TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMIA

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

EL COLEGIO DE MEXICO

EQUIVALENCIA DE RENTAS E IMPLEMENTACIÓN EN SUBASTAS DE BIENES HETEROGÉNEOS

LARISSA CAMPUZANO HERNÁNDEZ

PROMOCIÓN 1996-1998

JULIO, 1998

ASESOR: DR. ROBERTO BURGUET VERDE

Índice General

Resumen

En la primera parte del trabajo se hace una revisión de los resultados en teoría de subastas referentes a la implementación y a las rentas obtenidas por los participantes en una subasta. Para los casos de subastas de un solo bien se revisan los resultados obtenidos en Myerson (1981). Para subastas de varias unidades de un bien se tienen dos casos; el primero es con demandas unitarias (Maskin y Riley (1989)) en donde se obtienen generalizaciones de los resultados de implementación y del teorema de equivalencia de rentas; el segundo es cuando las demandas no necesariamente son unitarias, para este caso también se puede generalizar el teorema de equivelencia de rentas.

En la segunda parte del trabajo se analiza el caso de subastas de varios bienes no homogéneos. En este caso las condiciones de primer orden inducidas por la condición de compatibilidad con incentivos no se resuelven trivialmente, de hecho se prueba que para tener solución se tiene que cumplir, que las derivadas parciales cruzadas de las funciones de probabilidad de asignar un bien sean iguales. Esto nos permite tener condiciones necesarias para la implementación de subastas y hacer explicitas algunas de las condiciones que deben cumplir las funciones de probabilidad, para poder extender el teorema de equivalencia de rentas como lo hace Engelbrecht-Wiggans (1987).

1. Introducción

Una subasta es un conjunto de reglas explícitas que determinan la asignación y los precios de los recursos, basandose en pujas hechas por los posibles compradores. El caso más simple de subastas es cuando se subasta un solo bien entre compradores neutrales al riesgo, con valoraciones privadas e independientes. Para éste, Myerson (1981) obtiene las condiciones necesarias y suficientes para que las subastas sean implementables, esto es, todo posible comprador espera rentas no negativas por participar en la subasta y tiene incentivos a comportarse como lo predice su verdadera valoración. A partir de estas obtiene el "Teorema de Equivalencia de Rentas" que dice, que cualesquiera dos subastas que asignen el bien de la misma forma darán las mismas rentas esperadas al vendedor y a los posibles compradores[1].

Si pensáramos en subastar varios bienes en una sola subasta, ¿se podría extender el teorema de equivalencia de rentas? Siguiendo con los supuestos de posibles compradores neutrales al riesgo y con valoraciones privadas e independientes Maskin y Riley (1989) estudian el caso de subastas de más de una unidad del bien. Ellos caracterizan a las subastas implementables, cuando los posibles compradores demandan a lo más una unidad del bien, y extienden el teorema de equivalencia de rentas para este caso. Posteriormente Branco (1996) hace lo mismo para el caso de demandas no unitarias.

En el caso de subastas de K bienes no homogéneos, tomando compradores neutrales al riesgo y con valoraciones privadas e independientes, el mecanismo más tivial para subastar los bienes es realizar K subastas de un solo bien, sabemos que en éstas sí se cumple el teorema de equivalencia de rentas por lo tanto el teorema se extiende para este caso. Sin embargo,

[1] Sólo necesitamos que para alguna valoración, digamos la mínima, los jugadores esperen pagar lo mismo en las dos.

el vendedor no tiene porque limitarse a subastas independientes de los K objetos cabe pues, preguntarse hasta que punto podemos asegurar que cuando se haga una sola subasta y se tomen en cuenta las valoraciones de forma agregada suceda lo mismo.

En el siguiente trabajo se analiza esta situación y se llega a la conclusión de que sólo en ciertos casos se podrá generalizar el teorema de equivalencia de rentas, a subastas de K bienes. Se ha encontrado que las funciones que asignan la probabilidad de llevarse los distintos bienes, tienen que cumplir necesariamente que sus derivadas parciales cruzadas sean iguales para que la subasta sea implementable, y en este caso el teorema de equivalencia de rentas también es válido. Engelnrecht-Wiggans (1988) también estudió la extensión del teorema de equivalencia de rentas, pero no dió explicitamente las condiciones de regularidad que deberían cumplir las funciones de probabilidad para la extensión del teorema. En este trabajo se encuentran explicitamente algunas de estas condiciones, lo que complementa su estudio.

2. Revisión de resultados anteriores en teoría de subastas

2.1. Subastas de un sólo bien

Supongamos que se quiere vender un bien y se tienen varios posibles compradores cuyas disponibilidades a pagar por el bien pueden ser desconocidas. Una subasta es un conjunto de reglas explícitas que determinan la asignación y el precio del bien sobre la base de las pujas que hacen los posibles compradores. Para estudiar los modelos de subastas tomaremos primero el más simple, éste supone agentes neutrales al riesgo, con valoraciones privadas e independientes y simétricos.

Cada comprador i tiene una cierta valoración del bien, que denotaremos por v_i. El comprador es el único que conoce su valoración. Para los demás compradores ésta es una variable aleatoria. Supongamos que los compradores piensan que la variable aleatoria se distribuye de acuerdo con cierta función denotada por $F_i : [\underline{v}_i, \overline{v}_i] \to [0,1]$ donde $\underline{v}_i$ y $\overline{v_i}$ son las valoraciones mínima y máxima posibles. Si los compradores son simétricos, entonces $F_i = F : [\underline{v}, \overline{v}] \to [0,1]$ para toda $i = 1, ..., N$. Hablamos de valoraciones privadas e independientes cuando las distintas v_i se distribuyen independientemente.

