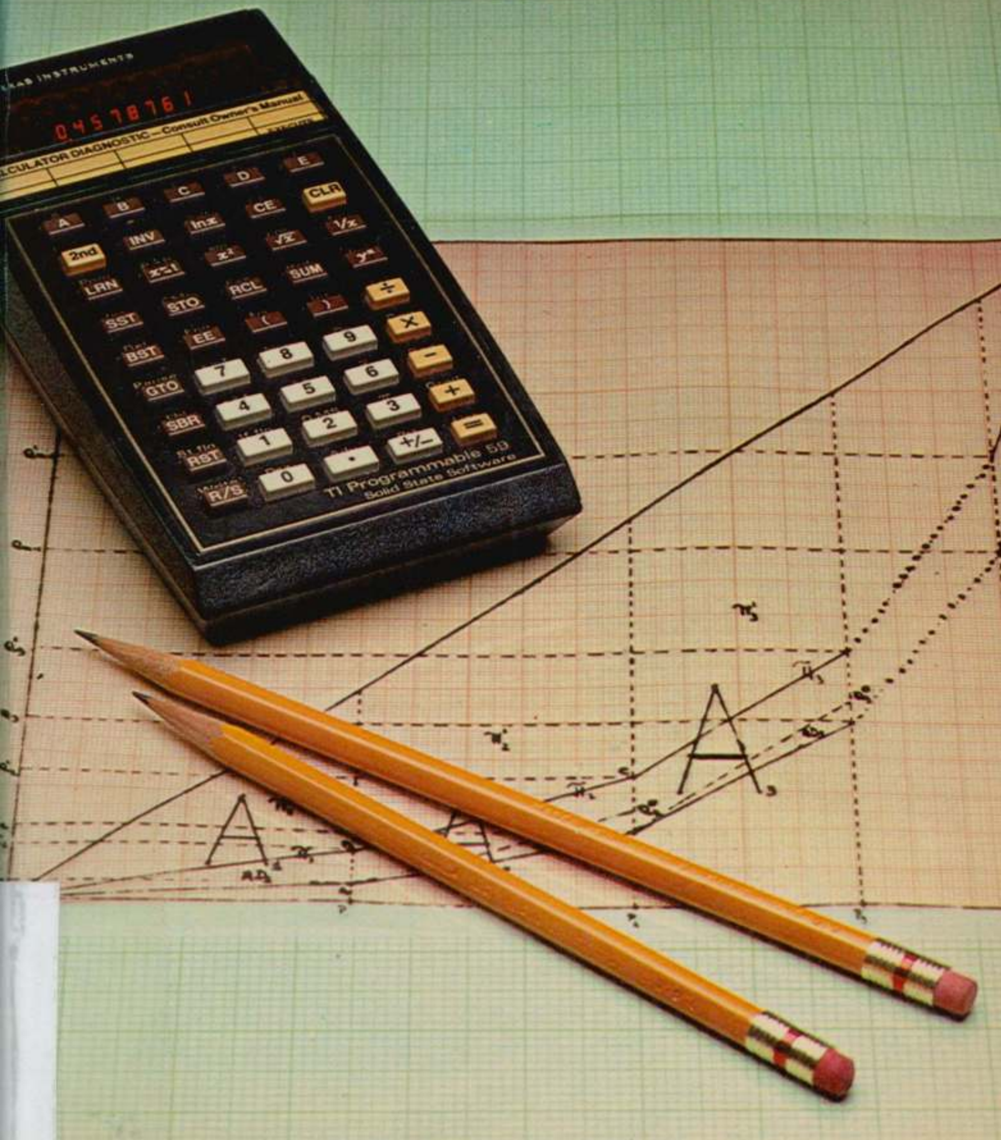
Fernando Cortés - Rosa María Rubalcava

# técnicas estadísticas para el estudio de la desigualdad social




El Colegio de México

# TÉCNICAS ESTADÍSTICAS PARA EL ESTUDIO DE LA DESIGUALDAD SOCIAL

CENTRO DE ESTUDIOS SOCIOLÓGICOS

Fernando Cortés
y
Rosa Ma. Rubalcava

# Técnicas estadísticas para el estudio de la desigualdad social

El Colegio de México
Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales
(FLACSO)

Primera edición (1 000 ejemplares) 1982



Impreso y hecho en México— *Printed and made in Mexico*

**ISBN 968-12-0207-4**

# *Indice*

# *Prefacio*

Las limitaciones y posibles bondades de este libro surgen de las actividades de docencia e investigación practicadas por los autores a lo largo de varios años.

Los cursos de métodos estadísticos que organizamos e impartimos en El Colegio de México y en FLACSO, nos aportaron materiales que, primero independientemente y luego como resultado de la labor conjunta, conformaron una masa que requería sistematización.

Por otra parte, nuestros propios análisis referidos a problemas de desigualdad social, la labor de apoyo técnico en estadística y en computación brindada a investigaciones que nuestros colegas han realizado sobre este tema, y la participación en trabajos colectivos, nos aportaron material adicional, y nos plantearon una serie de interrogantes que llevan a un primer plano el análisis de la relación entre las técnicas estadísticas y las preguntas que surgen de la teoría.

La docencia y la investigación ejercen su influencia a lo largo de todo este libro. Por eso en ocasiones resultará demasiado elemental para quien está interesado en problemas de investigación, mientras que en otras, al estudiante le parecerá que presenta algún grado de dificultad. La persona que penetra por primera vez o que cuenta con escasos antecedentes sobre los tópicos que se tratan, debería no sólo seguir el desarrollo en el orden que lo exponemos sino también reproducir los cálculos involucrados en los ejemplos.

Nuestra preocupación por escribir un libro de texto nos lleva a una presentación detallada del material, de manera que el estudiante pueda reconstruir con facilidad los pasos que conectan los símbolos de las fórmulas con los ejemplos numéricos. Las inquietudes que nacen en el campo de la investigación nos llevan a preocuparnos por problemas tales como el grado de adecuación entre las categorías teóricas y las técnicas para tratar el problema en distintos niveles de agregación, el análisis del cambio a través del tiempo en los niveles de concentración, subestimación o sobreestimación del grado de desigualdad, etc. Una consecuencia de haber escrito el texto desde una orientación preferentemente pedagógica, es que los temas más vinculados a la investigación no se encuentran reunidos en un solo bloque ni en lugares específicos del libro sino que están dispersos en las distintas secciones.

Una dificultad importante que deben encarar los cursos de estadística, al abordar el análisis de concentración es la dispersión del material. En efecto, algunos índices de desigualdad usualmente se encuentran en textos de estadística descriptiva, otros en libros en que el coeficiente se presenta como una aplicación interesante de medidas de naturaleza más general, o en apéndices matemáticos de publicaciones dedicadas a la teoría económica o a otras disciplinas sociales como, por ejemplo, la ciencia política. Una serie de desarrollos y propiedades importantes de las diferentes medidas de concentración están en artículos de revistas especializadas.

La diversidad de impresos dificulta el acceso de los estudiantes a la bibliografía. Los diferentes niveles de profundidad en que se tratan los temas, la inserción en disciplinas que les son ajenas, los requerimientos matemáticos que habitualmente están fuera de su alcance; conforman un conjunto de factores que apuntan hacia la necesidad de disponer de un texto que reúna el conocimiento acumulado sobre concentración.

La confección de nuestro trabajo fue, afortunadamente para nosotros, de naturaleza eminentemente social. A través del largo tiempo que llevó su gestación recibimos influencias y estímulos de nuestros maestros, colegas y estudiantes. Como nos sería prácticamente imposible reconocer el aporte de cada uno, adoptamos el criterio pragmático de limitarnos al tiempo que nos llevó prepararlo y escribirlo.

Werner Ackerman y Adam Przeworski no sólo discutieron nuestros planteamientos, sino que nos brindaron un nutrido apoyo bibliográfico. Varias secciones se basan en trabajos realizados por Werner Ackerman, Sonia Bengoechea y Ricardo Yocelevzky. Oscar Cuéllar, Juan Carlos Marín, Virgilio Partida y Crescencio Ruiz Chiappeto, tuvieron la generosidad de leer una versión preliminar y hacernos llegar sus comentarios. A todos ellos agradecemos sus valiosas contribuciones y esperamos que estén adecuadamente plasmadas.

La utilidad que pueda tener este texto se debe a todas las personas que incidíeron en su gestación, sin embargo, ellos no son responsables de sus deficiencias las que se deben explicar por nuestras propias limitaciones.

Agradecemos a Mariquel Obregón quien con su dedicación y diligencia transcribió el borrador y lo preparó para la edición. También a Eduardo Martínez y Rebeca Lozada, quienes lidiaron con la redacción y pasaron al español el conjunto de palabras en que originalmente estaba escrito este texto. Un reconocimiento especial para el Sr. Carlos Villar Araujo que además de corregir las planas nos enmendó la plana en errores de cálculo y en la construcción de algunas gráficas.

# I: *Consideraciones preliminares*

## 1.1. *Acerca de la noción de desigualdad*

La desigualdad es un concepto de naturaleza eminentemente relativa en tanto que se contrapone al de igualdad, para el cual puede haber más de una definición. Desde el punto de vista estadístico diremos que una distribución es desigual si no concuerda con algún criterio previamente estipulado. La repartición de una variable es justa[1] o injusta de acuerdo con la repartición teórica que se puede derivar a partir de la aplicación de una norma en que se expresa el criterio de equidad utilizado. Así, por ejemplo, podría sostenerse que el ingreso generado en la producción de una empresa industrial sólo se distribuye equitativamente entre el capital y el trabajo si ello se hace de acuerdo con las productividades marginales físicas de los factores productivos, y dentro del factor trabajo si la repartición se realiza en función de la productividad marginal de los trabajadores. En este caso el criterio subyacente sería: tanto produces, tanto recibes.

También podría pensarse en usar como norma de justicia "la distribución del ingreso efectuada sobre la base de la teoría del valor".[2] El criterio sería: la parte que corresponde a cada elemento que ingresa a la producción deberá respetar el valor que haya incorporado al producto.

Así como hemos señalado dos criterios para calificar como justa la repartición de la variable ingreso, podríamos continuar con una larga enumeración, pero éste no es nuestro propósito.

Del mismo modo que es posible sostener criterios opuestos respecto a la manera justa de distribuir el ingreso, puede que se planteen interminables discusiones acerca de la forma en que debería distribuirse el crédito estatal entre las empresas privadas nacionales y extranjeras o entre las firmas na-

---

[1] A pesar de que en distintas disciplinas los términos *justo, equitativo* e *igual* tienen diferentes matices nosotros los usaremos como sinónimos.

[2] Proudhon y Rodbertus citados por Henry Grossman en *La ley de la acumulación y el derrumbe del sistema capitalista*. México, Siglo XXI, 1979, pág. 14.

cionales en función de sus tamaños. Una situación similar se debe encarar cuando la problemática demográfica lleva a acentuar el interés por determinar el tamaño más adecuado de los centros urbanos o bien, las relaciones de tamaño que se deben respetar para disponer de un sistema equilibrado de ciudades que ayude a resolver los problemas de habitat característicos de las modernas sociedades industriales. Se levantan cuestiones de la misma índole cuando se plantea el problema de la distribución de la tierra. A veces el dilema consiste en determinar si es más justo repartirla de acuerdo al número de miembros que componen cada familia campesina, que establecer tamaños óptimos de la explotación según el tipo de cultivo, región, calidad de la tierra, etc., o bien entregársela a empresarios capitalistas que produzcan minimizando el costo de los bienes salarios y de los insumos industriales.

Los ejemplos podrían extenderse casi ilimitadamente, pero lo que nos interesa destacar es que la idea de equidad (a través de la cual se juzga la forma como se ha repartido una variable), resulta estar bastante teñida por juicios de valor; aun cuando se lleven a cabo extensos desarrollos teóricos, desde cuyas profundidades parecen emerger con naturalidad y casi de manera inobjetable los criterios que permitirían juzgar el grado de concentración de una variable. Así, en la distribución del ingreso se sostiene que se trata de encontrar aquella forma de repartición que asegure el máximo de bienestar para la sociedad, o bien, que garantice su desarrollo futuro sobre la base del sacrificio del consumo presente. etc.

La selección del patrón que se usará para juzgar el grado de desigualdad existente en una distribución, al estar fuertemente relacionada con juicios de valor, será en sí misma objeto de discusiones en las que difícilmente se podrá llegar a un acuerdo universal, puesto que en ellas se encontrarán involucradas posturas teóricas, políticas y metodológicas irreconciliables.

A pesar de estas consideraciones la técnica estadística que habitualmente se usa para estudiar la desigualdad social ha llevado a privilegiar explícita, o a veces implícitamente, el criterio de igualdad democrática: A todos les debe corresponder la misma cantidad. En el segundo capítulo mostraremos que el índice de concentración de Gini admite interpretarse como el grado en que se desvía la distribución efectiva de la variable con respecto a la generada por la aplicación de la norma democrática.

Es conveniente señalar que la mayoría de los coeficientes estadísticos utilizados para indicar desigualdad usan como criterio la norma democrática, y que por lo tanto, cuando recurrimos a ellos en una aplicación particular sin cuestionar su grado de adecuación al problema que nos interesa, aceptamos implícitamente la validez de ese patrón. Sin embargo, hay situaciones en que difícilmente podemos sostener que nos interesa medir la desigualdad como desvío respecto al criterio de igualdad democrática. Tal sería el caso, por ejemplo, de la distribución espacial de la población. El grado de concentración en una zona no será el mismo si *todos* sus poblados tienen 1000 habitantes que si tienen 100.000, aún cuando en ambos casos la distribución es uniforme. Un índice[3] que toma en cuenta esta diferenciación, y que ha sido diseñado para medir desigualdad con base en información censal de 1970, utiliza como criterio la proporción de la población total asentada en localidades muy urbanas. Este indicador alcanza su valor máximo cuando el 100% de la población habita en una o más localidades de más de 250.000 personas y su mínimo cuando toda la población se encuentra dispersa en conglomerados menores de 100 individuos.

Otro de los patrones empleados por la estadística para juzgar acerca del grado de equidad en la repartición de una variable consiste en comparar las diferencias de los montos individuales. En algunos casos la medición se realiza tomando en cuenta todas las discrepancias posibles, mientras que en otros, se usan sólo algunas de ellas para generar el indicador.

En este trabajo, dedicado exclusivamente al estudio de las técnicas estadísticas para analizar desigualdad social, nos preocupamos fundamentalmente por métodos de análisis que involucran de preferencia el criterio de igualdad democrática y sólo con carácter secundario por aquellos que derivan de la comparación entre valores de variable. Sólo tangencialmente (en el cuarto capítulo) ponemos el acento sobre el grado de determinación que ejerce la teoría sobre la selección de las medidas estadísticas. Dejaremos fuera de nuestro campo todos aquellos índices que se originan en determinados campos temáticos, como por ejemplo, la curva de Pareto,[4] el coeficiente de Atkinson,[5] etc.

En resumen, todo el material que se incluye en los capítulos siguientes está íntegramente dedicado a exponer y analizar los diferentes indicadores estadísticos de desigualdad social. Cabe recordar que la mayoría se construyen explícita o implícitamente sobre la base de la norma de igualdad democrática y que algunos derivan del criterio de comparación entre valores de variable.

## *1.2. Algunas nociones estrechamente relacionadas con la idea de desigualdad*

Para evitar confusiones, bastante frecuentes en los estudios empíricos, y que de presentarse en la lectura de este texto podrían afectar la comprensión del material que entregamos en los capítulos centrales, nos parece conveniente dedicar algo de espacio a perfilar tres ideas que aparecen casi siempre estrechamente relacionadas a la noción de desigualdad: nivel de la variable, cambio en el grado (o nivel) de la concentración, y forma de la desigualdad.

Desde el punto de vista meramente estadístico la concentración tiene que

---

[3] Ver, Enrique Calderón: "Un criterio estadístico para distinguir el medio rural del urbano". *Boletín informativo*. Dirección General de Planeación Educativa. Secretaría de Educación Pública. México, junio de 1975.

[4] J.S. Cramer, *Economía empírica*. Fondo de Cultura Económica, México, 1973, págs. 55 a 63.

[5] Sen. Amartya, *On Economic Inequality*. Clarendon Press, Oxford, 1973, págs, 38 y 39.

ver con la manera como se reparte el total de una variable entre un conjunto de observaciones o unidades. Es decir, se define en términos de la distribución del monto total (por ej. Y) entre las n unidades. Es frecuente, para referirse a esta noción, usar como símil la manera como se distribuye un *pastel* entre el conjunto de comensales.

A su tamaño (el monto total Y de la variable) lo denominaremos "*nivel de la variable*". La diferenciación entre el nivel (que se puede captar a través de una medida de tendencia central) y su repartición (es decir, el grado de la desigualdad) resulta ser de fundamental importancia por cuanto nos proporciona elementos clave para interpretar con precisión los resultados que arrojan las medidas estadísticas. En efecto, el saber, por ejemplo, que la distribución del ingreso personal se concentró entre dos momentos en el tiempo no nos da elementos para realizar aseveraciones sobre los cambios experimentados por los niveles monetarios individuales. Podríamos llegar a sostener, aunque casi seguramente de manera errónea, que si la repartición del pastel se ha concentrado ello significa que los ricos tienen ahora más y los pobres menos, de manera que los primeros tienen a su disposición más dinero, los segundos menos y que en consecuencia, en comparación con la situación original, los ricos son ahora más ricos y los pobres más pobres. Estas conclusiones pueden reflejar o no correctamente lo acontecido en el lapso bajo consideración, pero no es posible basarlas en la pura evidencia que nos proporciona el aumento en el nivel de desigualdad.

Antes de continuar sobre esta línea de desarrollo, hay que hacer notar que ya hemos introducido la noción de cambio en el nivel de desigualdad, y se refiere a las variaciones que experimentan a través del tiempo los niveles de concentración de una variable.[6]

Volvamos ahora sobre la diferencia entre el nivel y grado de concentración de una variable. Para ello consideremos algunos ejemplos numéricos que nos permitan ilustrarla.

*Tabla 1.1. Nivel constante de la variable y desigualdad creciente*

| *Tiempo 1* | | *Tiempo 2* | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 | 10 |
| 3 | 100 | 3 | 104 |
| | 115 | | 115 |

[6] También es posible hablar de comparación entre niveles de desigualdad en lugar de cambio. Al expresarse de esa manera se amplían las posibilidades de aplicación, puesto que en lugar de referirla sólo a dos o más puntos en el tiempo también se puede usar para estudiar diferencias en el espacio.

*Tabla 1.2. Nivel constante de la variable y desigualdad decreciente*

| Tiempo 1 | | Tiempo 2 | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 7 |
| 2 | 10 | 2 | 10 |
| 3 | 100 | 3 | 98 |
| | 115 | | 115 |

En estas dos tablas hemos mantenido constante el total de la variable, es decir, el tamaño del pastel, y efectivamente se establece una relación directa entre el cambio en el grado de desigualdad y las cantidades que les corresponden a las observaciones pobres y ricas: cuando la desigualdad es creciente aumenta la distancia entre pobres y ricos y viceversa.En la tabla 1.1. en que la concentración es creciente hubo una redistribución que favoreció a la unidad más rica y perjudicó a la más pobre, lo que trajo como consecuencia que la favorecida se enriqueciera aún más y la perjudicada sea ahora más pobre que antes. La situación exactamente inversa se produce en el caso en que decrece el nivel de desigualdad, tal como se muestra en la tabla 1.2. Al mantenerse constante el tamaño del pastel una redistribución progresiva se traduce en un aumento de la parte que le toca a los pobres y en una disminución de la que queda en manos de los privilegiados.

Estos resultados sólo nos permiten sostener que cuando se trata de la repartición de un total constante, la única forma como se pueden alterar los niveles de desigualdad es a través de redistribuciones que se manifiestan en cambios de las cantidades de las diferentes observaciones. Un aumento en el nivel de la concentración nos permitiría afirmar que los más ricos ahora controlan una cantidad mayor que antes y los más pobres una menor. Cuando la desigualdad disminuyó, tuvo lugar un proceso inverso, es decir, una redistribución progresiva.[7]

Sin embargo, estas conclusiones no gozan de validez general. Es habitual que en los análisis concretos debamos enfrentar complejidades que surgen del movimiento simultáneo del nivel de la variable y de la manera como se distribuye. Para analizar este segundo caso tomemos como ejemplo:

*Tabla 1.3. Nivel creciente de la variable y desigualdad constante*

| Tiempo 1 | | Tiempo 2 | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 10 |
| 2 | 10 | 2 | 20 |
| 3 | 100 | 3 | 200 |
| | 115 | | 230 |

[7] Lo mismo habría acontecido si las redistribuciones se hubiesen realizado entre la segunda y la primera unidad, o bien entre la segunda y la tercera.

Al duplicarse el tamaño del pastel también se han multiplicado por dos los montos de cada una de las tres unidades, por lo que el grado de desigualdad no se ha visto afectado entre los tiempos 1 y 2. Este resultado nos permite sostener que el grado de desigualdad constante a través del tiempo significó una mejora absoluta que afectó proporcionalmente por igual a todas las observaciones. Los aumentos que perciben las unidades son porcentualmente idénticos pero los tamaños dependen de cuánto se haya modificado el total de la variable que se distribuye.

La situación inversa, es decir, la de un empobrecimiento general sin haberse alterado el nivel de la desigualdad, habría sido consecuencia de una caída en el total que se reparte.

Examinemos a continuación lo que ocurre si el nivel de la variable es creciente y la desigualdad es decreciente o creciente:

*Tabla 1.4. Nivel de la variable y grado de desigualdad creciente*

| *Tiempo 1* | | *Tiempo 2* | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 7 (3) |
| 2 | 10 | 2 | 20 (20) |
| 3 | 100 | 3 | 203 (207) |
| | 115 | | 230 (230) |

*Tabla 1.5. Nivel de la variable creciente y desigualdad decreciente*

| *Tiempo 1* | | *Tiempo 2* | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 15 (9) |
| 2 | 10 | 2 | 20 (10) |
| 3 | 100 | 3 | 195 (99) |
| | 115 | | 230 (118) |

En las tablas 1.4 y 1.5 la cantidad total que se distribuye se ha duplicado. En la tabla 1.4 la desigualdad en el tiempo 2 es mayor que en 1 y en la tabla 1.5 es menor.

Los datos de la tabla 1.4 nos indican que a pesar de haberse duplicado el nivel de la variable sólo la segunda observación experimentó un cambio en esa misma proporción en tanto que la tercera obtuvo un incremento mayor que el doble y la primera uno menor. Las variaciones señaladas nos permiten sostener que la distribución se concentró. Los números entre paréntesis que conforman la última columna de esa tabla reflejan una situación similar. La segunda observación mantiene su participación relativa en el total tanto en 1 como en 2, la primera la ha disminuido, y la tercera la aumentó. Por tanto, en los dos casos creció el nivel de desigualdad en el lapso considerado, pero en el primero todas las unidades poseen ahora una cantidad mayor que la que tenían en el tiempo 1. En otros términos, entre los tiempos señalados todas las observaciones cuentan con un monto mayor de la variable: tienen más, por lo tanto se enriquecen. Las cifras entre paréntesis nos revelan una situación distinta en términos de las cantidades que se poseen en uno y otro momento. La segunda y tercera observaciones mejoraron en el lapso considerado, mientras que la más pobre sufrió una caída (tenía 5 y ahora sólo tiene 3).

