(\underline{v}^*)$ estarán estrictamente por arriba de la función $f(\overline{v})$ y estrictamente por debajo de la identidad $\underline{v} = \overline{v}$. En la Figura 4.3 se muestran los niveles de utilidad que hacen a la restricción de incentivos cumplirse en igualdad.

Una vez determinado el conjunto de utilidades que hacen a la restricción de incentivos cumplirse en igualdad, nos preguntamos si en la intersección de las restricciones ambos multiplicadores son estrictamente positivos. Si la respuesta es afirmativa, entonces el punto de intersección será un candidato a óptimo. Para ello, basta con comprobar que $\lambda > 0$ en este punto, es decir, que se cumple la desigualdad siguiente:

$$h'(\frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi) > \frac{1}{a}h'\left(\frac{\pi_0}{a\Delta\pi}\psi\right)$$

En cambio, si $\lambda = 0$ la restricción de incentivos puede no cumplirse en igualdad y la solución estará en la intersección de la función $f(\overline{v}) = -ah'^{-1}(ah'(\overline{v}))$ y la recta de participación, es decir, será el punto que soluciona el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} h'(\overline{v}) &= \frac{1}{a}h'\left(-\frac{\underline{v}}{a}\right) \\ \underline{v} &= -\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\overline{v} + \frac{\psi}{1-\pi_1} \end{aligned}$$

Se resumen el análisis anterior en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Consideremos un problema de riesgo moral estático con un agente averso a las perdidas. Si* $h'(\frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi) \geq \frac{1}{a}h'(\frac{\pi_0}{a\Delta\pi}\psi)$ *la intersección del conjunto de utilidades incentivo-factibles sobre la recta de participación y el conjunto de utilidades que hacen al multiplicador* $\lambda \geq 0$ *es diferente del vació y el contrato óptimo está dado por:*

$$\overline{v}^B = \frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi \tag{4.7}$$

$$\underline{v}^B = \frac{-\pi_0}{\Delta\pi}\psi \tag{4.8}$$

o por la solución al sistema

$$h'(\overline{v}^S) = \frac{1}{a}h'\left(-\frac{\underline{v}^S}{a}\right) \tag{4.9}$$

$$\underline{v}^S = -\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\overline{v}^S + \frac{\psi}{1-\pi_1} \tag{4.10}$$

El valor óptimo sera aquel par $(\overline{v}^*, \underline{v}^*)$ *de los dos casos anteriores que hace mínimo a* (4.4)*. Además, cuando* $h'(\frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi) < \frac{1}{a}h'(\frac{\pi_0}{a\Delta\pi}\psi)$ *no hay solución.*

4.3.1. Ejemplo

Para fijar ideas consideremos $u(t) = \log(t)$. Su inversa es $h(u) = \exp(u)$. Supongamos que el punto de referencia está en $t_R = 1$, de está manera el agente es adverso al riesgo para $t > 1$ y adverso a las perdidas para $t < 1$. Dicho de otra manera, para $t > 1$ su función de utilidad es cóncava y para $t < 1$ su utilidad es convexa. La definición de la función de utilidad con estás preferencias es:

$$v(t) = \begin{cases} \log(t) & \text{si } t > 1 \\ -a\log(2-t) & \text{si } t \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura 4.4 se muestran las funciones de los dos tipos de preferencia. La función $u(t)$ representa las preferencias estándar y $v(t)$ las preferencias con aversión a las perdidas.

Luego, la función de pagos es

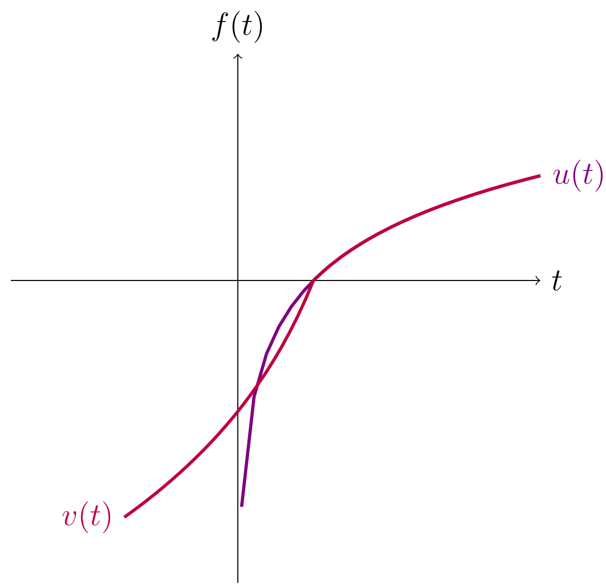

Figura 4.4: Comparación de las funciones de utilidad cóncava y con aversión a las perdidas.