En una subasta se tienen que definir reglas que determinarán la asignación del bien y el precio del mismo basándose en las pujas o, en general, acciones hechas por los posibles compradores. La puja de cada comprador dependerá en general de cuanto valore el bien. Un ejemplo de subasta es la subasta inglesa, en la que los posibles compradores hacen sus pujas de manera ascendente y oral hasta que alguien ofrezca un precio que no es superado por ningún otro comprador, en cuyo momento se otorga el bien a este comprador y al precio ofrecido en su puja. Sin embargo, existen muchos otros mecanismos posibles.

En su forma más abstracta, una subasta es un mecanismo indirecto de asignación en el cual cada posible comprador tiene un conjunto de acciones S_i y ciertas funciones de resultados;

$$\widehat{\rho}(S) \ : \ S_1 \times \cdots \times S_N \to \mathbb{R}^N$$
$$\widehat{\psi}(S) \ : \ S_1 \times \cdots \times S_N \to \mathbb{R}^N$$

que describen el pago de cada uno de los participantes y quien se llevará el bien, todo ello como función de las acciones elegidas por los compradores. Éstos eligirán sus acciones de acuerdo con su valoración. Una estrategia para un comprador será entonces una función $\widehat{s_i}(\cdot) : [\underline{v}, \overline{v}] \rightarrow S_i$.

De entre todos los mecanismos definidos en esta forma, denominamos *mecanismos directos de asignación* a aquéllos en que los posibles compradores tienen como conjunto de estrategias, el conjunto de sus posibles valoraciones. Es decir, se pide al comprador que revele su valoración y se determinan los pagos y asignaciones en función de éstos valores revelados. En nuestro caso, un mecanismo directo es pues, un conjunto de funciones, $\{\rho_i(v), \psi_i(v)\}_{i=1,2,\ldots,N}$, que determinan el pago que el participante i hará al vendedor $\rho_i(v)$ y la probabilidad con la que se llevará el bien $\psi_i(v)$, donde $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)$, $\sum_{i=1}^{N} \psi_i(v) \leq 1$ y N es el número de posibles compradores. Como se había notado anteriormente el comprador i no conoce la valoración de los demás compradores, que son para él variables aleatorias. Es por esto que, para decidir qué valor revelará, deberá tomar en cuenta el valor esperado de las funciones de pago y de probabilidad. Por lo tanto, definamos $V_{-i} = \times_{j \in N, \, j \neq i} [\, \underline{v}_j, \overline{v_j}]$ y

$$p_i(v_i) = E_{v-i}[\rho_i(v)] = \int_{V_{-i}} \rho_i(s_1, ..., v_i, ...s_N) \; dF_1(s_1)...dF_{i-1}dF_{i+1}...dF_N(s_N)$$

$$x_i(v_i) = E_{v-i}[\psi_i(v)] = \int_{V_{-i}} \psi_i(s_1, ..., v_i, ...s_N) \, dF_1(s_1)...dF_{i-1}dF_{i+1}...dF_N(s_N)$$

$p_i(v_i)$ y $x_i(v_i)$ son las funciones de pago esperado por entrar en la subasta y la probabilidad esperada de ganar la subasta, respectivamente. Notemos que si los compradores son simétricos entonces $[\underline{v}_i, \overline{v}_i] = [\underline{v}, \overline{v}]$ y $F_i = F$ para toda $i = 1, ..., N$.

Las funciones que acabamos de definir dependen sólo de la valoración del comprador y son estas funciones las que tomará en cuenta un posible comprador para decidir qué estratégia usará. En los mecanismos directos las distintas estrategias $s_i(\cdot)$ para cada uno de los posibles compradores consisten en revelar un cierto valor para cada valoración real v_i esto es, $s_i(\cdot) : [\underline{v}, \overline{v}] \rightarrow [\underline{v}, \overline{v}]$.

Dado un mecanismo directo de asignación, si la estrategia $s_i^*(v_i) = v_i$, para cada posible comprador i, (revelar la verdadera valoración) es una estrategia de equilibrio, entonces diremos que el mecanismo es un *mecanismo directo de revelación.*

El siguiente resultado, tradicionalmente atribuido a Myerson (1981), simplifica el estudio de mecanismos en general y de subastas en particular.

Principio de Revelación: Dado un mecanismo indirecto de asignación existe un mecanismo directo de revelación que da a los posibles compradores y al vendedor las mismas rentas esperadas que el mecanismo indirecto[2].

La idea intuitiva detrás de la prueba es que si en el mecanismo indirecto la estrategia $s_i^*(v_i)$ es de equilibrio introduciendo un mediador que diga a cada comprador: "dime tu valoración y yo te asigno el bien de acuedo a $s_i^*(\cdot)$ y al mecanismo indirecto", entonces lo que cada posible comprador hará será revelar su verdadera valoración v_i.

