EL COLEGIO DE MÉXICO

Centro de Estudios Económicos

COMPRA-VENTA EN JUEGOS DE ASIGNACIÓN

Tesis presentada por
Alfredo Salgado Torres
Para obtener el grado de Maestro en Economía
Promoción 2005-2007

Director de tesis
Dr. David Cantalá

México, D.F.
27 de junio de 2007

Agradecimientos

Agradezco a todos aquellos que directa o indirectamente me apoyaron en la realización de trabajo de tesis y en general durante el tiempo que estuve en El Colegio de México.

En especial agradezco a mis padres Armando Salgado Reséndiz y Josefina Torres Juárez, sin ellos no hubiera sido posible nada de lo que ahora tengo.

Al profesor David Cantalá por haber aceptado dirigir mi trabajo de tesis.

Y en especial a Araceli Martínez Pérez por su apoyo, consejos y todo lo que he aprendido con ella en este tiempo.

Resumen

En el presente trabajo se presenta un sencillo modelo por medio del cual se demuestra que en un mercado cuyos agentes poseen dotaciones iniciales de bienes diferenciados e indivisibles y dinero dados exógenamente, siempre es posible alcanzar una asignación estable en el sentido del núcleo. Para la demostración se construyo un procedimiento que resume la forma en la que deben darse las transacciones para siempre alcanzar este resultado, el cual llamamos algoritmo de compra-venta.

También se demuestra que cuando los agentes no tienen restricciones de presupuesto el resultado de la aplicación del algoritmo no solamente es estable sino también eficiente.

Índice

1. Introducción……………………………………………….5

2. El modelo………………………………………………..8

3. Problemática……………………………………………...10

4. Algoritmo de compra-venta……………………………….12

   4.1 Algoritmo de compra-venta………………………...13

   4.2 Funcionamiento del algoritmo……………………..15

5. Resultados………………………………………………...17

6. Observaciones…………………………………………..….23

7. Conclusiones…………………………………………..…26

8. Bibliografía…………………………………………….….28

1. Introducción

Shapley y Shubick (1972) sientan las bases de la teoría de los juegos de asignación. Básicamente estudian un modelo de mercado con dos conjuntos de agentes disjuntos (compradores y vendedores) y unidades de bienes indivisibles que son intercambiadas por dinero. Es posible aplicarlo a mercados de automóviles, casas, etc. Los agentes ofertan y demandan exactamente una unidad de bien. Las valoraciones de diferentes individuos por el mismo bien pueden ser distintas y la utilidad es identificada con el dinero. El valor de una coalición par es igual a la suma de la valoración por un bien del comprador menos el precio de reserva del vendedor, el valor de una coalición mayor a un par es igual a la suma de las valoraciones por pares que la integran. Lo que se busca en este problema es maximizar el valor de las coaliciones de agentes, es decir las ganancias del comercio. Los autores demuestran la existencia de asignaciones de núcleo por medio de técnicas de programación lineal.

En su modelo de mercado de trabajo, Kelso y Crawford (1982) demuestran la existencia de una asignación de equilibrio estable por medio de un mecanismo de puja creciente. El modelo consta de dos conjuntos, uno de trabajadores y otro de empresas, es un modelo *many-to-one*, lo que quiere decir que las empresas pueden contratar conjuntos de trabajadores, pero cada trabajador puede estar sólo con una empresa. La utilidad de los trabajadores depende de la empresa con la que trabajan y del salario que reciben, a su vez los beneficios de las empresas dependen de la combinación de trabajadores que contraten y de los salarios que paguen. Los trabajadores buscan maximizar su utilidad y las empresas sus beneficios. El mecanismo parte de la situación en la cual existe un conjunto de salarios de reserva para los trabajadores y el hecho de que es redituable para todas las empresas contratar a todos los trabajadores y, el supuesto de sustitución bruta entre subconjuntos de trabajadores. Kelso y Crawford (1982) diseñan un algoritmo que es utilizado para la demostración de existencia de asignaciones de núcleo.

La problemática que en este trabajo se pretende resolver es muy intuitiva. Supongamos que tenemos un grupo de individuos con dotaciones iniciales de bienes indivisibles y dinero. De acuerdo con sus preferencias podrían estar dispuestos a intercambiar de tal forma que mejoren utilizando el dinero para realizar sus transacciones, sin embargo no es obvio cual es la mejor forma en la que pueden realizar sus compras y ventas de tal forma que siempre alcancen un resultado estable. Las diferencias con respecto al modelo de Shapley y Shubick son varias, por ejemplo nuestro modelo es *many to one*, existe un sólo conjunto de agentes y además se considera que la cantidad de dinero que poseen es limitada. Además a diferencia de Kelso y Crawford consideramos que compras y ventas pueden ser realizadas por el mismo agente.

La mayoría de los bienes en la vida real son indivisibles, de tal forma que las aplicaciones de éste modelo son muy variadas, por ejemplo podemos pensar en los mercados de bienes de segunda mano y en general en cualquier mercado multiproducto en el cual los agentes están dispuesto a vender y comprar sus bienes a ciertos precios.

En éste trabajo se presenta un mecanismo que ayuda a encontrar el conjunto de asignaciones estables y Pareto eficientes de economías constituidas por un número finito de agentes, bienes y dinero, para cualquier asignación inicial de bienes y dinero dada exógenamente. La asignación inicial de cada agente puede considerarse como su dotación inicial, la pregunta clave de este problema es ¿existen asignaciones que sean al menos tan preferidas como las dotaciones iniciales de cada agente? Y en caso de existir ¿Cuál es el procedimiento adecuado para encontrarlas?