$$H(v) = \begin{cases} \exp(v) & \text{si } v > 0 \\ 2 - \exp(-v/a) & \text{si } v \leq 0, \end{cases}$$

Y por consiguiente el pago marginal es

$$H'(v) = \begin{cases} \exp(v) & \text{si } v > 0 \\ \frac{\exp(-v/a)}{a} & \text{si } v \leq 0. \end{cases}$$

Supongamos una constante de aversión a las perdidas $a = 2.5$, desutilidad del esfuerzo $\psi = 1$ y probabilidades de producción alta y baja de $\pi_1 = 0.9$ y $\pi_0 = 0.3$, respectivamente. El momio de probabilidad de producción alta cuando se hace esfuerzo alto es $\frac{\pi_1}{1-\pi_1} = 9$. Tenemos dos candidatos a óptimos, el primero es

$$\overline{v}^B = 1.66$$
$$\underline{v}^B = -0.50,$$

y el segundo se encuentra al resolver el sistema

$$\exp(\overline{v}) = \frac{\exp(-\underline{v}/a)}{a}$$
$$\underline{v} = -\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\overline{v} + \frac{\psi}{1-\pi_1},$$

de donde se obtiene que

$$\overline{v}^S = 1.89$$
$$\underline{v}^S = -7.02.$$

Los pagos esperados que el principal debe entregar al agente cuando este último es adverso a las perdidas (ver Figura 4.4) son: $E_{\pi_1}[H(v^*)] = 4.81$ para el primer candidato y $E_{\pi_1}[H(v^*)] = 4.49$ para el segundo. Este último pago esperado minimiza el pago del principal y es la solución a su programa de optimización por lo que la solución es interior en la restricción de incentivos.

En contraste, el pago esperado con preferencias cóncavas (ver Figura 4.4) es $E_{\pi_1}[H(v^*)] = 4.79$. Observemos que a pesar de que el pago esperado en la intersección de las restricciones es mayor respecto a la teoría de prospectos, el hecho de que la restricción de incentivos no siempre se cumpla en igualdad abre la posibilidad de alcanzar pagos menores justo en utilidades donde $\lambda = 0$.

Capítulo 5

Modelo dinámico en dos periodos

En este capitulo introducimos el modelo dinámico en dos periodos (ver Laffont y Martimort (2002)) con un agente adverso a las perdidas. Presentamos las restricciones de participación y de incentivos de cada periodo e introducimos el concepto de *utilidad prometida* en la restricción de participación del segundo periodo. Dadas las restricciones planteamos el programa de optimización intertemporal que enfrenta el principal.

El enfoque de solución al programa del principal será a través de *programación dinámica*, en donde la variable de estado será la utilidad prometida al agente. Primero, resolveremos el subcontrato del segundo periodo con lo cual definiremos la función valor en este periodo como función de la utilidad prometida. Después, pasaremos al primer periodo y formularemos el problema en términos de la función valor. Del análisis de las condiciones de primer orden resultará que el pago marginal cumple con la propiedad de Martingala y además exhibe memoria. Finalmente presentamos un ejemplo para ilustrar el modelo.

5.1. Formulación del modelo

Consideramos ahora dos periodos indexados por $i = 1, 2$. Tenemos un agente con dos niveles de esfuerzo $e_i \in \{0, 1\}$, el esfuerzo produce una desutilidad $\psi(e_i)$ que está normalizada: $\psi(1) = \psi$ y $\psi(0) = 0$. El pago del agente es t_i y la utilidad descontada de sus pagos en ambos periodos es $U = v(t_1) - \psi(e_1) + \beta(v(t_2) - \psi(e_2))$, con $0 < \beta < 1$ el factor de descuento.

Hay nuevamente dos niveles de producción $q_i \in \{\bar{q}, \underline{q}\}$, estocásticos. El esfuerzo influye en la probabilidad de obtener una producción alta de forma que $\mathbb{P}(q_i = \overline{q}|e_i = 1) = \pi_1 > \pi_0 = \mathbb{P}(q_i = \overline{q}|e_i = 0)$. La diferencia de probabilidad de obtener una producción alta cuando se hace esfuerzo y cuando no es $\Delta\pi = \pi_1 - \pi_0 > 0$. Nótese que las probabilidades son estacionarias, es decir, no cambian con el periodo de tiempo considerado.