El principio de revelación nos premite restringir nuestra atención, para el estudio de subastas, a mecanismos directos de revelación. Es decir, a mecanismos $\{\rho_i(v), \psi_i(v)\}_{i=1,2,\ldots,N}$ tales que, la verdadera valoración maximize las rentas esperadas de cada posible comprador, ésta es la llamada *restricción de compatibilidad con los incentivos;*

$$x_i(s_i^*(v_i))v_i - p_i(s_i^*(v_i)) \geq x_i(s_i(v_i))v_i - p_i(s_i(v_i))$$

[2]La prueba se encuentra en Dasgupta, Hammond y Maskin (1979). Esta versión es de Myerson (1981).

para toda $s_i(\cdot) : [\underline{v}, \overline{v}] \rightarrow [\underline{v}, \overline{v}]$, para toda $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$ y para toda $i = 1, ..., N$ donde $s_i^*(v_i) = v_i$.

Los posibles compradores pueden decidir participar o no en la subasta. Para que todos los posibles compradores estén dispuestos a participar en ella, las rentas esperadas deberán ser no negativas, ya que no participando tienen rentas esperadas iguales a cero. De esto obtenemos la *restricción de participación;*

$$x_i(s_i(v_i)v_i - p_i(s_i(v_i)) \geq 0 \tag{2.1}$$

para toda $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$.

Si un mecanismo cumple con las restricciones de compatibilidad con incentivos y de participación diremos que es *implementable.*

Estas condiciones y el principio de revelación definien, por lo tanto, el conjunto de mecanismos que un vendedor posee a la hora de vender un bien.

Ahora comenzaremos el estudio de las rentas esperadas para el vendedor y los compradores en cada uno de los mecanismos. Como inicio daremos un resultado muy celebrado en teoría de subastas.

Teorema de Equivalencia de Rentas: Con agentes neutrales al riesgo y valoraciones privadas e independientes, si dos subastas (implementables) asignan el bien de la misma forma, esto es, tienen funciones $x_i(\cdot)$ iguales, entonces el vendedor y los posibles compradores esperan las mismas rentas en ambas subastas, dado que para alguna valoración cada comprador espere las mismas rentas en ambas subastas.

Generalmente la última condición se reduce a que los pagos esperados por los compradores, si tienen valoración mínima, sean iguales a cero en las dos subastas. Ya que de esta forma, si la probabilidad de llevarse el bien para las valoraciones mínimas es cero, entonces las rentas esperadas en ambas subastas son iguales a cero.

Demostración: Ya vimos que nos podemos restringir a mecanismos directos de revelación. Si tenemos una subasta implementable, entonces la verdadera valoración de cada posible comprador maximiza sus rentas y de las condiciones de primer orden tenemos

$$\begin{aligned} [x_i'(s_i)v_i - p_i'(s_i)]|_{s_i=v_i} &= 0 \\ x_i'(v_i)v_i - p_i'(v_i) &= 0 \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Integrando 2.2 obtenemos

$$p_i(v_i) = \int_{\underline{v}}^{v_i} s x_i'(s) ds + p_i(\underline{v}) \qquad (2.3)$$

esto indica que el pago sólo depende de la función de probabilidad $x_i(\cdot)$ y de la condición inicial dada por $p_i(\underline{v})$. Sabemos que algún jugador espera ganar lo mismo en las dos subastas, supongamos que éste es el jugador con valoración $\underline{v}$[3]. Esto implica que $p_i(\underline{v})$ es igual en ambas subastas y entonces la función de pago también es igual en las dos subastas. Por lo tanto las rentas esperadas por los posibles compradores

$$x_i(v_i)v_i - p_i(v_i)$$

[3]Si no es así, simplemente integramos desde la valoración que tenga el jugador, que obtiene las mismas rentas en las dos subastas, hasta v_i.

y los beneficios esperados del vendedor

$$\Sigma_{i=1}^{N}[\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} p_i(s_i)\ dF_i(s_i)]$$

son iguales en ambas subastas, y es en este sentido que decimos que las subastas son equivalentes. ■

Este resultado además de ser interesante por sí mismo es de gran utilidad para el estudio de subastas, ya que nos permite reducir los mecanismos de asignación al estudio de las funciónes $x_i(\cdot)$ $(i = 1, ...N)$ que determinarán los pagos $p_i(\cdot)$. Muchas veces necesitamos saber cuál es la mejor forma de vender un bien, esto es, la que dé más rentas al vendedor (subasta óptima). Gracias al teorema de equivalencia de rentas la solución de este problema se reduce a encontrar una función de asignación de probabilidades que maximize las rentas esperadas del vendedor.

Recordemos que los resultados anteriores están basados en el modelo más simple de subastas en donde se vende solamente un bien. Ahora analizaremos el caso de subastas que vendan K bienes.

2.2. Subastas de K bienes homogéneos

Supongamos que se quiere vender K bienes homogéneos con N posibles compradores neutrales al riesgo, simétricos, con valoraciones privadas e independientes y $K < N$. Ahora tendremos que tomar en cuenta cómo son las demandas de los posibles compradores y dependiendo de como sean éstas los resultados variarán. Primero estudiaremos el caso más simple, que es el de demandas unitarias para luego entrar al caso de demandas no unitarias.

