EL COLEGIO DE MEXICO, A.C.

CENTRO DE ESTUDIOS DEMOGRÁFICOS Y DE DESARROLLO URBANO

UN MODELO PARA POBLACIONES NO ESTABLES

Tesis presentada por

Gerardo Núñez Medina

Para optar por el grado de

MAESTRO EN DEMOGRAFÍA

2001

MÉXICO, D.F.

Un Modelo para Poblaciones No Estables

Gerardo Núñez Medina

Resumen

El trabajo presenta un recuento de los primeros modelos de proyección, basados en supuestos acerca del comportamiento de la población mismos que ignoran los posibles cambios en los patrones por edad de la fecundidad y la mortalidad en el tiempo, pero sin embargo, presentan aspectos fundamentales para el desarrollo y comprensión de modelos posteriores.

A partir de dicha revisión se busca desarrollar un modelo capaz de incorporar la dinámica de las interacciones de la fecundidad y la mortalidad en una población cerrada a migración, a lo largo del tiempo, así, se explora el modelo de crecimiento exponencial logístico, mismo que se desarrolló al modificar la hipótesis sobre el cambio nulo (o constante) hecha sobre la evolución de la tasa de crecimiento, lo que dio por resultado un modelo que, aunque promete una mejor aproximación que la lograda por la función exponencial, queda aun por determinar el efecto que cada parámetro ejerce sobre el crecimiento de la población, ello permitirá estudiar y describir con mejor detalle la dinámica poblacional, cuando esta se encuentra sujeta a tasas de cambio demográfico variables.

Finalmente, las estimaciones de población obtenidas, presentan un aspecto que deberá tomarse en cuenta y que tiene que ver con el período de ajuste del modelo exponencial logístico, ya que debido al número limitado de datos disponibles fue necesario considerar observaciones que datan del año 1810, lo que implicó el uso de datos que presentaban serias inconsistencias entre la forma de crecimiento de las tasas y la evolución de la función logística, esto generó mayores dificultades para el ajuste final de la función, mismas que podrán subsanarse al contar con un mayor número de observaciones.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

La demografía matemática ha venido desarrollándose desde sus inicios en básicamente dos áreas: 1) la construcción y refinamiento de tablas de vida y 2) la elaboración de modelos para la proyección de poblaciones. En ambos casos la obsesión del demógrafo ha girado alrededor del análisis macro de la estructura y el crecimiento de la población.

La tabla de vida es considerada la base de la demografía matemática, ya que describe aspectos fundamentales de la mortalidad de una población en un tiempo particular, sin embargo, no toma en cuenta ni la fecundidad, ni su interacción con otros aspectos que afectan a la dinámica de la población como puede ser la migración.[1] En este sentido, la tabla de vida no es nada más que un modelo de mortalidad, y por ello, no es una herramienta que pueda ser ampliamente utilizada para el análisis y la proyección de poblaciones.

En el siguiente capítulo se hará un recuento de los primeros modelos de proyección, aunque estos representan modelos simples, basados en supuestos acerca del comportamiento de la población, e ignoran los posibles cambios en los patrones por edad de la fecundidad y la mortalidad en el tiempo, si presentan aspectos fundamentales para el

[1] La tabla de vida considera a la población como estacionaria, esto es, el crecimiento o decrecimiento de todos los grupos de edad es nulo, por lo que la tasa de crecimiento de la población en su conjunto es igual a cero. No obstante, la tabla de vida puede ser actualizada constantemente y por lo tanto modelar adecuadamente la mortalidad, en periodos de tiempo relativamente cortos.

desarrollo y comprensión de modelos posteriores.

La búsqueda por encontrar un modelo capaz de incorporar la dinámica de las interacciones de la fecundidad y la mortalidad llevó al desarrollo de la teoría de poblaciones estables, el segundo fundamento más importante de la demografía matemática.

En el siguiente esquema se muestra una clasificación de modelos construidos con el uso de la teoría de poblaciones estables:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{Modelos\ de} \\
\mathit{Poblaciones} \\
\mathit{Estables}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\mathit{Deterministicos}
\left\{
\begin{array}{l}
\mathit{Discretos}
\left\{
\begin{array}{l}
\mathit{Recursivos} \\[2ex]
\mathit{Matriciales}
\end{array}
\right. \\[4ex]
\mathit{Continuos}
\end{array}
\right. \\[6ex]
\mathit{Estocásticos}
\left\{
\begin{array}{l}
\mathit{Discretos} \\[2ex]
\mathit{Continuos}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Las hipótesis en las que se sustenta la teoría de poblaciones estables pueden resumirse en: la población debe ser cerrada a migración; la estructura por edad debe ser invariante, la mortalidad y la natalidad deben permanecer invariantes en el tiempo. Los modelos construidos bajo estas hipótesis tendrán un comportamiento asintótico el cual estabilizará la estructura por edad de la población y presentarán un patrón conocido de crecimiento.

Dentro de la gama de modelos presentados en el cuadro anterior, este trabajo se enfocará únicamente al tratamiento de modelos determinísticos, continuos. En esta misma línea, los trabajos de Lotka[1], dan origen a situaciones en donde es posible modificar algunas de las hipótesis anteriores, sin cambiar la esencia misma de la teoría de poblaciones estables, por ejemplo, al hacer variar la hipótesis relativa a la mortalidad, haciendo a esta una función dependiente del tiempo y conservando la fecundidad invariante (o viceversa, haciendo variar la función de fecundidad y manteniendo invariante la mortalidad), surgen los llamados modelos cuasi estables[2], mientras que al modificar las hipótesis relativas a la mortalidad y la fecundidad, haciendo que ambas dependan del tiempo y la edad obtenemos los llamados modelos no estables.

En el capítulo 3, se presentarán los modelos no estables, que por sus características dan una mejor descripción de la dinámica de poblaciones sujetas a patrones de cambio demográfico variables. Un ejemplo de ello, es el modelo presentado por Ordorica[3], en el que la tasa de crecimiento poblacional r, representada como la diferencia de las tasas brutas de mortalidad y natalidad, donde ambas son funciones logísticas dependientes del tiempo, permite trabajar matemáticamente la teoría de la transición demográfica. En conformidad con lo anterior, se presentará el desarrollo de un modelo no estable, mismo que se ajustará a la población de México, además se propondrán las bases para el posterior desarrollo de un modelo no estable, que permitirá un mejor control de las variaciones por edad de las tasas.

Referencias

[1] Lotka, Alfred J. (1976). *Teoría Analítica de las Asociaciones Biologicas.* CELADE. Chile.

[2] Coale, Ansley J. (1963). *Estimates of Varios Dmographic Masures Trough the Qasi-Sable Age Distribution.* Emerging tecniques in population research. E.U.

[3] Ordorica, M. (1990). *Ajuste de una Función Expologística a la Evolución de la Población Total de México 1930-1985.* Estudios demográficos y urbanos 15, Vol. 5. No 3. pp 373-386.

Capítulo 2

Las Poblaciones Estables

2.1 Antecedentes

La dinámica característica del crecimiento poblacional han sido representada de forma general por la serie:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_1 N(t) + r_2 N(t)^2 + r_3 N(t)^3 + \cdots \tag{2.1}$$

donde la función $N(t)$ determina el tamaño total de la población y los parámetros r_i y t representan la tasa de cambio poblacional y el tiempo, respectivamente.

