EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

"CHEAP TALK EN DOS DIMENSIONES: CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE HAYA REVELACIÓN PERFECTA EN UNA DIMENSIÓN"

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN ECONOMÍA PRESENTA

LUIS ALBERTO ROMERO IBARRA

ASESOR: DRAGAN BRANIMIR FILIPOVICH ZACHRISSON

PROMOCIÓN 2005-2007

AGOSTO DE 2007

Deseo agradecer a mi familia, amigos y profesores, en especial al Dr. Dragan Filipovich por dirigir este trabajo de investigación. También expreso mi agradecimiento al Centro de Estudios Económicos del Colegio de México.

RESUMEN

En este trabajo se analiza un juego de cheap talk a la Crowford y Sobel, cuyo espacio de estados es el cuadrado unitario en el plano. No se ha encontrado una caracterización de todos los equilibrios. Aquí nos enfocamos en los equilibrios tales que el emisor revela toda la información en la dirección que es perpendicular a la dirección del vector de desacuerdo. El resultado principal de este análisis es que existe revelación perfecta en esta dimensión si y sólo si el vector aleatorio de estados tiene componentes independientes en las direcciones de acuerdo y desacuerdo.

ÍNDICE

CHEAP TALK EN DOS DIMENSIONES: CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE HAYA REVELACIÓN PERFECTA EN UNA DIMENSIÓN

1. INTRODUCCIÓN

En el modelo de "Cheap Talk" de Crawford y Sobel (1982), un emisor observa la realización de una variable aleatoria $\boldsymbol{\omega}$ con soporte *[0,1]*, luego envía una señal $\boldsymbol{m}$ a un receptor quien elige una acción que afecta los pagos de ambos jugadores. Estos pagos también dependen de $\boldsymbol{\omega}$. Dado $\boldsymbol{\omega}$, los jugadores tienen preferencias distintas respecto a la acción que debe tomarse y esto afecta la información que el emisor transmite en su mensaje. Dicho conflicto de intereses se parametriza con un escalar b.

En este trabajo se analiza una variación de este modelo en el que $\boldsymbol{\omega}$ toma valores en el conjunto bidimensional $[0,1] \times [0,1]$ y el valor de conflicto es un vector $\boldsymbol{b}$. Ninguna caracterización de los equilibrios informativos de este juego ha podido encontrarse. Levi y Razin (2004 y 2006) han trabajado en el tema por varios años pero sus resultados son muy limitados pues suponen valores de conflicto $\boldsymbol{b}$ muy grandes (2004) ó preferencias lexicográficas (2006). Estos autores hicieron notar que comunicación en una dimensión puede revelar información en la otra y que por lo tanto, aún cuando los agentes podrían no tener conflicto en una dimensión en particular, esta interacción de las diferentes dimensiones puede restringir la comunicación.

Tomando el caso particular de preferencias cuadráticas para ambos agentes (la extensión en este juego del ejemplo desarrollado por Crawford y Sobel), se presentan condiciones necesarias para que haya revelación de toda la información que posee el emisor en la dimensión que es perpendicular al vector de conflicto. Dichos equilibrios son interesantes porque en esta dimensión los agentes no tienen conflicto ("dimensión de acuerdo" en un sentido que definiremos más adelante) y por lo tanto es sensato desear que se transmita información allí.

La Sección 2 describe el modelo de manera formal. Se puede ver que el juego es esencialmente el de Crawford y Sobel, siendo diferente únicamente el espacio de estados. También presento definiciones de “equilibrio perfectamente revelador en la dimensión de acuerdo” y la notación que se usará en las siguientes secciones.

En la Sección 3 se presentan los resultados principales del trabajo, a saber, que sólo en un caso muy específico sobre la distribución de $\boldsymbol{\omega}$ hay revelación perfecta de información en la dimensión de acuerdo. Finalmente en la Sección 4 se caracterizan todos los equilibrios perfectamente informativos en la dimensión de acuerdo cuando el vector de conflicto está sobre el eje Y.

2. EL MODELO

El modelo tiene dos jugadores, un emisor S y un receptor R. Denotamos con $\Omega=[0, 1] \times [0, 1]$ el espacio de estados. La naturaleza escoge $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$ de acuerdo a una distribución de probabilidad continua con función de densidad $f:\Omega \rightarrow \Re$ y soporte en Ω. El emisor observa la realización de $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2)$ y envía un mensaje $\boldsymbol{m}=(m_1, m_2) \in \Omega$ al receptor, quien escoge una acción $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2) \in \Omega$.