Supongamos que los posibles compradores tienen demandas unitarias, es decir, valoran la primera unidad del bien en v_i y las demás unidades no tienen valor marginal para él. Usando el principio de revelación podemos identificar subastas con mecanismos directos de asignación, $\{\rho_i(v), \psi_i(v)\}_{i=1,2,...,N}$, que determinan el pago que el participante i hará al vendedor $\rho_i(v)$, y la probabilidad con la que se llevará un bien $\psi_i(v) \in [0,1]$, donde $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)$, $\sum_{i=1}^{N} \psi_i(v) \leq K$ y N es el número de posibles compradores[4]. Los posibles compradores sólo conocen sus valoraciones, por lo que escogerán su estrategia basándose en los valores esperados, condicionados en su propia valoración, de las funciones $\rho_i(v)$ y $\psi_i(v)$. De esta manera

$$p_i(v_i) = E_{v-i}[\rho_i(v)] = \int_{V_{-i}} \rho_i(s_1, ..., v_i, ...s_N)\, dF_1(s_1)...dF_{i-1}dF_{i+1}...dF_N(s_N)$$

$$x_i(v_i) = E_{v-i}[\psi_i(v)] = \int_{V_{-i}} \psi_i(s_1, ..., v_i, ...s_N)\, dF_1(s_1)...dF_{i-1}dF_{i+1}...dF_N(s_N)$$

son el pago esperado en la subasta y la probabilidad esperada de llevarse una unidad del bien.

Las restricciones de participación y de compatibilidad con incentivos son iguales que en el caso de un bien, 2.1 y 2.2, entonces la extensión del teorema de equivalencia de rentas es trivial, ya que se vuelve a obtener 2.3, con lo que las funciones de pago sólo dependen de la probabilidad de llevarse el bien y de una ciertas condiciones iniciales. Por lo que, si dos subastas asignan el bien de la misma forma, y para alguna valoración los compradores esperan las mismas rentas en ambas subastas, entonces las dos subastas serán equivalentes.

[4]Notemos que lo único que cambia, con respecto al caso anterior, es la función de probabilidad.

Notemos que al tener varios bienes para vender, las subastas pueden ser secuenciales o simultáneas, pero el teorema de equivalencia de rentas es independiente de esta característica.

Supongamos ahora que los posibles compradores pueden tener demandas no unitarias, $h(q, v_i)$ es la función inversa de demanda donde q representa el número de unidades del bien y v_i parametriza las preferencias del comprador. Además supongamos que $h(\cdot)$ es decreciente en q y creciente y derivable en v_i.

Por el principio de revelación una subasta es equivalente a un mecanismo directo de asignación; $\{\rho_i(v), \psi_i(v)\}_{i=1,2,\ldots,N}$, que determina el pago que el participante i hará al vendedor $\rho_i(v)$, y el número de unidades del bien que se llevará $\psi_i(v) \in [0,1]$, donde $v = (v_1, v_2, \cdots, v_N)$, $\sum_{i=1}^{N} \psi_i(v) \leq K$.

Definamos $R_i(z, v_i)$ como

$$R_i(z, v_i) = E[\int_0^{\psi_i(v_{-i},z)} h(q, v_i)\, dq]$$

esta función repesenta las rentas netas que el comprador i espera ganar si se comporta como si z fuera el valor que parametriza sus preferencias, siendo que el verdadero valor es v_i. Las rentas esperadas para cada posible comprados son;

$$R_i(z, v_i) - p_i(z)$$

Entonces para que el mecanismo sea compatible con los incentivos, se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial R_i}{\partial z}(v_i, v_i) - p_i'(v_i) = 0$$

De aquí que la asignación del bien y las N condiciones iniciales son las que determinan el pago esperado por los posibles compradores. Por lo tanto, el teorema de equivalencia de rentas se extiende también a este caso.

3. Implementación y rentas en subastas de K bienes heterogeneos

Supongamos que se quieren vender K bienes no homogéneos y tenemos N posibles compradores sin restricción presupuestaria significativa. El comprador i tendrá una cierta valoración $v_{i\,j}$ del bien j, denotaremos por $v_i = (v_{i\,1}, \cdots, v_{i\,K})$ al vector de valoraciones del comprador i. Al igual que en el caso de un sólo bien, las valoraciones del comprador son información privada y para los demás ésta es una variable aleatoria, en este caso un vector de variables aleatorias que se distribuye con una función conjunta $F_i(s_{i1}, \cdots, s_{iK})$: $[\underline{v}_{i\,1}, \overline{v}_{i\,1}] \times \cdots \times [\underline{v}_{i\,K}, \overline{v}_{i\,K}] \to [0, 1]$ donde $\underline{v}_{i\,j}$ y $\overline{v}_{i\,j}$ son las valoraciones mínima y máxima posibles del comprador i por el bien j. Supongamos que los compradores son simétricos, esto es, $F_i = F : [\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K] \to [0, 1]$ para toda $i = 1, ..., N$. Además supongamos que los vectores de valoraciones son independientes, es decir, se distribuyen independientemente.

Por el principio de revelación podemos restringirnos, para el estudio de subastas, a estudiar mecanismos directos de asignación que cumplan las restricciones de participación y compatibilidad de incentivos. Los mecanismos serán conjuntos de funciones $\{\rho_i(v), \psi_i(v)\}_{i=1,2,\ldots,N}$ que determinan el pago que el participante i hará al vendedor,

$$\rho_i(v) : ([\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K])^N \to \mathbb{R}$$

y la probabilidad con la que se llevará cada bien j,

$$\psi_i(v) : ([\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K])^N \to [0,1]^K$$

donde $v = (v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1K}, \cdots\cdots, v_{N1}, v_{N2}, \cdots, v_{NK})$ es el vector de valoraciones de todos los compradores por los K bienes. Como los jugadores son simétricos

$([\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K])^N = [\underline{v}_{11}, \overline{v}_{11}] \times \cdots \times [\underline{v}_{1K}, \overline{v}_{1K}] \times \cdots \times [\underline{v}_{N1}, \overline{v}_{N1}] \times \cdots \times [\underline{v}_{NK}, \overline{v}_{NK}]$.