Un contrato en este contexto será el esquema de pagos, $\{t_1(q_1), t_2(q_1, q_2)\}$, con dos posibles valores para el primer pago y cuatro para el segundo pago. Estos pagos dependen de las realizaciones de los niveles de producción q_i. Para simplificar vamos a introducir la siguiente notación: para el primer periodo $t_1(\overline{q}) = \overline{t_1}$ y $t_1(\underline{q}) = \underline{t_1}$; y para el segundo periodo tenemos $t_2(q_1, \overline{q}) = \overline{t_2}(q_1)$ y $t_2(q_1, \underline{q}) = \underline{t_2}(q_1)$ para cualquier $q_1 \in \{\overline{q}, \underline{q}\}$.

Como en el modelo en un periodo, es conveniente formular el problema en el espacio de utilidades y no en el de pagos. Para ello vamos a expresar a los niveles de utilidad con la siguiente notación. En el primer periodo tenemos, $v(\overline{t_1}) = \overline{v_1}$ y $v(\underline{t_1}) = \underline{v_1}$. En el segundo, $v(\overline{t_2}(q_1)) = \overline{v_2}(q_1)$ y $v(\underline{t_2}(q_1)) = \underline{v_2}(q_1)$ para cualquier $q_1 \in \{\overline{q}, \underline{q}\}$.

Ahora, comencemos describiendo las restricciones en el segundo periodo. La restricción de participación debe asegurar la continuidad del contrato en el segundo periodo, para ello el principal debe ofrecer al agente un nivel de utilidad mínimo en cada uno de los posibles resultados de producción del primer periodo. A esta utilidad se le llama *utilidad prometida* y la denotaremos por $v_2(q_1)$. La restricción de participación de segundo periodo es

$$\pi_1\overline{v_2}(q_1) + (1 - \pi_1)\underline{v_2}(q_1) - \psi \geq v_2(q_1). \tag{5.1}$$

La restricción de incentivos es similar al caso estático:

$$\overline{v_2}(q_1) - \underline{v_2}(q_1) \geq \frac{\psi}{\Delta\pi}. \tag{5.2}$$

Nótese que las restricciones dependen de la realización de la producción en el primer periodo, q_1,y por lo tanto hay un par de restricciones para cada posible nivel de producción.

Pasemos al primer periodo. La restricción de participación debe asegurar que el agente quiera participar en los dos periodos de duración del contrato. Por ello se debe considerar su utilidad esperada de ambos periodos. A su vez, la utilidad en el segundo periodo es el valor esperado de su utilidad dado el nivel de producción en el primer periodo. De esta manera, se asegura que sea viable para el agente aceptar el contrato de largo plazo. Bajo estas consideraciones la restricción de participación es

$$\pi_1(\overline{v} + \beta(\pi_1\overline{v_2}(\overline{q}) + (1-\pi_1)\underline{v}_2(\overline{q}))) \\ + (1-\pi_1)(\underline{v} + \beta(\pi_1\underline{v_2}(\underline{q}) + (1-\pi_1)\underline{v}_2(\underline{q}))) - \psi(1+\beta) \geq 0 \quad (5.3)$$

La restricción de incentivos del primer periodo asegura que la utilidad intertemporal que obtiene el agente al ejercer esfuerzo en el primer periodo es mayor que la de no hacer esfuerzo.

$$\overline{v} + \beta(\pi_1\overline{v_2}(\overline{q}) + (1-\pi_1)\underline{v}_2(\overline{q})) - (\underline{v} + \beta(\pi_1\underline{v_2}(\underline{q}) + (1-\pi_1)\underline{v}_2(\underline{q}))) \geq \frac{\psi}{\Delta\pi} \quad (5.4)$$

Por último, el programa que el principal debe resolver es

$$\min_{\{\overline{v_1},\underline{v_1},\overline{v_2}(q_1),\underline{v_2}(q_1)\}} \{\pi_1\left[H(\overline{v_1}) + \beta(\pi_1 H(\overline{v_2}(\overline{q})) + (1-\pi_1)H(\underline{v_2}(\overline{q})))\right] \\ + (1-\pi_1)\left[H(\underline{v_1}) + \beta(\pi_1 H(\overline{v_2}(\underline{q})) + (1-\pi_1)H(\underline{v_2}(\underline{q})))\right]\} \quad (5.5)$$

sujeto a las restricciones de los periodos 1 y 2, es decir, a las desigualdades del (5.1) al (5.4).