Los pagos de los jugadores están dados por las siguientes funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern:

$$u^S(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=-(\omega_1+b_1-a_1)^2-(\omega_2+b_2-a_2)^2$$

y

$$u^R(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a})=-(\omega_1-a_1)^2-(\omega_2-a_2)^2.$$

Donde $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2) \in \Re_+^2$ es un vector cuya función es análoga al parámetro escalar b en el modelo de Crawford y Sobel: mide que tan diferentes son los intereses de los agentes.

Este es un juego extensivo con información imperfecta y el concepto de equilibrio que se usa es el de equilibrio secuencial débil[1].

Una estrategia del emisor es una función $\sigma_S:\Omega\rightarrow\Omega$ que asigna a cada estado un mensaje. Una estrategia del receptor es una función $\sigma_R:\Omega\rightarrow\Omega$ que asigna a cada mensaje una acción, mientras que una creencia del receptor es una función μ que asigna a cada mensaje $\boldsymbol{m}$ una distribución de probabilidad $\mu(\boldsymbol{m})$ sobre el espacio Ω.

Definición 1. *Un equilibrio secuencial débil del modelo que estamos considerando es un perfil de estrategias (σ_S, σ_R) y una creencia μ del receptor, tales que:*

1) $$f_m(\omega) = \begin{cases} \dfrac{f(\omega)}{\int_{\sigma_S^{-1}(m)} f(z)\, dz} & si \quad \int_{\sigma_S^{-1}(m)} f(z)\, dz \neq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Es la función de densidad de $\mu(\boldsymbol{m})$.

2) $$\sigma_R(m) = \int_{\Omega} f_m(z)\, dz.$$

3) $$\sigma_S(\omega) = \arg\max_m U^S(\omega, \sigma_R(m), b).$$

Consideremos una recta cualquiera perpendicular al vector $\boldsymbol{b}$. Dado un estado $\boldsymbol{\omega}$, si los agentes tuvieran que elegir una acción sobre esta recta, ambos elegirían el mismo punto, como se hace evidente a partir de la Figura 1, donde las curvas de indiferencia de los dos agentes son tangentes a la recta en el mismo punto. Esta observación nos permite definir la dirección perpendicular al vector $\boldsymbol{b}$ como la "dimensión de acuerdo".

[1] Ver Mas-Colell , Whinston y Green 1995, p.283-285 para una definición de equilibrio secuencial débil.

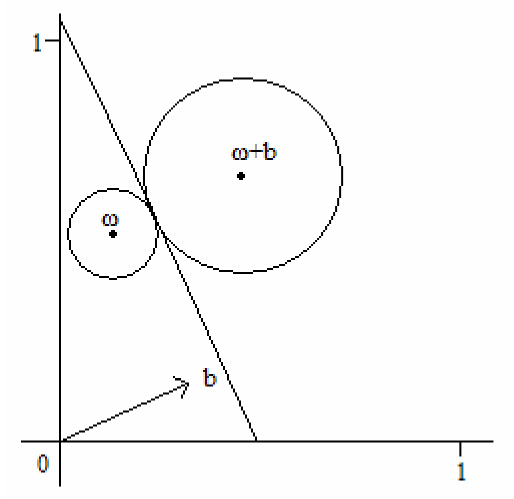

Figura 1.

Formalmente, sean

$$\boldsymbol{u}=(b_2,-b_1)/\|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v}=(b_1,b_2)/\|\boldsymbol{b}\|,$$

donde $\|\boldsymbol{b}\|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$. Entonces el conjunto $\beta=\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ forma una base ortonormal para $\Re^2$. Dado un punto $\boldsymbol{p}=(x, y)\in\Re^2$, denotemos por $[\boldsymbol{p}]_\beta=(p_u, p_v)$ sus coordenadas en la base β. Llamamos al subespacio generado por $\boldsymbol{u}$ "dimensión de acuerdo" y al subespacio generado por $\boldsymbol{v}$ "dimensión de desacuerdo".

Definición 2. *Un equilibrio secuencial débil es un "equilibrio perfectamente revelador en la dimensión de acuerdo (PRDA)" si en coordenadas de la base* β, $(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\omega}))_u=\omega_u$.

3. RESULTADOS

En esta sección se presenta el resultado principal: condiciones necesarias y suficiente sobre la distribución de $\boldsymbol{\omega}$ para la existencia de un equilibrio perfectamente revelador en la dimensión de acuerdo (PRDA).