El algoritmo de compra-venta, que se presenta posteriormente es un procedimiento sistemático para encontrar el conjunto de asignaciones estables y Pareto eficientes de una economía con las características mencionadas.

Básicamente tratamos un problema de juegos de asignación donde cada agente puede hacer compras y ventas en distintas etapas del algoritmo.

Los resultados básicos a los que llegamos se resumen en los Teoremas 1 y 2. En esencia se demuestra por medio de un algoritmo de compra-venta, que en un mercado que parte de cualquier asignación individualmente racional dada exógenamente, el conjunto de asignaciones estables es no vació. Además, bajo el supuesto de que los agentes no tienen restricciones presupuestarias (lo que en esencia significa que tienen desde el inicio hasta el final del proceso suficiente dinero para comprar la canasta de bienes que más prefieren) se demuestra en el Teorema 2 que el resultado del algoritmo de compra-venta es eficiente.

La estructura del trabajo es como sigue. En la sección 2 de este trabajo se presenta el modelo formal del problema de compra-venta. La sección 3 presenta la problemática económica a la que nos enfrentamos y muestra porque es necesario construir el algoritmo de compra-venta. En la sección 4 presentamos el algoritmo de compra-venta, un procedimiento sistemático que nos ayuda a encontrar el conjunto de asignaciones estables dada cualquier asignación inicial dada exógenamente. En la sección 5 se presenta las demostraciones de las proposiciones principales de este trabajo, los Teoremas 1 y 2 con los que básicamente se demuestra que el conjunto de asignaciones estables es no vació y bajo el supuesto de que no hay restricciones presupuestarias siempre se alcanza un resultado eficiente. La sección 6, muestra algunas propiedades de las asignaciones alcanzadas con el algoritmo y el hecho de que el mecanismo esta sujeto a manipulaciones. Por último se presentan las conclusiones.

2. El modelo

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de agentes y $X = \{1, 2, \ldots, m\}$ el conjunto de bienes. A cada agente $a_i \in A$ le es asignado un subconjunto de bienes $X(i) \subseteq X$ y una cantidad de dinero no negativa m_i, abusando un poco de la notación hablamos del agente i en lugar de a_i, aclarando cuando sea requerido. La siguiente definición especifica lo que es una asignación: una regla que asocia los bienes y el dinero al conjunto de agentes.

Definición 1: *Una asignación es una función, es decir* $a_i \mapsto \langle X(i), m_i \rangle$ *tal que* $X(i) \cap X(j) = \phi$ *para* $\forall a_i, a_j \in A$. .

La definición 1 implica que un bien solo puede pertenecer a un agente. Denotemos $\Gamma(i) \equiv \langle X(i); m_i \rangle$ como la asignación del agente a_i en Γ. Se define la utilidad de una asignación en términos monetarios. Cada agente asocia un número entero no negativo $\alpha_i^k \geq 0$ a cada bien $k \in X$, interpretado como su valoración monetaria. La utilidad asociada a la asignación $\Gamma(i)$ es una función aditiva en las valoraciones de los bienes y el dinero de la forma:

$$U(\Gamma(i)) = \sum_{k \in X(i)} \alpha_i^k + m_i$$

Sea U un perfil de utilidades de los agentes que pertenecen a A. Un mercado de asignación es una tripleta $\langle A, X, U \rangle$. Por ejemplo supongamos que tenemos los conjuntos de agentes $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y bienes $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ y la cantidad de dinero total $m = 15$. Los perfiles de utilidad corresponden a todas las posibles asignaciones que se pueden tener con tres bienes, una matriz de valoraciones y tales que la suma de las cantidades de dinero individuales sea igual a 15. De acuerdo con esto un mercado de asignación para este caso es la tripleta $\langle\{a_1, a_2, a_3\}, \{1,2,3\}, \{U_1(\bullet),\ U_2(\bullet),\ U_3(\bullet)\}\rangle$.

Las siguientes definiciones describen las propiedades deseables de una asignación. La siguiente definición simplemente aclara en que condiciones los agentes no están dispuestos a deshacerse de los bienes de los que consta su asignación. Si ningún agente esta dispuesto a renunciar a los bienes de su asignación se dice que esta es individualmente racional, formalmente:

Definición 2: *Una asignación* Γ *es individualmente racional si para todo agente* $a_i \in A$ *y todo bien* $k \in \Gamma(i)$ *se tiene.* $\alpha_i^k \geq 0$.

Otra propiedad deseable de una asignación es que una vez establecida sea racionalmente individual, y no haya agentes que envidien las asignaciones de otros y además estén en posibilidad de intercambiar de tal forma que mejoren. Esto se conoce como estabilidad, formalmente se tiene lo siguiente:

Definición 3: *Se dice que una asignación* Γ *es estable si para todo agente es individualmente racional y no existe una par de agentes* (a_i, a_j) *y un bien* $k \in X(i)$, *tales que* $(\alpha_j^k, m_j) > \alpha_i^k$. *.*

Por último se estable la eficiencia como otra propiedad deseable, en resumen una asignación es Pareto eficiente si no existe otra asignación factible con la que sea posible mejorar a algún agente sin empeorar la situación de otro, formalmente tenemos:

Definición 4: *Una asignación es Pareto eficiente si no existe otra asignación* Γ' *con* $\sum_{a_i \in N} m_i = \sum_{a_i \in N} m_i'$, *, tal que* $U(\Gamma'(i)) \geq U(\Gamma(i)) \; \forall a_i \in A$ *y* $U(\Gamma'(i)) > U(\Gamma(i))$ *para algún* $a_i \in A$ *.*