Además $[0,1]^K = [0,1]_1 \times \cdots \times [0,1]_K$ y $(\sum_{i=1}^N \psi_i(v))_j \leq 1$ para $j = 1, ..., K$ y en notación vectorial ($(\sum_{i=1}^N \psi_i(v))_j$ es la entrada j del vector $\sum_{i=1}^N \psi_i(v)$).

El comprador i no conoce las valoraciones de los demás compradores, que son para él variables aleatorias. Es por esto que, para tomar sus decisiones, deberá tomar en cuenta el valor esperado de las funciones de pago y de probabilidad. Sean $V_{-i} = \times_{j \in N, \, , j \neq i}([\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K])^N$

$$p_i(v_i) = E_{v-i}[\rho_i(v)] = \int_{V_{-i}} \rho_i(s_1, ..., v_i, ...s_N)\, dF(s_1) \cdots dF(s_{i-1}) dF(s_{i+1}) \cdots dF(s_N)$$

$$x_i(v_i) = E_{v-i}[\psi_i(v)]) = \int_{V-i} \psi_i(s_1, ..., v_i, ...s_N)\, dF(s_1) \cdots dF(s_{i-1}) dF(s_{i+1}) \cdots dF(s_N)$$

esto es, $p_i(v_i) : [\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K] \to \mathbb{R}$ y $x_i(v_i) : [\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K] \to [0,1]^K$ son las funciones de pago esperado por entrar en la subasta y la probabilidad esperada de ganar los K bienes respectivamente. De esta manera obtenemos funciones que dependen sólo de su vector de valoraciones..

Ahora la *estrategia* del comprador i será revelar un cierto vector de valoraciones, digamos $s_i = (s_{i1}, ..., s_{iK}) \in [\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K]$, que determinará su renta esperada $x_i(s_i) \cdot v_i - p_i(s_i)$, donde v_i es su verdadero vector de valoraciones y $x_i(s_i) \cdot v_i = \sum_{j=1}^{K}(x_i(s_i))_j v_{ij}$ es el producto punto de vectores.

De la misma forma que en el caso anterior, tenemos que imponer ciertas restricciones de participación y de compatibilidad de incentivos al mecanismo. La primera es que el valor esperado de las rentas sea no negativo para todos los compradores, esto es, para toda $i = 1, ..., N$

$$x_i(v_i) \cdot v_i - p_i(v_i) \geq 0.$$

La segunda es que el mecanismo tiene que ser tal que revelar su verdadera valoración maximizará las rentas esperadas. Esto es, si $v_i = (v_{i1}, ..., v_{iK})$ es su veradera valoración esta tiene que ser solución del problema

$$Max_{z_i=(z_{i1},...,z_{in})} \sum_{j=1}^{k}(x_i(z_i))_j v_i - p_i(z_i)$$

o equivalentemente, para $j = 1, ..., K$, v_{ij} debe solucionar

$$Max_{z_{ij}} \sum_{j=1}^{k}(x_i(v_{i1}, ..., z_{ij}, ..., v_{iK}))_j v_i - p_i(v_{i1}, ..., z_{ij}, ..., v_{iK})$$

Si las funciones del mecanismo son derivables, podemos dar las restricciones de compatibilidad como condiciones de primer orden del problema anterior, que son para toda $i = 1, ..., N$ las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_i(v_i))_1}{\partial v_{i1}} v_{i1} + \cdots + \frac{\partial(x_i(v_i))_K}{\partial v_{i1}} v_{iK} &= \frac{\partial p_i(v_i)}{\partial v_{i1}} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial (x_i(v_i))_1}{\partial v_{iK}} v_{i1} + \cdots + \frac{\partial (x_i(v_i))_K}{\partial v_{iK}} v_{iK} = \frac{\partial p_i(v_i)}{\partial v_{iK}}$$

donde $v_i = (v_{i1}, ..., v_{iK})$ y $(x_i(v_i))_j$ es la entrada j del vector $x_i(v_i)$.

De cada i obtenemos K ecuaciones. La pregunta es, bajo qué condiciones existe una función $p_i(v_i) : [\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K] \to \mathbb{R}$ tal que sus derivadas parciales cumplan con las K ecuaciones anteriores, o lo que es lo mismo encontrar bajo qué condiciones el campo $H = (\frac{\partial (x_i(v_i))_1}{\partial v_{i1}} v_{i1} + \cdots + \frac{\partial (x_i(v_i))_K}{\partial v_{i1}} v_{iK}, \cdots, \frac{\partial (x_i(v_i))_1}{\partial v_{iK}} v_{i1} + \cdots + \frac{\partial (x_i(v_i))_K}{\partial v_{iK}} v_{iK})$ es conservativo.

Engelbrecht-Wiggans (1988) encuentró una ecuación equivalente a las K ecuaciones encontradas aquí, ya que utilizó una parametrización de una curva en el campo y sobre ésta derivó la condición de primer orden. Para resolver esta ecuación necesita que una cierta integral de linea sea independiente de la trayectoria, lo que se puede reducir también a pedir que el campo H sea conservativo. Enggelbrecht-Wiggans da por hecho que ésto sucede, lo cual no necesariamente es cierto, como veremos más adelante.