Estos resultados nos permiten afirmar que si aumentan simultáneamente el nivel de la variable y su grado de concentración, entonces la mayor desigualdad no necesariamente significa un empobrecimiento de los pobres y una mejoría de los ricos. El incremento en el nivel y grado de desigualdad puede ser compatible con un alza en las cantidades en manos de todos o en una caída de los montos percibidos por los más pobres.

En la tabla 1.5 se puede apreciar que al multiplicarse por dos el tamaño del pastel se ha más que duplicado la cantidad que posee la primera unidad y lo contrario ocurre con la más rica. Como la participación relativa de la segunda observación se mantuvo constante, los movimientos que tuvieron lugar en el período originaron una caída en el grado de desigualdad. La información contenida en la tabla nos indica una situación en la que la desigualdad decreciente corresponde a un aumento en todas las observaciones. El alza del nivel y la disminución de la concentración no contradicen la mejoría de todos.

Pero si observamos las cantidades encerradas por paréntesis percibimos, en primer lugar, que ha habido un leve crecimiento del total (ha aumentado sólo en tres; pasó de 115 a 118). En segundo lugar, hay que notar que la observación más pobre logra una mejora relativa mayor que la propoción de aumento en el total y al mantenerse constante la de la segunda resulta que se ha producido un deterioro en la más rica. La unidad más rica empobreció no sólo en relación a las restantes (es decir en términos relativos) sino que también de manera absoluta ya que poseía 100 y ahora sólo dispone de 99. Estos movimientos se sintetizan en una disminución del grado de desigualdad.

Los resultados anteriores entregan elementos que permiten afirmar que cuando el total de una variable aumenta y la desigualdad disminuye, significa que todas las observaciones se enriquecieron o bien que las más beneficiadas poseen ahora menos de lo que disponían.

Para dar término al examen de la relación entre el nivel de una variable y el grado de su desigualdad, veamos lo que acontece si se reduce el monto total.

*Tabla 1.6. Nivel decreciente de la variable y desigualdad constante*

| *Tiempo 1* | | *Tiempo 2* | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 2.5 |
| 2 | 10 | 2 | 5.0 |
| 3 | 100 | 3 | 50.0 |
| | 115 | | 57.5 |

El total de la variable experimentó una caída del 50% entre los instantes considerados. Sin embargo, el nivel de la desigualdad no se alteró ya que se mantuvieron todas las participaciones relativas de las observaciones, es decir, fueron objeto de una disminución en la misma proporción. La reducción en el tamaño del pastel se distribuyó proporcionalmente por igual. Este sencillo ejercicio numérico nos señala el hecho que el grado de desigualdad no se haya alterado, bajo ningún punto de vista debe interpretarse como que nada ha cambiado. Por el contrario, nos indica que si el nivel de la variable decreció a través del tiempo, entonces todas las observaciones han resentido el mismo porcentaje de reducción que el monto total y en consecuencia sus correspondientes cantidades bajaron.

*Tabla 1.7. Nivel decreciente de la variable y desigualdad creciente*

| *Tiempo 1* | | *Tiempo 2* | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 1.5 (2.00) |
| 2 | 10 | 2 | 5.0 (9.90) |
| 3 | 100 | 3 | 51.0 (101.95) |
| | 115 | | 57.5 (113.85) |

En esta tabla hemos incluido dos ejemplos. En el primero la variable sufrió una caída de un 50%. Esta disminución afectó a todas las observaciones que redujeron sustancialmente sus cantidades al mismo tiempo que se alteraron sus participaciones relativas (excepto la de la segunda). En efecto, la segunda observación experimentó una reducción del 50%, la más pobre sufrió una disminución porcentual mayor y la más rica una caída relativa menor que esa cifra. Estos movimientos se traducen en un incremento en el nivel de desigualdad. Sintéticamente podemos decir que la caída en el nivel conduce a un empobrecimiento de todas las unidades a través del tiempo lo que indica que una mayor desigualdad no necesariamente significa que disminuyen las cantidades en manos de las unidades pobres y aumentan las de las ricas.

Los números entre paréntesis nos señalan un caso distinto. La caída en el tamaño del pastel ha sido mucho menos drástica (sólo alcanzó un 1%) pero la disminución se reparte de manera desigual. La primera observación sufre una reducción bastante mayor que ese porcentaje lo que posibilita que la tercera aumente la cantidad que poseía en el tiempo 1. La combinación entre nivel decreciente y desigualdad creciente asumió la forma de un empobrecimiento de la unidad más pobre y un enriquecimiento de la más rica.

Esta tabla nos muestra de manera simplificada que un proceso de concentración a través del tiempo, no autoriza a concluir que los ricos son más ricos que antes. Si ha decrecido el tamaño del pastel (de decir, si cayó el monto del crédito disponible, el ingreso personal, la cantidad de tierra agrícola, etc.) todas las observaciones pueden tener menos o bien las más pobres pudieron ser perjudicadas y las más ricas beneficiadas. Este ejemplo nos proporciona evidencia en favor de nuestro argumento de separar claramente las proposiciones que derivan de las variaciones en el total de la variable, de aquellas que se sostienen a partir del cambio en los grados de desigualdad.

*Tabla 1.8. Nivel decreciente de la variable y desigualdad decreciente*

| Tiempo 1 | | Tiempo 2 | |
|---|---|---|---|
| *Unidad* | *Valor de la variable* | *Unidad* | *Valor de la variable* |
| 1 | 5 | 1 | 4.5 (5.5) |
| 2 | 10 | 2 | 5.0 (5.0) |
| 3 | 100 | 3 | 48.0 (47.0) |
| | 115 | | 57.5 (57.5) |

En el tiempo 2 el monto total de la variable es la mitad de lo que era en el 1. A pesar de ello sólo la segunda observación experimentó una reducción en la misma proporción, ya que la tercera sufrió una caída proporcional mayor que 0.50 y la primera una disminución menor que ese porcentaje. Estos movimientos se expresan sintéticamente en el hecho que la desigualdad ha decrecido. Pero el que la concentración sea menor que antes, no es contradictorio con las menores cantidades que poseen todas las observaciones. La tabla nos muestra que los montos en manos de las tres unidades son más pequeños. Desigualdad decreciente no significa deterioro de los privilegiados en beneficio de los pobres.

Las cifras entre paréntesis reflejan una situación en que también tuvo lugar una disminución simultánea en el nivel de la variable y en la concentración, pero presenta el caso en que la unidad más pobre es objeto de una mejora (tenía 5.0 y cambió a 5.5) y la más rica de una caída (pasa de 100 a 47).

Los dos casos que hemos ejemplificado en la tabla nos proporcionan evidencia adicional para insistir en la conveniencia de separar, desde el punto de vista analítico, los cambios que se producen en el grado de la desigualdad de aquéllos que afectan el nivel de la variable.

A través de estos sencillos ejemplos numéricos hemos tratado de delimitar el tipo de aseveraciones válidas que pueden derivarse de los cambios en el grado de desigualdad. Si disponemos del valor que asume un indicador de concentración en el tiempo 1 ($I_1$) y del que toma en el instante 2 ($I_2$) y constatamos una disminución (aumento) bajo ningún punto de vista estamos en

pero, si la composición de los grupos también cambia, y su tamaño también?

condiciones de sostener, con esa sola evidencia, que los pobres son menos (más) pobres y que los ricos menos (más) ricos. Los casos presentados nos muestran que para realizar afirmaciones sobre los cambios que experimentaron las cantidades debemos analizar sus valores absolutos. Las alteraciones en los niveles de desigualdad se relacionan con modificaciones en las participaciones relativas.

En el conjunto de tablas que hemos presentado tenemos una serie de casos en que la variación en el nivel de la variable y en el grado de la desigualdad, no permite extraer conclusiones respecto al cambio en las cantidades.

De los casos examinados sólo el primero, es decir, aquél en que el nivel de la variable se mantiene entre ambos tiempos, nos permite inferir, a través de las variaciones en el grado de la desigualdad, lo sucedido en los montos. Nuestro ejemplo nos muestra que si ésta fuese la situación, una menor concentración significaría una mejora en el monto de los pobres y una caída en el de los ricos. Exactamente lo inverso será válido si aumenta el grado de la desigualdad.

Al estudiar la variación temporal experimentada por una distribución de frecuencias, normalmente observamos que se presenta el cambio en la desigualdad aparejado con alteraciones en el nivel de la variable. Esto quiere decir que sólo en casos relativamente excepcionales podremos predicar sobre lo que sucedió con las cantidades. Un ejemplo de este caso excepcional se presenta en el estudio de la distribución de la tierra en un país cuya frontera agrícola no se ha expandido.

Es bastante frecuente que nos encontremos con análisis de desigualdad social en los que al realizar las mediciones correspondientes y hallar, por ejemplo, que ha tenido lugar un proceso de concentración, se sostenga que se han producido transferencias de los pobres hacia los ricos. O que al constatar que la desigualdad ha disminuido se afirme que hubo un flujo de los privilegiados hacia los desposeídos. Después de los ejemplos que hemos desarrollado es evidente que aseveraciones como ésas sólo pueden formularse válidamente en el caso de que el total de la variable repartida se haya mantenido constante; en toda otra situación resultarán, en general, falaces. La variación en el grado de desigualdad dependerá, tanto de la manera como se distribuya el aumento (disminución), cuanto de las transferencias, si es que las hubo.

Pongámonos en el caso de que a través de un procedimiento estadístico logramos construir un indicador que refleja de manera sintética el grado de desigualdad de una distribución de frecuencias. Denotemos por $I_1$ e $I_2$ las mediciones referidas a dos momentos y supongamos que entre los instantes 1 y 2 los valores asumidos por los indicadores resultan ser iguales: $I_1 = I_2$ ¿Cómo deberíamos interpretar este resultado?

Estrictamente, sólo indica que el grado de desigualdad originado por la manera como se reparte la variable no se alteró con el transcurso del tiempo. Vimos en las páginas anteriores que los pobres pueden haber mejorado o empeorado aun cuando haya tenido lugar un proceso de concentración. Es decir, las tablas nos mostraron que existe cierta independencia entre las variaciones en las cantidades y el grado de la desigualdad. Pero nuestra afirmación ha sido aún más fuerte ya que sostuvimos que la combinación entre los cambios en el nivel de la variable y la desigualdad no determinan unívocamente el sentido de las alteraciones en los montos que poseen las unidades. Así, por ejemplo, si en un país tuvo lugar un proceso de concentración del ingreso personal en circunstancias en que su masa ha sido creciente, no podríamos concluir automáticamente que las capas desposeídas de la sociedad disminuyeron su nivel de vida y las favorecidas, por el contrario, lo aumentaron. Es posible que se presente el caso de que todas las clases hayan experimentado un crecimiento en sus ingresos aunque con diferentes tasas. La mayor desigualdad se explicará porque las clases bajas habrían visto afectados sus niveles previos de ingreso por tasas menores que la promedio y las capas privilegiadas por tasas mayores.

Pero hagamos caso omiso de las fluctuaciones en los niveles de la variable bajo el supuesto de que la concentración arroja como resultado $I_1 = I_2$. En el supuesto de que el nivel de la variable se mantiene constante a través del tiempo ¿qué afirmación estaríamos en condiciones de hacer respecto a la fluctuación temporal de la desigualdad?

A primera vista pareciera que nada aconteció con las participaciones relativas. Es decir, como el nivel de la variable se mantuvo y no cambió el grado de la desigualdad, parecería lógico concluir que la repartición de la variable es la misma en uno y otro momento en el tiempo. El mismo problema, pero mirado desde otro ángulo, nos lleva a plantear que dado un nivel constante de la variable el que no se modifiquen las proporciones implica no sólo un nivel de desigualdad fijo, sino también que no se alterarían las cantidades absolutas.

Sin embargo, el hecho de que no se hayan alterado los niveles de la variable ni el grado de desigualdad existente en la distribución no permite concluir que se mantuvieron las participaciones relativas y absolutas. El indicador del grado de desigualdad que nos dice que $I_1 = I_2$, entrega una medida resumen que se puede conformar de diversas maneras para arrojar un mismo resultado. Cada uno de los caminos para obtenerlo es producto de las *diversas formas que conducen a un mismo grado de concentración*. Esta situación es análoga a la que se presenta entre las medidas de posición y de dispersión en la estadística descriptiva. Podríamos pensar que el indicador I juega el papel de una medida de tendencia central y que a la *forma de la desigualdad* le corresponde un papel similar al de las medidas de dispersión.

Incorporar el análisis de la forma de la desigualdad puede resultar básico para disponer de una imagen relativamente acabada de los procesos que han afectado la manera como se distribuye una variable. Para ilustrar el papel que juega el estudio de la forma de la desigualdad, tomemos, a manera de ejemplo, el caso en que nos interese seguir la pista de la evolución de la distribución del ingreso personal clasificado en seis categorías: obreros, empleados, trabajadores por cuenta propia, empleados domésticos, fuerzas armadas y empleadores. Además, supóngase que se constata que la variable ingreso personal no ha sufrido cambios en su nivel y que a través de un coeficiente de concentración establecemos que $I_1 = I_2$. La situación descrita concuerda perfectamente con el hecho de que, por ejemplo, los obreros hayan mejorado su situación tanto relativa cuanto absoluta y que los empleados domésticos la hayan deteriorado desde ambos puntos de vista en el lapso considerado. El valor del indicador en el tiempo 2 resultará igual al que asumió en el tiempo 1, debido a que los dos movimientos de sentido contrario se cancelaron dejando inalterado el valor global de la medida.

Si nos quedamos sólo en el nivel de la información que nos proporciona el coeficiente de concentración, únicamente estaremos en condiciones de afirmar que el grado de desigualdad no ha variado en el período. Formularse interrogantes respecto a la forma de la concentración permite dirigir nuestra atención hacia las participaciones relativas, cuestión que puede ser de importancia en algunos casos concretos. Supongamos que en nuestro ejemplo las medidas económicas se orientan hacia una redistribución del ingreso que permita sentar bases para obtener el apoyo político de las clases desposeídas de la sociedad y que al observar que $I_1 = I_2$ se concluye que la política ha sido inefectiva. Pero hemos visto que a pesar de este resultado puede haber tenido éxito en la medida que ha beneficiado al sector obrero. Probablemente lo inconsistente en el ejemplo, sería considerar que forma parte del mismo propósito perjudicar a los trabajadores domésticos. Estos cambios pueden o no estar de acuerdo con los objetivos políticos propuestos lo que no es motivo de preocupación en este trabajo. Lo que interesa destacar es que a partir de la noción *forma de la desigualdad* surgen interrogantes que dirigen el análisis a una dimensión del problema que no se agota en el simple estudio de la variación experimentada por el grado de desigualdad.

En relación a este tipo de inquietudes nos resta considerar el caso límite que presentamos en la siguiente tabla:

*Tabla 1.9. Redistribución entre las observaciones extremas*

| *Tiempo 1* | | *Tiempo 2* | |
|---|---|---|---|
| *Unidades* | *Valores de la variable* | *Unidades* | *Valores de la variable* |
| 1 | 5 | 3 | 5 |
| 2 | 10 | 2 | 10 |
| 3 | 100 | 1 | 100 |
| | 115 | | 115 |

La observación que menos tenía en el tiempo 1 recibió 95, provenientes de la más rica. De este modo se ha producido una inversión total de las posiciones extremas. La que originalmente era más pobre pasa a ser ahora la más rica y viceversa. Desde el punto de vista estrictamente estadístico no se han producido modificaciones en el grado ni en la forma de la desigualdad. Ello es una consecuencia directa de uno de los principios estadísticos básicos según el cual se acepta pérdida de información (considerada como no relevante) para estar en posición de resumir y sistematizar los datos. Ahora bien, puede acontecer que las interrogantes que guían algunos estudios de desigualdad impliquen la necesidad de mantener la individualidad de las observaciones. Este sería el caso, por ejemplo, en que consideráramos como unidades las capas sociales del campo de un país: burguesía agraria, oligarquía terrateniente y campesinado; y de que estuviéramos preocupados por la forma como se distribuye la tierra.

A lo largo de esta exposición vimos que en los estudios de desigualdad social suelen entrelazarse varias dimensiones.

(i) El nivel global que alcanza el total de la variable y sus modificaciones en el tiempo. Para dar cuenta de ellas, desde el punto de vista estadístico, se debe recurrir al uso de la medida de tendencia central más apropiada al tipo de problema que tratamos, de esta manera se llega a establecer si el nivel de la variable es constante, creciente o decreciente.

(ii) El grado (o nivel) de desigualdad existente en una distribución de frecuencias y sus variaciones temporales. Para capturar el nivel de desigualdad (es decir la forma como se reparte un total entre un conjunto de observaciones o casos) se construyen una serie de indicadores estadísticos que conforman la mayor parte del material. En los capítulos siguientes hablaremos de ello. El propósito, algunas veces implícito, al establecer la medición del nivel de concentración consiste no sólo en tener una idea de cuán próximo se encuentra el valor calculado, al que representa la situación de concentración máxima o al que simboliza la equidistribución, sino también en disponer de una evidencia que permita sostener si el grado de desigualdad se ha mantenido, aumentado o disminuido en el lapso que considera el estudio.

Puede ser interesante, para los propósitos de un estudio, saber si la distribución del crédito público entre empresas privadas con capitales de origen únicamente nacional o con capitales extranjeros, se ha concentrado o no y en caso afirmativo, identificar a favor de cuáles lo ha hecho. Pero este tipo de preocupación no puede investigarse a través del análisis de los resultados globales que nos proporcionan las medidas de concentración, sino que requiere de tratamiento especial.

(iii) Según acabamos de ver, otra de las cuestiones que es materia de preocupación en los estudios de desigualdad social es la de llegar a conocer quiénes han sido los perjudicados y quiénes los beneficiados. Sin embargo, esta inquietud resulta aún muy vaga para orientar el camino del análisis estadístico. En efecto, podría pensarse que nuestro interés se centra en establecer, en un momento del tiempo, qué observaciones admiten ser calificadas como ricas y cuáles como pobres, o equivalentemente se trataría de formar dos conjuntos, uno constituido por todas aquellas unidades que poseen menos que lo que indica la aplicación de una norma y el otro formado por las observaciones que tienen más que lo que ella dicta. Entonces deberíamos llevar a cabo una comparación entre los casos que conforman la distribución de frecuencias.

Ese mismo interés también podría entenderse dinámicamente aunque en dos sentidos distintos: quiénes han resultado perjudicados o beneficiados por la distribución, tanto en términos absolutos como relativos. Si la preocupación es en el primero de estos sentidos, deberíamos captar la variación temporal de la cantidad que posee cada observación (intervalo, estrato o clase). De este modo estaríamos en condiciones de afirmar si una unidad particular ha mantenido, mejorado o empeorado el monto que tenía en un tiempo anterior. Cuando la observación es un agregado, entonces habrá que controlar las posibles variaciones de tamaño de los intervalos de clase, lo que se puede hacer examinando la variación de los totales por unidad (per cápita).

Si nos interesa establecer cuáles casos han resultado relativamente perjudicados o beneficiados por la variación en el reparto, deberíamos comparar las proporciones que controlaban con las que ahora poseen. Estas proporciones se deben calcular con respecto al total de la variable en cada momento y realizar la comparación en el tiempo. Se trata de mediciones efectuadas verticalmente, en contraposición con aquéllas que permiten seguir los cambios absolutos, que se establecen horizontalmente.

Los análisis en sentido vertical, combinados con comparaciones a través del tiempo, nos entregarían elementos para individualizar los casos que han resultado relativamente perjudicados o beneficiados, a través de esa información llegaremos a adquirir una idea más o menos precisa respecto a la variación que experimentará la *forma de la desigualdad*. El análisis de las proporciones calculadas con respecto al total en varios puntos del tiempo o algunas funciones matemáticas de ellas nos permitirá seguir la evolución de los cambios en la forma de la concentración.

Cualquier investigación que se proponga como objetivo central estudiar la desigualdad en la repartición de una o más variables, presenta mezcladas las interrogantes que hemos destacado en esta sección, en unión con otras que no interesan a nuestros propósitos. Vimos que las distintas preguntas remiten a diferentes estrategias de análisis estadístico: medidas de tendencia central aplicadas sobre toda la distribución o calculadas para cada intervalo de clase y sus correspondientes cambios a través del tiempo; elaboración de coeficientes de concentración, definición de indicadores que dan cuenta de la forma de la desigualdad y de sus variaciones. Las distintas dimensiones involucradas pueden separarse analíticamente por medio de la aplicación de una batería de instrumentos estadísticos lo que permite, en la integración posterior de los resultados parciales, una percepción más o menos coherente de los distintos aspectos contenidos en el grado y en el cambio de los niveles de desigualdad.

Los límites que hemos impuesto a nuestro trabajo nos han llevado a privilegiar el tratamiento de la medición del nivel de la desigualdad, su cambio y su forma. Hemos dejado fuera de la exposición sistemática todo lo que dice relación con niveles de la variable y con participaciones absolutas.[8] Esto no quiere decir que no los incorporemos a nuestros argumentos cuando consideremos que son necesarios para una mejor comprensión del material o para establecer los conceptos con mayor precisión. La exposición de tales temas no forma parte central de este texto sino que constituye el principal objetivo de los libros dedicados a la estadística descriptiva.

### *1.3. Medición estadística de la desigualdad y criterios que deben satisfacer los "buenos" indicadores de concentración*

Una vez que hemos especificado lo que entenderemos por grado de la concentración y por cambio en su nivel, se nos presenta la necesidad de proponer algunas medidas estadísticas. Se trataría de definir algunas funciones matemáticas que nos permitan distinguir entre diversos grados de concentración y que además posean la característica de ser sensibles a sus variaciones en el tiempo.

El problema que se nos plantea puede pensarse como una situación bastante normal dentro de la estadística, en la que es posible recnocer los siguientes momentos:

i) se establece un concepto no muy precisamente definido, en el sentido que no determina la forma de medirlo;
ii) se proponen maneras alternativas para cuantificarlo generándose de este modo varios indicadores que serán la expresión numérica del concepto; y
iii) se introducen una serie de criterios que deberán cumplir las buenas medidas, para seleccionar uno o algunos de estos indicadores.

Tomemos algunos ejemplos para ilustrar estas ideas.

Dentro de la estadística descriptiva la noción "posición de una distribución de frecuencias" no se encuentra definida más allá de una referencia a su representación gráfica. Las distintas medidas de tendencia central pueden entenderse como indicadores de posición que buscan dar concreción numéri-

[8] El uso de este instrumental estadístico dentro del campo de la desigualdad social se puede consultar en: F. Cortés y R. Yocelevzky *La distribución del ingreso en el gobierno de la Unidad Popular (1970-1972)*. México, 1979.

ca a diversas formas de hacer operacional el concepto: centro de gravedad de la distribución (promedio); el valor más frecuente (modo); el valor que divide a la distribución en dos partes iguales (mediana). Para seleccionar una de ellas y aplicarla en un análisis particular se recurre a criterios tales como sensibilidad respecto a valores extremos, propiedades que las caracterizan, conocimiento de sus distribuciones de muestreo, etc.