3. Problemática

Supongamos que existe una asignación inicial Γ dada exógenamente, la cual puede no ser ni estable ni eficiente. La problemática principal es determinar un procedimiento adecuado que nos garantice obtener una asignación que tenga estas dos propiedades. A continuación presentamos un ejemplo de un mecanismo de asignación (el mecanismo es una variación del *Top Trading Cycle Mechanism*) que no resuelve el problema, tomemos el mercado de asignación $\langle A, X, U \rangle$, con la siguiente especificación:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $m = 15$ y la asignación inicial Γ tal que para cada agente especifica:

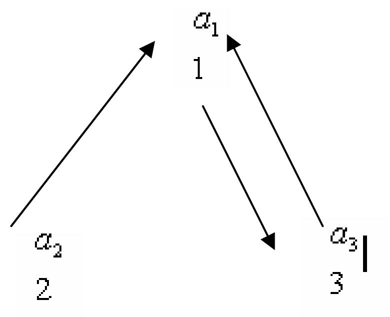
$\Gamma(1) = \langle 1;6 \rangle$, $\Gamma(2) = \langle 2;5 \rangle$ y $\Gamma(3) = \langle 3;4 \rangle$, la matriz de valoraciones de los agentes es:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde las columnas corresponden a los agentes y los renglones a los bienes.

Supongamos que los agentes hacen intercambios bilaterales de tal forma que señalan al agente que tiene el bien que más desean, si forman un ciclo lo intercambian, dan una transferencia monetaria que compense la pérdida de utilidad y salen del mercado, de acuerdo con lo anterior el siguiente diagrama resume los señalamientos.

Fig. 1



La asignación que resulta con esta regla es $\Gamma(1) = \langle 3;6 \rangle$, $\Gamma(2) = \langle 2;5 \rangle$ y $\Gamma(3) = \langle 1;4 \rangle$. Y las utilidades de los agentes son $U(\Gamma(1)) = 12$, $U(\Gamma(2)) = 6$ y $U(\Gamma(3)) = 8$.

Sin embargo, la asignación resultante no es estable debido a que el agente 1 tiene una valoración mayor por el bien dos que la del agente 2 y además tiene el suficiente dinero para compensar la perdida de utilidad y, el agente 2 tiene una valoración mayor que el agente 3 por el objeto 1 y puede cubrir la perdida de utilidad con el dinero que tiene, entonces una mejor asignación es $\Gamma(1) = \langle 3,2;4 \rangle$, $\Gamma(2) = \langle 1;2 \rangle$ y $\Gamma(3) = \langle \phi;9 \rangle$, la cual es estable y todos los agentes mejoran de acuerdo con las utilidades $U(\Gamma(1)) = 15$, $U(\Gamma(2)) = 8$ y $U(\Gamma(3)) = 9$.

El ejemplo anterior muestra la problemática principal que enfrentamos, en general buscamos un proceso sistemático que nos ayude a encontrar el conjunto de asignaciones estables y Pareto eficientes, para cualquier mercado de asignación que tenga como punto de partida cualquier asignación inicial dada exógenamente.

El problema económico es muy intuitivo, un conjunto de agentes con dotaciones iniciales podrían no estar del todo satisfechos con sus asignaciones, de tal forma que maximicen utilidad sujetos a sus presupuestos, entonces podrían recurrir a un proceso de compra venta de tal forma que las asignaciones resultantes sean al menos tan buenas como las iniciales y al final no estén dispuestos a cambiar su asignación, es decir asignaciones estables y eficientes.

En la siguiente sección se presenta el algoritmo de compra-venta, un proceso sistemático que nos ayuda a encontrar el conjunto de asignaciones estables de mercados de asignación que parten de una asignación inicial individualmente racional.

4. Algoritmo de compra-venta

En esta sección presentamos formalmente el algoritmo de compra-venta, un proceso que sistemáticamente determina el conjunto de asignaciones estables de un mercado que parte de cualquier asignación inicial dada exógenamente.

Este algoritmo es un proceso en el cual los agentes compran subconjuntos de bienes secuencialmente, básicamente define como se determinan los precios de venta de cada etapa y como un agente decide sus compras dados los precios y una restricción presupuestaria.

El proceso define como se determinan las asignaciones de cada etapa para el agente que realiza compras y como cambian las asignaciones de los agentes que venden. Tres son los conceptos esenciales de este algoritmo, el de precio de venta, los conjuntos de bienes aceptables y de bienes alcanzables para cada agente en la etapa que le toca decidir sus compras. Así el agente compra, dados los precios de venta, un subconjunto de bienes alcanzables que maximiza su utilidad.

En general lo que algoritmo genera es una secuencia de pares bloqueadores y, precios de venta que sistemáticamente crecen en cada etapa de tal forma que el conjunto de bienes alcanzables para cada agente se hace cada vez más pequeño hasta que converge al conjunto vació, es decir un conjunto de precios tales que ningún agente esta dispuesto o no puede pagarlos para adquirir dichos bienes.

A continuación se presenta el algoritmo formal en tres partes: 1. Punto de partida: El mercado de asignación y la asignación inicial, 2. Condiciones iniciales: En la cual se determina las asignaciones por etapa, la forma en la que se definen los precios de venta y el conjunto de bienes aceptables y 3. Iteración: Se define como un agente decide sus compras, como se redefinen los precios de venta y los conjuntos de bienes alcanzables y como cambian las asignaciones de los demás agentes que no hacen compras.

4.1 Algoritmo de compra-venta

1. Punto de partida:

    a. Dado un mercado de asignación $\langle A, X, U \rangle$ se tiene una asignación inicial Γ.