La serie (2.1) describe el cambio de una población en términos numéricos bajo situaciones en donde puede o no haber limitaciones al crecimiento, sin embargo, en cualquier caso, dicha serie es independiente de la estructura por edad de la población para cualquier instante t de tiempo.

Malthus en 1798 propuso un modelo en el cual el crecimiento es proporcional al tamaño de la población. Tal modelo puede derivarse al considerar únicamente el primer miembro de la serie en la ecuación de cambio poblacional (2.1), con lo que se obtiene una ecuación conformada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}N(t) = r_1 N(t) \quad \forall\, t \geq 0 \tag{2.2}$$

donde r_1 es el parámetro que determina la tasa cambio de la población. La solución de la ecuación (2.2) es conocida como ley de crecimiento exponencial.

El modelo de crecimiento exponencial de Malthus es útil para la proyección, en ciertas faces del desarrollo, de una población sometida a condiciones en las que no existe freno alguno para su crecimiento. Este tipo de condiciones provalecen sólo por poco tiempo y cuando la densidad poblacional es baja. Así, este tipo de proyecciones presentan un interés casi puramente teórico.

Un modelo poblacional en el que se puede simular el cambio en el tamaño de una población bajo situaciones en donde existen limitaciones al crecimiento fue derivada por Verhulst en 1838. Al considerar la ecuación que surge de tomar los dos primeros términos de la serie (2.1), puede derivarse el modelo de Verhulst, el cual quedará definido de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}N(t) = r_1 \left[1 + \frac{N(t)}{K}\right] N(t) \quad \forall\, t \geq 0 \tag{2.3}$$

la solución a esta ecuación se conoce como modelo crecimiento logístico. Los parámetros r_1 y K son denominados, tasa intrínseca de crecimiento y capacidad ambiental de carga, respectivamente. En la ecuación (2.3) el ritmo de crecimiento disminuye al incrementarse el tamaño de la población total.

Los modelos exponencial y logístico son ejemplos de modelos poblacionales determinísticos y contínuos, los cuales son de gran utilidad para el estudio y descripción de la dinámica de crecimiento poblacional a lo largo del tiempo, sin embargo, no permiten modelar los efectos derivados de la estructura por edad sobre el crecimiento.

Así, en un intento por subsanar esta carencia, se han desarrollado modelos que permiten incorporar los efectos de la estructura por edad sobre la dinámica propia de la evolución de la población.

Uno de los primeros modelos contínuos que incorpora el efecto de la estructura por edad sobre la dinámica de una población fue el desarrollado por Lotka, y es conocido como el modelo de poblaciones estables.

El modelo de poblaciones estables incorpora los procesos de natalidad y mortalidad como funciones lineales del tamaño de la población, ya que se ha observado que la interacción de estos procesos permite conocer la forma de la estructura por edad de una población a lo largo del tiempo, cuando se trata de una población cerrada a migración.

El objetivo del modelo de poblaciones estables es encontrar las relaciones que conforman la dinámica poblacional a partir de una estructura por edad arbitraria, donde los patrones de fecundidad y mortalidad son considerados como fijos y conocidos, y donde la población esta ausente de movimientos migratorios.

Para lograr dicho objetivo Lotka desarrolló una expresión para modelar los nacimientos, esta expresión se conoce como la ecuación de renovación, y se conforma a través de un sistema de ecuaciones lineales.

2.2 Las Poblaciones Estables

El modelo lineal de la dinámica de poblaciones estables, que incluye los cambios en la estructura por edad, define la función $s(a,t)$ como la densidad o tamaño de la población de edad a al tiempo t, de modo que el monto de población entre las edades a_1 y a_2 al tiempo t, estará dado por:

$$\int_{a_1}^{a_2} s(a,t)da$$

y la población total al tiempo t quedará establecida como:

$$N(t) = \int_0^\infty s(a,t)da\,.$$

La función de densidad poblacional $s(a,t)$ deberá satisfacer la siguiente igualdad

$$Ds(a,t) = -\mu(a)s(a,t) \tag{2.4}$$

donde por definición:

$$Ds(a,t) = \lim_{h\to 0+} \frac{s(a+h,t+h) - s(a,t)}{h}$$

en donde $\mu\,(x)$ es una función no negativa dependiente de la edad, esta función es conocida como fuerza de mortalidad.

El proceso de nacimientos o ingreso de individuos de edad cero a la población deberá satisfacer la ley de nacimientos:

$$s(0,t) = \int_0^\infty \beta(a)s(a,t)da \quad \forall\, t > 0 \tag{2.5}$$

donde $\beta(a)$ es una función no negativa, dependiente también de la edad, a la que llamaremos función de fecundidad.

La expresión $s(0,t)$ puede ser interpretada como la tasa de natalidad al tiempo t. Su valor a un tiempo dado t dependerá de la distribución por edad de la población, y quedará determinada por la integral de la densidad $s(a,t)$ ponderada por la función de fecundidad $\beta(a)$.

La distribución por edad inicial de la población estará dada por:

$$s(a,0) = \phi(a) \quad \forall\, a \geq 0 \tag{2.6}$$

donde $\phi(\cdot)$ es una función no negativa dependiente de la edad.[1]

Observese que la ecuación (2.5) no necesariamente debe cumplirse para $t = 0$, sin embargo, si la ecuación (2.5) se sostiene para $t = 0$, entonces las ecuaciones (2.5) y (2.6) deberán ser compatibles en el sentido de que:

$$\int_0^\infty \beta(a)\phi(a)da = \phi(0)$$

esto es, la distribución por edad inicial estará conformada por los nacimientos ocurridos al tiempo inicial ($t = 0$).

Las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) conforman un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, acotado y con condiciones iniciales.

La idea será convertir el sistema a una ecuación integral que involucre la tasa de natalidad $s(0,t)$. Así, el problema consistirá en transformar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales en dos variables independientes a y t (acotadas y con valores iniciales) a una ecuación integral lineal en una sola variable indepentiente t.[2]

Supóngase que $s(a,t)$ es solución del sistema (2.4), (2.5) y (2.6) y que $c \in \Re$ es una constante tal que $a - t = c$, por lo que al definir:

$$w_c(t) = s(t + c, t) \quad \forall\, t \geq t_c$$

en donde

$$t_c = \max\{0, -c\}$$

[1] El valor de la función de distribución inicial de la población, i.e. la estructura por edad inicial, será considerado como arbitrario, fijo y conocido.