Encontramos otro caso en la estadística inferencial donde se define el concepto "estimador" como una función de las observaciones muestrales. Para seleccionar entre las posibles funciones que cumplen con los requisitos de la definición se introducen una serie de criterios que deben cumplir los buenos estimadores: insesgamiento, eficiencia relativa, varianza mínima, suficiencia, consistencia, etc. Es usual que algunos estimadores cumplan con ciertos criterios y que otros satisfagan conjuntos diferentes de requerimientos. En consecuencia, el estimador que se elija resultará de la importancia que se adjudique a cada criterio.

El tercer ejemplo lo tomamos del análisis de relación entre atributos. El concepto de "asociación" se define como opuesto al de independencia y por tal se entiende la independencia estadística como se expresa dentro de la teoría de probabilidades. Esta vertiente ha originado toda una línea de coeficientes que giran en torno a $\chi^2$. El criterio básico que permite discriminar entre las diferencias medidas radica en la capacidad que muestran para alcanzar los valores extremos del intervalo limitado por $\pm$ 1. Sin embargo, con el trabajo de Goodman y Kruskall[9] se inaugura una línea de desarrollo distinta que entiende la asociación como el grado de correspondencia entre una proposición teórica y su expresión en una tabla de distribución de frecuencias. Se define la forma en que teóricamente deberían relacionarse las variables y a partir de ella se genera una distribución de las observaciones que debe ser contrastada con la distribución empírica.[10]

En consecuencia quien se enfrenta a una tabla de contingencia, tiene a su disposición gran cantidad de indicadores de asociación que no sólo corresponden a maneras diferentes de aproximarse a una misma idea sino que además apuntan hacia conceptos distintos.

En la medición de la desigualdad también se nos presenta un problema cuya naturaleza coincide con lo ejemplificado. Se trata de los requisitos que deben cumplir las buenas medidas destinadas a seleccionar el indicador más adecuado en una aplicación particular. Los criterios constituyen el tamiz que nos permitirá discriminar estadísticamente entre unos y otros.

A continuación nos dedicaremos a exponer el conjunto de requisitos básicos que deben satisfacer las buenas medidas de desigualdad. A lo largo del

[9] Goodman y Kruskall. "Measures of Association for Cross Classifications". *J. of the Statistical Association*, 49, 1954, págs. 732-764.

[10] Ver David Hildebrand *Analysis of Ordinal Data*. Sage Publications Inc. California, U.S.A. 1977.

texto incluiremos otras exigencias que emergen del tratamiento de algunos problemas particulares cuya inclusión, en este capítulo introductorio, sería extemporánea y nos enviaría sobre conceptos que a estas alturas del desarrollo resultarían difícilmente aprehensibles.
Las propiedades mínimas que caracterizan a los buenos indicadores de desigualdad son:

(i) La medida debe ser invariable a las transformaciones proporcionales o cambios de escala.

Supongamos que aplicamos un coeficiente de desigualdad sobre una distribución de frecuencias y que obtenemos como resultado I = *a*, es decir, el grado de desigualdad es igual al valor numérico *a*. Ahora bien, si cambiamos la unidad de medida de la variable el valor del indicador deberá mantenerse en *a*.

Es fácil apreciar por qué éste debe ser un requisito. Consideremos, a manera de ejemplo, que disponemos de la distribución de frecuencias del ingreso personal medido en pesos y que al aplicar un coeficiente concluimos que el nivel de la desigualdad es igual a *a*. Ahora bien, si en lugar de medir el ingreso en pesos lo hacemos en centavos (es decir, aplicamos una transformación proporcional a la variable) la distribución no se altera, por lo que el nivel de la concentración medido por ese coeficiente deberá seguir siendo igual a *a*.

Otro ejemplo de la misma índole sería el de la medición de la concentración de la propiedad agraria. El indicador deberá medir el mismo grado de desigualdad si la superficie se expresa en hectáreas o en metros cuadrados.
Si proponemos una medida de desigualdad sensible a este tipo de cambios, entonces deberá desecharse o bien corregirse. Así por ejemplo, en el próximo capítulo veremos que la varianza puede proponerse como medida de desigualdad, pero según una de sus propiedades elementales, al multiplicar por una constante los valores de la variable su valor se modifica en el cuadrado de la constante (es decir es sensible a los cambios de escala) lo que puede corregirse, dividiéndola entre el cuadrado de la media aritmética. De esta manera el indicador de concentración es el cuadrado del coeficiente de variabilidad.

(ii) La medida debe cumplir con la condición Pigou-Dalton.[11]

A la distribución de frecuencias de una variable se le aplica una medida de desigualdad y se obtiene su grado de concentración. Si de la cantidad que corresponde a una unidad favorecida se extrae una parte y se transfiere a una perjudicada, el indicador propuesto debe reflejar una caída en el nivel de la desigualdad. Es decir, en tanto se apliquen redistribuciones sucesivas en favor de los casos que menos tienen, más y más debe caer el valor del coeficien-

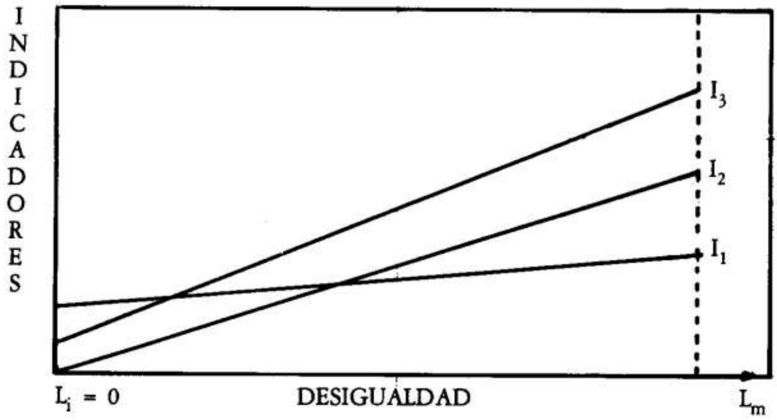
[11] Ver Sen Amartya *op. cit*, págs. 31 y 32.

te. La condición Pigou-Dalton exige que para calificar una medida de desigualdad como un buen indicador, ésta debe marcar una caída sistemática siempre que nos aproximemos, a través de redistribuciones sucesivas,[12] a la equidistribución. Es decir, si las transferencias nos aproximan paulatinamente a la distribución que se debería generar de acuerdo a la aplicación de la norma (que en nuestro caso siempre será la democrática) el coeficiente deberá disminuir significativamente su valor. Al contrario, deberá ser creciente en la medida que las transferencias favorezcan a los beneficiados en perjuicio de los desfavorecidos.

En términos gráficos la condición Pigou-Dalton establece que debe haber una relación directa entre el grado de desigualdad y la medida de concentración.

*Gráfica 1.1*

*Condición Pigou-Dalton*




En el eje horizontal de esta gráfica hemos representado el nivel de desigualdad y en el vertical los valores que asumen los índices $I_1$, $I_2$ e $I_3$. Suponemos que partimos de una distribución de frecuencias con un nivel de concentración original igual a *a*. Por medio de redistribuciones sucesiva en favor de las unidades pobres, nos movemos hacia la izquierda hasta alcanzar el punto de equidistribución simbolizado por $L_i = 0$; a través de transferencias en favor de las observaciones favorecidas nos movemos hacia la derecha hasta llegar al valor máximo $L_m$. La condición Pigou-Dalton impone como requisito que el indicador mantenga una relación directa con las variaciones en

[12] Nótese que se supone implícitamente que el nivel de la variable es constante.

el grado de la desigualdad. Por construcción de la gráfica $I_1$, $I_2$ e $I_3$ satisfacen este requisito.

En el próximo capítulo veremos que la desviación media relativa es un coeficiente que sólo cumple parcialmente con este criterio.[13] Sin embargo, casi todas las medidas que normalmente se usan para indicar el grado de concentración lo satisfacen.

(iii) El coeficiente de concentración debe satisfacer la condición de cambio relativo.

Este requisito exige de los indicadores una sensibilidad diferencial para marcar cambios en los grados de concentración según el nivel en que se realicen las transferencias. Así por ejemplo, si se lleva a cabo una redistribución de cierta cantidad de tierra de una persona que posee grandes extensiones en favor de un minifundista, el coeficiente debiera marcar una caída mayor que si la transferencia por la misma cantidad favorece al propietario de un predio de tamaño medio.

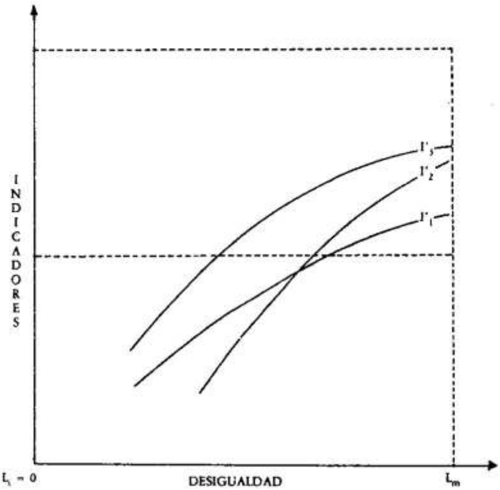
El criterio de cambio relativo exige que la medida de desigualdad experimente una caída mayor si la redistribución del ingreso se hace contra la burguesía, en favor del proletariado, que si la transferencia favorece a las capas medias.

La condición Pigou-Dalton se satisface si la variación experimentada por la desigualdad en redistribuciones sucesivas es lineal, mientras que la condición de cambio relativo exige que la relación sea no lineal. La caída en el nivel de concentración debería ser mayor en tanto la transferencia se lleve a cabo entre observaciones ubicadas en diferentes niveles de la variable. El traspaso de una unidad de un caso que tiene 10 a otro que sólo posee 5, debiera originar una caída mayor en el coeficiente que si tomamos esa misma cantidad de uno que posee 1000 en favor de otro que posee 500.

En el eje de abscisas de la gráfica 1.2. hemos representado grados crecientes de desigualdad desde el origen hacia la derecha. Suponemos que inicialmente existe cierto nivel de desigualdad representado por *a*. Nos movemos hacia puntos de mayor igualdad a través del expediente de redistribuir cada vez la misma cantidad entre observaciones contiguas, que previamente jerarquizadas de menor a mayor en función de las cantidades que tienen. Las curvaturas de los índices $I'_1$, $I'_2$ e $I'_3$, reflejan el hecho que una transferencia del mismo monto dará lugar a variaciones distintas en el coeficiente de desigualdad según el nivel en que se realice.

[13] Ver Sen Amartya, *op. cit.*, págs. 25 y 26.

*Gráfica 1.2.*
*Condición de cambio relativo*




gualdad y su indicador. Pero, una medida que posea la propiedad Pigou-Dalton no necesariamente cumple con el criterio de cambio relativo.

Los tres requisitos básicos que deben satisfacer las buenas medidas de desigualdad nos dan elementos para abordar problemas concretos. Sin embargo, el proceso de selección del coeficiente más adecuado en una investigación específica resulta ser, normalmente, bastante más complicado que la aplicación mecánica de este conjunto de criterios. En efecto, por una parte, el hecho que dos o más coeficientes satisfagan las mismas condiciones no nos permite inclinarnos racionalmente por uno u otro. Por otra parte, medidas alternativas pueden cumplir con criterios distintos. ¿Cuál de ellas seleccionar? Es decir, ¿a qué requerimientos adscribir un peso mayor? Pareciera que las respuestas a estas interrogantes habría que buscarlas en la concepción teórica que orienta el estudio donde se va inscribir el análisis de concentración. A partir de diferentes ópticas conceptuales se le asignará un sentido distinto a la idea de desigualdad y también una importancia diferencial a los requisitos que deben cumplir las buenas medidas.

A veces se agrega a los criterios que permiten discriminar entre los buenos y malos indicadores, el requisito de que el coeficiente asuma valores dentro de un rango, y es usual que sólo a sus límites se les asigne contenido sustantivo. Es una convención ampliamente aceptada en estadística, limitar el recorrido de los indicadores al intervalo definido por los valores 1 y 0. En el caso de los coeficientes de desigualdad, habitualmente denota concentración total, y equidistribución. La desigualdad total o absoluta corresponde al caso límite en

Si un indicador cumple con la condición de cambio relativo también satisfará el criterio Pigou-Dalton porque, como hemos visto, la única exigencia que impone este último es que haya relación directa entre el nivel de desi- que la suma de la variable pertenece a una sola observación. La distribución equitativa significa exactamente lo inverso; todas y cada una de las unidades poseen la misma cantidad, de acuerdo a la norma democrática.

La existencia de una escala cuyos límites tienen significado, nos permite otorgar contenido al valor que asume un coeficiente en relación a su proximidad o lejanía de los extremos. De este modo estaremos en condiciones de precisar si el grado de concentración que presenta una distribución de frecuencias está más próximo a la equidistribución que a la concentración total o viceversa.

A pesar de que la adscripción de un intervalo con límites conocidos es de fundamental importancia para referirse al grado de desigualdad, normalmente se requiere información adicional para calificar con propiedad la concentración. Así por ejemplo, el valor 0.7 que asume un coeficiente de desigualdad aplicado a la distribución de la tierra parece bastante alto en la medida que está más próximo a 1 que a 0. Sin embargo, podría corresponder al valor usual que toma en todos los países que se encuentran más o menos en el mismo nivel de desarrollo y que en este sentido sería normal aunque alto. Es posible hacer una interpretación análoga si ese resultado se hubiese obtenido al calcular la concentración de la tierra en una región de un país cuyo nivel global de desigualdad se encontrara alrededor de 0.7.

La calificación sustantiva del valor de un coeficiente de desigualdad no sólo debe tomar en cuenta su ubicación en una escala definida entre 0 y 1, sino que adicionalmente requiere de una comparación con otros valores. Por el momento admitimos que la mencionada calificación sólo se lleva a cabo para un mismo coeficiente y que siempre usamos éste en su forma normalizada o estandarizada.

En el ejemplo que expusimos, contrastamos espacialmente los valores del coeficiente normalizado. Se ubica (I = 0.7) ya sea en relación al valor que ha alcanzado en otros países o bien en comparación al que asumió en otras regiones del mismo país. Pero también se puede usar una serie de valores en el tiempo, lo que nos permitirá marcar la tendencia y fluctuaciones que experimentan los niveles de desigualdad. Así, por ejemplo, si los valores del índice aplicados a la distribución de la tierra a través del tiempo han sido 0.70, 0.68 y 0.67, estaremos en condiciones de sostener que aun cuando el nivel de desigualdad es persistentemente alto y que corresponde al valor usual que asume en este tipo de países, muestra una leve tendencia hacia una repartición más equitativa.

Disponer de información adicional comparable tanto en el tiempo como en el espacio nos permite agregar mayores precisiones a la información que proporciona la simple ubicación del valor de un coeficiente en una escala con límites conocidos.

La condición mínima que se debe cumplir para ubicar el valor de un indicador en relación a otros calculados en distintos espacios y tiempos, es que se encuentren referidos a una misma escala de medida. He aquí la potencialidad de la normalización. Carecería de sentido comparar los valores de dos coeficientes uno normalizado de 0.7 y otro no estandarizado de 2.8 cuyo máximo es, por ejemplo, el logaritmo del número de casos. Es posible que al llevarlo a la escala 0;1 ambos resulten iguales.

En ocasiones se intenta comparar los valores de dos o más coeficientes distintos de desigualdad aplicados a diferentes distribuciones de frecuencias. Pongámonos en el caso más favorable y supongamos que todos los coeficientes se calcularon en su forma normalizada sobre variables clasificadas en los mismos intervalos de clase. Aun bajo estas circunstancias contrastar sus valores no tendría un sentido muy claro. Limitemos entonces nuestra selección a los indicadores que cumplen con los criterios básicos que hemos representado en la gráfica 1.2. Si disponemos de tres coeficientes $I'_1$, $I'_2$ e $I'_3$, susceptibles de usarse en un estudio específico, la elección podría favorecer a cualquiera de ellos puesto que estadísticamente son igualmente buenos. Esto quiere decir que nos es indiferente seleccionar cualquiera de las tres funciones que ligan el grado de desigualdad con su medición y que, tal como se puede apreciar en la gráfica, a un mismo nivel de desigualdad corresponderán, en general, tres valores distintos en el eje de las ordenadas, uno para cada indicador. Este hecho hace inútil el contraste entre los valores proporcionados por los diferentes coeficientes. Una posible solución a este problema consiste en determinar las relaciones matemáticas que existen entre las diversas funciones y a través de ellas establecer la comparabilidad.

Respecto al sentido que se puede adjudicar al valor alcanzado por un coeficiente de desigualdad normalizado, hemos dicho que es conveniente relacionarlo con los de otros estudios referidos a la misma variable en espacios y tiempos diferentes. Complementariamente establecimos que los valores de coeficientes distintos no son ***directamente comparables***.

El material que se expone en los capítulos que siguen, especialmente en el segundo y tercero, se encuentra ordenado según una misma secuencia lógica que consiste, en primer lugar, en la exposición y desarrollo de la medida de desigualdad propuesta. Enseguida, se pasa por el tamiz de las propiedades que se exigen a los buenos indicadores de desigualdad, es decir, se examina su sensibilidad a las transformaciones de escala y si cumple o no con las condiciones Pigou-Dalton y de cambio relativo. A continuación se estudia la posibilidad de subsanar las deficiencias que se presenten según los requisitos que no satisfaga. Cuando no existe o no hemos encontrado la manera de corregir la deficiencia o deficiencias, dejamos éstas claramente establecidas. Siempre que nos ha sido posible hemos estandarizado el coeficiente y finalmente agregamos algunos ejemplos ilustrativos.

Quisiéramos señalar que usaremos dos clases de ejemplos. Unos que cumplen una función netamente pedagógica, que implica el manejo de una cantidad reducida de información y cada operación aritmética realizada está expuesta en detalle. Y en aquellos tópicos que a nuestro juicio son relevantes para la investigación y análisis de la desigualdad social incluimos una sección que hemos denominado "aplicación", en este caso se trata del manejo de distribuciones de frecuencias publicadas por organismos especializados.

# *II: Medidas de desigualdad para datos no agrupados*

## 2.1. *Introducción*

En el capítulo anterior examinamos algunas ideas referidas a la noción de desigualdad. Ahora nos preocuparemos por estudiar las diferentes formas en que la estadística hace operativo ese concepto.

El material que expondremos pretende ser una revisión sistemática del modo en que se traducen a términos matemáticos las ideas de desigualdad que se han expresado en lenguaje natural. De hecho cada una de las medidas estadísticas de concentración puede verse como una manera de llenar el espacio que media entre los conceptos de carácter general y las formas particulares y específicas como se traducen a expresiones formales.

Dada la cantidad relativamente abundante de opciones para llenar dicho espacio se hace necesario introducir aquellos criterios que permiten juzgar acerca de las bondades estadísticas de las medidas.

## 2.2. *Rango relativo*

A partir de la idea de desigualdad por comparación se puede pensar en usar como medida de concentración:

$$\Delta = X\text{ máx.} - X\text{ mín.}$$

A medida que mayor sea la diferencia entre el valor máximo (X máx.) y mínimo (X mín.) alcanzada por la variable, mayor será el valor de $\Delta$. En consecuencia, en una primera aproximación podemos sostener que a mayor diferencia entre los valores extremos de la variable mayor será el valor de $\Delta$ y mayor será la desigualdad. Provisionalmente podríamos afirmar que $\Delta$ guarda una relación directa con el nivel de concentración de la variable.

Esta aseveración difícilmente se puede mantener por mucho tiempo ya que si multiplicamos los valores de variable por una constante k, (gráficamente ello implica una traslación proporcional de una distribución de frecuencias) el valor de $\Delta$ también se multiplicará por k:

$$k\,X\text{ máx.} - kX\text{ mín.} = k\,(X\text{ máx.} - X\text{ mín.}) = k\Delta$$

señalando un aumento en los niveles de desigualdad, en circunstancias en que se ha mantenido la posición relativa de las observaciones, es decir, a pesar que el grado de la desigualdad es el mismo. El nivel de la concentración es lo único que se ha modificado al introducir un desplazamiento de la distribución. Para corregir la distorsión que producen los cambios de escala sobre la medida de desigualdad, definimos el rango relativo como:

$$\boxed{R = \frac{X\text{ máx.} - X\text{ mín.}}{\bar{X}} = \frac{\Delta}{\bar{X}}} \tag{2.1}$$

Donde $\bar{X}$ es el promedio

Ahora bien, una alteración en la escala producirá un aumento del mismo tipo tanto en el numerador como en el denominador de R de manera que:

$$R = \frac{k\,\Delta}{k\,\bar{X}} = \frac{\Delta}{\bar{X}}$$

Con lo que la medida permanece inalterada a las transformaciones proporcionales aplicadas sobre los valores de la variable.

Si deseáramos que la medida de rango relativo fluctuase en el interior de un intervalo cerrado (por ejemplo, entre los límites 0 y 1 en que el primero se asocie a la distribución equitativa y el segundo a la máxima concentración) podríamos proceder a su normalización. Para ello, basta saber que en el caso en que toda la variable es apropiada por una sola unidad (máxima concentración) la igualdad (2.1) asume la forma:

$$R\text{ máx.} = \frac{X\text{ máx.} - 0}{\bar{X}} = \frac{n\,\bar{X}}{\bar{X}} = n$$

Por lo tanto, el coeficiente de rango relativo normalizado se obtiene al definir:

$$\boxed{R_N = \frac{R}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{X\text{ máx.} - X\text{ mín.}}{\bar{X}}\right)} \tag{2.2}$$

En caso de distribución equitativa tenemos que X máx. = X mín. por lo que R y $R_N$ serán ambos iguales a cero. Por otro lado, si una unidad posee el total de la variable que se reparte entonces R = R máx. = n, por lo que

$$R_N = \frac{R\text{ máx.}}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Una desventaja de esta forma de medir la desigualdad surge del hecho que no toma en cuenta toda la información disponible. En efecto, como sólo considera los valores extremos (superior e inferior) de las observaciones, podemos llegar a una imagen distorsionada de los niveles de desigualdad. Al aplicar esta medida sobre dos conjuntos de datos es posible obtener un resultado totalmente contradictorio con aquél que se obtiene cuando se toma en cuenta *toda* la información disponible.

Tomemos como ejemplo de lo anterior los siguientes datos:

*Tabla 2.1. Un ejemplo en que el rango relativo no refleja adecuadamente la desigualdad de dos distribuciones*

| $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|
| 5 | 15 |
| 20 | 15 |
| 20 | 15 |
| 20 | 15 |
| 20 | 35 |
| 20 | 35 |
| 20 | 35 |
| 20 | 35 |
| 35 | 35 |
| $\bar{X} = 20$ | $\bar{X} = 20$ |

Al aplicar la fórmula (2.1) sobre ambos conjuntos de datos obtenemos:

$$R_1 = \frac{35 - 5}{20} = \frac{30}{20} = 1.5 \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{35 - 15}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

para los conjuntos $c_1$ y $c_2$ respectivamente.

En la distribución *1*, 7 de las 9 unidades presentan el mismo valor de la variable y los valores extremos son claras desviaciones respecto de ellas. En el conjunto de datos $c_2$ la variable se distribuye en dos clases, es decir, se encuentra repartida de manera bastante más polarizada que en la distribución 1; sin embargo el índice marca una mayor desigualdad en 1 que en 2. Ello deriva directamente de que la medida no considera el conjunto de observaciones sino sólo sus valores extremos.

A continuación mostraremos algunas maneras posibles de analizar la desigualdad, en ellas intervienen todas las observaciones.