2. Condiciones iniciales:

    a. Sea Γ^t la asignación de la etapa t tal que $X^t(i)$ y m_i^t son el conjunto de bienes y la cantidad de dinero asignados al agente a_i en la etapa t, en particular $\Gamma = \Gamma^0$. .

    b. $\forall k \in X$ el precio de venta en la etapa t se define como $r_k^t = \alpha_i^k + 1$ en donde. $k \in X^t(i)$

    c. Para cada $a_i \in A$: sea $B_i^0 = \{k \in X - X^0(i) : \alpha_i^k \geq 0\}$ el conjunto de bienes aceptables inicial, en general el conjunto de bienes aceptables para el agente a_i en la etapa t es B_i^t.

    d. Para t=0 se tiene una asignación inicial Γ^0, para todo $\forall k \in X$ un precio de venta igual a $r_k^0 = \alpha_i^k + 1$ donde $k \in X^0(i)$. .

3. Iteración:

a. Para toda etapa $t \geq 1$ se selecciona un agente $a_i \in A$ que realiza o no compras de acuerdo con las siguientes reglas.

b. $\forall a_i \in A$ sea

$$C_i^t = \left\{ k \in C \subseteq B_i^{t-1} : \sum_{k \in c} r_k^{t-1} \leq m^t, \quad \alpha_i^k > r_k^{t-1} \quad \forall k \in C \subseteq B_i^{t-1} \right\}$$

el conjunto de bienes alcanzables. El agente a_i compra los bienes $\overline{C}_i^t \subseteq C_i^t$ tal que

$$\sum_{k \in \overline{C}} \alpha_i^k - \sum_{k \in \overline{C}} r_k \geq \sum_{l \in C'} \alpha_i^l - \sum_{l \in C'} r_l \quad \forall C' \subseteq C_i^t$$

.

c. La asignación del agentes a_i que compra bienes en alguna etapa t es $\Gamma^t(i)$ con $X^t(i) = X^{t-1}(i) \cup \overline{C}_i^t$ y $m_i^t = m_i^{t-1} - \sum_{k \in \overline{C}} r_k^{t-1}$. Para todo $a_j \neq a_i$ si $X^{t-1}(j) \cap \overline{C}_i^t = \phi$ implica que $\Gamma^t(j) = \Gamma^{t-1}(j)$, de otra forma $X^t(j) = X^{t-1}(j) - \left(X^{t-1}(j) \cap \overline{C}_i^t\right)$ y $m_j^t = m_j^{t-1} + \sum_{k \in X^{t-1}(j) \cap \overline{C}_i^t} r_k^{t-1}$.

d. Los precios de venta se redefinen de acuerdo con la siguiente regla $r_k^t = r_k^{t-1} \;\; \text{si} \;\; k \notin \overline{C}_i^t$ o $r_k^t = \alpha_i^k + 1 \;\; \text{si} \;\; k \in \overline{C}_i^t$. Además $B_i^t = B_i^{t-1} - \overline{C}_i^t$ y $B_j^t = B_j^{t-1}$ para todo $a_j \neq a_i$.

e. Sea $CV(\Gamma^0)$ el resultado del algoritmo de compra-venta. Si $\forall a_i \in A$, $\forall k \in B_i^{t-1}$ en alguna etapa t se tiene que $\min\{m_i^t, \alpha_i^k\} \leq r_k^t$ o $\forall a_i \in A$ se tiene $B_i^{t-1} = \phi$, entonces el algoritmo se detiene y $CV(\Gamma^0) = \Gamma^t$. Si no se repite el proceso.

4.2 Funcionamiento del algoritmo

En esta sección mostramos como funciona el algoritmo. Para dar seguimiento retomemos el ejemplo dado anteriormente, sea el mercado de asignación $\langle A, X, U \rangle$, con la siguiente especificación:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $m = 15\ 4$, y la asignación inicial Γ tal que para cada agente especifica:

$\Gamma(1) = \langle 1,6 \rangle$, $\Gamma(2) = \langle 2,5 \rangle$ y $\Gamma(3) = \langle 3,4 \rangle$. La matriz de valoraciones de los agentes es:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

T=0

$\Gamma^0(1) = \langle 1;6 \rangle$, $\Gamma^o(2) = \langle 2;5 \rangle$ y $\Gamma^0(3) = \langle 3;4 \rangle$ los precios de venta son $r_1^0 = 2$, , $r_2^0 = 2$ y $r_3^0 = 2$ con las utilidades $U(\Gamma^0(1)) = 7$, $U(\Gamma^0(2)) = 6$ y y $U(\Gamma^0(3)) = 5$. .

T=1

- Se selecciona al agente 1, de tal forma que $B_1^1 = \{2,3\}$ y y $C_1^1 = \{2,3\}$.
- El agente 1 compra los bienes 2 y 3 debido a que juntos le dan mayor utilidad que por separado.
- Por lo tanto la nueva asignación del agente 1 es $\Gamma^1(1) = \langle 1,2,3;2 \rangle$ y las asignaciones de los demás agentes son $\Gamma^1(2) = \langle \phi;7 \rangle$ y $\Gamma^1(3) = \langle \phi;6 \rangle$.
- Los nuevos precios de venta son $r_1^1 = 2$, $r_2^1 = 6$ y $r_3^1 = 7$.

T=2

- Se selecciona al agente 3, de tal forma que $B_3^2 = \{1,2\}$ y $C_2^2 = \{1\}$.
- El agente 3 compra el bien 1 debido a que es mejor que no tener nada.
- La nueva asignación del agente 3 es 3 es $\Gamma^2(3) = \langle 1;4 \rangle$ y las de los demás agentes son $\Gamma^2(1) = \langle 2,3;4 \rangle$ y $\Gamma^2(2) = \langle \phi;7 \rangle$.
- Los nuevos precios de venta son $r_1^2 = 5$, $r_2^2 = 6$ y $r_3^2 = 7$.