El enfoque que tomaremos para resolver el problema será mediante programación dinámica. Primero, se resuelve el subcontrato del segundo periodo y con ello se obtiene el valor óptimo del pago esperado en dicho periodo. Después, se regresa al primer periodo y se expresa el problema original en términos del valor del segundo periodo y de las variables objetivo del primero.

5.2. El subcontrato del segundo periodo

El programa que el principal debe resolver para el segundo periodo es

$$\min_{\{\overline{v_2}(q_1),\underline{v_2}(q_1)\}} \{\pi_1 H(\overline{v_2}(q_1)) + (1-\pi_1)H(\underline{v_2}(q_1))\} \tag{5.6}$$

sujeto a las restricciones (5.1) y (5.2).

Nótese que los niveles de utilidad dependen del nivel de producción en el primer periodo. Por ello, para cada valor de q_1 se buscan los niveles de utilidad óptimos $\overline{v_2}(q_1)$ y $\underline{v_2}(q_1)$. Así al resolver el problema del principal en este periodo se obtienen cuatro valores de utilidad. De acuerdo al Teorema 1 hay dos candidatos, el primero es

$$\begin{aligned}\overline{v_2}^*(q_1) &= \frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi + v_2(q_1)\\ \underline{v_2}^*(q_1) &= \frac{-\pi_0}{\Delta\pi}\psi + v_2(q_1).\end{aligned}$$

y el segundo se obtiene de resolver

$$\begin{aligned}H'(\overline{v_2}^*(q_1)) &= H'(\underline{v_2}^*(q_1))\\ \pi_1\overline{v_2}^*(q_1) + (1-\pi_1)\underline{v_2}^*(q_1) &= v_2(q_1) + \psi.\end{aligned}$$

Supongamos que los niveles de utilidad óptimos del segundo periodo, para cada $q_1 \in \{\overline{q}, \underline{q}\}$, son

$$\begin{aligned}\overline{v_2}^*(q_1) &= \overline{v_2}^*(v_2(q_1))\\ \underline{v_2}^*(q_1) &= \underline{v_2}^*(v_2(q_1)).\end{aligned}$$

Observemos que las utilidades estarán en función de la utilidad prometida, $v_2(q_1)$, ya que en este periodo la utilidad prometida se toma como ex-ante y solo juega el papel de un parámetro. Además, cada par de valores de utilidad del segundo periodo dependen de la utilidad prometida dada la realización de la producción en el primer periodo. Es decir, cada posible realización de la producción en el primer periodo, genera un par de utilidades óptimas en el segundo.

Para finalizar con el análisis en este periodo, denotamos como $P_2(v_2(q_1))$ al valor del mínimo del pago esperado que el principal debe entregar al agente en el segundo periodo. El pago mínimo es función de la utilidad prometida para cada nivel de producción del primer periodo. Más precisamente, el pago esperado mínimo es el valor del programa (5.6) en sus valores óptimos:

$$P_2(v_2(q_1)) = \pi_1 H(\overline{v_2}^*(v_2(q_1))) + (1-\pi_1) H(\underline{v_2}^*(v_2(q_1))) \tag{5.7}$$

5.3. Contrato en el primer periodo

Una vez obtenido el pago óptimo del segundo periodo, nos movemos al primer periodo para expresar el problema original en términos de este valor óptimo. Con esto se busca reducir a una sola variable, $P_2(v_2(q_1))$, la generación de incentivos para el segundo periodo. El principal ahora busca los dos niveles de utilidad óptimos en el primer periodo y los dos valores de utilidad prometida para el segundo periodo. Entonces, reformulando el problema (5.5) y las restricciones (5.3) y (5.4) en términos de $P_2(v_2(q_1))$, el principal ahora debe resolver

$$\min_{\{\overline{v_1}, \underline{v_1}, v_2(\overline{q}), v_2(\underline{q})\}} \{\pi_1 \left[H(\overline{v_1}) + \beta P_2(v_2(\overline{q}))\right] + (1-\pi_1) \left[H(\underline{v_1}) + \beta P_2(v_2(\underline{q}))\right]\} \tag{5.8}$$

sujeto a:

$$\pi_1(\overline{v_1} + \beta v_2(\overline{q})) + (1-\pi_1)(\underline{v_1} + \beta v_2(\underline{q})) \geq \psi \tag{5.9}$$

$$\overline{v_1} + \beta v_2(\overline{q}) - (\underline{v_1} + \beta v_2(\underline{q})) \geq \frac{\psi}{\Delta\pi}, \tag{5.10}$$

las restricciones de participación y de incentivos, respectivamente.