[2] Se sabe que muchos sistemas de ecuaciones diferenciales pueden ser escritos como una ecuación integral, pero el inverso no es siempre cierto, sin embargo. Volterra observó que una ecuación de Fredholm (el tipo de la ecuación integral de renovación) podía ser construida a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, y además que también es posible la construcción de la ecuación de Fredholm a partir de un sistema de ecuaciones lineales, por lo que en este caso es posible la construcción inversa.

de la ecuación (2.4) se tendrá que:

$$\frac{d}{dt}w_c = Ds(t+c.t)$$

por lo que:

$$\frac{d}{dt}w_c = \lim_{h\to 0+}\frac{s(t+h+c,t+h)-s(t+c,t)}{h} = -\mu(t+c)w_c(t) \quad \forall\, t \geq t_c$$

lo cual implica que:

$$w_c(t) = w_c(t_c)\epsilon^{-\int_{t_c}^{t}\mu(l+c)dl} \quad \forall\, t \geq t_c$$

al sustituir $c = a - t$, cuando $a \geq t$, entonces se tendrá que:

$$w_c(t) = w_c(0)\epsilon^{-\int_0^t \mu(l+c)dl} \quad \forall\, t \geq 0$$

lo cual lleva a que:

$$s(a,t) = s(a-t,0)\epsilon^{-\int_0^t \mu(l+a-t)dl} \quad \forall\, a \geq t\,. \tag{2.7}$$

Si se sustituye el valor de $c = a - t$, cuando $a < t$, entonces:

$$w_c(t) = w_c(-c)\epsilon^{-\int_{-c}^{t}\mu(l+c)dl} \quad \forall\, t \geq -c$$

lo cual lleva a que:

$$s(a,t) = s(0,t-a)\epsilon^{-\int_{t-a}^{t}\mu(l+c)dl} \quad \forall\, a < t \tag{2.8}$$

combinando las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.6) se tiene que:

$$s(a,t) = \begin{cases} s(0,t-a)\epsilon^{-\int_0^a \mu(l)dl} & \forall\, a < t \\ \phi(a-t)\epsilon^{-\int_{a-t}^{a}\mu(l)dl} & \forall\, a \geq t\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Al definir la función

$$\ell(b,a) = \epsilon^{-\int_a^b \mu(l)dl} \tag{2.10}$$

como la probabilidad de que un miembro de la población de edad a llegue con vida a la edad b, a un tiempo fijo t. Si $a < t$, entonces se tendrá que:

$$s(a,t) = s(0,t-a)\ell(a,0)$$

representa a todos aquellos miembros de la población nacidos hace $t-a$ unidades de tiempo, que han llegado con vida a la edad a al tiempo t.

Si $a \geq t$, entonces puede observarse que:

$$s(a,t) = \phi(a-t)\ell(a,a-t)$$

representa aquellos miembros de la población quienes tenían una edad $a-t$ en el instante inicial y que han sobrevivido a la edad a al tiempo t.

Se puede observar de la ecuación (2.9) que si la tasa de natalidad $s(0,t)$ puede ser deteminada como función del tiempo, entonces la función de densidad $s(a,t)$ podrá ser conocida.

Al definir $B(t) = s(0,t)$ y sustituir la ecuación (2.9) dentro de la ecuación (2.5) se tiene que:

$$B(t) = \int_0^t \beta(a)s(a,t)da + \int_t^\infty \beta(a)s(a,t)da$$

lo que a su vez, según la definición de $B(t)$, se escribirá como:

$$B(t) = \int_0^t \beta(a)B(t-a)\ell(a,0)da + \int_t^\infty \beta(a)\phi(a-t)\ell(a,a-t)da$$

de modo que si definimos:

$$K(b) = \beta(b)\ell(b,0) \quad \forall\, b \geq 0$$

y

$$F(t) = \int_0^\infty \beta(a+t)\phi(a)\ell(a+t,a)da \quad \forall\, t \geq 0$$

donde $K(b)$ y $F(t)$ son funciones de valores conocidos. Finalmente se tendrá que la tasa de natalidad deberá satisfacer la ecuación integral:

$$B(t) = F(t) + \int_0^t B(a)K(t-a)da\,. \tag{2.11}$$

Esta ecuación integral es conocida como la ecuación de renovación.

2.3 Soluciones a la Ecuación de Renovación

Al iniciar la construcción de la ecuación de renovación se supuso que $s(a,t) = Z(a)$ era una solución del sistema (2.4), (2.5), (2.6), independiente del tiempo, por lo que se procederá a comprobar su validez:

$$\frac{d}{da}Z(a) = -\mu(a)Z(a) \tag{2.12}$$

$$Z(0) = \int_0^\infty \beta(a)Z(a)da \tag{2.13}$$

de donde se tiene que:

$$Z(a) = Z(0)e^{-\int_0^a \mu(\tau)d\tau} \tag{2.14}$$

de las ecuaciones (2.13) y (2.14) se tiene que si $Z(0) \neq 0$, entonces:

$$1 = \int_0^\infty \beta(a)\ell(a,0)da \tag{2.15}$$

por lo que existe una solución no trivial del sistema sólo si la ecuación (2.15) es valida para $Z(0) \neq 0$ y todo su rango de valores positivos.

Dado que es extraña la existencia de casos que satisfagan la solución del tipo anterior, se han propuesto diferentes clases de soluciones a la ecuación integral de renovación (2.11).

Volterra propusó un método a partir de definir una sucesión de operadores integrales $V(a,t)$, véase Hildebrand[1], como:

$$V_1(a,t) = K(t-a)$$

$$V_n(a,t) = \int_a^t V_1(\alpha,\xi)V_{n-1}(\xi,t)d\xi$$

donde la serie queda conformada como:

$$R(a,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(a,t) \tag{2.16}$$

Esta serie convergera siempre que $K(t-a)$ permanezca acotada, lo que generalmente ocurre en problemas demográficos.

Posteriormente demostró que para funciones continuas $F(t)$ y $K(t-a)$ en un intervalo cerrado $0 \leq t \leq b$, la solución de la ecuación de renovación (2.11) podía establecerse como:

$$B(t) = F(t) + \int_0^t R(a,t)F(a)da$$

Puede observarse que la solución (2.16) dada por Volterra se cumple únicamente para el caso estable, en el que la solución toma la forma:

$$R(a,t) = R_1(a)R_2(t) \tag{2.17}$$

Coale[2] demostró la existencia y propiedades en el caso contínuo de una función $R_L(a,t)$ que es solución de (2.11) en el límite cuando t tiende a infinito, sin embargo, no ha podido demostrarse la existencia de una función que se aproxime a $R(a,t)$ uniformemente para toda a, cuando t tiende a infinito, y tampoco, que dicha función pueda descomponerse como:

$$R_L(a,t) = R_{L1}(a)R_{L2}(t)$$

salvo para el caso estable.

Coale[3] mismo, había supuesto años atrás que al variar en el tiempo el comportamiento de la fecundidad o la mortalidad,[3] la distribución por edad de la población eventualmente se convertiría en independiente de su estructura por edad inicial.[4] lo que dió origen a la teoría de poblaciones cuasi estables. Esta suposición fue demostrada por López[4] en su teorema de ergodicidad débil.

Al considerar el tipo de soluciones (2.17), para el caso de una población estable, el kernel de la ecuación de renovación tomará la siguiente forma:

$$K(t-a) = K(a) \quad \forall\, a \geq 0 \tag{2.18}$$

así, la distribución por edad de la población, o la proporción de población $C(a,t)$ dentro del grupo de edad $[a_1, a_2]$ permanecerá constante en el tiempo en el sentido que:

$$C(a,t) = \frac{\int_{a_1}^{a_2} s(a,t)da}{\int_0^\infty s(a,t)da} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} R_1(a)da}{\int_0^\infty R_1(a)da} \quad .\forall\, t \geq 0 \tag{2.19}$$

si sustituimos (2.18) en (2.4), tendremos que:

$$\frac{1}{R_2(t)} \cdot \frac{d}{dt} R_2(t) = -\left(\frac{\frac{d}{da} R_1(a) + \mu(a) R_1(a)}{R_1(a)} \right)$$

donde λ es una constante tal que:

$$\frac{d \ln R_2(t)}{dt} = -\left(\frac{d \ln R_1(a)}{da} \right) - \mu(a) - \lambda$$

integrando y simplificando, se tiene que:

$$R(a,t) = R_1(0) e^{\left[\lambda(t-a) - \int_0^a \mu(b)db\right]}$$

[3] Supuso que $k(t-a) = \beta_t(a)\ell(a,0)$ o que $k(t-a) = \beta(a)\ell_t(a,0)$.