## 2.3. *Desviación media relativa*

Esta medida emerge del criterio de desigualdad que se basa en comparar cada valor de variable con un "valor norma" previamente establecido. De hecho se lleva a cabo la operación de comparar todos y cada uno de los *n* valores de variable con respecto al promedio. El valor promedio, puede ser interpretado como una manera de expresar en el lenguaje de la estadística el criterio "norma democrática".

Al tomar como elemento básico de la medida:

$$d_i = X_i - \bar{X} \quad (i = 2,\ldots,n)$$

donde $\bar{X}$ simboliza a la media aritmética, tendremos *n* diferencias (tantas como observaciones). Sin embargo, nuestro interés consiste en llegar a obtener una medida resumen, *única*, que nos sirva como indicador de desigualdad. Un procedimiento inmediato para obtenerla a partir de las *n* discrepancias consistiría en sumarlas; la resultante sería una medida global que admitiría ser interpretada como la agregación de los grados de desigualdad individuales (desviaciones con respecto a la norma). No obstante, esa suma siempre será igual a cero debido a que la media aritmética es el centro de gravedad de la distribución, y en consecuencia las desviaciones positivas se cancelarán con las negativas. Este hecho nos lleva a poner la atención sobre el signo de estas diferencias. ¿Es congruente con la idea de desigualdad diferenciar dos valores de $d_i$ que sólo se distinguen por su signo? Pareciera que la respuesta debiera ser negativa. Tanto aporta a la desigualdad una observación que se encuentra un determinado número de unidades por debajo de la media como una que se ubica el mismo número de unidades por encima de la misma. Pareciera lógico establecer que para estos efectos no se tome en cuenta el signo de las discrepancias. Esta decisión permite ensayar una solución, que al mismo tiempo que evita la cancelación de los signos opuestos, resuelve el problema de agregación de las contribuciones de los valores individuales a la desigualdad.

Un camino ampliamente utilizado en matemáticas y en estadística para eliminar signos, consiste en tomar valores absolutos de los $d_i$. Otra vía usual es la de elevar las discrepancias al cuadrado. En el próximo apartado analizaremos esta vertiente.

A partir de la idea de los desvíos con respecto a la norma democrática, se puede obtener la medida global de desigualdad de una distribución, para ello se suman los aportes que realizan las observaciones individuales. En el caso del índice desviación media, la contribución de cada unidad a la concentración se expresa a través del valor absoluto de $d_i$ y la medida agregada de desigualdad se genera por su simple suma:

$$\sum_{i=1}^{n} | d_i | = \sum_{i=1}^{n} | X_i - \bar{X} |$$

Pero este valor dependerá del número de sumandos.

Es decir, $\sum_{i=1}^{n} | d_i |$ se puede hacer crecer sin límite a través del simple expediente de agregar términos a la suma, dando así la idea, no siempre correcta, de niveles crecientes de desigualdad. Para evitar la sensibilidad de la medida al número de observaciones se recurre a dividirla entre *n*:[1]

$$\frac{\Sigma|d_i|}{n} = \frac{\Sigma|X_i - \bar{X}|}{n}$$

Esta medida variará ante transformaciones proporcionales en los valores de variables tal como se puede apreciar en:

$$\frac{1}{n}\Sigma|kX_i - k\bar{X}| = \frac{k}{n}\Sigma|X_i - \bar{X}| = \frac{k}{n}\Sigma|d_i|$$

donde se han multiplicado los valores de variable por una *k*. Sabemos que una de las propiedades deseables que deben cumplir los buenos indicadores de desigualdad debe ser su estabilidad ante ese tipo de transformaciones. Con el propósito de que la medida goce de este atributo corregimos cada $d_i$ por la media o lo que es lo mismo, dividimos $\Sigma\, d_i$ entre $\bar{X}$, con lo cual se llega a:

(2.3)
$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{n} \frac{|X_i - \bar{X}|}{n\bar{X}}}$$

Si la distribución de la variable es total y absolutamente equitativa entonces para cada observación se cumplirá siempre que $X_i = \bar{X}$ y por lo tanto D asumirá el valor cero.

Si el valor total de la variable ($\sum_{i=1}^{n} X_i$) se concentra en sólo una unidad, entonces:

$$D_{máx.} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|0 - \bar{X}| + |\Sigma X_i - \bar{X}|}{n\bar{X}} \qquad \text{y}$$

$$D_{máx.} = \frac{(n-1)\bar{X} + \Sigma X - \bar{X}}{n\bar{X}} = \frac{(n-1)\bar{X} + (n-1)\bar{X}}{n\bar{X}} = \frac{2(n-1)}{n}$$

$$D_{máx.} = \frac{2\,(n-1)}{n}$$

[1] Cuando no se preste a confusiones no indicaremos los límites entre los cuales se extiende la suma.

$D_{máx.}$ simboliza el valor que alcanzaría la diferencia media relativa en el caso de máxima desigualdad. En consecuencia, para limitar el recorrido de D entre cero y uno, bastará con establecer la relación $D/D_{máx.}$, lo que entrega como resultado:

$$D_N = \frac{D}{D_{máx.}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}|}{n\bar{X}}}{\dfrac{2\,(n-1)}{n}}$$

y al simplificar:

$$(2.4) \qquad \boxed{D_N = \frac{1}{2\,(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{|X_i - \bar{X}|}{\bar{X}}}$$

Si la distribución es equitativa, entonces cada $X_i = \bar{X}$ y $D_N = 0$.

Si la distribución es totalmente concentrada tendremos que $D = D_{máx.}$ con lo cual $D_N = 1$.

Pareciera natural esperar que cualquier medida de concentración debiera ser sensible a redistribuciones internas en el valor de la variable (criterio Pigou-Dalton). Así, si se redistribuyera desde una unidad mayor en favor de otra menor, la medida de desigualdad debería marcar una caída en el grado de concentración y un alza en el caso contrario.

La desviación media relativa no cumple con la condición Pigou-Dalton. En efecto, cualquier redistribución que se haga atrayendo una cantidad a una observación y entregándosela a otra, no modificará el valor de D ni de $D_N$ si es que las dos observaciones involucradas en el cambio se encuentran ambas a un mismo lado de la media. Ello se debe a que una transferencia en, por ejemplo, el lado de las desviaciones negativas implica al mismo tiempo un alejamiento y un acercamiento a la media. Si se pasa una cantidad de la variable de la unidad mayor a una menor y ambas se encuentran por debajo de la media, la que entrega se alejará del promedio y la que recibe se acercará, neutralizándose uno y otro movimientos. En consecuencia, esa transferencia no se reflejará en D ni en $D_N$. Para ilustrar esta idea supongamos que en una distribución con $\bar{X} = 200$ se transfiere una cantidad desde una observación que originalmente tenía 150 hacia otra que disponía sólo de 100. Las contribuciones a la desigualdad antes del traspaso eran: $|100-200| + |150-200| = 150$ y después del mismo tendremos: $|101-200| + |149-200| = 150$. En consecuencia los valores de D y $D_N$ no reflejan la redistribución.

No acontece lo mismo cuando la transferencia es entre una unidad que está por encima y otra que está por debajo de la media. Supongamos que en la misma distribución se traslada la unidad de una observación con 210 a otra que dispone de 150. Los aportes individuales antes del cambio eran: $|210\text{-}220| + |150\text{-}200| = 60$; y después: $|209\text{-}200| + |151\text{-}200| = 58$. De esta manera tanto D como $D_N$ marcarán un descenso en el nivel global de desigualdad.

Nos basaremos en los conjuntos de datos $c_1$ y $c_2$ que hemos utilizado en la sección anterior para presentar las rutinas de cálculo de las fórmulas (2.3) y (2.4).

*Tabla 2.2. Cálculo de los coeficientes D y $D_N$*

| $c_1$ $\lvert X_i - \bar{X}\rvert$ | $c_2$ $\lvert X_i - \bar{X}\rvert$ |
|---|---|
| 15 | 5 |
| 0 | 5 |
| 0 | 5 |
| 0 | 5 |
| 0 | 15 |
| 0 | 15 |
| 0 | 15 |
| 0 | 15 |
| 15 | 15 |
| 30 | 95 |

Para el conjunto $c_1$ tenemos:*

$$D = \frac{30}{9 \times 20} = 0.1667 \text{ y } D_N = 0.1667 . \frac{9}{2 \times 8} = 0.1667 \times 0.5625 = 0.0938$$

y en el conjunto $c_2$:

$$D = \frac{95}{9 \times 20} = 0.5280 \text{ y } D_N = 0.5280 \times \frac{9}{2 \times 8} = 0.5280 \times 0.5625 = 0.2970$$

Tal como era de esperar, la desviación media relativa nos señala que la desigualdad es mayor en $c_2$ que en $c_1$. Este resultado contradice al que se obtuvo utilizando sólo los valores extremos. Como la desviación media relativa toma en cuenta el total de observaciones, nos provee de un indicador que refleja mejor que el rango relativo la desigualdad existente en las dos distribuciones.

* Las cifras de este trabajo se presentan, según sea el caso, con dos, tres o cuatro decimales, aun cuando las operaciones siempre se efectuaron con cuatro. Esto conduce a que en ocasiones debido al redondeo no haya coincidencia *exacta* entre los cálculos parciales y el resultado del texto.

## 2.4 *Varianza relativa*

Una manera de evitar el problema del signo de las diferencias, y que al mismo tiempo es sensible a las transferencias entre los miembros del colectivo sin importar si se encuentran o no en el mismo lado de la media, consiste en tomar cada $d_i^2$ como la contribución individual a la desigualdad total. En general, tendremos tantas $d_i^2$ como observaciones haya, sin embargo, nuestro interés radica en llegar a obtener un solo indicador que se puede generar por la suma del cuadrado de las diferencias:

$$\Sigma\, d_i^2$$

Como esta cantidad depende del número de observaciones y al mismo tiempo es sensible a los cambios de escala, debemos corregir por n y $\bar{X}^2$ de modo que se llega a establecer como medida de desigualdad:

$$\boxed{V = \frac{\Sigma\, d_i^2 / n}{\bar{X}^2} = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2 / n}{\bar{X}^2} = \frac{S_X^2}{\bar{X}^2} = (cv)^2} \tag{2.5}$$

De la simple inspección de (2.5) se aprecia que V resulta de la división de la varianza entre el cuadrado de la media lo que constituye directamente el cuadrado del coeficiente de variabilidad y también puede interpretarse como una varianza corregida por efecto escala o, en otros términos, como una varianza relativa.

En caso de distribución equitativa, $X_i = \bar{X}$, para todo *i*, y en consecuencia $V = 0$.

Cuando la desigualdad sea máxima habrá una observación que se apropia del total y le corresponderá un $X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$, mientras que las (n-1) restantes serán cero.

Luego:

$$V_{\text{máx.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (0 - \bar{X})^2 + (n\bar{X} - \bar{X})^2}{n\,\bar{X}^2}, \quad y$$

$$V_{\text{máx.}} = \frac{(n-1)\bar{X}^2 + (n\bar{X} - \bar{X})^2}{n\bar{X}^2} = \frac{(n-1)\bar{X}^2 + n^2\,\bar{X}^2 - 2n\bar{X}^2 + \bar{X}^2}{n\bar{X}^2} = \frac{(n^2 - n)\bar{X}^2}{n\bar{X}^2} = (n-1)$$

$$V_{\text{máx.}} = (n - 1)$$

Si estuviésemos interesados en que la varianza relativa asuma sólo valores dentro del intervalo 0 y 1, bastará con definir:

$$V_N = \frac{V}{V_{\text{máx.}}}$$

y al realizar las sustituciones correspondientes llegamos a:

$$V_N = \frac{V}{V_{\text{máx.}}} = \frac{S^2/\bar{X}^2}{(n-1)} = \frac{S^2}{(n-1)\bar{X}^2}$$

$$\boxed{V_N = \frac{S^2}{(n-1)\bar{X}^2}} \qquad (2.6)$$

En una situación de total igualdad cada $X_i$ será igual a $\bar{X}$, con lo que el numerador de V y $V_N$ serán cero porque la varianza es nula. En el caso contrario, es decir, de concentración total, $V_N$ alcanzará el valor unitario como una consecuencia directa de la forma en que ha sido definido.

Tomaremos, para ejemplificar, los cálculos implicados en las fórmulas (2.5) y (2.6) la siguiente distribución hipotética:

*Tabla 2.3. Cálculo de los coeficientes V y $V_N$*

| i | $X_i$ | $(X_i - \bar{X})$ | $(X_i - \bar{X})^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | −15 | 225 |
| 2 | 10 | −10 | 100 |
| 3 | 20 | 0 | 0 |
| 4 | 30 | 10 | 100 |
| 5 | 35 | 15 | 225 |
| | 100 | | 650 |

Como el promedio es igual a 20 el valor de V será:

$$V = \frac{\frac{650}{5}}{(20)^2} = 0.325$$

y el coeficiente normalizado $V_N$ resulta ser:

$$V_N = \frac{0.325}{4} = 0.0812$$

Aun cuando esta medida de concentración es sensible a las transferencias, adjudica el mismo peso a las realizadas en niveles distintos de la variable. Es decir, el efecto que tiene una redistribución entre dos unidades es independiente del nivel en que se efectúe. Sin embargo, hay veces en que dada la naturaleza del estudio es necesario contar con una medida de desigualdad que dé cuenta de este hecho. En esta perspectiva surge la varianza de los logaritmos.

## 2.5. *Varianza de los logaritmos*

Al aplicar la transforamación logarítmica a los valores de una variable se consigue disminuir la distancia que originalmente existía entre ellos.

*Tabla 2.4 Relación entre los primeros diez números enteros y sus logaritmos*[2]

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| lnX | 0 | 0.693 | 1.099 | 1.386 | 1.609 | 1.792 | 1.946 | 2.079 | 2.197 | 2.303 |
| Dif. X | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | — |
| Dif. lnX | 0.693 | 0.406 | 0.287 | 0.223 | 0.183 | 0.154 | 0.133 | 0.118 | 0.106 | — |

En las dos últimas líneas de esta tabla hemos incluido la diferencia entre dos valores consecutivos restando el menor al mayor. La simple comparación entre ambas líneas nos muestra que a una diferencia constante entre los valores de *X*, corresponde una decreciente en los logaritmos. Es decir, que la transformación es tal que otorga menos importancia a los valores altos de la variable que a los bajos. Este hecho se aprovecha para diseñar una medida de desigualdad que marca las diferencias entre redistribuciones de una misma cantidad pero realizadas en distintos niveles. Así es como se llega a proponer la varianza de los logaritmos:

$$\boxed{L^2 = \frac{\Sigma\,(\ln X_i - \overline{\ln X})^2}{n}} \tag{2.7}$$

Cabe observar que este índice no requiere corrección por efecto escala, en virtud de que las transformaciones proporcionales aplicadas sobre la variable originan el mismo término en cada componente de la diferencia que conforma (2.7). Algebraicamente:

$$\ln k\,X_i = \ln k + \ln X_i$$

$$\overline{\ln k\,X} = \ln k + \overline{\ln X}$$

[2] A lo largo de este texto usaremos logaritmos naturales (base e).

al reemplazar estas expresiones en (2.7):

$$L^2 = \frac{\Sigma(\ln k X_i - \overline{\ln k X})^2}{n} = \frac{\Sigma(\ln k + \ln X_i - \ln k - \overline{\ln X})^2}{n}$$

$$L^2 = \frac{\Sigma(\ln X_i - \overline{\ln X})^2}{n},$$

se demuestra que la varianza de los logaritmos es insensible a las transformaciones proporcionales.

Usaremos los datos de la tabla 2.3, para mostrar los pasos involucrados en el cálculo de la fórmula (2.7)

*Tabla 2.5. Cálculo del coeficiente $L^2$*

| i | $X_i$ | $\ln X_i$ | $(\ln X_i - \overline{\ln X})$ | $(\ln X_i - \overline{\ln X})_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1.609 | −1.164 | 1.355 |
| 2 | 10 | 2.303 | −0.470 | 0.221 |
| 3 | 20 | 2.996 | 0.223 | 0.050 |
| 4 | 30 | 3.401 | 0.628 | 0.394 |
| 5 | 35 | 3.555 | 0.782 | 0.612 |
| | | 13.864 | | 2.632 |

el promedio es: $\overline{\ln X} = 2.773$; y el valor de la varianza de los logaritmos resulta ser:

$$L^2 = \frac{2.632}{5} = 0.526.$$

Examinemos la manera en que la varianza de los logaritmos registra redistribuciones realizadas en distintos niveles. Para ello supongamos que tomamos una unidad de la segunda observación y se la entregamos a la primera:

*Tabla 2.6. Redistribución en niveles inferiores*

| i | $X_i$ | $\ln X_i$ | $(\ln X_i - \overline{\ln X})$ | $(\ln X_i - \overline{\ln X})_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1.792 | −0.996 | 0.992 |
| 2 | 9 | 2.197 | −0.591 | 0.349 |
| 3 | 20 | 2.996 | 0.208 | 0.043 |
| 4 | 30 | 3.401 | 0.613 | 0.376 |
| 5 | 35 | 3.555 | 0.767 | 0.588 |
| | | 13.941 | | 2.348 |

el promedio es: $\overline{\ln X} = 2.788$ y la varianza:

$$L^2 = \frac{2.351}{5} = 0.470$$

Como es natural la transferencia se manifiesta en una caída en el valor del índice de desigualdad.

Supongamos ahora que la primera observación se beneficia con una unidad procedente de la quinta.

*Tabla 2.7. Redistribución desde un valor alto a un bajo*

| i | $X_i$ | $\ln X_i$ | $(\ln X_i \ln X)$ | $(\ln X_i - \ln X)_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1.792 | −1.012 | 1.024 |
| 2 | 10 | 2.303 | −0.501 | 0.251 |
| 3 | 20 | 2.996 | 0.192 | 0.037 |
| 4 | 30 | 3.401 | 0.597 | 0.356 |
| 5 | 34 | 3.526 | 0.722 | 0.521 |
| | | 14.018 | | 2.189 |

el promedio es: $\overline{\ln X} = 2.804$ y la varianza:

$$L^2 = \frac{2.190}{5} = 0.438$$

Al comparar la $L^2$ de las tablas 2.6 y 2.7 destaca con claridad la propiedad de este índice para reflejar una tendencia mayor hacia la igualdad cuando la transferencia se realiza desde una unidad que tiene más en favor de una que tiene menos, que en el caso en que se transfiere desde una observación menos favorecida. Es decir, hemos comprobado numéricamente la sensibilidad de la varianza de los logaritmos al nivel en que se efectúa la redistribución.

La medida de desigualdad que se estudia asume cero como valor inferior en el caso que la variable se encuentre distribuida equitativamente. Esto quiere decir que:

$$X_1 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = \bar{X}$$

y los valores transformados serán:

$$\ln X_1 = \ln X_2 = \ln X_3 = \ldots = \ln X_n = \overline{\ln X}$$

Al reemplazar estos valores en (2.7) tendremos que:

$$L^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\overline{\ln X} - \overline{\ln X})^2}{n} = 0$$

El valor que toma $L^2$ en una distribución totalmente concentrada no puede ser calculado por cuanto tendríamos:

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_{i-1} = X_{i+1} = \ldots = X_n = 0$$

y $\quad X_i = n\,\bar{X}$ (siendo *i* una observación cualquiera)

y la operación ln(0) no está definida. No es posible evaluar el valor máximo de $L^2$ porque en la suma del numerador no están definidos todos los sumandos. De aquí se concluye directamente que esta medida no es susceptible de normalización por lo que su utilidad se manifestará preferentemente en aquellas situaciones en que se compare el nivel de desigualdad existente en dos o más distribuciones.

Por último, hay que notar que basta con que una observación tenga un valor de variable igual a cero para que la varianza de los logaritmos quede indefinida.

## 2.6 *Coeficiente de desigualdad de Gini*

Todas las medidas de desigualdad que hemos examinado hasta este punto, con excepción del rango relativo, se construyen sobre la base de los desvíos respecto a la norma democrática representada por la media aritmética.

Es posible derivar conceptualmente el coeficiente de Gini como resumen de las discrepancias con respecto a dicho criterio; aunque no se exprese formalmente en términos de un promedio. Asimismo se presenta e interpreta como una medida que reúne en un solo valor las comparaciones entre los valores de variable que corresponden al universo de pares de observaciones.

Más adelante presentaremos detalladamente esta última forma de conceptualización. A continuación desarrollaremos el conjunto de ideas básicas a partir de las cuales se introduce usualmente el coeficiente de desigualdad de Gini.

El coeficiente de Gini se diferencia de los presentados con anterioridad en la manera como formaliza la norma democrática. En efecto, en lugar de representarla a través del promedio, establece la distribución teórica que debería tener la variable si se repartiese por igual entre todas las unidades.

En el caso que la variable esté distribuida equitativamente con respecto a la norma democrática la proporción de la variable perteneciente a cada unidad ($q_i^T$) debería ser igual a la proporción que cada observación representa dentro del total ($p_i$).

De acuerdo con lo anterior

$$q_i^T = \frac{X_i^T}{\Sigma X_i},$$

$X_i^T$ simboliza el valor que debiera poseer la i-ésima observación en el caso de repartición perfectamente democrática de la variable, además $\Sigma X_i^T = \Sigma X_i$

$$p_i = \frac{i}{n}$$

Estas dos fórmulas nos permiten calcular las participaciones relativas en la variable y en las observaciones respectivamente.

Las características básicas propias de la distribución equitativa se presentan en la siguiente tabla:

*Tabla 2.8a. Frecuencias relativas simples y acumuladas en el caso de equidistribución*

| No. de orden | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor de la variable | $X_1^T$ | $= X_2^T$ | $= X_3^T$ | $= X_4^T$ | ... | $X_n^T = k$ |
| Frecuencias relativas de las observaciones (proporción de casos) | $p_1$ | $= p_2$ | $= p_3$ | $= p_4$ | ... | $= p_n = 1/n$ |
| Frecuencias relativas de la variable (prop. de la variable) | $q_1^T$ | $= q_2^T$ | $= q_3^T$ | $= q_4^T$ | ... | $= q_n^T = 1/n$ |
| Frecuencias relativas acumuladas de las observaciones | $P_1 = 1/n$; | $P_2 = 2/n$; | $P_3 = 3/n$; | $P_4 = 4/n$; | ... | $P_n = n/n = 1$ |
| Frecuencias relativas acumuladas de la variable | $Q_1^T = 1/n$; | $Q_2^T = 2/n$; | $Q_3^T = 3/n$; | $Q_4^T = 4/n$; | ... | $Q_n^T = n/n = 1$ |

Bajo el supuesto de equidistribución se cumple que la proporción de la variable responde a:

$$q_i^T = \frac{X_i^T}{\Sigma X_i} = \frac{X_i^T}{\Sigma k} = \frac{X_i^T}{n\,k} = \frac{k}{n\,k} = \frac{1}{n}$$

es decir, cada $q_i^T$ coincide con su correspondiente $p_i$;

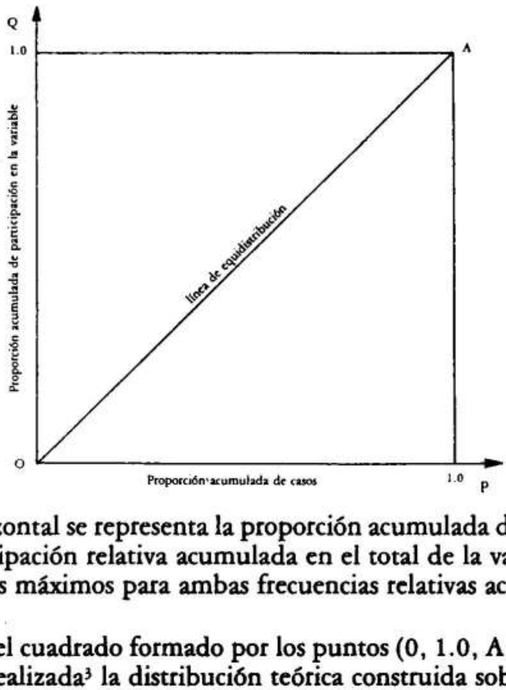
En las dos últimas líneas de la tabla hemos incorporado las frecuencias relativas acumuladas tanto de las observaciones cuanto de la variable, en virtud de que constituyen los elementos que permiten derivar la medida de concentración de Gini. La igualdad $p_i = q_i^T$ necesariamente conduce a: $P_i = Q_i^T$.