Los dos candidatos a óptimos están determinados, por un lado, por la intersección de las restricciones (5.9) y (5.10):

$$\overline{v_1}^* = \frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi - \beta v_2(\overline{q})$$
$$\underline{v_1}^* = \frac{-\pi_0}{\Delta\pi}\psi - \beta v_2(\underline{q}),$$

y por el otro, por la solución al solución al sistema de ecuaciones siguiente:

$$H'(\overline{v_1}^*) = H'(\underline{v_1}^*)$$
$$\pi_1\overline{v_1}^* + (1-\pi_1)\underline{v_1}^* = \psi - \beta(\pi_1 v_2(\overline{q}) + (1-\pi_1)v_2(\underline{q})).$$

Los valores de utilidad óptimos quedarán en función de la utilidad prometida, $v_2(q_1)$. En el caso de la intersección de las restricciones es evidente que dependen negativamente de la utilidad prometida.

Por otra parte, los multiplicadores respecto a la utilidad del primer periodo son:

$$\mu = \pi_1 H'(\overline{v_1}^*) + (1-\pi_1)H'(\underline{v_1}^*)$$
$$\lambda = \pi_1(1-\pi_1)(H'(\overline{v_1}^*) - H'(\underline{v_1}^*)),$$

y respecto a la utilidad prometida:

$$\mu = \pi_1 P'(v_2^*(\overline{q})) + (1-\pi_1)P'(v_2^*(\underline{q}))$$
$$\lambda = \pi_1(1-\pi_1)(P'(v_2^*(\overline{q})) - P'(v_2^*(\underline{q}))).$$

Para que las expresiones de cada multiplicador respecto a la utilidad de primer periodo y respecto a la utilidad prometida se satisfagan tiene que ser cierto que $H'(\overline{v_1}^*) = P'(v_2^*(\overline{q}))$ y que $H'(\underline{v_1}^*) = P'(v_2^*(\underline{q}))$. Recordando la expresión (5.7) para $P(v_2(q_1))$ obtenemos las siguientes relaciones

$$H'(\overline{v_1}^*) = \pi_1 H'(\overline{v_2}^*(\overline{q})) + (1 - \pi_1) H'(\underline{v_2}^*(\overline{q})) \tag{5.11}$$

$$H'(\underline{v_1}^*) = \pi_1 H'(\overline{v_2}^*(\underline{q})) + (1 - \pi_1) H'(\underline{v_2}^*(\underline{q})) \tag{5.12}$$

Las ecuaciones anteriores muestran el primer hecho importante: el pago marginal del primer periodo debe ser igual al valor esperado del pago marginal en el segundo periodo. A la propiedad anterior se le conoce cómo *Propiedad de Martingala*. Debido a la aversión al riesgo y a las perdidas del agente, el principal reparte las recompensas y los castigos intertemporalmente para minimizar el costo de implementar un esfuerzo alto en el primer periodo. Podemos resumir las condiciones anteriores en la siguiente expresión

$$H'(v_1^*(q_1)) = E_{\pi_1}[H'(v_2^*(q_1))] \tag{5.13}$$

donde el subíndice en la esperanza nos dice que la esperanza está tomada respecto a la medida de probabilidad inducida por el esfuerzo alto. Nótese que las utilidades óptimas de ambos periodos estarán en función de la utilidad prometida y además dependen únicamente de la utilidad prometida en la correspondiente realización del nivel de producción.

Está observación refleja el segundo hecho importante: el contrato exhibe memoria en la realización del nivel de producción en el primer periodo. Pensado de otra manera, el contrato sigue la caminata aleatoria generada por la realización de la producción. Resumimos estás observaciones en la siguiente proposición.

Teorema 2. *En un problema de riesgo moral de dos periodos con preferencias dadas por la teoría de prospectos, el contrato óptimo exhibe memoria y además cumple la propiedad de Martingala, como en el caso estándar, ecuación* (5.13)*.*

Ahora, consideremos la Propiedad de Martingala descrita en las ecuaciones (5.11) y (5.12). Estás nos dicen que el principal busca trasladar utilidad entre periodos para minimizar su costo de inducir esfuerzo. La solución a la ecuación (5.11) determina la utilidad prometida óptima que debe ser transferida entre periodos cuando la producción del primer periodo es alta. El pago marginal a la izquierda de esta ecuación debe estar en la región de ganancias ya que es el pago cuando la producción alta en el primer periodo y obtiene su mayor pago. Los pagos marginales a la derecha de la igualdad, son una combinación entre utilidades en la región de ganancias y la región de perdidas.