[4] Cuando t tiende a infinito, el límite de la funcion $B(t)$ mostrará las propiedades de ergodicidad de la estructura por edad.

debido a que la ecuación (2.5) debe cumplirse, la elección de λ deberá satisfacer:

$$1 = \int_0^\infty \beta(a)e^{\left[-a\lambda - \int_0^a \mu(b)db\right]}da$$

lo que equivale a que λ satisfaga la siguiente ecuación:

$$1 = \int_0^\infty \beta(a)\ell(a,0)e^{-a\lambda}da \qquad (2.20)$$

esta ecuación es conocida como la ecuación característica. Bajo condiciones adecuadas de natalidad y mortalidad, la ecuación (2.20) es una función estrictamente decreciente de λ, se ha demostrado en Keyfitz[7] y Feller[8] que existe una única solución real que genera una distribución por edad estable.

2.4 Una Aproximación Conjuntista

En este apartado se presenta una aproximación, a través de conjuntos, al modelo de poblaciones estables, con la finalidad de clarificar la importancia del uso de las hipótesis en la conformación de dicho modelo.

En este sentido, una población en un instante t de tiempo, puede considerarse como un conjunto de individuos $N(t)$ que posee una distribución por edad y sexo $C(a,t)$, definida como en (2.19), donde a representa la edad. Si además deseáramos saber como es que dicha población ha alcanzado un determinado tamaño o estructura, sería necesario conocer sus patrones de mortalidad y natalidad a lo largo del tiempo.[5]

Considerese ahora dentro del conjunto de poblaciones definidas del modo anterior, un subconjunto de poblaciones para las cuales la estructura por edad y la mortalidad

[5] Una vez determinados los patrones de mortalidad y natalidad, como se estableció en el inciso anterior, vasta fijar cualquier índice o función que derive una ecuación integral, con un número finito de raices, para determinar completamente una población estable.

son constantes, las poblaciones definidas dentro de este subconjunto fueron llamadas por Lotka[5], poblaciones maltusianas, y designadas por Bourgeois-Pichat[6] como los subconjuntos $H(\lambda)$.

Dentro del subconjunto de poblaciones maltusianas $H(\lambda)$, podemos encontrar un subconjunto de poblaciones para las cuales la estructura por edad es invariante y la función de mortalidad es invariante y conocida, esto se obtiene al fijar un patrón de mortalidad conocido tal que para cada función de sobrevivencia $\ell_0(b,a)$, definida según (2.10), se corresponda un subconjunto $H_0(\lambda)$.

Si en el interior de cada subconjunto $H_0(\lambda)$, se considera además como invariante y conocida la función de fecundidad (*i.e.* – $\beta(a,t) = \beta(a)$, $\forall\ t$), entonces, todos los elementos que determinan el subconjunto $H_0(\lambda)$ son invariantes,[6] lo que implica que el subconjunto estará completamente determinado por un valor específico de λ.

Se ha demostrado que es posible encontrar un único valor real $r = \lambda$ que satisface las condiciones para la existencia y únicidad de una población que pertenece al subconjunto $H_0(\lambda)$, tal población es llamada poblacion maltusiana estable o simplemente población estable. Por lo tanto existe una única población estable en $H_0(r)$ para la cual $r = \lambda$.

[6]Las condiciones impuestas al subconjunto $H(r)$ (i.e. mortalidad y fecundidad invariantes y conocidas), tienen la ventaja de que son matemáticamente independientes y expresan propiedades fundamentales de la población, lo que no ocurre en relación con cualquier otro tipo de condiciones impuestas sobre un subconjunto de poblaciones maltusianas.

Referencias

[1] Hildebrand, F. B. (1958), *Methods of Applied Mathematics*. Prentice-Hall, New York.

[2] Coale, Ansley J. (1975). *The Growth and Structure of Human Populations, a Mathematical Investigation*. Princeton University Press, New Jersey.

[3] Coale, Ansley J. (1957), *How the age distribution of a human population is determined*. Cold Springs Harbor Symposia On Quantitative Biology, Vol XXII.

[4] López, Alvaro T. (1961). *Problems in Stable Population Theory*. Princeton, New Jersey.

[5] Lotka, Alfred J. (1976). *Teoría analítica de las asociaciones biologicas*. CELADE, Chile.

[6] Departamento de Asuntos Económicos y Sociales (1970). *El Concepto de Población Estable. Aplicación al Estudio de la Población de Países que no Tienen Buenas Estadísticas Demográficas*. Naciones Unidas, N.Y.

[7] Keyfitz N. (1979). *Introducción a las Matemáticas de Población*. CELADE, Chile.

[8] Feller, W. (1941). *On the integral equation of renewal theory*. Annals of mathematical statistics, Vol 12. pp 243-267.

Capítulo 3

Un Modelo No Estable

Un modelo se dice no estable cuando es capaz de describir la dinámica de cambio poblacional a partir de la evolución de los patrones tanto de mortalidad como de fecundidad, en el caso en que ambos patrones presenten un comportamiento no constante. Esta característica de los modelos no estables, ha sido derivada a partir de modificar las hipótesis que dan sustento a la teoría de poblaciones cuasi estables, inspirada por Coale[1], en la que sólo uno de los dos patrones sigue un comportamiento constante.[1]

Así, la teoría de poblaciones cuasi estables es útil para obtener estimadores de parámetros demográficos para países en vías de desarrollo, los cuales se encuentran en la segunda o tercera etapa de la transición demográfica, y por ende su población converge de cuasi estable a estable. Sin embargo, las poblaciones cuyo comportamiento demográfico no presenta un patrón estable o cuasi estable requerirá de modelos no estables para describir su comportamiento, en este sentido han surguido los llamados modelos no estables, como una modificación de los modelos cuasi estables, véase Suddendu[2], o como variaciones en los supuestos hechos sobre el comportamiento de las tasas de natalidad y mortalidad, véase Ordorica[6], es en esta misma línea que se propone, un modelo de crecimiento poblacional y el desarrollo de un modelo de crecimiento diferencial por grupo de edad.

---

[1] A diferencia de la teoría de poblaciones estables, en donde ambos patrones permanecen constantes.

3.1 Modelo Exponencial Logístico

Una primera aproximación a la construcción de un modelo no estable surge al considerar que la tasa de crecimiento de una población, que es el resultado de la interacción de las tasas de natalidad y mortalidad, presenta un comportamiento no constante, el cual puede ser modelado por una función que es variable en el tiempo, y que puede ser descrita en este caso por una logística.