La siguiente proposición caracteriza la "forma" que toma el conjunto de acciones inducidas en un equilibrio PRDA.

Proposición 1. *Si* $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$ *es una acción tomada en un equilibrio PRDA, entonces todos los puntos de la línea que pasa por* (a_1, a_2) *con pendiente perpendicular a* $\boldsymbol{b}$ *y que están en* Ω*, son acciones en equilibrio.*

Demostración. Ver apéndice.

Supongamos que $b_1\neq 0$ y $b_2\neq 0$ *y* consideremos una acción $\boldsymbol{a_0}$ inducida en un equilibrio PRDA. Expresemos $\boldsymbol{a_0}$ en coordenadas de la base β, $[\boldsymbol{a_0}]_\beta$. Supóngase que $(\boldsymbol{a_0})_v\neq(E[\boldsymbol{\omega}])_v$. Sea

$$S(\boldsymbol{m})=\{\boldsymbol{p}\in\Omega|\ \ \sigma_R(\sigma_S(\boldsymbol{p}))=\boldsymbol{a_0}\}.$$

Entonces $(\boldsymbol{a_0})_v=(E[\boldsymbol{\omega}|\ \ \boldsymbol{\omega}\in S(\boldsymbol{m})])_v$. Dado que $(\boldsymbol{a_0})_v\neq(E[\boldsymbol{\omega}])_v$, $S(\boldsymbol{m})$ no puede ser igual al segmento de recta en Ω, paralelo al vector $\boldsymbol{b}$ y que pasa por $\boldsymbol{a_0}$. Como $f(\boldsymbol{p})>0$ para todo $\boldsymbol{p}\in\Omega$, y $S(\boldsymbol{m})$ tiene más de un elemento[2], $\boldsymbol{a_0}$ no puede estar sobre la frontera de Ω lo cual es una contradicción con la Proposición 1. Luego $(\boldsymbol{a_0})_v=(E[\boldsymbol{\omega}])_v$ y por lo tanto las variables aleatorias ω_u y ω_v son independientes. Este argumento junto con la observación de que si ω_u y ω_v son independientes entonces existe un equilibrio PRDA, demuestra la siguiente proposición.

Proposición 2. *Si* $b_1\neq 0$ *y* $b_2\neq 0$*, entonces existe un equilibrio perfectamente revelador en la dimensión de acuerdo si y sólo si las variables aleatorias* ω_u *y* ω_v *son independientes.*

---

[2] Ver la demostración de la Proposición 1.

De la discusión anterior podemos concluir dos cosas. En primer lugar, sólo existe perfecta revelación en la dimensión de acuerdo cuando el vector aleatorio $\boldsymbol{\omega}$ tiene coordenadas independientes en las dimensiones de acuerdo y desacuerdo. Intuitivamente, información en la dimensión de acuerdo revela información en la dimensión de desacuerdo cuando $\boldsymbol{\omega}$ no tiene coordenadas independientes en éstas dimensiones, y por lo tanto no es óptimo revelar completamente información en ninguna dimensión.

En segundo lugar, sólo hay un tipo de equilibrio PRDA, a saber, el que forman las siguientes estrategias:

(1) $$[\ \sigma_S(\boldsymbol{\omega})]_\beta=(m_u=\omega_u\ ,\ m_v=c)$$

(2) $$[\ \sigma_S(\boldsymbol{m})]=(a_u= m_u,\ a_v=(E[\boldsymbol{\omega}])_v).$$

Donde c es una constante cualquiera tal que $\sigma_R(\boldsymbol{\omega}) \in \Omega$. Se desprende un hecho interesante:

Proposición 3. *En un equilibrio perfectamente revelador en la dimensión de acuerdo, no se revela ninguna información en la dimensión de desacuerdo cuando* $b_1 \neq 0$ *y* $b_2 \neq 0$.

4. EQUILIBRIO PRDA MÚLTIPLE

En esta sección analizamos el caso en que $b_1=0$ y por lo tanto el eje X es la dimensión de acuerdo.

Proposición 4. *Si* $b_1=0$ *y existe un equilibrio perfectamente revelador en la dimensión de acuerdo, entonces existe* $N(b_2)$ *tal que para todo* $1 \leq N \leq N(b_2)$ *existe un equilibrio PRDA con* N *acciones inducidas para cualquier recta* $x=t$, $0 \leq t \leq 1$.