Por otro lado, la ecuación (5.12) determina la utilidad prometida óptima que debe ser transferida entre periodos cuando la producción de primer periodo es baja. En este caso, el pago marginal del primer periodo puede estar en la región de ganancias o en la de perdidas y dependerá de cómo es la forma más eficiente de generar los incentivos en el agente. Intuitivamente, para asegurar la continuación del contrato en los dos periodos, el principal puede transferir los castigos del primer periodo al segundo. De esta manera, el pago en producción baja en el primer periodo puede estar en la región de ganancias y así el agente asegura un pago por encima de su referencia en el primer periodo. Podemos entender esto como una estrategia del principal para suavizar el pago del agente a lo largo del contrato y así asegurar la continuidad del contrato.

5.3.1. Ejemplo (Continuación)

Finalmente, consideremos las mismas condiciones del Ejemplo 4.3.1 y además $\beta = 0.97$. En el segundo periodo, con estás preferencias y constantes la solución que minimiza pago del principal será tal que $\lambda = 0$ (ver Teorema 1). Es decir, buscamos la solución al sistema siguiente

$$\begin{aligned}
\exp\left(\overline{v_2}(q_1)\right) &= \frac{\exp\left(-\underline{v_2}(q_1)/a\right)}{a} \\
\pi_1\overline{v_2}(q_1) + (1-\pi_1)\underline{v_2}(q_1) &= v_2(q_1) + \psi,
\end{aligned}$$

de dónde se obtiene que para el segundo periodo las utilidades óptimas son

$$\begin{aligned}
\overline{v_2}^*(q_1) &= 1.54v_2(q_1) + 1.89 \\
\underline{v_2}^*(q_1) &= -3.85v_2(q_1) - 7.02.
\end{aligned}$$

Ahora, buscamos las posibles utilidades óptimas para el primer periodo en función de las utilidades prometidas. Tenemos dos casos, el primero en la intersección de las restricciones que es

$$\overline{v_1}^* = 1.66 - 0.97v_2(\overline{q})$$
$$\underline{v_1}^* = -0.5 - 0.97v_2(\underline{q}),$$

y el segundo en las utilidades que solucionan el sistema de ecuaciones y es

$$\overline{v_1}^* = 1.89 - 0.34v_2(\overline{q}) - 0.15v_2(\underline{q})$$
$$\underline{v_1}^* = -7.02 + 3.36v_2(\overline{q}) + 0.37v_2(\underline{q}))).$$

Por otro lado, propiedad de Martingala nos proporciona el siguiente par de ecuaciones

$$\exp\left(\overline{v_1}^*\right) = \pi_1 \exp\left(\overline{v_2}^*(\overline{q})\right) + (1-\pi_1)\frac{\exp\left(-\underline{v_2}^*(\overline{q})/a\right)}{a}$$
$$\exp\left(\underline{v_1}^*\right) = \pi_1 \exp\left(\overline{v_2}^*(\underline{q})\right) + (1-\pi_1)\frac{\exp\left(-\underline{v_2}^*(\underline{q})/a\right)}{a}$$

Las utilidades prometidas se obtienen de resolver las ecuaciones anteriores sustituyendo las dos utilidades del segundo periodo ($\overline{v_2}^*(q_1)$ y $\underline{v_2}^*(q_1)$) y cada par de utilidades ($\underline{v_1}^*$ y $\underline{v_1}^*$) para el primer periodo. Sin embargo, para el segundo caso, la solución no es un numero real por lo que lo podemos descartar.

Para el primer caso, las utilidades prometidas son $v_2(\overline{q}) = -0.092$ y $v_2(\underline{q}) = -0.952$. Los pagos esperados para el segundo periodo son en $E_{\pi_1}[H(v_2^*(\overline{q})] = 3.933$ y $E_{\pi_1}[H(v_2^*(\underline{q})] = 0.135$, para producción alta y baja en el primer periodo respectivamente.

Con respecto a utilidad esperada se obtienen las utilidades prometidas siguientes: $v_2(\overline{q}) = 0.049$ y $v_2(\underline{q}) = -1.066$. Los pagos esperados para el segundo periodo son en $E_{\pi_1}[H(v_2^*(\overline{q})] = 5.049$ y $E_{\pi_1}[H(v_2^*(\underline{q})] = 1.710$, para producción alta y baja en el primer periodo respectivamente.