T=3

- Se selecciona al agente 2 de tal forma que $B_2^3 = \{1,3\}$ y $C_3^3 = \{1\}$.
- El agente 2 compra el bien 1 debido a que es mejor que no tener nada.
- La asignación del agente 2 es $\Gamma^3(2) = \langle 1;2 \rangle$ y las de los demás agentes son $\Gamma^3(1) = \langle 2,3;4 \rangle$ y $\Gamma^3(3) = \langle \phi;9 \rangle$.
- Los precios de venta son $r_1^3 = 7$, $r_2^3 = 6$ y $r_3^3 = 7$.

Nótese que $B_1^4 = \{\phi\}$, $B_2^4 = \{3\}$ y, pero $C_1^4 = \{\phi\}$, , $C_2^4 = \{\phi\}$ y $C_3^4 = \{\phi\}$ lo cual implica que en la etapa 4 el algoritmo se detiene debido a que ningún agente está dispuesto a pagar los precios de venta de esta etapa, que son iguales a los de la etapa anterior, por lo tanto la asignación final es $\Gamma^3(1) = \langle 3,2;4 \rangle$, , $\Gamma^3(2) = \langle 1;2 \rangle$ y $\Gamma^3(3) = \langle \phi;9 \rangle$ y las utilidades de los agentes son $U(\Gamma^3(1)) = 15$, $U(\Gamma^3(2)) = 8$ y $U(\Gamma^3(3)) = 9$.

5. Resultados

A continuación se presentan los principales resultados que arroja el análisis. Las proposiciones principales a demostrar están en los Teoremas 1 y 2. El Teorema 1 afirma que, dada cualquier asignación inicial individualmente racional el algoritmo de compra-venta nos garantiza encontrar el conjunto de asignaciones estables. El Teorema 2 afirma que, si ningún agente tiene restricciones presupuestarias, lo cual se definirá con precisión mas adelante, el resultado de la aplicación del algoritmo de compra-venta es Pareto eficiente.

Antes de empezar con las demostraciones de los teoremas, se demuestran las Proposiciones 1 y 2 que ayudan a demostrar el Teorema 1. En general la Proposición 1 sirve para mostrar que un agente no puede comprar el mismo bien en dos etapas distintas del algoritmo, debido a que los precios crecen sistemáticamente de tal forma que un bien que es alcanzable en una etapa no lo será en una etapa posterior.

La Proposición 2 sirve para demostrar que cuando el algoritmo de compra-venta termina en alguna etapa t, necesariamente el conjunto de bienes alcanzables para cada agente es vacío, debido a que el dinero que posee al final no es suficiente para pagar los precios de un conjunto de bienes, o a que esos bienes no son aceptables.

Proposición 1: *Sea $k \in X^t(i)$ un objeto que pertenece al agente a_i en alguna etapa t con precio de venta $r_k^t = \alpha_i^k + 1$. Si algún agente $a_j \neq a_i$ compra el objeto k al precio r_k^t entonces $k \notin \overline{C}_i^{t'}$ para $t' > t$.*

Prueba:

Sea a_j un agente que compra el bien k en alguna etapa t al precio r_k^t, entonces $k \in \overline{C}_j^t$ esto implica que $\alpha_j^k > r_k^t = \alpha_i^k + 1$.

El precio de venta del bien k en la etapa t+1 es $r_k^{t+1} = \alpha_j^k + 1$, esto implica que el precio de venta del bien k en alguna etapa $t' > t+1$ es $r_k^{t'} \geq r_k^{t+1} = \alpha_j^k + 1$. Sea $t' > t+1$ una etapa en la que a_i compra $\overline{C}_i^{t'} \subseteq C_i^{t'}$.

Se sabe que $C_i^t = \left\{ l \in C \subseteq B_i^{t-1} : \sum_{l \in C} r_l \leq m_i^t,\ \ \alpha_i^l > r_l^t \quad \forall l \in C \subseteq B_i^{t-1} \right\}$, dado que

$r_k^t \geq r_k^{t+1} = \alpha_j^k + 1$ y $\alpha_j^k > r_k^t = \alpha_i^k + 1$ implica que $r_k^t > \alpha_i^k$ y por lo tanto $k \notin C_i^t$ lo que implica que $k \notin \overline{C}_i^t$.

Proposición 2: $C_i^t = \phi \Leftrightarrow r_k^{t-1} \geq \min\{\alpha_i^k, m_i^t\}$.

Prueba:

- Si $r_k^{t-1} \geq \min\{\alpha_i^k, m_i^t\} \quad \forall k \in B_i^{t-1}$

  Caso 1: $\alpha_i^k > m_i^t$ implica que $r_k^{t-1} \geq m_i^t$, por lo tanto $\sum_{k \in B_i^{t-1}} r_k^{t-1} \geq m_i^t$ lo cual implica que $C_i^t = \phi$.

  Caso 2: $\alpha_i^k < m_i^t$ implica que $r_k^{t-1} \geq \alpha_i^k$, por lo tanto $C_i^t = \phi$.