La serie (2.1) permite describir el cambio de una población en términos numéricos, de manera que el tamaño de una población cerrada a lo largo del tiempo puede expresarse a través de una tasa instantánea de crecimiento, como:

$$\frac{d}{dt}N(t) = r(t)N(t) \quad \forall\, t \geq 0 \tag{3.1}$$

de este modo, es posible escribir la tasa de crecimiento poblacional $r(t)$, como una función que sigue un comportamiento logístico. Así, la evolución a lo largo del tiempo de una población quedará expresada como:

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = k_1 + \frac{k_2}{1+e^{\alpha+\beta t}} \tag{3.2}$$

por lo que:

$$\frac{d\ln N(t)}{dt}dt = k_1 + \frac{k_2}{1+e^{\alpha+\beta t}}$$

integrando ambos lados de la ecuación se tiene que:

$$\ln N(t) = k_1 t + k_2 \int \frac{1}{1+e^{\alpha+\beta t}}dt$$

en donde:

$$k_2 \int \frac{1}{1+e^{\alpha+\beta t}}dt = \frac{k_2}{\beta}\int \frac{1}{1+ue^{\alpha}}\frac{1}{u}du$$

mediante el correspondiente cambio de variable:

$$u = e^{\beta t}$$
$$dt = \frac{1}{\beta}\frac{1}{u}du$$

se tiene que:

$$\int \frac{1}{1+ue^{\alpha}}\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u}du - \int \frac{e^{\alpha}}{1+ue^{\alpha}}du$$

así:

$$\int \frac{1}{u}du - \int \frac{e^{\alpha}}{1+ue^{\alpha}}du = \ln(u) - \ln(1+ue^{\alpha}).$$

Revirtiendo el cambio de variable se obtiene que:

$$\ln N(t) = k_1 t + \frac{k_2}{\beta}\ln(e^{\beta t}) - \frac{k_2}{\beta}\ln(1+e^{\alpha+\beta t}) + c$$

simplificando:

$$\ln N(t) = k_1 t + \frac{k_2}{\beta}\ln\left[\frac{e^{\beta t}}{1+e^{\alpha+\beta t}}\right] + c$$

y tomando exponencial en ambos lados de la igualdad, se tiene que:

$$N(t) = e^{k_1 t}e^{\frac{k_2}{\beta}\ln\left[\frac{e^{\beta t}}{1+e^{\alpha+\beta t}}\right]}e^{c}.$$

Si $t = 0$, entonces:

$$N(0) = e^{\frac{k_2}{\beta}\ln\left[\frac{1}{1+e^{\alpha}}\right]}e^{c}$$

por lo que:

$$e^{c} = N(0)e^{\frac{k_2}{\beta}\ln(1+e^{\alpha})}$$

así:

$$N(t) = N(0)e^{k_1 t}e^{\frac{k_2}{\beta}\ln(1+e^{\alpha})}e^{\frac{k_2}{\beta}\ln\left[\frac{e^{\beta t}}{1+e^{\alpha+\beta t}}\right]}$$

por lo tanto, se obtiene un modelo poblacional el cual quedará determinado completamente por los parámetros α, β, k_1 y k_2, mismos que conforman el patrón de crecimiento para la población.

Finalmente, la función encontrada se denominará modelo de crecimiento exponencial logístico, y quedará expresada como:

$$N(t) = N(0)e^{k_1 t}e^{\frac{k_2}{\beta}\ln\left[\frac{1+e^{\alpha}}{e^{-\beta t}+e^{\alpha}}\right]} \tag{3.3}$$

Obsérvese que cuando t tiende a infinito, el último factor en la ecuación (3.3) tiende a ser constante, y la función crece de modo indefinido. Así, aunque el modelo rompe con el supuesto de que la tasa de crecimiento presenta un comportamiento constante en el tiempo, la ecuación resultante (3.3) sigue presentando un patrón de cambio exponencial.

3.2 Estimación de Parámetros

Para estimar los parámetros del modelo de crecimiento poblacional (3.3) puede recurrirse a diferentes métodos de estimación, como métodos numéricos para sistemas no lineales, o métodos de solución para sistemas dinámicos, véase Dennis y Schnabel[3] y Bard[1], sin embargo, debido a que finalmente la precisión en la estimación de los parámetros no proporcionará un mucho mejor ajuste de la población final,[2] se procedió a estimar los parámetros del modelo a través del método de mínimos cuadrados, fijando para ello los límites inferior y superior de la función logística que ajusta el cambio en la tasa de crecimiento.

La hipótesis inicial de construcción del modelo que consistió en suponer que:

$$r(t) = k_1 + \frac{k_2}{1+e^{\alpha+\beta t}} \tag{3.1}$$

permitirá hacer una estimación de los parámetros α y β a partir de una serie de va-

[2] debido a que se trata de un modelo de crecimiento no acotado.

lores conocidos de $r(t)$, una vez que límites inferior y superior de la tasa de crecimiento poblacional k_1 y k_2 se hayan establecido.

De este modo, despejando de la ecuación (3.4), quedará especificada la recta de regresión como:

$$y(x_i) = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \tag{3.5}$$

donde por el método de mínimos cuadrados, los estimadores se obtendrán a partir de:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - \bar{x}] [y_i - \bar{y}]}{\sum_{i=1}^{n} [x_i - \bar{x}]^2} \tag{3.6}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \tag{3.7}$$

donde:

$$x_i = t_i$$

$$y(x_i) = \ln \left[\frac{k_2}{r(x_i) - k_1} - 1\right]$$

Los estimadores (3.7) y (3.6) coinciden con los estimadores máximo verosimiles, por lo que conservan muchas de las propiedades estadísticas del método de regresión lineal simple, véase Johnston[5].

3.3 Resultados de la Estimación

Para ajustar una función logística a la evolución de la tasa de crecimiento poblacional de México, entre el período comprendido de 1810 a 1970, a partir de la serie de tasas de crecimiento, según la tabla 3.A, se determinaron los valores de las asintotas inferior y superior de la función como:

$$k_1 = 0.013$$

$$k_2 = 3.175$$

Años	Tasa
1810-1846	0.373
1846-1865	0.836
1865-1878	0.863
1878-1910	1.583
1921-1930	1.611
1930-1940	1.732
1940-1950	2.755
1950-1970	3.179

Tabla 3.A: ESTADISTÍCAS HISTÓRICAS DE MÉXICO, TOMO I. INEGI.

y se estimaron los parámetros α y β (véase *anexo* 1) según el método de mínimos cuadrados, por lo que la función logística ajustada quedó establecida como:

$$r(t) = 0.013 + \frac{3.175}{1 + e^{2.57 - 0.046\,t}}$$

cuyo comportamiento puede verse graficado en el *anexo* 3.

El coeficiente de determinación calculado durante el proceso de estimación de los parámetros α y β fue igual a 0.70, lo que refleja un buen ajuste entre la recta de regresión y las tasas de crecimiento observadas, a pesar de que el tamaño de muestra fue de tan sólo 8 observaciones (por lo que la suma total de cuadrados de la regresión presentó 7 grados de libertad).

3.4 Población Ajustada

Utilizando los valores obtenidos en la sección anterior, el modelo de crecimiento exponencial logístico quedó determinado como:

$$N(t) = N(0)e^{0.013t}e^{-\frac{3.175}{0.047}\ln\left[\frac{1+e^{2.577}}{e^{0.047\,t}+e^{2.577}}\right]}. \tag{3.8}$$

Tiempo	P. Observada	P. Ajustada
1846	7,000,000	7,000,000
1865	8,200,000	8,918,744
1878	9,169,700	11,479,341
1910	15,160,369	14,931,943
1930	16,552,722	19,637,498
1940	19,652,552	26,122,609
1950	25,791,017	35,164,422
1970	48,225,238	47,923,524
1980	66,846,833	66,154,603

Tabla 3.B: ESTADISTÍCAS HISTÓRICAS DE MÉXICO, TOMO I, INEGI.

De esta manera, la población estimada mediante el uso del modelo de crecimiento ajustado (3.8), para México entre los años 1846–1980, presentó los resultados que pueden observarse en la tabla 3.B y en el *anexo* 2.