Por lo tanto, la combinación óptima de utilidades es implementar la solución interior en el segundo periodo e implementar la intersección en el primer periodo. El contrato óptimo respecto a la teoría de prospectos y con preferencias cóncavas se muestra a continuación:

Contrato	Prospectos	Cóncava
$\overline{v_1}^*$	1.748	1.613
$\overline{v_2}^*(\overline{q})$	1.748	1.709
$\underline{v_2}^*(\overline{q})$	-6.666	-0.451
$\underline{v_1}^*$	0.423	2.693
$\overline{v_2}^*(\underline{q})$	0.423	0.594
$\underline{v_2}^*(\underline{q})$	-3.354	-1.566

Tabla 5.1: Comparación del contrato óptimo

Del contrato anterior podemos hacer varias observaciones. La primera, la utilidad dado un resultado de producción del primer periodo se mantiene constante cuando el resultado del segundo periodo es de producción alta. Esto refleja la observación del Teorema 2 acerca de la memoria del contrato. Es decir, una vez obtenido un pago en el primer periodo, esté pago se mantendrá constante si se mantiene una producción alta. Segunda observación, los castigos son más severos en el segundo periodo que en el primero. En particular, con producción alta en el primer periodo, la utilidad del segundo periodo si la producción es baja es más severo que con producción baja en el primer periodo.

Finalmente, las utilidades prometidas transfieren utilidad del segundo al primer periodo para cualquier resultado de producción en el primer periodo, ya que las utilidades prometidas son negativas y entonces suman utilidad a la utilidad del primer periodo, recordemos que el primer caso es solución. Este resultado contrasta con lo que se obtiene con utilidad esperada ya que sólo en producción alta la utilidad es transferida al segundo periodo. La asignación óptima de utilidad resulta no ser la habitual ya que al tener signo negativo las utilidades prometidas se transfiere utilidad al primer periodo en detrimento del segundo.

Capítulo 6

Conclusiones

Se considera un problema de riesgo moral bajo preferencias dadas por al teoría de prospectos, es decir, se considera que el agente es adverso a las perdidas. Se solucionó el modelo estático y el dinámico para dos periodos. En el modelo estático, resulta que no siempre las restricción de incentivos se cumplen en igualdad, en contraste con el modelo con preferencias estándar. La relajación de la restricción de incentivos da lugar a dos candidatos a optimizar el contrato. La solución será interior cuando el pago esperado sea menor en este punto que el pago en la intersección de las restricciones. Por lo tanto, es posible proveer los mismos incentivos al agente a un costo menor que con preferencias estándar. En el modelo dinámico de dos periodos, se resolvió el problema mediante programación dinámica. Primero se resolvió el contrato en el segundo periodo, se obtuvieron los niveles de utilidad óptima que quedaron en función de la utilidad prometida y con ello se determinó el pago óptimo del segundo periodo. Con el pago esperado de este periodo se reescribió el programa del principal en el primer periodo. Se encontró que, al igual que con preferencias estándar, el contrato de largo plazo exhibe memoria y satisface la propiedad de Martingala. Finalmente, considerando un caso particular con una función de utilidad logarítmica se encuentra que los pagos óptimos se mantienen constantes una vez que se da la realización de la producción en el primer periodo, esto refleja la memoria del contrato.

Bibliografía

Abreu, Dilip, David Pearce y Ennio Stacchetti. 1990. «Toward a Theory of Discounted Repeated Games with Imperfect Monitoring». *Econometrica* 58 (5): 1041-1063. ISSN: 00129682, 14680262, visitado 9 de julio de 2023. http://www.jstor.org/stable/2938299.

Brenner, Steffen. 2015. «The Risk Preferences of U.S. Executives». *Management Science* 61 (6): 1344-1361. ISSN: 00251909, 15265501, visitado 14 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/24551476.

Harris, Milton, y Artur Raviv. 1979. «Optimal incentive contracts with imperfect information». *Journal of Economic Theory* 20 (2): 231-259. ISSN: 0022-0531. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90073-5. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053179900735.

Herweg, Fabian, Daniel Müller y Philipp Weinschenk. 2010. «Binary Payment Schemes: Moral Hazard and Loss Aversion». *The American Economic Review* 100 (5): 2451-2477. ISSN: 00028282, visitado 11 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/41038769.