Con técnicas de cálculo integral en campos vectoriales podemos encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial $G(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sea conservativo, es decir, exista una función derivable y continua $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla \Phi = (\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_n}) = (G_1(x), ..., G_n(x)) = G$. Para esto necesitamos que las funciones con las que trabajemos sean derivables continuas (clase $\mathcal{C}^1$). Por lo tanto, de ahora en adelante trabajaremos con mecanismos $\{\rho_i(v), \psi_i(v)\}_{i=1,2,...,N}$ que sean de clase $\mathcal{C}^1$.

Teorema 1. *Sea G un campo vectorial continuo y derivable definido en un dominio D, y* *sean A y B cualesquiera dos puntos en D. Entonces la integral de línea*

$$\int_A^B G \cdot dR = \int_A^B G_1 dx_1 + \cdots + G_n dx_n$$

es independiente de la trayectoria que une A y B si y sólo si existe una función derivable y continua $\Phi(\cdot) : D \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = G$.

Demostración: Supongamos que G es un campo conservativo, esto implica que existe una función derivable y continua $\Phi(\cdot) : D \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = G$, esto es $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x) = G_1(x), ..., \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(x) = G_n(x)$

Sean $x^0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ y $x^1 = (x_{11}, ..., x_{1n})$ dos puntos en D y sea $R(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ $(a \leq t \leq b)$ una curva suave C que une a x^0 y x^1. Por la definición de integral de línea

$$\begin{aligned}
\int_C G \cdot dR &= \int_C G_1 dx_1 + \cdots + G_n dx_n \\
&= \int_a^b (\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x)\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(x)\frac{dx_n}{dt})dt \\
&= \int_a^b \frac{d\Phi}{dt} dt \\
&= \Phi(x_1(t), ..., x_n(t)) \mid_a^b \\
&= \Phi(x_{11}, ..., x_{1n}) - \Phi(x_{01}, ..., x_{0n})
\end{aligned}$$

De aquí que el valor de la integral de $G = \nabla\Phi$ es simplemente la diferencia de los valores de Φ en los extremos de la curva, sin importar cómo sea ésta. Por lo tanto, si G es un campo vectorial conservativo su integral de línea no depende de la trayectoria.

Ahora suponga que la integral $\int_C G \cdot dR$ es independiente de la trayectoria. Sea $x^0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ un punto fijo en D. Para cualquier punto $x = (x_1, ..., x_n)$ construimos el campo escalar definido por la integral

$$\Phi(x) = \int_{x^0}^{x} G_1(s_1, ..., s_n)ds_1 + \cdots + G_n(s_1, ..., s_n)ds_n \tag{3.2}$$

sobre cualquier curva suave en D que una x^0 y x. A continuación se demostrará que el gradiente de esta función es igual a G, esto es $\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1} = G_1(x), ..., \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_n} = G_n(x)$.

Como la integral definida por 3.2 no depende de la trayectoria podemos elegir cualquier camino que una a x^0 y x, en particular uno que llegue hasta las últimas $n-1$ coordenadas de x y después, dejando estas fijas, sólo mueva la primera para llegar a x. Por la aditividad de las integrales podemos escribir la integral Φ como sigue:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_{(x_{01},...,x_{0n})}^{(z_1,x_2,...,x_n)} G \cdot dR + \int_{(z_1,x_2,...,x_n)}^{(x_1,x_2,...,x_n)} G \cdot dR \\
&= \Phi(z_1, x_2, ..., x_n) + \int_{(z_1,x_2,...,x_n)}^{(x_1,x_2,...,x_n)} G \cdot dR \\
&= \Phi(z_1, x_2, ..., x_n) + \int_{z_1}^{x_1} G_1(s_1, x_2, ..., x_n)ds_1
\end{aligned}$$

La tercera igualdad se da por que al permanecer constantes las últimas $n-1$ coordenadas $ds_i = 0$ para toda $i \neq 1$. Y derivando $\Phi(x)$ con respecto a x_1 obtenemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x) = G_1(x_1, ..., x_n)$$

de manera análoga se obtiene $\frac{\partial\Phi}{\partial xi}(x) = G_i(x_1, ..., x_n)$ para toda $i = 1, ..., n$, y así G es un campo conservativo. ■

Ya tenemos condiciones necesarias y suficientes para que exista la función $p(v_i)$ que necesitábamos, pero saber si la integral de línea no depende de la trayectoria es algo muy difícil de probar, y nos gustaría tener condiciones más fáciles de verificar en la práctica. En física es un problema común comprobar si un campo es conservativo en $\mathbb{R}^3$. Lo que haremos a continuación será generalizar la forma de resolver estos problemas en física para el caso de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2. *Sea G un campo vectorial derivable y con derivada continua en un domino convexo D. La integral $\int_C G \cdot dR$ es independiente de la trayectoria C en D si y sólo si $\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(x)$ para toda $i \neq j$, e $i = 1, ..., n$.*

Demostración: Suponga que las derivadas parciales cruzadas son iguales, esto es $\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(x)$ para toda $i \neq j$, e $i = 1, ..., n$. Escoja un punto $x^0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ en D y defina un campo escalar $\Phi(x)$ como la integral de línea de G de x^0 a x (en D) sobre el segmento de línea que los une, que por ser convexo está totalmente contenida en D. El segmento de línea está dado por $R = x^0 + (x - x^0)t$ $(0 \leq t \leq 1)$, y $\frac{dR}{dt} = x - x^0$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_0^1 G(s_1, ..., s_n) \cdot \frac{dR}{dt} dt \\
&= \int_0^1 G(s_1, ..., s_n) \cdot (x - x^0) dt \\
&= \int_0^1 [G_1(s_1, ..., s_n)(x_1 - x_{01}) + \cdots + G_n(s_1, ..., s_n)(x_n - x_{0n})] dt
\end{aligned}$$

donde $s_i = x_{0i} + (x_i - x_{0i})t$. Habrá que verificar que la función Φ es tal que $\nabla\Phi = G$.