Se puede observar según la tendencia presentada en la gráfica del *anexo* 4, que las estimaciones de población obtenidas por la función (3.8) y presentadas en la tabla 3.B, oscilan alrededor de los rangos de población observados en el período señalado, y presentados en la misma.

Se puede concluir que la función ajustada describe bien la dinámica de crecimiento de la población mexicana en la primera fase de la transición demográfica (entre los años 1846 – 1980), no obstante que el modelo fue diseñado para poblaciones en las que la migración no presenta ningún efecto.

Un aspecto importante de resaltar es el referente al comportamiento de la tasa de crecimiento, ya que aunque esta no se comporta de manera constante, no puede tampoco asegurarse que la logística sea la mejor aproximación de ésta, a pesar de que evidentemente es superior que la primera, como puede apreciarse en la gráfica del *anexo* 3.

3.5 Un Modelo No Estable

Como en el modelo anterior, el cambio en el tamaño de una población cerrada a lo largo del tiempo, puede expresarse a través de la tasa instantánea de crecimiento, como la diferencia de la tasa bruta de fecundidad y de la tasa bruta de mortalidad, véase Ordorica[6], en donde cada una de las tasas brutas puede descomponerse en la suma de sus respectivas tasas específicas, de forma de poder incluir en el modelo los efectos provocados por los cambios en la composición de la estructura por edad de la población, así, la tasa bruta de fecundidad puede escribirse como:

$$b = \frac{\sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} B_i(t)}{\sum_{i=0}^{\omega} N_i^{(f)}(t)} \tag{3.9}$$

donde λ_1 y λ_2 representan los límites inferior y superior de período reproductivo, respectivamente.

De este modo, la tasa específica de fecundidad se expresa como el cociente de los nacimientos $B_i(t)$ y $N_i^{(f)}(t)$ la población media femenina, ambos pertenecientes al mismo grupo de edad i, al tiempo t.

La tasa bruta de mortalidad puede expresarse, a su vez, como la suma de las tasas específicas de mortalidad:

$$m = \frac{\sum_{j=0}^{\omega} D_j(t)}{\sum_{j=0}^{\omega} N_j(t)} \tag{3.10}$$

donde $D_j(t)$ representa el total de defunciones ocurridas en el grupo de edad i al tiempo t, y $N_j(t)$ representa la población perteneciente al $j-ésimo$ grupo de edad al tiempo t, mientras que $(0, \omega)$ representan los límites inferior y superior, respectivamente, del tiempo de duración de la vida.

Por lo tanto, la tasa intantánea de crecimiento anual puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} f_i(t)N_i^{(f)}(t) - \sum_{j=0}^{\omega} m_j(t)N_j(t)}{N(t)} \tag{3.11}$$

La solución a la ecuación diferencial (3.11) dará por resultado un modelo no estable de cambio poblacional que por sus características, deberá ser capaz de describir la dinámica de cambio de una población, en situaciones en las que las tasas tanto de fecundidad como de mortalidad son variables, no sólo del tiempo, sino que también de la edad.

En este punto, será necesario considerar que el comportamiento de las tasas específicas por edad, tanto para la fecundidad como para la mortalidad, seguirán un patrón de cambio no constante en el tiempo, y además este patrón podrá variar según el grupo de edad.

3.6 El Comportamiento de las Tasas

La solución de la ecuación (3.11) debe considerar una determinada forma funcional para cada una de las dos tasas involucradas, por ello será necesario fijar una función que describa la evolución de las tasas de fecundidad y mortalidad en el tiempo.

Si se considera que la función logística es capaz de describir correctamente la evolución tanto de la tasa específica de fecundidad como de la tasa específica de mortalidad para cada grupo de edad, se tendrá que:

$$f_i(t) = k_{1,i} + \frac{k_{2,i}}{1 + e^{\alpha_i + \beta_i t}} \quad \forall\, i = \lambda_1 \ldots \lambda_2$$

$$m_j(t) = s_{1,j} + \frac{s_{2,j}}{1 + e^{\gamma_j + \delta_j t}} \quad \forall\, j = 0 \ldots \omega$$

la ecuación (3.11) tomará la forma:

$$\frac{dN(t)}{N(t)dt} = \frac{\sum_{l=0}^{\omega}\left[\left(k_{1,l} + \frac{k_{2,l}}{1+e^{\alpha_l+\beta_l t}}\right) N_i^f(t) - \left(s_{1,l} + \frac{s_{2,l}}{1+e^{\gamma_l+\delta_l t}}\right) N_i(t)\right]}{N(t)} \tag{3.12}$$

Pueden encontrarse patrones diferentes de cambio para describir las tasas, mismos que modificarán la solución final de la ecuación diferencial (3.11) desarrollada para la construcción del modelo no estable, por lo que, es posible considerar que los patrones de crecimiento exponenciales o logarítmicos, por dar un ejemplo, son también capaces de imitar la evolución observada de las tasas, sin embargo, este tipo de ejercicios se dejarán para futuras investigaciones.

Otro aspecto interesante es el relativo al estudio de la convergencia de las series

$$\sum_{i=\lambda_1}^{\lambda_2} f_i(t) N_i^{(f)}(t) \tag{3.13}$$

y

$$\sum_{j=0}^{\omega} m_j(t) N_j(t) \tag{3.14}$$

en el límite de cuando t tiende a infinito, ya que el resultado no sólo de la convergencia de cada una de ellas, sino de la convergencia de la interacción de ambas series, revelará un aspecto fundamental para el conocimiento de las fluctuaciones y la estructura por edad final de una población, sujeta a tasa variables.

Referencias

[1] Coale. Ansley J. (1957), *How the age distribution of a human population is determined*. Cold Springs Harbor Symposia On Quantitative Biology, Vol XXII.

[2] Suddendu Biwas y Nather Abas. (1986), *A modified quasi stable population technique for a non stable population*, SCIMA, Vol 15, No 3. PP 22-45.

[3] Dennis J. y Schnabel R. (1983), *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice-Hall, New Jersey.

[4] Bard. Y. (1970), *Nonlinear Parameter Estimation*, Academic Press, New York.

[5] Johnston J. (1980), *Métodos de Econometría*, Vicens Vives, Tercera edición. México.

[6] Ordorica. M. (1990). *Ajuste de una función expologística a la evolución de la población total de México 1930-1985*. Estudios demograficos y urbanos 15. Vol. 5. No 3. pp 373-386.

Capítulo 4

Conclusiones y Recomendaciones

El modelo de crecimiento exponencial logístico desarrollado al modificar la hipótesis de cambio constante hecha sobre la evolución de la tasa de crecimiento, dió por resultado un modelo que, aunque promete una mejor aproximación que la lograda por la función exponencial, queda aun por determinar el efecto que cada parámetro ejerce sobre el crecimiento de la población, ello permitirá estudiar y describir con mejor detalle la dinámica poblacional, cuando ésta se encuentre sujeta a tasas de cambio demográfico variables.

Respecto de las estimaciones de población obtenidas, un aspecto que deberá tomarse en cuanta, tiene que ver con el período de ajuste del modelo exponencial logístico, ya que debido al número limitado de datos disponibles fue necesario considerar observaciones que datan del año 1810, lo que implicó un desajuste entre la forma de crecimiento de las tasas y la evolución de la función logística, tal situación podría mejorarse al contar con un mayor número de observaciones para años posteriores.