- Si $C_i^t = \phi$ implica que no existe $C \subseteq B_i^{t-1}$ tal que $\sum_{k \in C} r_k^{t-1} \leq m_i^t$ y $\alpha_i^k > r_k^{t-1} \quad \forall k \in C \subseteq B_i^{t-1}$. En forma equivalente si $C_i^t = \phi$ implica que $\forall C \subseteq B_i^{t-1}$ se cumple $\sum_{k \in C} r_k^{t-1} > m_i^t$ y/o $\alpha_i^k \leq r_k^{t-1} \quad \forall k \in C \subseteq B_i^{t-1}$, en particular se cumple $r_k^{t-1} > m_i^t$ y/o $\alpha_i^k \leq r_k^{t-1} \quad \forall k \in B_i^{t-1}$ lo cual implica que $r_k^{t-1} \geq \min\{\alpha_i^k, m_i^t\} \quad \forall k \in B_i^{t-1}$.

Teorema 1: *Dada cualquier asignación inicial* Γ^0 *individualmente racional la asignación que resulta al aplicar el algoritmo de compra-venta* $CV(\Gamma^0)$ *es estable.*

Prueba: La prueba del teorema se realiza a partir de una serie lemas que son presentados a continuación.

Lema 1: *Dada cualquier asignación inicial* Γ^0 *individualmente racional, la asignación que resulta al aplicar el algoritmo de compra-venta* $CV(\Gamma^0)$ *es individualmente racional.*

Prueba:

Dado que se ha supuesto que todo agente $a_i \in A$ asigna un número $\alpha_i^k \geq 0$ a cada bien $k \in X$ a los cuales hace ofertas, implica que cualquier asignación posible es individualmente racional, y en particular $CV(\Gamma^0)$ es individualmente racional.

Lema 2: *Sea t la etapa en la que termina el algoritmo de compra-venta y* $CV(\Gamma^0)$ *el resultado del algoritmo, entonces no existe una par de agentes* (a_i, a_j) *y un bien* $k \in X^t(i)$, *, tal que* $(\alpha_j^k, m_j^t) > \alpha_i^k$. *.*

Prueba:

Supongamos al contrario que en la etapa t que finaliza el algoritmo de compra-venta existe una par de agentes (a_i, a_j) y un bien $k \in X^t(i)$, tal que $\min\{\alpha_j^k, m^t\} > r_k^{t-1}$. Además si el agente a_j bloquea al precio r_k^{t-1} implica que también lo hace a un precio menor en una etapa anterior.

Sea $t' < t$ una etapa en la que a_j compra el conjunto de bienes $\overline{C}_j^{t'}$ que maximizan su utilidad del conjunto de bienes factibles, hay dos casos:

- Caso 1: $k \in \overline{C}_j^{t'}$ y en una etapa posterior a_j vende el bien k a algún agente a_h de tal forma que al final del algoritmo bloquea con a_i. Por la Proposición 2 se sabe que si al agente a_j compro el bien k en la etapa $t' < t$ y lo vendió en una etapa posterior t'' tal que $t' < t'' < t$ implica que $r_k^{t-1} \geq \alpha_h^k + 1 = r_k^{t''}$ y $\alpha_h^k > r_k^{t'} = \alpha_j^k + 1$ dado que $k \in \overline{C}_h^{t''}$ lo cual implica que $r_k^{t-1} > \alpha_j^k$ lo que es una contradicción.
- Caso 2: Supóngase que $k \notin \overline{C}_j^{t'}$ para todo etapa $t' < t$ en la cual el agente a_j compra bienes. Se sabe por la Proposición 2 que si el

algoritmo de compra-venta terminó en la etapa t debe ser que $C_j^t = \phi$.

Además se sabe que si $C_j^t = \phi$ entonces deben cumplirse $r_k^{t-1} > m_j^t$ y/o y/o $\alpha_j^k \le r_k^{t-1} \quad \forall k \in B_j^{t-1}$. Lo es una contradicción dado que se ha supuesto $\min\{\alpha_j^k, m^t{}_j\} > r_k^{t-1}$.

Con la prueba anterior se demuestra que la asignación que resulta al aplicar el algoritmo de compra-venta es estable cualquiera que sea la asignación racionalmente individual de partida.

La demostración de que el resultado es eficiente, la cual se hace en el Teorema 2, requiere un supuesto adicional importante, en esencia se asume que los agentes no tienen restricciones presupuestarias. Decimos que un agente no tiene restricciones presupuestarias si siempre esta en posibilidad de adquirir la canasta de bienes más preferida por él, formalmente lo introducimos en la siguiente definición.

Definición 5. *Sea* $\bar{\alpha}_k = \max\{\alpha_1^k,\ \alpha_2^k, \ldots,\ \alpha_n^k\}$ *la valoración máxima por el bien k y* $\hat{C}_i \subseteq X$ *la canasta de bienes más preferida por el agente* a_i. *Denotemos a* $|\hat{C}_i|$ *como el número de elementos de la canasta más preferida por* a_i. *Se dice que el agente* a_i *no tiene restricciones presupuestarias si* $m_i \ge \sum_{k \in \hat{C}_i} \bar{\alpha}_k + |\hat{C}_i|$.

Antes de demostrar el teorema 2, haremos algunos comentarios acerca de lo que implica que los agentes no tengan restricciones presupuestarias. En primer lugar, dado este supuesto el conjunto de bienes alcanzables para el agente a_i en la etapa t es $C_i^t = \{k \in B_i^{t-1} : a_i^k > r_k^{t-1}\}$, es decir la factibilidad de una compra sólo depende de si la valoración del bien compensa pagar el precio de venta.

Además de lo anterior añadamos un pequeño supuesto que nos ayudará a demostrar el Teorema 2 y el cual no nos hace perder generalidad. Supongamos que si $a_j^k > a_i^k$ implica $a_j^k \geq a_i^k + 1$, lo que significa que si $a_i^k + 1 > a_j^k$ entonces, es decir lo único que suponemos es que la diferencia entre dos valoraciones sucesivas de un bien por dos agentes distintos es mayor que uno. Además enunciemos un pequeño corolario de la proposición 2, cuya demostración es trivial y no será presentada: $C_i^t = \phi \Leftrightarrow r_k^{t-1} > a_i^k$ $\forall k \in B_i^{t-1}$.