Demostración. Dado un estado ω, como hay perfecta revelación en la dimensión de acuerdo ($m_1=\omega_1$), los jugadores enfrentan un juego idéntico al de Crawford y Sobel en la dimensión de desacuerdo (eje Y). Luego, todos los resultados de estos autores se aplican a la recta $x=\omega_1$. ■

Por ejemplo, si $b=(b_1=0,\ b_2=1/5)$, entonces $N(1/5)=2$ y las acciones inducidas en equilibrio son los segmentos de recta paralelos al eje X mostrados en la siguiente figura:

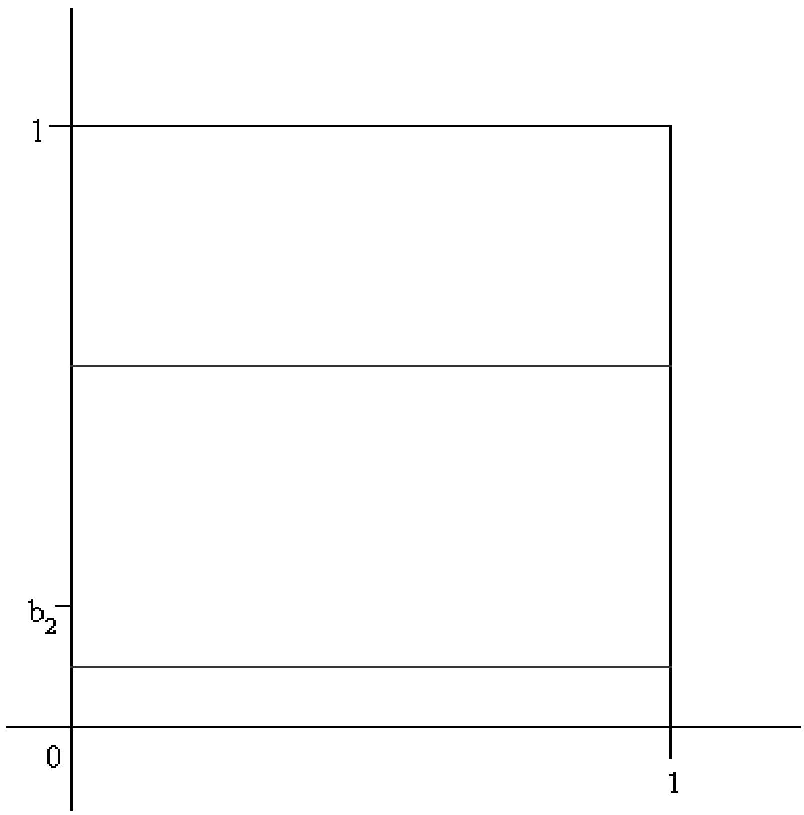

Figura 2.

Es natural preguntar porqué no tenemos este resultado cuando b_1 y b_2 son ambos distintos de cero. Cuando $b_1\neq 0$ y $b_2\neq 0$ y hay revelación perfecta en la dimensión de acuerdo, los conjuntos $S(\boldsymbol{m})$ sobre los que el receptor calcula $E[\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{m}]$ no son iguales en general para distintos valores de m_u (recuérdese que p_u es la coordenada de un punto $\boldsymbol{p}$, respecto a la dimensión de acuerdo). De hecho, $S(\boldsymbol{m})$ es un segmento de recta cuya longitud disminuye cuando $m_u>(1,1)_u$ aumenta. Como las particiones de los equilibrios del juego de Crawford y

Sobel dependen de la relación entre la longitud del intervalo y el tamaño del conflicto (el valor ***b***), las particiones pueden ser sostenidas en el juego de dos dimensiones sólo cuando la longitud de $S(\boldsymbol{m})$ no depende de ***m***, es decir cuando $b_1=0$ ó $b_2=0$.

5. CONCLUSIONES

Una condición necesaria y suficiente para que haya perfecta revelación a lo largo de la dimensión que es perpendicular al vector de conflicto ***b*** es que la distribución de $\boldsymbol{\omega}$ tenga densidades marginales independientes a lo largo de esta dimensión y de la dimensión de conflicto. Esta es una condición muy fuerte sobre la distribución de $\boldsymbol{\omega}$ y por lo tanto, en general, es raro encontrar que información completa en una dimensión sea revelada en un juego de Cheap Talk en dos dimensiones.