Este resultado es una consecuencia directa de haber construido, como lo hicimos, una distribución teórica de frecuencias apoyados en la norma democrática. De aquí que no debe extrañar que la frecuencia relativa acumulada de casos coincida con la frecuencia relativa acumulada de la variable: si se distribuye equitativamente un total, entonces a una determinada proporción de las unidades le corresponderá la misma proporción en la variable; así por ejemplo, el 0.25 de las unidades habrá acumulado el 0.25 de la variable, el 0.50 de las unidades el 0.50 de la variable y así sucesivamente.

Las características de la distribución equitativa que se ha presentado en términos algebraicos, también se pueden expresar gráficamente:

*Gráfica 2.1.*

*Representación de la distribución equitativa*




En el eje horizontal se representa la proporción acumulada de casos y en el vertical la participación relativa acumulada en el total de la variable. Por lo tanto, los valores máximos para ambas frecuencias relativas acumuladas son iguales a 1.

La diagonal del cuadrado formado por los puntos (0, 1.0, A y 1.0), expresa de manera idealizada[3] la distribución teórica construida sobre la base del principio de repartición igualitaria y habitualmente se denomina línea de equidistribución.

La idea central que orienta la construcción del índice de Gini consiste en comparar dos distribuciones: la empírica y la que se deriva de la aplicación

[3] Decimos idealizada porque, en sentido estricto, se trata de una serie de puntos (formados por las parejas $P_i$ y $Q_i$ que corresponden a cada observación) que pueden unirse a través de una línea recta.

de la norma democrática. La comparación se hace operativa a través de las discrepancias entre las frecuencias relativas acumuladas de la variable en ambas distribuciones.

Supongamos que tenemos *n* observaciones y que las ordenamos de, por ejemplo, menor a mayor y que las mismas operaciones que hemos efectuado para generar la distribución teórica se realizan sobre las observaciones originales de modo que:

*Tabla 2.8b. Frecuencias relativas simples y acumuladas en una distribución de frecuencias no equitativa*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| No. de orden | 1 | 2 | 3 | 4 | ... n |
| Observaciones | $X_i <$ | $X_2 <$ | $X_3 <$ | $X_4 <$ | $\ldots < X_n$[4] |
| Frecuencias relativas de las observaciones (Prop. de casos) | $p_1 = 1/n$; | $p_2 = 1/n$; | $p_3 = 1/n$; | $p_4 = 1/n$ | ... $p_n = 1/r$ |
| Frecuencias relativas de la variable (prop. de la var.) | $q_1 <$ | $q_2 <$ | $q_3 <$ | $q_4 <$ | $\ldots < q_n$ |
| Frecuencias relativas acumulativas de las observaciones | $P_1 = 1/n$; | $P_2 = 2/n$; | $P_3 = 3/n$; | $P_4 = 4/n$ | ... $P_n = 1$ |
| Frecuencias relativas acumuladas de la variable | $Q_1 <$ | $Q_2 <$ | $Q_3$ | $Q_4 <$ | $\ldots < Q_n = 1$ |

Al comparar esta tabla con la anterior hay que destacar que:

(i) Los valores de las frecuencias relativas acumuladas de las observaciones ($P_i$) son iguales tanto en la distribución teórica cuanto en la empírica.

(ii) Por haber ordenado la variable de menor a mayor, necesariamente $Q_i < Q_i^T$.

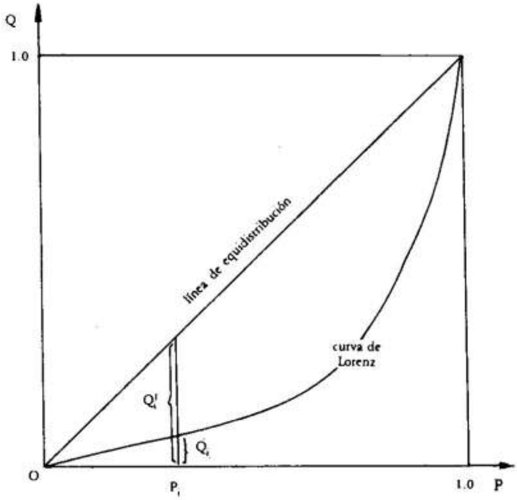
En consecuencia, si representamos la distribución de los datos reales en la misma gráfica en que hemos dibujado la distribución teórica, la línea idealizada[5] resultante se encontrará siempre bajo la recta de equidistribución, excepto en los valores extremos 0 y 1. Esta última línea se denomina curva de Lorenz.

[4] En el caso en que haya dos valores de variable iguales es indiferente el orden en que se ubiquen.

[5] Por la misma razón que hemos expuesto anteriormente.

*Gráfica 2.2.*

*Diagrama de concentración*




Para una proporción acumulada de unidades (para un $P_i$ dado) menor será la concentración en tanto menor sea la distancia entre el punto ubicado sobre la curva de Lorenz y el situado sobre la línea de equidistribución. Al contrario, mayor será la desigualdad en tanto mayor sea la distancia entre ambos puntos.

Por lo tanto, si se desea construir un índice de concentración éste debería basarse en la diferencia $d_i$:

$$d_i = P_i - Q_i$$

El aporte que realiza a la desigualdad una observación *i* cualquiera será cero si coincide el "punto de equidistribución" con el "punto Lorenz". En este caso particular

$$d_i = P_i - Q_i = P_i - P_i = 0$$

ya que $Q_i = P_i$

La contribución máxima que puede hacer un punto cualquiera *i*, a la concentración total se produce cuando $Q_i = 0$,[6] en otros términos, toda vez que sea nula la participación acumulada en la variable, correspondiente a una proporción acumulada de observaciones.

Luego:

$$d_i = P_i - Q_i = P_i = i/n$$

ya que $Q_i = 0$

Las diferencias $d_i$ siempre asumirán valores dentro del intervalo

$$0 \leq d_i \leq \frac{i}{n}$$

Ahora bien, tendremos tantos valores $d_i$ como observaciones haya, como $i = 1,2,\ldots,n$, habrá $d_1, d_2,\ldots, d_n$ discrepancias, debe observarse que la n-ésima no contribuye a la desigualdad porque siempre es igual a cero: $d_n = P_n - Q_n = 1 - 1 = 0$. Como nuestro interés se centra en la generación de *una* medida global, procederemos a construirla agregando las discrepancias $d_i$, es decir, sumando los aportes que realiza cada punto a la concentración. Como hemos ordenado las observaciones de menor a mayor valor en la variable, en todos los casos excepto en el de equidistribución se cumplirá que $P_i > Q_i$, lo que implica que las discrepancias serán positivas, por lo tanto su suma:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} d_i = \sum_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_i)} \qquad (2.8)$$

resultará siempre mayor en la medida que mayor sea la concentración y menor en caso contrario. Esta suma se extiende hasta (n−1) porque como habíamos visto, las últimas frecuencias acumuladas no agregan nada a la desigualdad.

El valor mínimo de esta suma será cero cuando cada $P_i = Q_i$, es decir, en el caso de equidistribución:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i = \sum_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (P_i - P_i) = 0$$

El valor máximo lo alcanzará cuando el total de la variable se concentre en una sola observación (la última, ya que los datos se han ordenado de menor a mayor). En esta situación tendremos que:

[6] $Q_i$ podría asumir el valor cero si se cumple que:

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_{i-1} = 0$$

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{n-1} = 0$$

y el valor máximo de la suma sería:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i = \sum_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_i) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i$$

Con el propósito de limitar el recorrido de la expresión (2.8) al intervalo definido por los valores 0 y 1, la dividimos entre su valor máximo:

$$\boxed{G = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} P_i}} \qquad (2.9)$$

Esta relación se conoce con el nombre de índice de Gini. Su valor mínimo es cero y se alcanza siempre que para todo *i* $P_i = Q_i$, en otros términos, este coeficiente es nulo cuando la variable se distribuye democráticamente entre todas las unidades. Su valor máximo es ***uno*** y se llega a él cuando $Q_1 = Q_2 = \dots Q_{n-1} = 0$, es decir, G será igual a la unidad si el valor total de la variable le corresponde sólo a una de las observaciones.

Gini nos ofrece dos maneras de interpretar su "razón de concentración". Una de carácter aritmeticoestadístico y otra geométrica. Veamos la primera de estas interpretaciones. La conceptualización de Gini define, en primer lugar, el índice de diferencia media que "se basa no ya sobre las diferencias de los distintos casos respecto a su promedio o mediana, sino sobre las diferencias que se pueden establecer entre las cantidades observadas. Dadas *n* cantidades, cada una de éstas puede ser puesta en relación con las otras (n−1), obteniendo de este modo n(n−1) diferencias posibles".[7]

El promedio de estas diferencias origina el índice de variabilidad "diferencia media" que se simboliza por $\delta$ y se obtiene a través de:

$$\boxed{\delta = \frac{\sum_{i,j=1}^{n(n-1)} |X_i - X_j|}{n(n-1)}, \quad i \neq j} \qquad (2.10)$$

[7] Gini, Corrado, *Curso de Estadística, Editorial Labor,* Barcelona, 1935. Pág. 163.

Esta expresión puede interpretarse como "el valor probable que obtendríamos si escogiéramos al azar dos cantidades entre las *n* y realizáramos su diferencia, o dicho de otro modo, el valor medio de todas las diferencias que obtendríamos escogiendo al azar los dos términos de cada una"[8].

A continuación Gini establece que el coeficiente de diferencia media se relaciona con el índice de concentración a través de[9]:

$$G = \frac{\delta}{2\bar{X}} \tag{2.11}$$

Al reemplazar (2.10) en (2.11) obtenemos:

$$G = \sum_{i,j=1}^{n(n-1)} \frac{|X_i - X_j|}{2\bar{X}\, n(n-1)}, \quad i \neq j \tag{2.12}$$

De acuerdo con (2.12) este índice de desigualdad puede conceptualizarse como el promedio de las comparaciones interunidades $(X_i - X_j)$ corregido por el efecto escala. Si la variable fuese el nivel de ingreso personal entonces el índice estaría reflejando un promedio de todas las comparaciones posibles entre los ingresos de las distintas personas.

Esta manera de entender el coeficiente de Gini, es coherente con aquellas medidas que surgen del criterio de "diferencia" entre las unidades, y podría incorporarse a la misma familia del rango relativo. Pero hemos visto que también puede ser justificado como desviación respecto a la norma democrática. En otros términos, el índice de concentración de Gini se interpreta en cualquiera de estos dos sentidos. La opción que se tome en definitiva dependerá de los propósitos de la investigación.

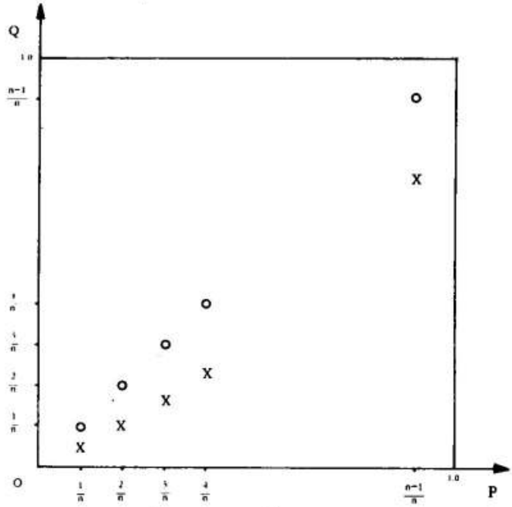
La interpretación geométrica del índice de desigualdad proviene de la gráfica en que se representan las líneas idealizadas de equidistribución y de Lorenz. Ya sabemos que en el diagrama de concentración tendremos representados en conjunto de puntos cuyas coordenadas son las frecuencias relativas acumuladas de las observaciones $(P_i)$ y de la variable $(Q_i)$.

Los círculos se pueden unir por una línea de 45° que es la recta de equidistribución y las cruces generan la curva de Lorenz. La superficie delimitada por ambas líneas es usualmente conocida con el nombre de área de

[8] Gini, pág. 163.
[9] Gini, pág. 177.

*Gráfica 2.3.*

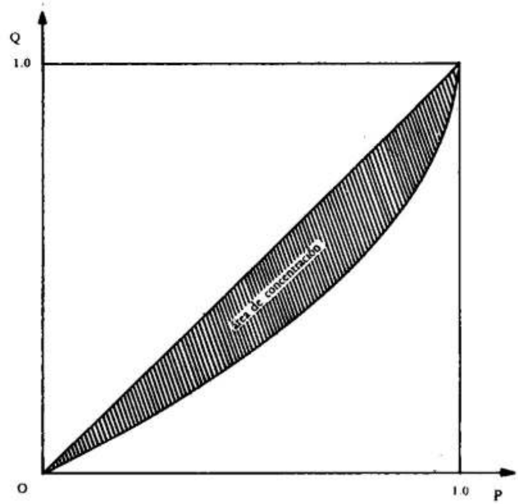
*Puntos para construir el diagrama de concentración*




concentración y guarda una relación estrecha con las discrepancias $d_i$ a partir de las cuales se construye el índice de Gini.

*Gráfica 2.4.*

*Area de concentración*

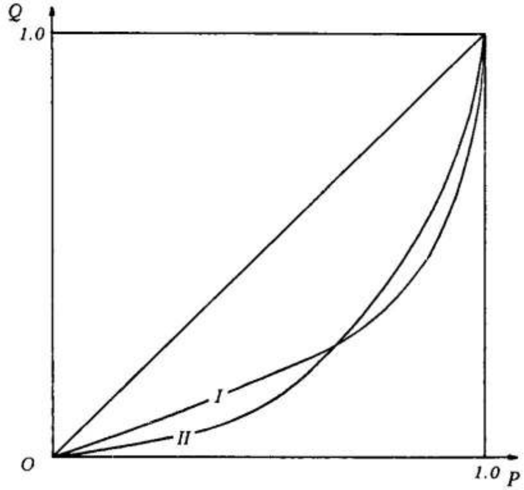


En efecto, si el número total de casos es suficientemente grande $\sum_{i=1}^{n-1} |P_i - Q_i|$ será más o menos equivalente al área de concentración, y $\sum_{i=1}^{n-1} P_i$ representará aproximadamente el área de cada uno de los dos triángulos en que la línea de equidistribución divide al cuadrado de lado uno. El triángulo inferior puede verse como el área de máxima concentración ya que representa el caso en que $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_{n-1} = 0$. En consecuencia, el índice de desigualdad de Gini puede interpretarse, desde el punto de vista geométrico, como la proporción entre las áreas de concentración y de máxima desigualdad.

La interpretación geométrica del índice de Gini nos permite apreciar con claridad la diferencia entre el grado de concentración y su forma. A igual nivel de desigualdad puede corresponder más de una forma. En la siguiente gráfica se muestran dos diferentes curvas de Lorenz que guardan igual relación entre el área de concentración y el área máxima.

*Gráfica 2.5.*

*Dos curvas con el mismo grado pero diferente forma de la concentración*




Al comparar las curvas de Lorenz I y II, vemos que en la distribución I las unidades ubicadas en los niveles más bajos de la variable se encuentran menos desfavorecidas que en la repartición representada por la curva II y que las observaciones situadas en las posiciones superiores de I se encuentran relativamente menos favorecidas que las correspondientes a la distribución II[10]. La mejor posición comparativa de las unidades menos favorecidas de la distribución I se contrarresta por la ubicación menos ventajosa de las observaciones en los rangos altos de la curva I con respecto a la II, de manera que la medida global de desigualdad arroja el mismo resultado.

La distinción entre el grado de la concentración y su forma, puede llegar a tener relevancia en estudios empíricos. Supongamos que se realiza un análisis de la desigualdad en la distribución del ingreso personal y que se cuenta con información para dos puntos en el tiempo. Al calcular el coeficiente de concentración en ambos casos, bien puede acontecer que no haya habido alteraciones en el grado de concentración, pero sí en su forma. Se podría haber pasado, por ejemplo, desde una distribución que originó la curva I a una representada por II, en cuyo caso es evidente que hubo un deterioro relativo de los niveles bajos de ingreso y una mejora en los altos. Si el ingreso se ha manteniendo constante podríamos afirmar que aun cuando la concentración global no se haya modificado, hubo transferencias relativas de ingreso desde los sectores de más bajos niveles hacia los más altos: *El grado de desigualdad se ha mantenido en los dos instantes pero la forma de la concentración es diferente*.

La distinción entre el nivel y la forma de la desigualdad es paralela a la conveniencia de incluir en el estudio descriptivo de una distribución no sólo una medida de tendencia central sino también algún indicador de dispersión.

Según hemos visto, hay un camino geométrico y otro numérico para analizar el grado de desigualdad existente en una distribución de frecuencias. Análogamente, el procedimiento gráfico para estudiar la forma de la concentración tiene correspondencia con el examen de los componentes numéricos del índice de Gini. Para ilustrar este camino alternativo supongamos que disponemos de dos conjuntos de datos, ambos ordenados según la variable de menor a mayor y de tamaño cinco.

*Tabla 2.9. Distribución de frecuencias del conjunto de datos I*

| No. de orden (*i*) | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $P_i - Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.20 | 0.00 | 0.20 | 0.00 | 0.20 |
| 2 | 0.29 | 0.00 | 0.40 | 0.00 | 0.40 |
| 3 | 0.20 | 0.15 | 0.60 | 0.15 | 0.45 |
| 4 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.35 | 0.45 |
| 5 | 0.20 | 0.65 | 2.00 | — | 1.5 |

[10] Esto no debe interpretarse como que las observaciones pobres de I tienen una mayor cantidad de la variable, en términos absolutos, que las de II.

A partir de la cuarta columna de la tabla, se presenta la información que se requiere directamente para el cálculo del coeficiente de Gini; como las sumas se extienden sobre (n−1) términos, sólo presentamos cuatro líneas con la información de frecuencias y en la quinta hemos incluido las sumas que constituyen el valor del índice.

En el caso del conjunto de datos II tenemos:

*Tabla 2.10. Distribución de frecuencias del conjunto de datos II*

| No. de orden (i) | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $P_i - Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.5 | 0.15 |
| 2 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 | 0.30 |
| 3 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 | 0.45 |
| 4 | 0.20 | 0.05 | 0.80 | 0.20 | 0.60 |
| 5 | 0.20 | 0.80 | 2.00 | | 1.50 |

En ambos casos el grado de concentración calculado con la fórmula (2.9) es el mismo.

$$G = \frac{1.50}{2.00} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Pero, la forma de la concentración es distinta:

*Tabla 2.11. Discrepancias entre dos frecuencias relativas acumuladas de las observaciones y la variable*

| I | II |
|---|---|
| $d_i = P_i - Q_i$ | $d_i = P_i - Q_i$ |
| 0.20 | 0.15 |
| 0.40 | 0.30 |
| 0.45 | 0.45 |
| 0.45 | 0.60 |
| 1.50 | 1.50 |

El aporte a la desigual repartición del pastel que realizan las observaciones menos favorecidas es mayor en I que en II. Esto quiere decir que esas unidades tienen una participación menor en el total de la variable que las correspondientes del conjunto de datos II. Esto se confirma rápidamente al observar los valores de $q_1$ y $q_2$ en las tablas 2.9 y 2.10. La mayor contribución relativa a la desigualdad de las observaciones privilegiadas de II con respecto a I se debe a su mayor participación en la variable, que puede apreciarse al comparar los valores de $q_5$. En este ejemplo se presenta una situación en que el número de observaciones y los coeficientes de Gini son iguales en ambas distribuciones. Consideremos ahora dos conjuntos de datos con la misma cantidad de casos pero con reparticiones de la variable que originan valores diferentes en los coeficientes:

*Tabla 2.12. Dos distribuciones de frecuencias con el mismo número de observaciones y diferentes valores del índice de concentración*

(a) Conjunto de datos I.

| $X_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $P_i-Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 | 0.15 |
| 10 | 0.20 | 0.10 | 0.40 | 0.15 | 0.25 |
| 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.35 | 0.25 |
| 30 | 0.20 | 0.30 | 0.80 | 0.65 | 0.15 |
| 35 | 0.20 | 0.35 | 2.00 | | 0.80 |

$$G = \frac{0.80}{2.00} = 0.400$$

(b) Conjunto de datos II.

| $X_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $P_i-Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.20 | 0.025 | 0.20 | 0.025 | 0.175 |
| 10 | 0.20 | 0.050 | 0.40 | 0.075 | 0.325 |
| 20 | 0.20 | 0.100 | 0.60 | 0.175 | 0.425 |
| 80 | 0.20 | 0.400 | 0.80 | 0.575 | 0.225 |
| 85 | 0.30 | 0.425 | 2.00 | | 1.150 |

$$G = \frac{1.150}{2.000} = 0.575$$

Como las dos distribuciones se han construido de manera que los $p_i$ sean idénticos, es posible analizar la forma de la concentración sobre la base de las discrepancias ($P_j-Q_i$). El mayor nivel de desigualdad que se aprecia en la distribución de frecuencias (*b*) con respecto a la (*a*) es producto del mayor aporte realizado por todas las observaciones: una pérdida en la posición relativa de las unidades menos favorecidas y mayor ventaja de las más beneficiadas.

El hecho de que la concentración sea mayor en II que en I no necesariamente significa que los valores de las discrepancias entre las correspondientes frecuencias acumuladas deban ser mayores en todos los puntos. La forma de la curva de Lorenz en uno y otro conjunto de datos no se capta a través del coeficiente de Gini sino que es necesario comparar los valores de ($P_i-Q_i$).

Los dos casos considerados nos permiten arribar a la conclusión parcial de que *el análisis de los valores de las diferencias* ($P_i - Q_i$) *es el equivalente numérico a examinar la curva de Lorenz para estudiar la forma de la concentración.*

Desde el punto de vista aplicado es conveniente establecer que en el estudio de la desigualdad existente en la distribución de una variable, es aconsejable no sólo medir el grado de la concentración sino que, en ocasiones, resulta de interés estudiar su forma ya que puede revelar movimientos opuestos que quedan ocultos en el índice global. Esto es tanto más ajustado a las condiciones en que se desenvuelven los estudios empíricos cuanto que es corriente que al comparar la desigualdad en dos conjuntos de datos, no sólo se produzcan alteraciones en la forma de la concentración sino también en su nivel. Limitarnos sólo al uso del índice de Gini puede significar que pasamos por alto transferencias encontradas entre las observaciones las que, al compensarse total o parcialmente, no quedan reflejadas en la medida global.