Teorema 2: *Si* $\forall a_i \in A$ se tiene $m_i \geq \sum_{k \in C_i} a_k + |C_i|$, *entonces el resultado del algoritmo de compra-venta* $CV(\Gamma^0)$*, es Pareto eficiente.*

Prueba:

Sea t* la etapa en la que el algoritmo de compra-venta termina. Tomemos un bien k tal que $k \in X^{t^*}(i)$ para algún agente $a_i \in A$, sabemos que el precio de venta del bien k en la etapa t* es $r_k^{t*} = \alpha_i^k + 1$. Para todo $a_j \neq a_i$ tenemos dos casos:

- Primer caso: $k \in B_i^{t*-1}$ dado que el algoritmo termino se sabe que $C_j^{t*} = \phi$, , lo que implica que $r_k^{t*} > \alpha_j^k$, lo cual implica que $\alpha_i^k \geq \alpha_j^k$.
- Segundo caso: $k \notin B_i^{t*-1}$ esto implica que para algún t < t* $k \in C_j^t$ y el precio de venta del bien k en t es $r_k^t = \alpha_j^k + 1$. Se sabe que $r_k^{t*} \geq r_k^t$, es decir $\alpha_i^k \geq \alpha_j^k$.

Por lo tanto, $\alpha_i^k \geq \alpha_j^k$ para todo $a_j \neq a_i$ y dado que $k \in X^{t*}(i)$ implica que el agente a_i es el que más valora el objeto k al final del algoritmo, por lo tanto $CV(\Gamma^0)$ es Pareto eficiente.

La intuición detrás del Teorema 2 es simple, la restricción presupuestaria implica que el agente podría dejar de comprar bienes deseados por él debido a que su presupuesto es limitado, entonces debe elegir la mejor canasta de bienes sujeto a esta restricción. Cuando no tiene restricciones presupuestarias implica que puede pagar los precios más altos posibles de los bienes que pertenecen a su canasta más preferida, entonces si él no compra un bien de esa canasta será porque lo posee alguien cuya valoración y por lo tanto precio de venta es mayor que su propia valoración.

Esto garantiza que al final del algoritmo la asignación que resulta sea eficiente, pues todos los agentes que tengan la máxima valoración de un bien, siempre podrán pagar cualquier otro precio de venta debido a que el máximo precio es igual a su propia valoración más uno.

6. Observaciones

En ésta sección presentamos una breve revisión de algunas características del conjunto de asignaciones alcanzado con el algoritmo de compra-venta presentado en páginas anteriores. En primer lugar, mostramos que la asignación que resulta de la aplicación del algoritmo depende del orden en el que los agentes realizan sus compras. Supongamos que solo tenemos tres agentes, en general la asignación que resulta cuando el orden en el que los agentes realizan sus compras es (a_1, a_2, a_3) será diferente si el orden es (a_1, a_3, a_2).

Para observar esto retomemos el ejemplo que hemos seguido en todo el trabajo. Las asignaciones resultan al aplicar el algoritmo de compra-venta con todos los ordenes posibles en los que los agentes hacen ofertas se presentan a continuación:

Orden: (a_1, a_2, a_3)

$\Gamma^f(1) = \langle 3,2;4 \rangle$, $\Gamma^f(2) = \langle 1;5 \rangle$ y $\Gamma^f(3) = \langle \phi;6 \rangle$

$U(\Gamma^f(1)) = 15$, $U(\Gamma^f(2)) = 11$ y $U(\Gamma^f(3)) = 6$.

Orden: $(a_1,\ a_3,\ a_2)$

$\Gamma^f(1) = \langle 3,2;4\rangle$, $\Gamma^f(2) = \langle 1;2\rangle$ y $\Gamma^f(3) = \langle \phi;9\rangle$

$U(\Gamma^f(1)) = 15$, $U(\Gamma^f(2)) = 8$ y $U(\Gamma^f(3)) = 9$.

Orden: $(a_2,\ a_1,\ a_3)$

$\Gamma^f(1) = \langle 3,2;1\rangle$, $\Gamma^f(2) = \langle 1;8\rangle$ y $\Gamma^f(3) = \langle \phi;6\rangle$

$U(\Gamma^f(1)) = 12$, $U(\Gamma^f(2)) = 14$ y $U(\Gamma^f(3)) = 6$

Orden: $(a_2,\ a_3,\ a_1)$

$\Gamma^f(1) = \langle 3;3\rangle$, $\Gamma^f(2) = \langle 1;8\rangle$ y $\Gamma^f(3) = \langle 2;4\rangle$

$U(\Gamma^f(1)) = 9$, $U(\Gamma^f(2)) = 14$ y $U(\Gamma^f(3)) = 7$

Orden: : $(a_3,\ a_1,\ a_2)$

$\Gamma^f(1) = \langle 3,2;2\rangle$, $\Gamma^f(2) = \langle 1;2\rangle$ y y $\Gamma^f(3) = \langle \phi;11\rangle$

$U(\Gamma^f(1)) = 13$, $U(\Gamma^f(2)) = 8$ y $U(\Gamma^f(3)) = 11$

Orden: $(a_3,\ a_2,\ a_1)$

$\Gamma^f(1) = \langle 3;3 \rangle$, $\Gamma^f(2) = \langle 1;5 \rangle$ y $\Gamma^f(3) = \langle 2;7 \rangle$