Cuando $\boldsymbol{\omega}$ tiene densidades marginales independientes a lo largo de la dimensión de acuerdo y de la dimensión de desacuerdo caracterizamos todos los equilibrios perfectamente reveladores en la dimensión de acuerdo (PRDA). En el caso general en que ***b*** tiene coordenadas distintas de 0, sólo existe un equilibrio de este tipo, con una acción inducida para cada línea paralela a la dimensión de acuerdo. Para el caso especial en que una de las coordenadas de ***b*** es cero, concluimos que existen tantos equilibrios PRDA como en el juego canónico de Cheap Talk de Crawfor y Sobel, donde el valor de conflicto es igual a la coordenada de ***b*** distinta de cero.

6. APÉNDICE

En este apéndice se demuestra la Proposición 1.

Lema. *Una acción* $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$ *en un equilibrio PRDA es inducida por el tipo* (a_1, a_2) *de emisor.*

Demostración. Consideremos la recta $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$. Sea $(a_1', a_2')=\boldsymbol{z}(t_0)$, $t_0 > 0$ una acción en equilibrio sobre esta línea. Entonces existe $0 < t' < t_0$ tal que

$$u^s(\boldsymbol{z}(t'), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=u^s(\boldsymbol{z}(t'), \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$$

(de lo contrario, todos los tipos de emisor preferirían estrictamente ya sea $\boldsymbol{a}$ ó $\boldsymbol{a'}$). Para toda $t < t'$,

$$u^s(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})>u^s(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$$

y para toda $t > t'$,

$$u^s(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})<u^s(\boldsymbol{z}(t), \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}).$$

Luego, el tipo de emisor $\boldsymbol{a}$ prefiere estrictamente la acción $\boldsymbol{a}$ a la acción $\boldsymbol{a'}$. Análogamente se demuestra que si $\boldsymbol{z}(t)$, $t < 0$, es una acción en equilibrio, el tipo $\boldsymbol{a}$ prefiere la acción $\boldsymbol{a}$ a la acción $\boldsymbol{z}(t)$. Esto demuestra lo que se quería. ■

Proposición 1. *Si* $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$ *es una acción tomada en un equilibrio PRDA, entonces todos los puntos de la línea que pasa por* (a_1, a_2) *con pendiente perpendicular a* $\boldsymbol{b}$ *y que están en* Ω*, son acciones en equilibrio.*

Demostración. Consideremos la recta $[\boldsymbol{p}(t)]_\beta=(t, a_v)$, $t\in\Re$. Sea $\boldsymbol{p}(t)\in\Omega$ un punto sobre esta recta. Llamemos $g(t)$ a la coordenada en el eje generado por $\boldsymbol{v}$ de la acción que induce el tipo $p(t)$, es decir, $g(t)=(\sigma_R(\sigma_S(\boldsymbol{p}(t)))_v$ (nótese que la coordenada de la acción en el eje generado por $\boldsymbol{u}$ es t). Vamos a mostrar que $g'(t)$ existe y es igual a 0.

Tomemos $h>0$ muy pequeño y consideremos al emisor tipo $[\boldsymbol{p}(t+h)]_\beta=(t+h, a_v)$. Considérese la Figura 3. La acción en equilibrio $(t+h, g(t+h))$ debe estar fuera del círculo con centro en $\boldsymbol{p}(t)+b$ y radio $b=\|\boldsymbol{b}\|$, pues de lo contrario el emisor tipo $\boldsymbol{p}(t)$ preferiría la acción $(t+h, g(t+h))$ estrictamente a la acción $(t, g(t))$. Por otra parte, el punto $(t+h, g(t+h))$ debe estar dentro del círculo con centro en $\boldsymbol{p}(t+h)+b$ y radio $\sqrt{b^2+h^2}$, pues de lo contrario el tipo $\boldsymbol{p}(t+h)$ de emisor preferiría la acción $(t, g(t))$ a la acción $(t+h, g(t+h))$. Luego

$$\frac{|g(t+h)-g(t)|}{h} \le \frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{b^2-h^2}}{h}$$

Haciendo $h\to 0$, tenemos que:

$$\lim_{h^+\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=0.$$

Análogamente se demuestra que

$$\lim_{h^-\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=0.$$

Luego $g'(t)=0$ (cuando (t, a_v) está en la frontera de Ω, nos fijamos sólo en el límite ya sea por la derecha o por la izquierda). Como t es arbitrario y $g(a_u)=a_v$ por el lema anterior, tenemos que $g(t)=a_v$ para toda t. Esto demuestra lo que se quería. ■