Se recomienda para trabajos futuros desarrollar criterios que permitan calificar la calidad de los estimadores de los parámetros del modelo de crecimiento exponencial logístico a partir de:

1. Desarrollar una manera no subjetiva de determinar el valor de las asíntotas inferior

y superior de la función logística.

2. Desarrollar criterios para selaccionar un método de estimación de parámetros.

3. Evaluar el número mínimo de observaciones requeridas con el fin de garantizar un modelo cuyas proyecciones proporcionen algún grado de certidumbre.

4. Mejorar la calidad de las estimaciones de población, respecto a su exactitud, desviación media o distancia absoluta.

Otro factor importante que deberá tomarse en cuenta para el desarrollo de posteriores modelos no estables, es el referente al estudio y ajuste de funciones que sean capaces de describir el comportamieto y la evolución de las tasas de crecimiento, mortalidad y fecundidad, cuyos parámetros permitan controlar las variaciones observadas en los distintos grupos de edad y durante el tiempo.

Finalmente, un aspecto fundamental, que no podría de ninguna forma dejarse de lado es el referente al estudio de la velocidad de convergencia de las series (3.13), (3.14) en el límite cuando t tiende a infinito, no sólo para la forma general de las tasas en abstracto, sino para diversas formas y patrones de cambio de las mismas. Todo ello permitirá acercarse no sólo a la solución de la ecuación diferencial (3.11) sino también a la forma final de la estructura por edad de la población.

5. Anexos

Anexo 1: Ajuste de Parámetros de la Tasa de Crecimiento

Año	t**	r(t)*	Y(t)	(x-mx)	(y-my)	(x-mx)2	(y-my)2	(x-mx)(y-my)	Yest	Y(t)	error	rest(t)	r(t)*	error*error
1846	0	0.373	2.0566	-65.1250	2.5257	4241.27	6.3794	-164.4889	2.5768	2.0566	-0.5202	0.2373	0.373	0.2706
1865	19	0.836	1.0501	-46.1250	1.5192	2127.52	2.3079	-70.0727	1.6882	1.0501	-0.6381	0.5084	0.836	0.4072
1878	32	0.863	1.0062	-33.1250	1.4754	1097.27	2.1767	-48.8715	1.0801	1.0062	-0.0739	0.8178	0.863	0.0055
1910	64	1.583	0.0220	-1.1250	0.4912	1.27	0.2413	-0.5526	-0.4165	0.0220	0.4386	1.9264	1.583	0.1923
1930	84	1.611	-0.0132	18.8750	0.4559	356.27	0.2078	8.6051	-1.3519	-0.0132	1.3387	2.5354	1.611	1.7921
1940	94	1.732	-0.1660	28.8750	0.3031	833.77	0.0919	8.7514	-1.8196	-0.1660	1.6536	2.7452	1.732	2.7343
1950	104	2.755	-1.8457	38.8750	-1.3766	1511.27	1.8950	-53.5145	-2.2873	-1.8457	0.4416	2.8953	2.755	0.1950
1970	124	3.179	-5.8630	58.8750	-5.3939	3466.27	29.0939	-317.5642	-3.2227	-5.8630	-2.6403	3.0663	3.179	6.9710
Suma	521	12.932	-3.7530			13634.88	42.3938	-637.7079		Suma=	0.0000		Suma=	12.5680
Prom	65.13	1.6165	-0.4691											

k1=	0.013	Beta=	-0.0468
k2=	3.175	Alfa=	2.5768
		R"=	0.7035

*Fuente: Estadísticas Históricas de México, Tomo I. INEGI. 1985

**tiempo transcurrido en años a partir del año base 1846

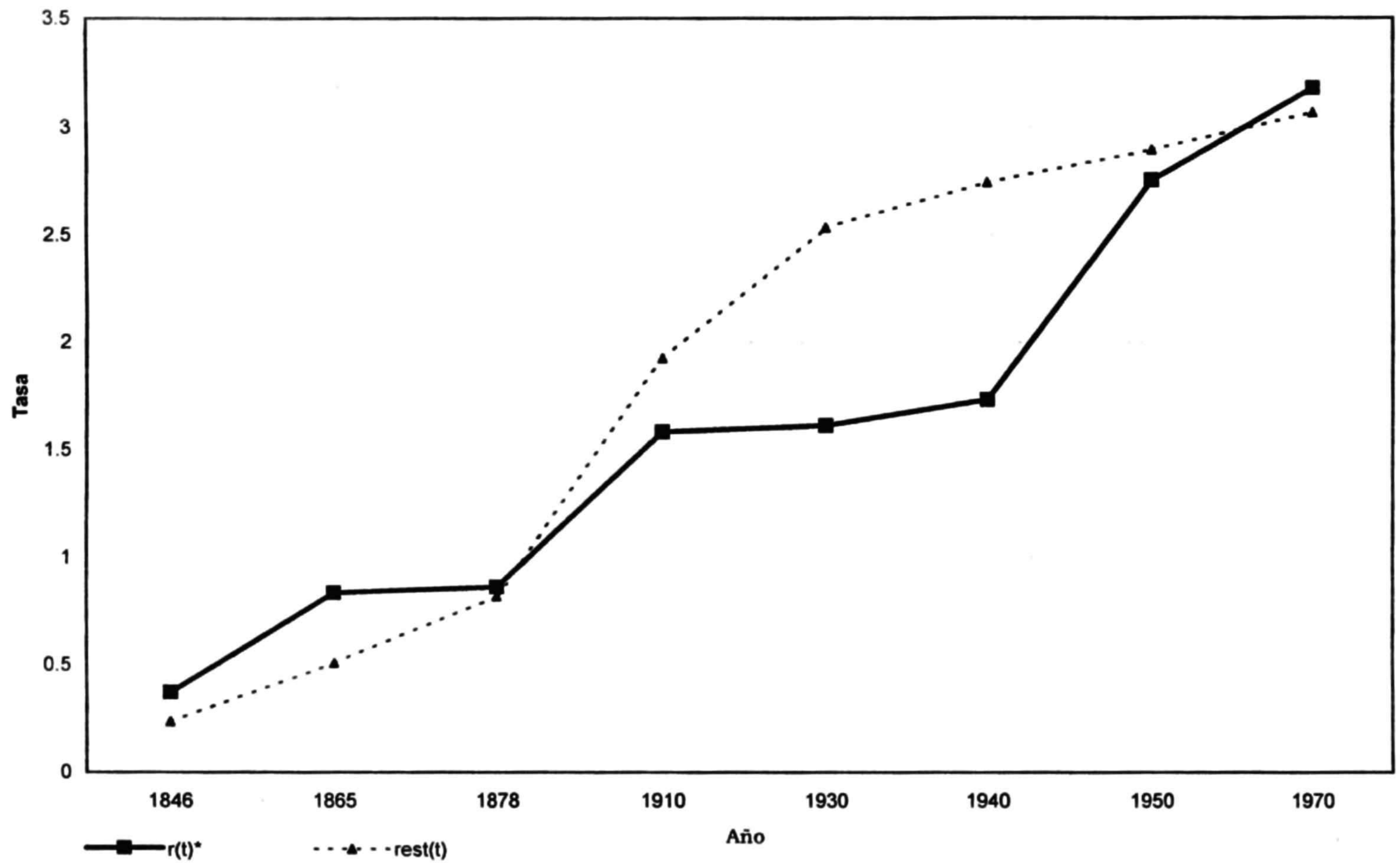
Anexo 2: Ajuste de la Población de México, Modelo Exponencial Logístico