Derivando Φ con respecto a x_1 obtenemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x) = \int_0^1 [t\frac{\partial G_1}{\partial s_1}(x_1 - x_{01}) + \cdots + t\frac{\partial G_n}{\partial s_1}(x_n - x_{0n})]dt + \int_0^1 G_1(s_1, ..., s_n)dt \qquad (3.3)$$

como las derivadas parciales cruzadas son iguales

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial s_1}(x_1 - x_{01}) + \cdots + \frac{\partial G_n}{\partial s_1}(x_n - x_{0n}) &= \frac{\partial G_1}{\partial s_1}(x_1 - x_{01}) + \cdots + \frac{\partial G_1}{\partial s_n}(x_n - x_{0n}) \\ &= \nabla G_1(s_1, ..., s_n) \cdot (x - x^0) \end{aligned}$$

Definamos $g(t) = G_1(s_1, ..., s_n)$, y notemos que $g(1) = G_1(x_1, ..., x_n)$. Entonces por la regla de la cadena

$$g'(t) = \nabla G_1(s_1, ..., s_n) \cdot (x - x^0)$$

con lo que 3.3 se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x) &= \int_0^1 tg'(t)dt + \int_0^1 g(t)dt \\ &= \int_0^1 (g(t)t)'dt \\ &= g(1) = G_1(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

Análogamente podemos probar que $\frac{\partial\Phi}{\partial xi}(x) = G_i(x_1, ..., x_n)$ para toda

$i = 1, ..., n$, y por el teorema anterior la integral de línea no depende de la trayectoria.

Supongamos que la integral de línea no depende de la trayectoria, construyamos el mismo campo escalar que en el teorema anterior

$$\Phi(x) = \int_{x^0}^{x} G_1(s_1, ..., s_n)ds_1 + \cdots + G_n(s_1, ..., s_n)ds_n$$

como ya se había demostrado se cumple que $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x) = G_i(x)$. Ya que G tiene derivadas continuas también se cumple

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_i}(x) &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(x) \end{aligned}$$

para toda $i \neq j$ e $i = 1, ..., n$. ■

De esta manera obtenemos condiciones necesarias y suficientes para que exista la función $p(v_i)$ que son más fáciles de verificar. Regresando al problema original calculamos las derivadas parciales cruzadas

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \sum_{z=1}^{K} \frac{\partial^2 (x_k)_z}{\partial v_j \partial v_i} v_z + \frac{\partial (x_k)_j}{\partial v_i}$$

donde $(x_k)_z$ es la entrada z del vector x_k. Para que $\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}$ se tiene que cumplir

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{K} \frac{\partial^2 (x_k)_z}{\partial v_j \partial v_i} v_z + \frac{\partial (x_k)_j}{\partial v_i} &= \sum_{z=1}^{K} \frac{\partial^2 (x_k)_z}{\partial v_i \partial v_j} v_z + \frac{\partial (x_k)_i}{\partial v_j} \\ \frac{\partial (x_k)_j}{\partial v_i} &= \frac{\partial (x_k)_i}{\partial v_j} \end{aligned}$$

que se reduce a pedir que las derivadas parciales cruzadas de las funciónes $x_k(v_i)$ sean iguales para toda $i = 1, ..., K$ con $i \neq j$ y para toda $k = 1, ..., N$.

De las demostraciones de los teoremas anteriores sabemos cómo calcular la función de pago $p(v_i)$ que será la integral de línea

$$\begin{aligned} p(v_i) &= \int_{v^0}^{v_v} [\frac{\partial(x_i(s))_1}{\partial v_{i1}} v_{i1} + \cdots + \frac{\partial(x_i(s))_K}{\partial v_{i1}} v_{iK}]\, ds_1 + \cdots + \\ & [\frac{\partial(x_i(s))_1}{\partial v_{iK}} v_{i1} + \cdots + \frac{\partial(x_i(s))_K}{\partial v_{iK}} v_{iK}]\, ds_K \end{aligned}$$

sabemos que si cumple que las derivadas parciales son iguales $\frac{\partial x_j}{\partial v_i} = \frac{\partial x_i}{\partial v_j}$, esta integral no dependerá de la trayectoria. Lo que en nuestro problema significa que el pago sólo depende de la valoración v_i y de un cierto valor v^0 que puede ser $\underline{v} = (\underline{v}_1, ..., \underline{v}_K)$, y no de la trayectoria que usemos para unirlos. De aquí tenemos que el pago es una función bien definida y depende sólo de las funciones que asignan la probabilidad de llevarse el bien $x_i(v_i)$. Hemos obtenido el primer resultado de este trabajo que se puede resumir en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Si un mecanismo de asignación $\{\rho_k(v), \psi_k(v)\}_{k=1,2,\ldots,N}$, que determina el pago que el participante i hará al vendedor y la probabilidad con la que se llevará el bien j por medio de las funciones*