Holmström, Bengt. 1979. «Moral Hazard and Observability». *The Bell Journal of Economics* 10 (1): 74-91. ISSN: 0361915X, 23263032, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/3003320.

Jofre, Alejandro, Sofia Moroni y Andrea Repetto. 2015. *Dynamic Contracts Under Loss Aversion.* Working Papers. Adolfo Ibáñez University, School of Government. https://EconPapers.repec.org/RePEc:uai:wpaper:wp_046.

Kahneman, Daniel, y Amos Tversky. 1979. «Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk». *Econometrica* 47 (2): 263-291. ISSN: 00129682, 14680262, visitado 11 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/1914185.

———. 1991. «Loss Aversion in Riskless Choice: A Reference-Dependent Model». *The Quarterly Journal of Economics* 106 (4): 1039-1061. ISSN: 00335533, 15314650, visitado 11 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/2937956.

Kanbur, Ravi, Jukka Pirttilä y Matti Tuomala. 2008. «Moral Hazard, Income Taxation and Prospect Theory». *The Scandinavian Journal of Economics* 110 (2): 321-337. ISSN: 03470520, 14679442, visitado 13 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/25195345.

Koszegi, Botond. 2014. «Behavioral Contract Theory». *Journal of Economic Literature* 52, n.º 4 (diciembre): 1075-1118. https://doi.org/10.1257/jel.52.4.1075. https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jel.52.4.1075.

Kszegi, Botond, y Matthew Rabin. 2006. «A Model of Reference-Dependent Preferences». *The Quarterly Journal of Economics* 121 (4): 1133-1165. ISSN: 00335533, 15314650, visitado 13 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/25098823.

———. 2007. «Reference-Dependent Risk Attitudes». *The American Economic Review* 97 (4): 1047-1073. ISSN: 00028282, visitado 13 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/30034084.

Laffont, Jean-Jacques, y David Martimort. 2002. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model.* Princeton University Press. ISBN: 9780691091846, visitado 11 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/j.ctv7h0rwr.

Lambert, Richard A. 1983. «Long-Term Contracts and Moral Hazard». *The Bell Journal of Economics* 14 (2): 441-452. ISSN: 0361915X, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/3003645.

Macera, Rosario. 2018. «Intertemporal incentives under loss aversion». *Journal of Economic Theory* 178:551-594. ISSN: 0022-0531. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jet.2018.10.003. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053118306458.

Malcomson, James M., y Frans Spinnewyn. 1988. «The Multiperiod Principal-Agent Problem». *The Review of Economic Studies* 55 (3): 391-407. ISSN: 00346527, 1467937X, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/2297391.

Meza, David de, y David C. Webb. 2007. «Incentive Design Under Loss Aversion». *Journal of the European Economic Association* 5 (1): 66-92. ISSN: 15424766, 15424774, visitado 11 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/40005161.

Mirrlees, James A. 1976. «The Optimal Structure of Incentives and Authority within an Organization». *The Bell Journal of Economics* 7 (1): 105-131. ISSN: 0361915X, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/3003192.

Radner, Roy. 1981. «Monitoring Cooperative Agreements in a Repeated Principal-Agent Relationship». *Econometrica* 49 (5): 1127-1148. ISSN: 00129682, 14680262, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/1912747.

Rogerson, William P. 1985. «Repeated Moral Hazard». *Econometrica* 53 (1): 69-76. ISSN: 00129682, 14680262, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/1911724.

Ross, Stephen A. 1973. «The Economic Theory of Agency: The Principal's Problem». *The American Economic Review* 63 (2): 134-139. ISSN: 00028282, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/1817064.

Spear, Stephen E., y Sanjay Srivastava. 1987. «On Repeated Moral Hazard with Discounting». *The Review of Economic Studies* 54 (4): 599-617. ISSN: 00346527, 1467937X, visitado 10 de junio de 2023. http://www.jstor.org/stable/2297484.

Índice de figuras

3.1. Función de utilidad cóncava 8
3.2. Función de utilidad con aversión a las perdidas 9
3.3. Función de pagos y efecto de la aversión a las perdidas 10
3.4. Derivada de la función de pagos. 10

4.1. Distribuciones de probabilidad de la producción inducidas por el esfuerzo ejercido . . 12
4.2. Conjunto de contratos incentivo factibles 14
4.3. Conjunto de utilidades que cumplen la restricción de incentivos en igualdad 17
4.4. Comparación de las funciones de utilidad cóncava y con aversión a las perdidas. . . . 19