En el apéndice 1 se demuestra, que si bien el índice de concentración de Gini cumple con la condición Pigou-Dalton, resulta insensible a redistribuciones que se lleven a cabo entre observaciones que se encuentran a igual distancia en la ordenación. Por ejemplo, el descenso en el nivel de la concentración será igual si se transfiere la misma cantidad de la novena a la cuarta unidad, que de la decimoquinta a la décima. Esto quiere decir que el coeficiente no registra diferencias en cuanto al nivel en que se realiza la redistribución; sino que el cambio en su valor se relaciona sólo con la distancia entre las unidades involucradas.

## 2.7 *Medidas derivadas de la gráfica de concentración*

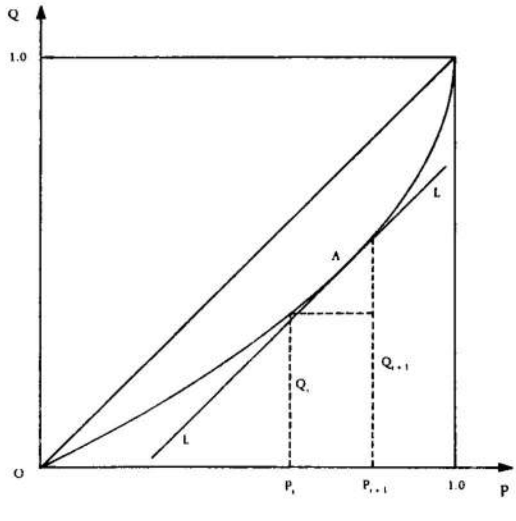
Al analizar la importancia de estudiar la forma de la distribución, quedó claro que el sentido de una contribución a la desigualdad es distinto según que las observaciones se ubiquen en los rangos inferiores o en los superiores. En efecto, el aporte a la concentración de los miembros pobres del conglomerado, debe entenderse como una baja participación en la distribución del pastel, mientras que la contribución de las observaciones ubicadas en las posiciones altas corresponde al hecho de quedarse con una tajada grande. Es decir, en el caso de las unidades menos favorecidas se trataría de un aporte que denota lo poco que tienen, en tanto que en el de las más favorecidas lo mucho que les toca. Si la variable que se distribuye fuese el ingreso personal, las contribuciones a la desigualdad deberían entenderse como causadas por la pobreza de unos en relación a la riqueza de otros. Si se tratase de la distribución del capital entre un conjunto de empresas, los aportes ($P_i - Q_i$) estarían dados por la carencia de capital de las ubicadas en los rangos inferiores con respecto a la abundancia relativa que tendrían las situadas en los superiores.

Como sabemos, al distribuir un total entre *n* unidades se genera una repartición en que el grado de equidad es alto o bajo, ***independientemente del tamaño del total.*** Es decir, en la repartición va implícita la idea de que a algunas unidades les puede tocar una mayor o menor parte del pastel que a otras. Pero ese mayor y ese menor deben medirse respecto a un criterio, que en nuestro caso es la norma de igualdad democrática. Ahora bien, planteado el problema en estos términos ¿cómo podemos saber cuáles son las observaciones favorecidas y cuáles las perjudicadas respecto a una repartición de la variable de acuerdo con el principio de igualdad democrática?

### 2.7.1 *Razón de ventaja*

Para responder a esta pregunta recurramos a la siguiente gráfica:

*Gráfica 2.6.*




La recta LL es paralela a la línea de equidistribución (razón por la cual su pendiente será igual a la unidad) y tangente a la curva de Lorenz, de modo que determina aquel punto de ésta (que denotaremos como A) donde la variable se distribuye de acuerdo con la norma democrática. Sabemos que la forma de la curva de Lorenz deriva de la ordenación previa a que se someten las observaciones y cualquier tangente que se trace tendrá una inclinación mayor o menor que LL según se encuentre, respectivamente, a la derecha o a la izquierda de A. En otros términos, todas las unidades ubicadas a la izquierda de A formarán el conjunto de las desfavorecidas y en el interior de él las situadas más al extremo izquierdo tendrán una situación relativa peor y contribuirán más a la desigualdad. En tanto que las ubicadas a la derecha de A serán las beneficiadas por la repartición y en tanto más se alejen hacia la derecha más influirán en la concentración.

La pendiente en un punto *i* cualquiera se puede aproximar a través de:

$$(2.13) \qquad \boxed{R_v = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{q_i}{p_i}}$$

Esta relación se conoce con el nombre de razón de ventaja y corresponde a la relación entre la proporción de la variable ($q_i$) que posee la unidad *i* y la proporción que guarda respecto al total de observaciones ($p_i = 1/n$). En el punto A, de distribución equitativa, $p_i = q_i$ y por tanto la razón de ventaja será igual a uno.

Para ejemplificar el uso de esta medida tomemos los conjuntos de datos de las tablas No. 2.8 y 2.9:

*Tabla 2.13. Razón de ventaja en el conjunto de datos I*

| $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ |
|---|---|---|
| 0.20 | 0.00 | 0.00 |
| 0.20 | 0.00 | 0.00 |
| 0.20 | 0.15 | 0.75 |
| 0.20 | 0.20 | 1.00 |
| 0.20 | 0.65 | 3.25 |

Estos datos nos indican que el grupo de los desfavorecidos estaría formado por las tres primeras observaciones, y el de los beneficiados únicamente por la quinta unidad. La cuarta estaría justamente en el punto de equilibrio. Ha recibido, de acuerdo con la norma democrática, exactamente la parte que le corresponde del total de la variable.

*Tabla 2.14. Razón de ventaja en el conjunto de datos II*

| $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ |
|---|---|---|
| 0.20 | 0.05 | 0.25 |
| 0.20 | 0.05 | 0.25 |
| 0.20 | 0.05 | 0.25 |
| 0.20 | 0.05 | 0.25 |
| 0.20 | 0.80 | 4.00 |

En este caso las cuatro primeras observaciones, (aquéllas cuyas razones de ventaja son menores que la unidad), forman el grupo de las perjudicadas, mientras que la quinta es la única que ha ganado en esta forma de realizarse la repartición.

### 2.7.2. *Coeficientes de proporciones equitativas*

Hemos visto que una vez ordenados los datos, la razón de ventaja nos permite catalogar cada observación como perjudicada o beneficiada. Sabemos que en la curva de Lorenz existe un punto A en que la pendiente (y por tanto la razón de ventaja) es igual a *1*, y divide a los datos en dos grupos, el de los desfavorecidos y el de los beneficiados. En la distribución de frecuencias puede o no existir una observación cuya razón de ventaja sea 1, pero siempre será posible localizar el número de orden (r) de la última observación perjudicada. Así, por ejemplo, en el conjunto de datos I (ver tabla 2.13) $r = 3$ y además la cuarta observación se ubica en el punto A: $R_v = 1$. En la distribución II (ver tabla 2.14) $r = 4$ y no hay ninguna observación situada en A.

El coeficiente de proporciones equitativas ($R_e$) se define[11] como aquella proporción de las observaciones que integran el conjunto de las desfavorecidas en la repartición. En términos algebraicos:

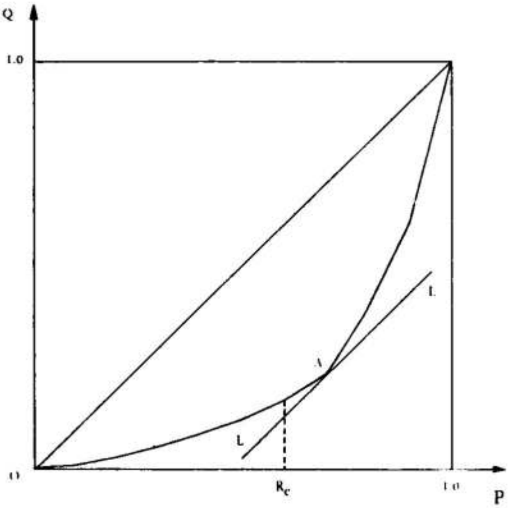
(2.14)
$$\boxed{R_e = \sum_{i=1}^{r} p_i = P_r}$$

en que se supone que las observaciones se han ordenado de menor a mayoı de manera que, $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \ldots \leq q_n$.

La medida $R_e$ se ubica en el diagrama de concentración como un valor de abscisa que corresponde a la primera observación localizada inmediatamente a la izquierda de A.

[11] Hayward Alker, *El uso de las matemáticas en el análisis político*. Amorrortu Editores, Buenos Aires, Argentina, 1975, pág. 59.

*Gráfica 2.7.*
*Coeficiente de proporciones equitativas*




La aplicación de este coeficiente al conjunto de datos I entrega por resultado:

$$R_e = 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.6 = P_3$$

y en el caso de conjunto II:

$$R_e = 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.8 = P_4$$

La proporción de unidades perjudicadas es mayor en el segundo ejemplo que en el primero.

### 2.7.3. *Coeficiente de mayoría mínima*

Además de obtener la información que nos entregan la razón de ventaja y el coeficiente de proporciones equitativas, podríamos estar interesados en saber cuál es el porcentaje de observaciones que posee por lo menos una cierta proporción de la variable (Q'). En así como se origina el coeficiente de mayoría mínima:

$$\boxed{M_m = \sum_{i=k}^{n} p_i = 1 - P_{k-1}} \qquad (2.15)$$

donde *k* es el número de orden correspondiente a la observación a partir de la cual se cumple que la frecuencia relativa en la variable es como mínimo la proporción previamente fijada.

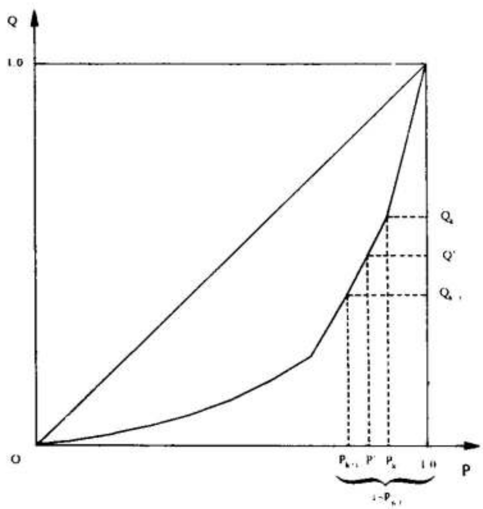
Supongamos que imponemos como criterio el control de por lo menos un 50% del valor de la variable, entonces *k* separará la distribución en dos grupos, el que tiene menos del 50% del valor total de la variable y el que tiene el control sobre el 50% o más.

La fórmula que hemos propuesto para el cálculo de $M_m$ es totalmente general. El valor criterio Q' se refleja directamente sobre el subíndice inferior de la suma.

Desde el punto de vista gráfico, el coeficiente de mayoría mínima se determina como el complemento del valor de abscisa correspondiente a la ordenada $Q_k$. Nótese que a Q' puede no corresponderle una observación.

*Gráfica 2.8.*

*Coeficiente de mayoría mínima*



Numéricamente es simple encontrar su valor. En efecto, para el conjunto de datos I, de la tabla (2.13) tenemos que:

*Tabla 2.15. Cálculo del coeficiente de mayoría mínima*

| $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|
| 0.20 | 0.00 | 0.20 | 0.00 |
| 0.20 | 0.00 | 0.40 | 0.00 |
| 0.20 | 0.15 | 0.60 | 0.15 |
| 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.35 |
| 0.20 | 0.65 | 1.00 | 1.00 |

Es evidente que $M_m = 1-0.80 = 0.20$. Es decir, el 20% de las observaciones controla por lo menos el 50% del total. El mismo resultado se obtiene al aplicar la fórmula al segundo conjunto de datos.

## 2.8. *Algunas consideraciones adicionales sobre el índice de concentración de Gini*

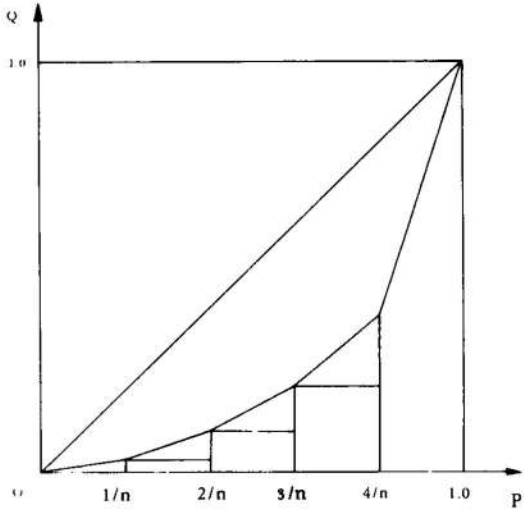
En los desarrollos que presentamos en secciones anteriores, hemos centrado nuestro interés sobre las interpretaciones que se pueden asociar al índice de Gini así como en la manera adecuada de calcularlo cuando se dispone de datos no agrupados.

Después de exponer su interpretación algebraica establecimos que desde el punto de vista geométrico se puede visualizar como la relación entre el área de concentración y la superficie del triángulo isósceles inferior que representa el área de máxima concentración.

### 2.8.1. *Una manera de calcular el coeficiente de Gini*

Sobre la base de la concepción geométrica se puede llegar a establecer otro modo de calcular el índice de Gini. Con este propósito, consideraremos la siguiente gráfica:

*Gráfica 2.9.*




Si llamamos B al área que se encuentra bajo la curva de Lorenz, de acuerdo con la definición geométrica de Gini tendremos:

$$G' = \frac{1/2 - B}{1/2} = 1 - 2B = 1 - 2\,[1 - (1 - B)]$$

La expresión algebraica correspondiente al área (1-B) se encuentra en el apéndice número 1 y su reemplazo en la fórmula anterior origina:

(2.16) $$\boxed{G' = \frac{2}{n}[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n] - \frac{n+1}{n}}$$

En el mismo apéndice se demuestra que esta manera de calcular G' no coincide exactamente con el valor que se habría obtenido al aplicar la fórmula (2.9) y que ambas expresiones se encuentran relacionadas a través de:

(2.17) $$\boxed{G' = \left[\frac{n-1}{n}\right] G = \left[1 - \frac{1}{n}\right] G}$$

como $\frac{n-1}{n} < 1$, entonces

$$G' < G$$

Es decir, el cálculo del índice de Gini a través de áreas siempre subestimará el valor de G obtenido sobre base algebraica. Por otra parte, la igualdad

(2.17) nos dice que el grado de subestimación guarda una relación inversa con el número de observaciones: a mayor número de observaciones menor sesgo. En el límite, es decir, cuando el número de casos tiende a infinito, G' tiende a asumir el mismo valor que G.

Aplicaremos al conjunto de datos de la tabla (2.10) esta nueva manera de calcular el índice de Gini y aprovecharemos la oportunidad para verificar numéricamente la validez de la equivalencia que se ha establecido entre ambos procedimientos. Debe recordarse que ya habíamos obtenido un G = 0.75.

Ahora bien, de acuerdo con la fórmula para G' tenemos que:

$$G' = \frac{2}{n}[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + 5q_5] - \frac{(n+1)}{n}$$

Sustituyendo:

$$G' = \frac{2}{5}[0.05 + 2x0.05 + 3x0.05 + 4x0.05 + 5x0.80] - \frac{6}{5}$$

llegamos a:

$$G' = 0.6$$

De acuerdo con (2.17), al reemplazar G = 0.75 debería obtenerse:

$$G' = \frac{4}{5} x\, 0.75$$

$$G' = 0.6$$

Resultado que comprueba la ecuación que hemos establecido y nos muestra el grado de subestimación en que se incurre en este caso particular.

El hecho de que G' tienda a asumir el valor de G cuando el número de observaciones es muy grande (estrictamente cuando tiende a infinito) nos permite aplicar la fórmula que se deriva del cálculo de áreas en casi cualquier situación práctica sin incurrir en subestimaciones demasiado graves. Pero, cuando la cantidad total de casos es reducida, el sesgo resultará demasiado grande lo que no hace aconsejable utilizar G'. En esta situación se debería llevar a cabo el cálculo a través de G.

### 2.8.2. *Coeficiente pseudo Gini*

Hemos enfatizado que tanto la gráfica de concentración como la curva de Lorenz y el índice de Gini se construyen sobre el supuesto de que los datos han sido previamente ordenados. ¿Qué ocurre si no cumplimos con este requisito?

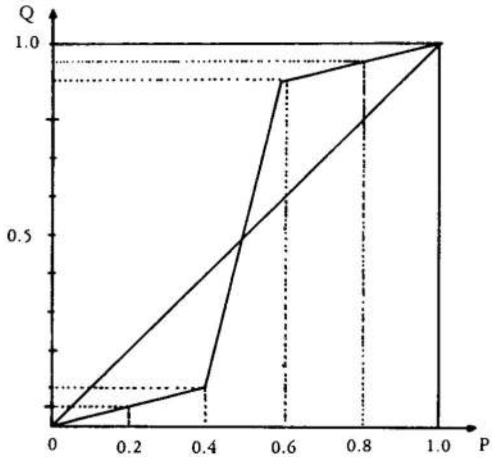
Supongamos que las cinco observaciones que nos han servido como ilustración en el parágrafo anterior se presentan de la manera siguiente:

*Tabla 2.16. Distribución de frecuencias con datos no ordenados*

| $p_i$ | $q_i$ | $\bar{P}_i$ | $\bar{Q}$ | $\bar{P}_i - \bar{Q}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 | 0.15 |
| 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 | 0.30 |
| 0.20 | 0.80 | 0.60 | 0.90 | −0.30 |
| 0.20 | 0.05 | 0.80 | 0.95 | −.15 |
| 0.20 | 0.05 | 1.00 | 1.00 | 0.00 |

El diagrama de concentración correspondiente a esta tabla es:

*Gráfica 2.10*
*Diagrama de concentración para observaciones no ordenadas*




Como se puede observar la no ordenación de las observaciones trae como consecuencia que una parte de la poligonal pase por encima de la línea de equidistribución, cuestión que no acontece si los datos han sido previamente jerarquizados.

Así como se genera una poligonal pseudo Lorenz podríamos definir un coeficiente de concentración pseudo Gini. Para ello simbolizaremos por $\bar{B}$ el área ubicada bajo la poligonal pseudo Lorenz y apliquemos la fórmula de Gini basada en áreas (G'). Bajo esta circunstancia el coeficiente pseudo Gini ($\bar{G}$) será:

$$\bar{G} = \frac{2}{n}\left(\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 + \dots + n\bar{q}_n\right) - \frac{(n+1)}{n}$$

Como los valores $\bar{q}_i$ no se encuentran ordenados serían diferentes a los de $q_i$. Para comparar el valor de $\bar{G}$ con el de G', bastará con observar si la combinación lineal de $q_i$ que define a G' es mayor, igual o menor que aquella contenida en $\bar{G}$, ya que todos los demás elementos de ambas fórmulas son iguales. Por simple inspección es posible afirmar que:

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n \geqq \bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 + 3\bar{q}_3 + \ldots + n\bar{q}_n$$

ya que en la expresión de la izquierda se les otorga a los valores más altos una ponderación mayor que a los menores. Es decir, los pesos se asignan de modo que hacen máxima la suma. Ello a pesar de que, para observaciones particulares, puede ocurrir que el valor de la izquierda sea menor que el correspondiente en la derecha.

La inecuación nos permite afirmar que siempre:

$$G' \geqq \bar{G}$$

y como $G \geqq G'$, entonces $G \geqq G' \geqq \bar{G}$

Expresión que nos dice que si calculamos un coeficiente de Gini sobre la base de datos no ordenados, subestimaremos el grado de desigualdad. Puesto de otro modo: el coeficiente pseudo Gini siempre será menor que el coeficiente de Gini, de modo que la no jerarquización de las observaciones conduce a un error E:

$$E = G' - \bar{G}$$

que es siempre mayor o igual que cero.

$$E \geqq 0$$

Examinemos numéricamente las características del coeficiente pseudo Gini y su relación con el índice de concentración de Gini. Al emplear G para medir la desigualdad en la tabla 2.16 llegamos a:

$$\bar{G} = 0$$

Sabemos que $G = 0.75$, luego se cumple que $\bar{G} < G$. El cálculo también se puede llevar a cabo con G' cuyo valor $G' = 0.60$ se obtuvo en el parágrafo anterior.

En este ejemplo numérico se verifica que:

$$G > G' > \bar{G}$$

ya que:

$$0.75 > 0.60 > 0$$

### 2.8.3. *Efecto del orden de las observaciones sobre el índice de Gini*

A continuación veremos lo que acontece al ordenar los datos de mayor a menor ($q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$) en lugar de hacerlo a la inversa ($q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n$), tal como lo hemos hecho en todos los desarrollos que presentamos hasta ahora. El coeficiente de Gini resultante (G) asumirá el valor de G pero con signo opuesto[12], debido a que la poligonal de Lorenz se ubicará siempre por encima de la línea de equidistribución y por lo tanto la diferencia entre $P_i$ y $Q_i$ será siempre negativa.

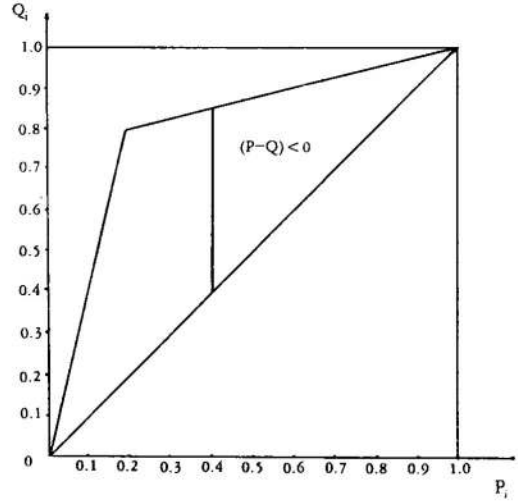
Como ilustración examinemos lo que acontece numéricamente al ordenar las observaciones de la tabla 2.10 de mayor a menor.

*Tabla 2.17. Distribución de frecuencias con datos ordenados de mayor a menor*

| $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $P_i - Q_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.20 | 0.80 | 0.20 | 0.80 | −0.60 |
| 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.85 | −0.45 |
| 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.90 | −0.30 |
| 0.20 | 0.05 | 0.80 | 0.95 | −0.15 |
| 0.20 | 0.05 | 2.00 | | −1.50 |

[12] Ver apéndice 1.

*Gráfica 2.11.*
*Diagrama de concentración correspondiente a observaciones ordenadas de mayor a menor*




De donde:

$$G = -\frac{1.50}{2.00} = -0.75$$ [13]

Este ejemplo nos sirve para ilustrar el hecho de que una inversión en la jerarquía de las observaciones cambia el signo del índice de concentración de Gini manteniéndose su valor absoluto. Además, la gráfica de concentración de Gini nos permite visualizar la razón básica que explica la alteración en el signo.