$U(\Gamma^f(1)) = 9$, $U(\Gamma^f(2)) = 11$ y $U(\Gamma^f(3)) = 10$

Se observa que la asignación final que resulta de aplicar el algoritmo, en este caso, es diferente para cada orden en el que los agentes realizan compras. Otra propiedad interesante que resalta en éste ejemplo, es que la asignación que resulta al aplicar el algoritmo es la más preferida para el agente que inicia el proceso. Aunque no se demuestra éste resultado rigurosamente, la intuición de porque sucede es sencilla. La propiedad básica del algoritmo es que los precios de venta crecen sistemáticamente en cada etapa, cuando un agente inicia el proceso y tiene el dinero suficiente para comprar un conjunto de bienes, lo hace al precio más bajo posible, si lo hiciera en una etapa posterior a la inicial en general enfrentará precios mayores, por lo tanto el agente que inicia el proceso alcaza la utilidad más alta posible dentro de los bienes que puede comprar.

Otra cuestión importante es que el algoritmo es manipulable. La manipulación que mostramos en ésta sección es sencilla, siguiendo el mismo ejemplo al que se le ha dado seguimiento, suponemos que un agente revela un precio de venta mayor en la etapa inicial dado lo que los demás hacen y, comparamos el resultado alcanzado de ésta manipulación con el que se alcanzaría revelando la verdad, los resultados se muestran a continuación:

Supongamos que al contrario del ejemplo original el agente 1 revela un precio de venta de tres en la etapa inicial, es decir $r_1^0 = 3$, $r_2^0 = 2$ y $r_3^0 = 2$, al aplicar el algoritmo de compra-venta con el orden de agentes $(a_2,\ a_3,\ a_1)$ tenemos la asignación:

$\hat{\Gamma}^f(1) = \langle 2,3;0 \rangle$, $\hat{\Gamma}^f(2) = \langle 1;7 \rangle$ y $\hat{\Gamma}^f(3) = \langle \phi;8 \rangle$

$\mathcal{U}\left(\hat{\Gamma}^f(1)\right) = 11$, $\mathcal{U}\left(\hat{\Gamma}^f(2)\right) = 13$ y $\mathcal{U}\left(\Gamma^f(3)\right) = 8$

Y la asignación a la que se llega diciendo la verdad es

$\Gamma^f(1) = \langle 3;3 \rangle$, $\Gamma^f(2) = \langle 1;8 \rangle$ y $\Gamma^f(3) = \langle 2;4 \rangle$

$\mathcal{U}\left(\Gamma^f(1)\right) = 9$, $\mathcal{U}\left(\Gamma^f(2)\right) = 14$ y $\mathcal{U}\left(\Gamma^f(3)\right) = 7$

Evidentemente el agente 1 mejora con su manipulación. Intuitivamente la manipulación es redituable debido a que si un agente sabe que los demás no conocen su verdadera valoración y que los demás se apegan a las reglas del algoritmo, tiene incentivos a revelar un precio de venta ligeramente mayor tal que el comprador seguirá estando dispuesto a adquirir el bien. Como resultado el agente que vende obtendrá ingresos adicionales que posiblemente le permitan en una etapa posterior comprar bienes que antes no eran alcanzables, como en el ejemplo que se mostró.

7. Conclusiones

En este trabajo de demostró, por medio del algoritmo de compra-venta que el conjunto de asignaciones estables de un mercado que parte de cualquier asignación individualmente racional es no vació. El funcionamiento del algoritmo es muy simple, básicamente se construyen pares bloqueadores en cada etapa y se determinan precios de venta de los bienes, de tal forma que compensen la pérdida de utilidad que implica vender un bien.

Añadiendo el supuesto de que los agentes no tienen restricciones presupuestarias, se demostró en el Teorema 2 que el resultado del algoritmo es no solo estable sino Pareto eficiente.

Asimismo se mostró que la asignación resultante de la aplicación del algoritmo depende del orden en el que los agentes realizan sus compras y que está sujeto a manipulaciones.

A pesar de que los resultados obtenidos no son triviales y el algoritmo de compra-venta parece trabajar bien con estructuras de mercados de asignación con las características descritas en el modelo, quedan algunas preguntas abiertas. Por ejemplo ¿existe un mecanismo no manipulable con el que pueda encontrarse el conjunto de asignaciones estables, de mercados de asignación con la estructura propuesta? Y una cuestión aun más importante ¿existe un mecanismo que garantice la existencia de asignaciones estables y eficientes siempre, independientemente de las restricciones presupuestarias de los agentes? Éstas son preguntas que dejamos para algún trabajo posterior.

8. Bibliografía

1. Crawford, Vincent y Kelso, Alexander (1982): “Job matching, coalition formation, and gross substitutes”, *Econometrica*, Vol. 50, No. 6, pp. 1483-1504.

2. Crawford, Vincent y Knoer, Elisie (1981): “Job matching with heterogeneous firms and workers”, *Econometrica*, Vol. 49, No. 2, pp. 437-450.

3. Gale, D. y Shapley, Lloyd (1962): “College admissions and the stability of marriage”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1, pp. 9-15.

4. Hatfield, J. W. y Milgrom, Paul (2005): “Matching with contracts”, *The American Economic Review*, Vol. 95, No. 4, pp. 913-936.

5. Shapley, Lloyd y Shubick, Martin (1972); “The assignment Game I: The core”, *International Journal of Game Theory*, No.1, pp. 111-130.

6. Roth A. y Sotomayor M. (1989), ``Two Sided Matching,'' *Econometric Society Monographs 18*; Cambridge Univ. Press, Cambridge.