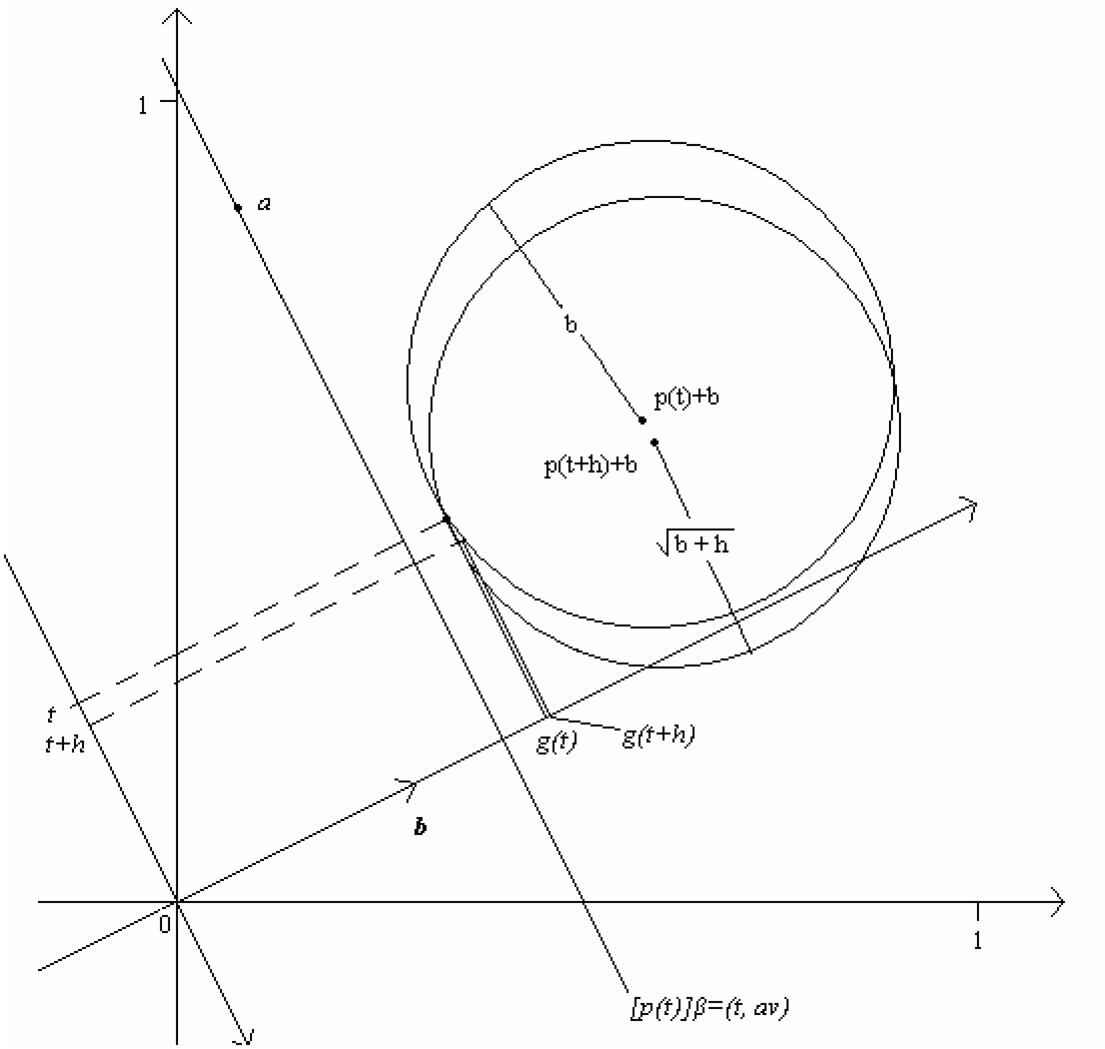

Figura 3.

7. REFERENCIAS

-Crawford, Vincent P. y Joel Sobel (1982). “Strategic Information Transmition”. Econometrica 50 (6), pp. 1431-1451.

- Levy, Gilat y Ronny Razin (2004). "Multidimensional Cheap Talk". CEPR Discussion Paper No. 4393. Disponible en SSRN: http://ssrn.com/abstract=556725.

- Levy, Gilat y Ronny Razin (2007). “On the Limits of Communication in Multidimensional Cheap Talk: A Comment”. Econometrica 75 (3), pp. 885–893.

- Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston y Jerry R. Green (1995). “Microeconomic Theory”. Nueva York, Oxford University Press.