## 2.9. *Coeficiente* $R_M$

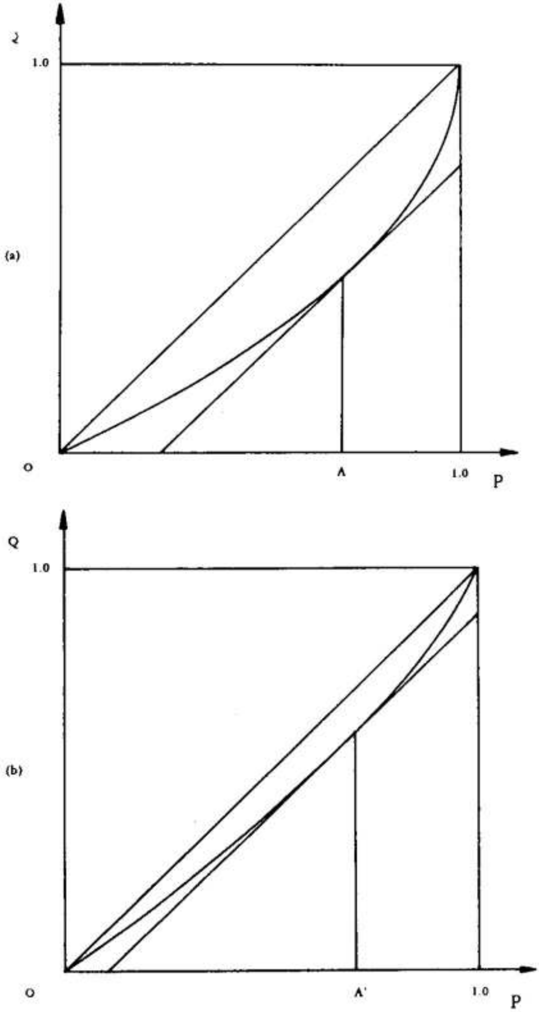
La información que nos entrega la pendiente de la curva (o poligonal) de Lorenz origina: (i) la razón de ventaja ($R_v$), que nos permite dividir la distribución en el grupo de los perjudicados y los beneficiados; (ii) el coeficiente de proporciones equitativas ($R_e$), que nos señala el tamaño relativo del grupo de los no beneficiados. Además, y también como una medida derivada del diagrama de concentración, tenemos la proporción mínima de observaciones que controlan una mayoría del valor de variable ($M_m$).

[13] De mismo modo se puede comprobar que $G' = -0.60$ en caso de cambio en el orden.

Los coeficientes $R_e$ y $M_m$ se expresan geométricamente en el eje de abscisas, es decir, hacen uso preferente de la información referida a la proporción o porcentaje de observaciones. A continuación seguiremos un derrotero diferente; nos preguntaremos más bien acerca de la posibilidad de utilizar la razón de ventaja para proponer una manera alternativa de medir el grado de concentración.

*Gráfica 2.12.*

*Coeficiente* $R_M$



La idea que lleva a explorar esta vertiente salta a la vista al examinar los dos diagramas. En el (*a*), donde se representa una desigualdad mayor, los valores de la pendiente ($q_i$ / $p_i$) son pequeños para los valores bajos de *P* y crecen rápidamente a la derecha del punto A. En tanto que en el diagrama (b), en el que el nivel de concentración es menor, se mueven más suavemente a lo largo de toda la curva. En el caso límite de equidistribución la pendiente es constante e igual a *uno* en cualquier punto. El vínculo existente entre el grado de desigualdad de una distribución de frecuencias y las razones de ventaja nos induce a explorar la posibilidad de usarlas como base de una medida de concentración.

La función que surge casi naturalmente es:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i / p_i$$

sin embargo, no nos es útil por cuanto esta suma es independiente del grado de desigualdad de la distribución:

$$\Sigma\, q_i / p_i = \Sigma\,( \frac{q_i}{\frac{1}{n}} ) = n\, \Sigma\, q_i = n$$

la suma de las razones de ventaja es siempre constante e igual al número total de observaciones; en otros términos, la suma de las pendientes es siempre igual a n, sea cual sea el grado de desigualdad existente en la distribución.

Este resultado no debería extrañar por cuanto del examen de los diagramas lo que resalta es más bien la manera en que se compone el valor total *n*. Decíamos que cuando la concentración es mayor, a valores bajos de *P* correspondían valores más pequeños de $q_i$ / $p_i$ que en los casos de una distribución más equitativa, y que en los valores altos de P se producía la situación inversa. Luego, para una curva de Lorenz dada, los valores pequeños de las pendientes en algunos puntos implican valores altos en otros, de manera que la suma es siempre una constante. Esta característica invalida la posibilidad de proponer la suma como medida de desigualdad, lo que nos conduce a examinar otras funciones de las razones ventajas.

Una vía posible de solución a este problema, podría consistir en determinar un conjunto de ponderaciones que aplicadas sobre las razones de ventaja quiebre la característica de suma constante. Del examen de los diagramas (a) y (b) de la gráfica 2.12, se puede percibir que cuando las pendientes son menores que la unidad, a mayor concentración corresponden valores más bajos de $q_i$. Lo inverso se cumple cuando las pendientes son mayores que uno. En consecuencia, si ponderamos cada razón de ventaja por su correspondiente $q_i$, habremos asignado un peso pequeño a aquellas observaciones que se encuentran en desventaja y uno grande a la relación $q_i$ / $p_i$ de las unidades beneficiadas. La medida de desigualdad que resulta de la aplicación de este criterio será:

$$\boxed{R_M = \sum_{i=1}^{n} q_i\,(q_i / p_i)} \tag{2.18}$$

A continuación procederemos a estudiar las características y bondades de la medida. Examinaremos, en primer lugar, los límites entre los cuales puede variar el indicador propuesto.

El desarrollo de (2.18) nos dice que:

$$R_M = q_1(q_1 / p_1) + q_2(q_2 / p_2) + \dots + q_i(q_i / p_i) + \dots + q_n (q_n / p_n)$$

En el caso en que la unidad genérica *i* se haya apropiado del total de la variable tendremos que $q_i = 1$ y los restantes valores de q todos iguales a cero:

$$R_M = 0 + 0 + \dots + 1(1 /_{1/n}) + \dots + 0,$$

luego,

$$R_M = n$$

Esto quiere decir que cuando hay concentración total, $R_M$ asume el valor ***n***.

Al distribuirse equitativamente la variable entre todas las unidades, tendremos que $q_i = p_i = \frac{1}{n}$ para cualquiera que sea la observación *i*, lo que implica que:

$$R_M = \Sigma q_i(q_i / p_i) = (1 / n)(\frac{1 / n}{1 / n}) + (1 / n)(\frac{1 / n}{1 / n}) + \dots + (1 / n)(\frac{1 / n}{1 / n}) +$$

$$+ \dots + (1 / n)(\frac{1 / n}{1 / n})$$

Por lo tanto,

$$R_M = \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^{\text{n sumandos}}$$

y

$$R_M = 1$$

En los casos en que la variable se reparte por igual entre todas las observaciones, $R_M$ alcanza la unidad como valor mínimo.

Además, esta función es creciente en el intervalo definido por *1* y *n*. En efecto, cuando la variable se distribuye equitativamente sabemos que la pendiente de la recta de Lorenz asume siempre el valor unitario. En tanto nos alejamos de una repartición equitativa de la variable habrá algunos valores de $q_i / p_i$ menores que uno, pero como la suma de todos ellos es siempre igual a *n*, necesariamente cuando ello acontezca habrá otros mayores que la unidad[14] Si a los primeros se les asigna una importancia relativa menor (a través de la ponderación $q_i$) que a los segundos, se concluye que $R_M$ siempre crecerá en tanto nos alejemos de la distribución equitativa.[15]

En resumen, $R_M$ alcanza el valor mínimo 1 en caso de distribución equitativa, llega a ser igual a *n* cuando la concentración es total y es siempre creciente en la medida que aumentan los niveles de desigualdad.

Sobre la base de estas características es fácil normalizar su recorrido al intervalo delimitado por 0 y 1:

$$\boxed{R_M^N = \frac{R_M - 1}{n - 1}} \tag{2.19}$$

$R_M^N$ es igual a cero si la variable se distribuye equitativamente entre las unidades y toma el valor 1 si una de ellas se apropia del total.

A manera de ilustración consideremos la información de la siguiente tabla en que presentamos un ejemplo de desigualdad máxima:

*Tabla 2.18.* $R_M$ *en una distribución que presenta concentración total*

| *Val.* de var. | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $q_i(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1/5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1/5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1/5 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1/5 | 1 | 5 | 5 |
| 10 | | | 5 | 5 |

Luego:

$$R_M = 5 \quad \text{y } R_M^N = \frac{5 - 1}{4} = 1$$

[14] Esto es una consecuencia de que si hay algunas unidades perjudicadas por la repartición habrá otras que serán beneficiadas.

[15] Al examinar el coeficiente $R_M$ a la luz de los criterios que deben cumplir las medidas de desigualdad, se entregará una demostración formal.

En caso de equidistribución tenemos:

*Tabla 2.19.* $R_M$ *en una distribución igualitaria*

| Val de var. | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $q_i(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1/5 | 1/5 | 1 | 1/5 |
| 2 | 1/5 | 1/5 | 1 | 1/5 |
| 2 | 1/5 | 1/5 | 1 | 1/5 |
| 2 | 1/5 | 1/5 | 1 | 1/5 |
| 2 | 1/5 | 1/5 | 1 | 1/5 |
| 10 | | | 5 | 1 |

$$R_M = 1 \quad y\ R_M^N = \frac{1-1}{4} = 0$$

Obsérvese que en ambos ejemplos $\Sigma\ (q_i / p_i)$ es igual a 5, es decir, al número total de observaciones.

Procederemos ahora a analizar el comportamiento de $R_M$ a la luz de los criterios Pigou-Dalton y de cambio relativo. Con este propósito supongamos que redistribuimos una proporción $\Delta q$ de la variable desde una unidad rica en favor de una pobre.

Es conveniente notar que la relación $q_i / p_i$ aumentará para el perceptor en lo mismo que disminuye para el emisor. Esto se puede sustentar fácilmente si consideramos que el beneficio lo obtuvo la observación *j* que después de la transferencia queda con una razón de ventaja:

$$\frac{q_j + \Delta q}{p_j} = \frac{q_j}{p_j} + \frac{\Delta q}{p_j}$$

y que la perjudicada fue una observación *k* ($X_k > X_j$) cuya nueva razón de ventaja será

$$\frac{q_k - \Delta q}{p_k} = \frac{q_k}{p_k} - \frac{\Delta q}{p_k}$$

En estas dos últimas igualdades el primer término de la derecha representa a las razones de ventaja de las unidades *j* y *k* antes de la transferencia y el segundo término la ganancia o pérdida según sea el caso. Ahora bien, como:

$$p_j = p_k = \frac{1}{n}$$

tenemos que:

$$\left|\frac{\Delta q}{p_j}\right| = \left|-\frac{\Delta q}{p_k}\right|$$

Al realizar la transferencia tendremos que:

$$R'_M = \frac{(q_j + \Delta q)(q_j + \Delta q)}{p_j} + \frac{(q_k - \Delta q)(q_k - \Delta q)}{p_k} + A$$

Donde *A* simboliza a todos los restantes términos de $R_M$ que permanecen inalterados con la transferencia. Antes de la redistribución $R_M$ era igual a:

$$R_M = q_j \frac{(q_j)}{p_j} + q_k \frac{(q_k)}{p_k} + A$$

Por lo tanto:

$$R'_M - R_M = \frac{(q_j + \Delta q)(q_j + \Delta q)}{p_j} - \frac{q_j (q_j)}{p_j} + \frac{(q_k - \Delta q)(q_k - \Delta q)}{p_k} - \frac{q_k (q_k)}{p_k}$$

al operar algebraicamente y recordar que $p_j = p_k = 1/n$ se llega a:

$$\boxed{R'_M - R_M = 2n\,\Delta q\,[(q_j - q_k) + \Delta q]} \tag{2.20}$$

Sabemos por definición que $q_k > q_j$, en consecuencia, $(q_j - q_k) < 0$ si además se cumpliese que $\Delta q < |q_j - q_k|$, entonces tendríamos que:

$$R'_M - R_M < 0$$

y por lo tanto

$$R'_M < R_M$$

Es decir, si la transferencia se hace desde una unidad rica en favor de una menos rica, entonces el coeficiente $R_M$ marcará un valor menor, señalando que la distribución se ha vuelto más equitativa. Expresado de manera breve, esto significa que el coeficiente cumple con la condición Pigou-Dalton[16].

Pero todavía nos queda por indagar el sentido que se le puede atribuir a la condición $\Delta q < |q_j - q_k|$. Ella nos dice que sólo se producirá una disminución en el nivel de desigualdad si la proporción transferida es menor que la distancia que separa a las proporciones que poseen las unidades implicadas. En el caso en que $\Delta q = |q_j - q_k|$, $R'_M = R_M$ ya que lo único que ocurrió es que ahora el sujeto *k* ocupa el lugar del *j* y viceversa y no se ha alterado el ni-

[16] De pasada señalamos que este procedimiento se podría aplicar un gran número de veces a partir de una distribución totalmente concentrada hasta llegar a la distribución equitativa, y en cada caso $R_M$ caería sistemáticamente desde *n* hasta el valor unitario.
Por otra parte, siguiendo el mismo procedimiento es fácil demostrar que acontece lo inverso si redistribuimos en favor de las observaciones más ricas.

vel de la concentración. Si $\Delta q > |q_j - q_k|$ la distribución introdujo mayor desigualdad. Supongamos que la unidad *j* posee $q_j = 0.1$ y que la *k* tiene un $q_k = 0.5$. Habrá una tendencia a la equidistribución siempre que se favorezca a *j* con una cantidad menor que 0.4, por ejemplo 0.3, de modo que $q_j = 0.4$ y $q_k = 0.2$; la nueva distribución es más equitativa que la primera ya que los otros términos han permanecido inalterados aun cuando la observación *k* quedó más pobre que la *j*. Si la transferencia es igual a 0.4 entonces $q_j = 0.5$ y $q_k = 0.1$, lo único que ha ocurrido es que ahora *j* tiene el lugar de *k* pero la desigualdad existente en la distribución se ha mantenido constante. Por último, si $\Delta q$ es mayor a 0.4, por ejemplo 0.45, entonces *j* quedará con 0.55 y *k* con 0.05, de manera que la redistribución ha sido regresiva.

Para ilustrar la sensibilidad de $R_M$ a la condición Pigou-Dalton consideremos la siguiente información:

*Tabla 2.20. Cálculo de* $R_M$ *en una distribución de frecuencias*

| Val. de var. | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $q_i(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.20 | 0.05 | 0.25 | 0.0125 |
| 10 | 0.20 | 0.10 | 0.50 | 0.0500 |
| 20 | 0.20 | 0.20 | 1.00 | 0.2000 |
| 30 | 0.20 | 0.30 | 1.50 | 0.4500 |
| 35 | 0.20 | 0.35 | 1.75 | 0.6125 |
| 100 | 1.00 | 1.00 | 5.00 | 1.3250 |

$$R_M = 1.325 \quad \text{y } R_M^N = \frac{1.325 - 1}{4} = 0.0813$$

Al transferir una unidad de la variable desde la quinta a la primera observación tendremos que:

*Tabla 2.21.* $R_M$ *después de una transferencia extrema*

| Val. de var. | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $q_i(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0.20 | 0.06 | 0.30 | 0.0180 |
| 10 | 0.20 | 0.10 | 0.50 | 0.0500 |
| 20 | 0.20 | 0.20 | 1.00 | 0.2000 |
| 20 | 0.20 | 0.30 | 1.50 | 0.4500 |
| 34 | 0.20 | 0.34 | 1.70 | 0.5780 |
| 100 | 1.00 | 1.00 | 5.00 | 1.2960 |

$$R_M' = 1.296 \qquad \text{y } R_M^N = \frac{1.296 - 1}{4} = 0.074$$

Tal como era de esperar, la transferencia en favor de una unidad más deposeída trajo como consecuencia una reducción en $R_M$. Además, este mismo ejemplo nos sirve para mostrar la validez de la ecuación (2.20)

Al sustituir los valores numéricos adecuados:

$$R_M^{'} - R_M = 5 \times 2 \times 0.01 \left[(0.05 - 0.35)\right] + 0.01$$

y al realizar las operaciones se cumple:

$$R_M^{'} - R_M = -0.029$$

cantidad que resulta ser exactamente igual a la diferencia entre los coeficientes calculados:

$$R_M^{'} - R_M = 1.296 - 1.325 = -0.029$$

Nótese que la proporción transferida ($\Delta q$) es bastante menor que la distancia que separaba a las observaciones. En efecto, $\Delta q = 0.01$ y $q_5 - q_1 = 0.35 - 0.05 = 0.30$.

Por otra parte, sabemos que también es deseable que una medida de desigualdad sea sensible al nivel en que se realiza la transferencia (condición de cambio relativo). Si la transferencia se hace desde una unidad rica a una pobre, la reducción en la medida de concentración debería ser mayor que si favorece a una observación menos pobre. Analicemos, entonces, el comportamiento de $R_M$ ante este tipo de redistribución.

Para tal efecto supongamos que además de las observaciones *j* y *k* existe una *l* tal que:

$$X_j < X_l < X_k$$

y que la transferencia desde *k* hacia *l* es del mismo monto $\Delta q$ que se efectuó en favor de *j*. Al simbolizar por $R_M^{''}$ el valor del coeficiente debido a la redistribución $\Delta q$ en favor de *l* tendremos que:

$$R_M^{''} - R_M = 2n \, \Delta q \, [(q_l - q_k) + \Delta q]$$

Nos interesa comparar la reducción experimentada por $R_M$ en cada caso Con este propósito establezcamos:

$$(R_M^{'} - R_M) - (R_M^{''} - R_M) = 2n \, \Delta q \, [(q_j - q_k) + \Delta q - (q_l - q_k) - \Delta q]$$

$$(R_M^{'} - R_M) - (R_M^{''} - R_M) = 2n \, \Delta q \, [q_j - q_l]$$

El lado derecho de esta ecuación siempre será negativo ya que $q_j < q_l$ de modo que:

$$(R'_M - R_M) - (R''_M - R_M) < 0$$

lo que implica que:

$$R'_M < R''_M$$

Es decir, cuando la transferencia se hace desde una unidad rica a una pobre, el coeficiente de desigualdad $R_M$ experimenta una caída mayor que si se hace en favor de una observación no tan pobre. Por lo tanto podemos afirmar que este coeficiente de desigualdad no sólo cumple con la condición Pigou-Dalton, sino que también es sensible al nivel de la variable en que se realiza la redistribución[17].

Los resultados que hemos presentado se pueden escribir sintéticamente como:

$$R_M > R''_M > R'_M$$

Estas desigualdades se invierten cuando la transferencia beneficia a las unidades que poseen una proporción mayor de la variable.

Sobre la base de la información ya presentada, supongamos a modo de ejemplo que la redistribución esta vez se hace en favor de la tercera observación de manera que:

*Tabla 2.22. $R_M$ después de una transferencia moderada*

| Val. de var. | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $q_i(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.20 | 0.05 | 0.25 | 0.0125 |
| 10 | 0.20 | 0.10 | 0.50 | 0.0500 |
| 21 | 0.20 | 0.21 | 1.05 | 0.2205 |
| 30 | 0.20 | 0.30 | 1.50 | 0.4500 |
| 34 | 0.20 | 0.34 | 1.70 | 0.5780 |
| 100 | 1.00 | 1.00 | 5.00 | 1.3110 |

$$R'_M = 1.3110 \quad y \quad R^N_M = 0.0778$$

[17] De modo que $R_M$ resulta ser una función que no sólo es creciente con los niveles de desigualdad (condición Pigou-Dalton) sino que aumenta con una tasa decreciente (condición de cambio relativo) entre los límites 1 y $n$.

Lo que comprueba numéricamente la validez de la desigualdad

$$\begin{array}{ccccc} R_M & > & R''_M & > & R'_M \\ 1.3250 & > & 1.3110 & > & 1.2960 \end{array}$$

## 2.10. *Indice entrópico de Theil*

A diferencia de los coeficientes que hemos presentado en los apartados anteriores, la exposición de la medida propuesta por Theil requiere de algunos antecedentes de carácter introductorio para que el material se ordene en un todo más o menos coherente. Lo que acontece es que los indicadores de desigualdad que hemos examinado se encuadran dentro de una estricta lógica estadística, en tanto que el coeficiente entrópico surge de la termodinámica y de la teoría de la información. Nos basaremos en esta última vertiente para rescatar aquellos elementos que nos parecen básicos para lograr un cierto grado de comprensión de esta medida de desigualdad. Aquellos lectores que deseen obtener un conocimiento más profundo deberán recurrir a textos especializados[18].

### 2.10.1. *El concepto de entropía en teoría de la información y algunas de sus características.*

Supongamos que en algún momento recibimos el mensaje de que ha ocurrido el suceso $E$ cuya probabilidad era p. ¿Cuál será la cantidad de información que hemos recibido?

De hecho, pareciera lógico suponer que la cantidad de información es mayor en la medida que menor es la probabilidad de ocurrencia p. En otros términos, si sabemos que ocurre un suceso $E_1$ cuya probabilidad es muy pequeña, la cantidad de información que recibimos es mayor que si aconteció $E_2$ que tiene asociada una probabilidad cercana a uno. En este último caso de antemano casi sabemos que el suceso $E_2$ tendrá que ocurrir.

En consecuencia si queremos la cantidad de información en función de la probabilidad p (previa a la ocurrencia del suceso) deberemos elegir una fun-

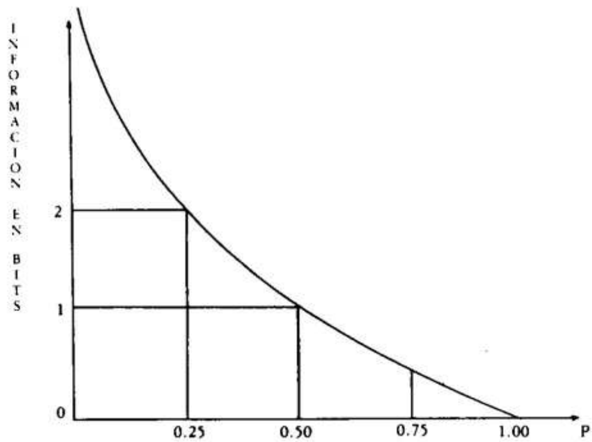
[18] El material de esta sección deriva básicamente de: Fazlollah Reza; *An Introduction to Information Theory*. Mc. Graw-Hill, Nueva York, 1961. C. Shannon y W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*. The University of Illinois Press, Urbana, 1949. H. Theil, *Statistical Decomposition Analysis*. North Holland, Amsterdam, 1972.

ción decreciente en p. Entre las muchas funciones posibles, Shannon[19] propuso:

$$h(p) = \log_2 \frac{1}{p} = -\log_2 p$$

en que la base de los logaritmos es 2 y que es una función decreciente de p, que tiende a infinito cuando $p = 0$ y es igual a cero cuando $p = 1$. Si $p = 0.50$ tenemos que $h(1/2) = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2$ [20] $= 1$. Este resultado puede tomarse como unidad binaria (bit) que permite medir la cantidad de información de cualquier mensaje referido a un suceso E. Cuando los logaritmos son naturales la unidad de medida se denomina nit.

*Gráfica 2.13.*
*La función h (p)*




La cantidad de información contenida en el mensaje de que E no ocurrió será:

$$h(1\text{-}p) = \log \frac{1}{1-p} = -\log(1-p)$$

[19] Shannon y Weaver, *Op. cit*, págs. 14 y 51.
[20] En esta sección no nos preocuparemos por señalar la base del logaritmo. Siempre será 2, a menos que se indique lo contrario.

Como se puede apreciar, la información entregada por el hecho de que E no sucedió será distinta que la correspondiente a su ocurrencia (sólo coincidirán en el caso en que $p = 1-p = 0.5$). Esto es lógico por cuanto, si p es cercana a 1 y el suceso no acontece, la cantidad de información recibida es grande y si ocurre, será pequeña.