Año	e(k1*t)	e(k/b*LN())	Población*	N(0)*e(k1*t)	N(0)*e(k2/b*LN())	N(t)**
1846	1.0000	1.0000	7,000,000	7,000,000	7,000,000	7,000,000
1865	1.0131	1.2577	8,200,000	7,091,594	8,803,551	8,918,744
1878	1.0263	1.5978	9,169,700	7,184,387	11,184,725	11,479,341
1910	1.0398	2.0515	15,160,369	7,278,393	14,360,807	14,931,943
1930	1.0534	2.6632	16,552,722	7,373,630	18,642,444	19,637,498
1940	1.0672	3.4969	19,652,552	7,470,113	24,478,647	26,122,609
1950	1.0811	4.6465	25,791,017	7,567,859	32,525,839	35,164,422
1970	1.0953	6.2507	48,225,238	7,666,883	43,755,026	47,923,524
1980	1.1096	8.5172	66,846,833	7,767,203	59,620,201	66,154,603

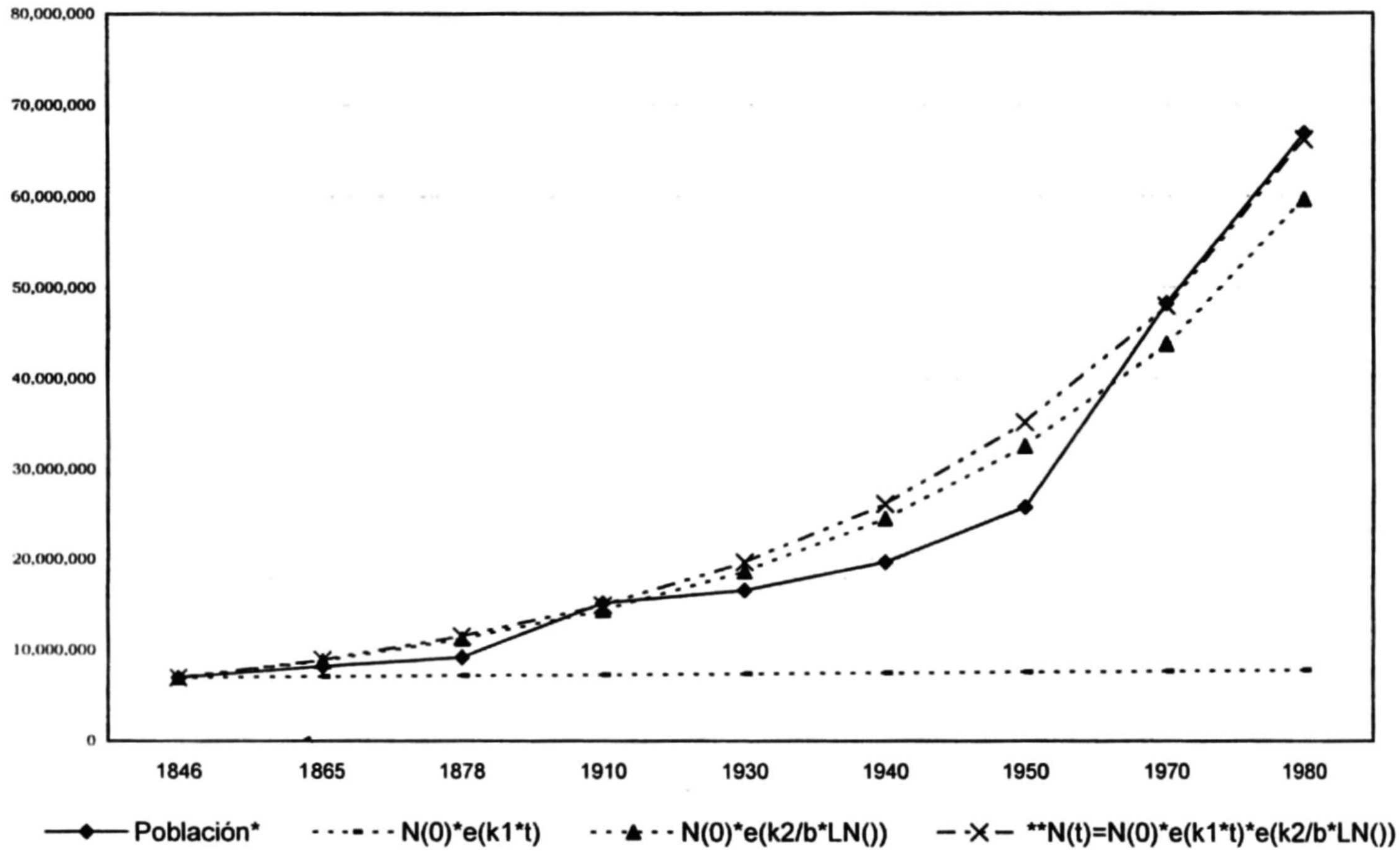
*Fuente: Estadísticas Históricas de México, Tomo I. INEGI. 1985

**N(t)=N(0)*e(k1*t)*e(k2/b*LN())

Anexo 3: Ajuste de la Función Logística a la Tasa de Crecimiento Poblacional



Anexo 4: Población Observada vs Ajustada



Referencias

[1] Bertram, G. y Murray, Jr. (1979). *Population Dynamics, Alternative Models*. Academic Press.

[2] Burton, T. A. (1983), *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, E.U.

[3] Cerone Pietro, (1996), *On the effects of the generalised renewal integral equation model of population dynamics*, Genus, Vol 52, No 1-2. pp 285-303.

[4] Davis, H. T. (1930), *The Volterra Integral Equations of the Second Type*, Indiana University Studies.

[5] Dennis,G. Zill, (1988). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamrica, México.

[6] Fletcher R. (1988). *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and Sons. Second Edition. E.U.

[7] Hall. Shiva S. (1992). *Advanced Tecniques of Population Analysis*. New York. Plenum Press.

[8] Hildebrand, F. B. (1958), *Methods of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, New York.

[9] Hochstadt, Harry (1989), *Integral Equations*, Wiley Classics Library, New York.

[10] Hoppensteadt, F. C. (1976). *Mathematical Methods of Population Biology*. Courant Institute of Mathematical Sciences, N.Y.

[11] Keyfitz, Nathan (1979). *Introducción a las Matemáticas de Población*, Santiago de Chile, CELADE.

[12] López, Alvaro T. (1961). *Problems in stable population theory.* Princeton, New Jersey.

[13] Lotka, Alfred (1969). *Teoría Analítica de las Asociaciones Biológicas*, Santiago de Chile, CELADE.

[14] Naciones Unidas (1970). *El Concepto de Población Estable, Aplicación al Estudio de la Población de Países que no Tienen Buenas Estadísticas Demogrficas*, Nueva York (TS/SOA/SER.A/39).

[15] Ordorica M, (1990). *Ajuste de una Función Expolgistica a la Evolución de la Población Total de México*, 1930-1985, Estudios demográficos y urbanos 15, Vol. 5. No 3. pp 373-386.

[16] Pipkin, A. C. (1991), *A Course on Integral Equations*, Springer-Verlag, E.U.

[17] Richard, K. Miller (1971), *Non linear Volterra Integral Equations*, W.A. Benjamin, Inc, E.U.

[18] Ricomi, F. G. (1957), *Integral Equations*, Interscience Publishers, Inc. E.U.

[19] Robert E. Dennis J.E. and Schnabel R.B, (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-Linear Equations*. Prentice- Hall, New Jersey.