$$\rho_k(v) : ([\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K])^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi_k(v) : ([\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K])^N \rightarrow [0,1]^K$$

respectivamente y donde las funciones $\rho_k(v), \psi_k(v)$ son de clase C^1, es implementable entonces las derivadas parciales cruzadas de las funciones $x_k(\cdot) : [\underline{v}_1, \overline{v}_1] \times \cdots \times [\underline{v}_K, \overline{v}_K] \rightarrow [0,1]^K$, *definidas como*

$$x_k(v_k) = E_{v-k}[\psi_k(v)]) = \int_{V-k} \psi_k(s_1, ..., v_k, ...s_N)\, dF(s_1) \cdots dF(s_{k-1}) dF(s_{k+1}) \cdots dF(s_N)$$

donde $v_k = (v_1, v_2, ..., v_K)$ *es el vector de valoraciones del comprador* i *por los* K *bienes, son iguales, esto es,*

$$\frac{\partial (x_k)_j}{\partial v_i} = \frac{\partial (x_k)_i}{\partial v_j} \tag{3.4}$$

para toda $i = 1, ..., K$ *con* $i \neq j$ *y para toda* $k = 1, ..., N$, *donde* $\frac{\partial (x_k)_i}{\partial v_j}$ *denota a la derivada parcial con respecto a* v_j *de la* i' *ésima entrada del campo* x_k.

Un corolario de este resultado, es la extensión del teorema de equivalencia de rentas al caso de subastas de K bienes heterogéneos.

Al igual que en subastas de un solo bien tendremos que las rentas esperadas de los compradores y del vendedor serán iguales en dos subastas que asignen los bienes de la misma forma (si para alguna valoración se paga lo mismo en las dos subastas)[5]. Por lo tanto, el teorema de equivalencia de rentas sí se puede generalizar a mecanismos implementables de K bienes heterogéneos. Las condiciones 3.4 podrían ser interpretadas como sigue, el cambio en la valoración del bien i afecta a la probabilidad de asignar el bien j de la misma forma que afectará un cambio en la valoración del bien j a la asignación del bien i.

Proposición 2. *Si dos subastas de* K *bienes heterogéneos son implementables, asignan el bien de la misma forma y para alguna valoración los compradores esperan las mismas rentas*

[5]Esto es equivalente a que K condiciones inicales, dadas por $\int_{v_o}^{v_i} \sum_{z=1}^{K} \frac{\partial (x_k)_z}{\partial v_i}(v_1, ..., s_z, ..., v_K) s_z ds_z$,sean iguales en ambas subastas para algún v_0

en las dos, entonces las subastas son equivalentes.

En el caso más trivial, en él que la subasta de los K bienes se realiza como K subastas diferentes, tendremos que $\frac{\partial (x_k)_i}{\partial v_{ij}} = 0$ para toda $j = 1, ..., K$ con $i \neq j$ y para toda $k = 1, ..., N$. Entonces se cumple la condición de las derivadas parciales cruzadas iguales y asi también el teorema de equivalencia de rentas, lo que concuerda con lo que se concluyó en las subastas de un sólo bien.

4. Conclusiones

En este trabajo se encontró que la venta de K bienes heterogéneos es implementable por un mecanismo directo de asignación sólo si en el mecanismo el cambio en la valoración del bien i afecta a la probabilidad de asignar el bien j de la misma forma en que afectará un cambio en la valoración del bien j a la asignación del bien i. Ésto complementa el resultado de Engelbrecht-Wiggan dando explicitamente algunas de las condiciones de regularidad que tienen que cumplir las funciones de probabilidad para que se cumpla el teorema de equivalencia de rentas.

En resumen, hemos encontrado las condiciones necesarias para que un mecanismo de asignación de K bienes heterogéneos sea implementable. Con esta base pretendemos trabajar en el futuro para definir condiciones suficientes que seguramente tendrán que ver con monotonía de las funciónes de probabilidad. Estos resultados harán posible el estudio de subastas óptimas para el caso de K bienes heterogéneos.

Referencias

[1] Branco F. (1996) "Multiple Unit Auctions of an Indivisible Good", Economic Theory, vol. 8, pp 77-101.

[2] Burguet R. (1998) "Auction Theory; A guided tour", Working Paper.

[3] Dasgupta P., Hammond P., y Maskin E. (1979) "The implementation of social choice rules: Some general results on incentive compatibility", Review of Economic Studies vol. 46 pp 185-216.

[4] Engelbrecht-Wiggans R. (1988) "Revenue Equivalence in Multi-object Auctions", Economics Letters, 26, pp 15-19.

[5] Maskin E. and Riley (1989) "Optimal Multi-unit Auctions". in Hahn F. (ed), The Economics of Missing Markets, Information and Games, Oxford Iniversity Press.

[6] McAfee P. and McMillan J. (1987) "Auctions and Bidding", Journal of Economic Literature, vol. 25, pp 699-738.

[7] McAfee P. and McMillan J. (1993) "The Declining Price Anomaly", Journal of Economic Theory, vol. 60, pp. 191-212.

[8] Myerson R. (1981) "Optimal Auction Design", Mathematics of Operations Research, vol. 6, pp. 58-73.

[9] Young E. "Vector and Tensor Analysis", A Series of Monographs and Textbooks Marcel Dekker, Inc, 1978.