En consecuencia la cantidad de información referida a un suceso E puede ser $h(p)$ o $h(1-p)$ y antes de la llegada del mensaje no estaremos en condiciones de usar una u otra medida, pero sí podremos calcular el *contenido esperado de información*. Para ello bastará recurrir al concepto de esperanza matemática y definir:

$$H = p \cdot h(p) + (1-p) \cdot h(1-p)$$

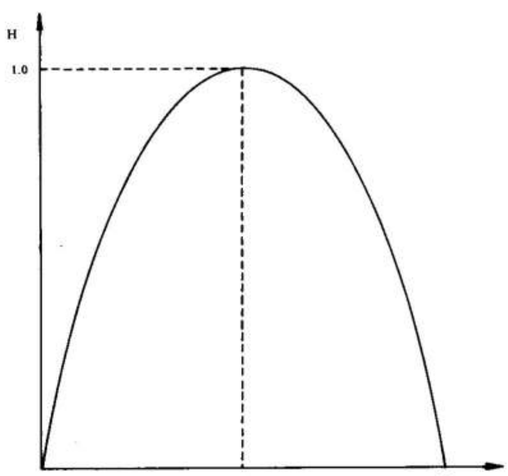
Efectuando la sustitución,

$$\boxed{H = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}} \qquad (2.21)$$

La función H se conoce con el nombre de entropía y expresa la cantidad esperada de información correspondiente al suceso E.

*Gráfica 2.14.*

*Entropía*



Las características básicas de esta función, tal como se muestran en la gráfica 2.14 son:

(i) Es simétrica con respecto a $p = 0.5$
(ii) Es no negativa.
(iii) Asume el valor 0 en $p = 0$ y $p = 1$.
(iv) Alcanza su máximo (la unidad) en $p = 1/2$.

Todas estas características se encuentran estudiadas en detalle en el libro de Reza[21] y dado el propósito de esta exposición, no nos preocuparemos por entregar una demostración rigurosa de cada una de ellas. De hecho lo que más puede llamar la atención es que se afirme que la función H toma el valor cero cuando $p = 0$ ó $p = 1$.

En efecto, si $p = 0$

$$H = 0 \left(\log \frac{1}{0}\right) + 1 \left(\log \frac{1}{1-0}\right)$$

El primer sumando se encuentra indefinido ya que se trataría del logaritmo de una cantidad que tiende a infinito. Una situación similar se presenta para $p = 1$ con el segundo sumando. Ahora bien, es usual definir:

$$x \log \frac{1}{x} = 0 \text{ cuando } x = 0$$

costumbre que se basa en el hecho de que el límite de $x \log \frac{1}{x}$ es cero en la medida que x tiende a cero.

Hasta este punto hemos trabajado con la información que nos proporciona la ocurrencia o no ocurrencia de un suceso. Consideremos ahora que nos interesa establecer la entropía asociada a *n* sucesos mutuamente excluyentes $E_1, E_2, \ldots, E_n$ cuyas respectivas probabilidades son $p_1, p_2, \ldots, p_n$, que cumplen con la condición $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ [22]. Sabemos que la cantidad de información proporcionada por la ocurrencia de $E_i$ será $h(p_i)$ y que podemos calcular el contenido esperado de información a través de:

---

[21] Reza, *op. cit*, págs. 80 a 91.

[22] Los *n* sucesos son tales que agotan el espacio de probabilidades.

$$H = p_1\, h(p_1) + p_2\, h(p_2) + \ldots + p_n\, h(p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, h(p_i)$$

Por consiguiente:

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i}} \tag{2.22}$$

Esta es una expresión general para la entropía que incluye el caso particular $n = 2$.

Las características básicas de la función entrópica (2.22) son: (i) Es no negativa, lo que deriva del hecho que $h(p_i) \geq 0$ y que $0 \leq p_i \leq 1$. Se trata de una suma ponderada de cantidades no negativas.

(ii) Cuando algún suceso genérico $E_j$ tiene probabilidad 1, las de los restantes sucesos serán todas iguales a cero y por tanto:

$$H = \sum_{i=1}^{j-1} p_i \log \frac{1}{p_i} + p_j \log \frac{1}{p_j} + \sum_{i=j+1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i}$$

como $p_1 = p_2 = \ldots = p_{j-1} = p_{j+1} = \ldots = p_n = 0$, las sumas serán iguales a cero y lo mismo ocurre con:

$$p_j \log \frac{1}{p_j} = 1\,(\log 1) = 0$$

De modo que:

$$H = 0$$

Esto quiere decir que si tenemos certeza en la ocurrencia de un suceso, la cantidad esperada de información será igual a cero.

(iii) La entropía alcanza su máximo cuando:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$$

En este caso

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{1/n} = \log \frac{1}{1/n} = \log n$$

Disponemos de la máxima cantidad de información cuando todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Este resumen de las características básicas de la entropía nos permite examinar su utilización como medida de desigualdad.

### 2.10.2. *Indice de concentración de Theil*

A partir del valor total que alcanza una variable es posible definir las participaciones relativas que corresponden a cada observación de manera que la suma de ellas conforme la unidad:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

donde cada $q_i$ es una proporción y como tal cumple con la condición $0 \leq q_i$ 1.

Sobre la base de las proporciones de la variable que posee cada unidad se define la entropía como:

$$(2.23) \qquad \boxed{H = \sum_{i=1}^{n} q_i \log \frac{1}{q_i}}$$

Ahora bien, si el total se distribuye equitativamente entre todas las observaciones entonces:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}$$

y

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log n = \log n$$

Cuando la variable se distribuye equitativamente, H asume el valor máximo log n. Si por el contrario se concentra sólo en una observación, por ejemplo, la *j*, entonces:

$q_1 = q_2 = \ldots q_{j-1} = q_{j+1} = \ldots = q_n = 0$ y $q_j = 1$, en virtud de lo cual $H = 0$.

Por lo tanto, H puede verse como una medida de igualdad (crece en tanto nos aproximamos hacia la distribución equitativa) y se puede transformar fácilmente en un índice de desigualdad restando H a su valor máximo:

$$\log n - H = \log n - \Sigma q_i \log \frac{1}{q_i}$$

$$\log n - H = \Sigma\, q_i \left(\log n - \log \frac{1}{q_i}\right)$$

$$\log n - H = \Sigma\, q_i\, (\log n\, q_i)$$

$$\log n - H = \Sigma\, q_i \log \frac{q_i}{1/n}$$

y recordando que $p_i = \frac{1}{n}$, se tiene que:

$$\log n - H = \Sigma\, q_i \log \frac{q_i}{p_i}$$

Al simbolizar (log n − H) por H' tenemos:

$$\boxed{H' = \Sigma\, q_i \log \frac{q_i}{p_i}} \tag{2.24}$$

Esta medida asumirá el valor cero en caso de equidistribución en virtud que, como habíamos visto, log n = H, y si la concentración es total, H' será igual a log n, dado que, según sabemos, en ese caso H = 0. En síntesis:

H' = 0 si la variable se encuentra equitativamente distribuida y

H' = log n si el valor total lo posee sólo una observación.

Esta medida de concentración no cambia su valor si todos los valores de variable son afectados por una constante; ello es consecuencia de que depende de $q_i$ que simboliza proporciones que no se alteran con esas modificaciones. También cumple con las condiciones de Pigou-Dalton y con las de sensibilidad a las transferencias de valores de variable ubicados en distintos niveles (cambio relativo). El hecho de que la entropía responda a los dos últimos criterios que señalamos nos garantiza que entre los valores máximo y mínimo la función sea creciente al aumentar los niveles de desigualdad. La demostración matemática estricta de que H' cumple estos criterios la dejaremos para el próximo capítulo. Por ahora sólo estamos en condiciones de exponer un argumento que da sustento lógico pero no matemático a esta última afirmación, y que además nos permite adjudicar una interpretación alternativa para H'.

Al comparar los coeficientes $R_M$ y H':

$$R_M = \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\frac{q_i}{p_i}\right)$$

$$H' = \sum_{i=1}^{n} q_i \log \frac{q_i}{p_i}$$

salta a la vista que:

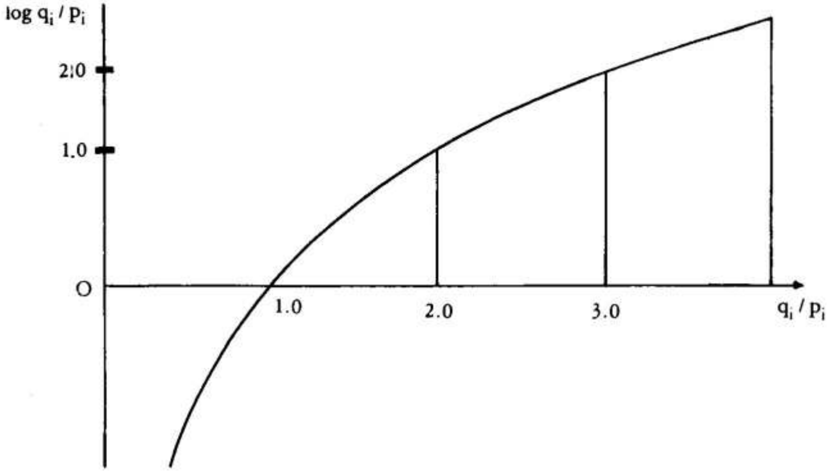
(i) La medida entrópica de desigualdad puede ser considerada como un promedio ponderado de los logaritmos de las razones de ventaja, en que los pesos son las participaciones relativas de cada observación en la variable. Cabe hacer notar que a cada unidad con razón de ventaja menor que uno le corresponderá un logaritmo negativo[23]. En otros términos, asociado a cada observación beneficiada por la repartición habrá un sumando positivo de H' y uno negativo a cada unidad perjudicada.

(ii) La relación monótonamente creciente entre $q_i / p_i$ y $\log (q_i / p_i)$ (ver gráfica) implica que el coeficiente entrópico de Theil cumplirá también con las condiciones Pigou-Dalton y de cambio relativo. En general, podríamos esperar que la sensibilidad de H' a las transferencias $\Delta q$ debería ser mayor que la de $R_M$ debido a que al aplicar logaritmos sobre $q_i / p_i$ se le otorga una importancia relativa menor a los cambios experimentados por los valores altos que a los bajos. Es decir, en términos lógicos debemos esperar que el coeficiente de Theil no sólo disminuya cuando se transfiere un $\Delta q$ desde una unidad más rica a una más pobre sino que el decremento debe ser mayor que el que sufre $R_M$.

[23] Si bien los componentes de la entropía H no asumen valores negativos, la transformación realizada para llegar a H' genera términos cuyos logaritmos son menores que cero (aquéllos en que $q_i / p_i < 1$).

*Gráfica 2.15.*

*Logaritmo de* $q_i / p_i$




Por el momento no estamos en condiciones de ofrecer una demostración estricta que nos permita sostener, sin lugar a dudas, que el coeficiente H' cumple con los criterios señalados[24]. En compensación ofrecemos algunos ejemplos numéricos que si bien no sirven como demostración rigurosa de lo que sostenemos, sí nos permiten dar algún soporte a nuestras afirmaciones.

Usaremos el mismo ejemplo que ilustró las propiedades de $R_M$, de esta manera podemos comparar la sensibilidad a la transferencia, de ambos coeficientes[25]. A partir de los datos contenidos en la tabla 2.20 tenemos:

*Tabla 2.23. Cálculo de la entropía*

| $X_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $\ln (q_i / p_i)$ | $q_i \ln(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.20 | 0.05 | 0.25 | −1.386 | −0.0693 |
| 10 | 0.20 | 0.10 | 0.50 | −0.693 | −0.0693 |
| 20 | 0.20 | 0.20 | 1.00 | 0.000 | 0.0000 |
| 30 | 0.20 | 0.30 | 1.50 | 0.405 | 0.1215 |
| 35 | 0.20 | 0.35 | 1.75 | 0.560 | 0.1960 |
| 100 | 1.00 | 1.00 | | | 0.1789 |

[24] Como hemos dicho anteriormente esto se hará en el próximo capítulo.

[25] En los ejemplos numéricos hemos utilizado logaritmos base *e*.

Entonces:

$$H' = 0.1789$$

Si redistribuimos una unidad de variable desde la quinta observación a la primera:

*Tabla 2.24. Cálculo de la entropía después de una redistribución extrema*

| $X_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $\ln (q_i / p_i)$ | $q_i \ln(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0.20 | 0.06 | 0.30 | −1.2039 | −0.0722 |
| 10 | 0.20 | 0.10 | 0.50 | −0.6931 | −0.0693 |
| 20 | 0.20 | 0.20 | 1.00 | 0.0000 | 0.0000 |
| 30 | 0.20 | 0.30 | 1.50 | 0.4055 | 0.1216 |
| 34 | 0.20 | 0.34 | 1.70 | 0.5306 | 0.1804 |
| 100 | 1.00 | 1.00 | 5.00 | | 0.1605 |

Luego:

$$H' = 0.1605$$

Como la redistribución disminuyó el nivel de desigualdad existente, el coeficiente entrópico experimentó una reducción, con lo cual se evidencia que satisface la condición Pigou-Dalton.

A continuación examinaremos lo que acontece al transferir una unidad de la variable desde la quinta a la tercera observación:

*Tabla 2.25. Cálculo de la entropía después de una redistribución moderada*

| $X_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ | $\ln (q_i / p_i)$ | $q_i \ln(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.20 | 0.05 | 0.25 | −1.3863 | −0.0693 |
| 10 | 0.20 | 0.10 | 0.50 | −0.6931 | −0.0693 |
| 21 | 0.20 | 0.21 | 1.05 | 0.0488 | 0.0102 |
| 30 | 0.20 | 0.30 | 1.50 | 0.4055 | 0.1216 |
| 34 | 0.20 | 0.34 | 1.70 | 0.5306 | 0.1804 |
| 100 | 1.00 | 1.00 | 5.00 | | 0.1736 |

Entonces el valor del coeficiente de Theil es:

$$H' = 0.1736$$

Como se puede observar su valor disminuyó con respecto a la distribución original de la variable, aunque la caída fue menor que en el caso en que la transferencia fue extrema. Este resultado constituye una comprobación numérica de que H' cumple con la condición de cambio relativo.

Estos ejemplos son los mismos que hemos utilizado para ilustrar las propiedades de $R_M$ por lo que estamos en condiciones de realizar una comparación numérica entre las sensibilidades de H' y $R_M$:

| | Original | *Primer caso* (transferencia extrema) | *Segundo caso* (transferencia moderada) |
|---|---|---|---|
| $R_M$ | 1.3250 | 1.2960 | 1.3110 |
| H' | 0.1789 | 0.1605 | 0.1736 |
| Disminución Porcentual | | | |
| $R_M$ | — | 2.19% | 1.06% |
| H' | — | 10.29% | 2.96% |

Las disminuciones porcentuales son mayores en H' que en $R_M$. Esto es una consecuencia directa de la mayor sensibilidad que tiene H' a las redistribuciones.

Se puede obtener una comparación directa si es que cerramos el recorrido del coeficiente de Theil al intervalo definido por cero y uno. Para ello establezcamos:

$$\boxed{H'_N = \frac{H'}{\log n}} \tag{2.25}$$

cuyo recorrido estará comprendido en el intervalo

$$0 \leqq H'_N \leqq 1$$

Al comparar los coeficientes normalizados llegamos a:

| | Original | *Primer caso* (transferencia extrema) | *Segundo Caso* (transferencia moderada) |
|---|---|---|---|
| $R_M^N$ | 0.0813 | 0.0740 | 0.0778 |
| $H_N$ | 0.1111 | 0.0997 | 0.1078 |

Estos resultados confirman nuevamente que la sensibilidad del coeficiente entrópico de Theil es mayor que la de $R_M$.

## 2.11. *Los indicadores a la luz de los criterios que deben satisfacer las "buenas" medidas de desigualdad*

A lo largo de este capítulo nos hemos dedicado a examinar hasta qué punto las medidas usuales cumplen con los criterios que deben satisfacer los "buenos" indicadores de desigualdad. El análisis realizado nos ha llevado a descartar, en primera instancia, el rango relativo y la desviación media relativa. De esta manera, el campo de elección se reduce a la varianza de los logaritmos, la varianza relativa, el índice entrópico de Theil, el coeficiente $R_M$ y el índice de Gini.

Respecto a estas medidas, el material que hemos expuesto nos permite afirmar sintéticamente que:

i) Ninguna se altera por cambios proporcionales en los valores de variable.
ii) El coeficiente de Gini y la varianza relativa sólo cumplen con el criterio Pigou-Dalton.
iii) La varianza de los logaritmos, el coeficiente de Theil y $R_M$, cumplen tanto con la condición Pigou-Dalton como con la de cambio relativo. Sin embargo, parece conveniente recalcar que la varianza de los logaritmos puede llegar a ser insensible a las redistribuciones que involucran observaciones con elevados valores de variable, debido a que la transformación logarítmica adjudica menor importancia relativa a los valores de variable más altos, de modo que una transferencia en esos niveles sólo puede llegar a reflejarse en el valor de la varianza de los logaritmos si se trabaja con una cantidad no usual de cifras decimales.
iv) La varianza de los logaritmos es la única de estas medidas que no es posible normalizar debido a que no se encuentra definido su valor máximo. En efecto, sabemos que en el caso de concentración total, no se puede obtener el valor de $L^2$.

¿Cuál de estas medidas de desigualdad utilizar en una investigación concreta? Pareciera no haber una respuesta universal a esta interrogante, sino que la decisión que se adopte dependerá de la importancia relativa que se adjudique a los criterios que han servido para juzgar sus bondades.

Así por ejemplo, si deseamos que el índice utilizado sea sensible a las transferencias, sin importar el nivel en el que se efectúen, entonces la elección debiera realizarse entre la varianza relativa y el índice de Gini. Al tomar en consideración que en el entorno de éste último se han elaborado una serie de medidas complementarias que permiten un estudio más detallado de la concentración (su forma, y los coeficientes de proporciones equitativas, mayoría mínima y razón de ventaja) y que puede interpretarse como desviación respecto a la media y como comparación entre valores de variable, debiera concluirse que la decisión tendría que favorecer al índice de Gini.

Pero, si exigimos que se satisfagan la condición Pigou-Dalton y la de cambio relativo, quedan descartadas la varianza relativa y el índice de Gini. El campo de elección se reduce a $R_M$, Theil y $L^2$. Este último presenta algunas desventajas respecto a los dos primeros: (i) La de exhibir cierta insensibilidad con respecto a transferencias entre unidades "muy ricas". (ii) Que no se puede determinar su valor máximo. (iii) Que mide concentración mediante las diferencias entre los valores de variable y la media geométrica, en lugar de hacerlo en relación al promedio. Esta característica adquiere relevancia en los estudios de distribución del ingreso porque el promedio está directamente relacionado al ingreso total y por esta vía al ingreso per cápita[26].

Todas estas limitaciones inclinan la balanza en favor del índice entrópico de Theil y de $R_M$. Por el momento no disponemos de criterios estadísticos adicionales que nos permiten discriminar y decidir en favor de uno de ellos.

## 2.12. *Una aplicación*

La tabla 2.26 muestra la distribución espacial de la población por localidades urbanas en la zona norte de México, en 1970. A la información censal hemos añadido los cálculos básicos que sirven para obtener el coeficiente de Gini, la varianza relativa, la varianza de los logaritmos, $R_M$ y el coeficiente de Theil.

*Tabla 2.26. Distribución de la población por localidades urbanas en la zona norte de México en 1970*

| Localidades | Pob.($x_i$) | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $q_i / p_i$ | $\ln(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Escuinapa | 16785 | 0.0417 | 0.0083 | 0.0417 | 0.0083 | 0.1990 | −1.6145 |
| Cananea | 17085 | 0.0417 | 0.0090 | 0.0834 | 0.0178 | 0.2158 | −1.5334 |
| Guamúchil | 17514 | 0.0417 | 0.0092 | 0.1251 | 0.0269 | 0.2206 | −1.5114 |
| Stgo. Ixcuintla | 17606 | 0.0417 | 0.0092 | 0.1668 | 0.0362 | 0.2206 | −1.5114 |
| Huatabampo | 18842 | 0.0417 | 0.0099 | 0.2085 | 0.0460 | 0.2374 | −1.4380 |
| Tuxpan | 20513 | 0.0417 | 0.0108 | 0.2502 | 0.0568 | 0.2590 | −1.3509 |
| Agua Prieta | 21017 | 0.0417 | 0.0110 | 0.2919 | 0.0675 | 0.2638 | −1.3326 |
| Caborca | 21308 | 0.0417 | 0.0112 | 0.3336 | 0.0790 | 0.2686 | −1.3145 |

[26] Henri Theil *Economics and Information Theory*. North Holland Publishing Amsterdam, 1967. Apéndice del capítulo 4.

| Localidades | Pob.($x_i$) | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $q_i / p_i$ | $\ln(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Empalme | 24994 | 0.0417 | 0.0131 | 0.3753 | 0.0921 | 0.3141 | −1.1580 |
| Guasave | 26422 | 0.0417 | 0.0139 | 0.4170 | 0.1059 | 0.3333 | −1.0987 |
| Navojoa | 44373 | 0.0417 | 0.0233 | 0.4587 | 0.1292 | 0.5588 | −0.5820 |
| La Paz | 47264 | 0.0417 | 0.0248 | 0.5004 | 0.1540 | 0.5947 | −0.5197 |
| Sn. Luis Río C. | 51118 | 0.0417 | 0.0268 | 0.5421 | 0.1808 | 0.6427 | −0.4421 |
| Nogales | 53119 | 0.0417 | 0.0278 | 0.5838 | 0.2086 | 0.6667 | −0.4054 |
| Guaymas | 58434 | 0.0417 | 0.0306 | 0.6255 | 0.2393 | 0.7338 | −0.3095 |
| Los Mochis | 69251 | 0.0417 | 0.0363 | 0.6672 | 0.2756 | 0.8705 | −0.1387 |
| Ensenada | 79146 | 0.0417 | 0.0415 | 0.7089 | 0.3171 | 0.9952 | −0.0048 |
| Tepic | 89765 | 0.0417 | 0.0471 | 0.7506 | 0.3641 | 1.1295 | 0.1218 |
| Cd. Obregón | 117183 | 0.0417 | 0.0614 | 0.7923 | 0.4255 | 1.4724 | 0.3869 |
| Mazatlán | 126325 | 0.0417 | 0.0662 | 0.8340 | 0.4918 | 1.5875 | 0.4622 |
| Culiacán | 172004 | 0.0417 | 0.0902 | 0.8757 | 0.5819 | 2.1631 | 0.7715 |
| Hermosillo | 180237 | 0.0417 | 0.0945 | 0.9174 | 0.6764 | 2.2662 | 0.8181 |
| Mexicali | 276167 | 0.0417 | 0.1448 | 0.9591 | 0.8212 | 3.4724 | 1.2448 |
| Tijuana | 341067 | 0.0417 | 0.1788 | 1.0000 | 1.0000 | 4.2878 | 1.4558 |
| TOTAL | 1907539 | 1.000 | | | | | |

(Fuente: Luis Unikel *et. al. El desarrollo urbano de México: diagnóstico e implicaciones futuras*. El Colegio de México, México, 1976. Cuadro I-A1.)

Los valores de los coeficientes de desigualdad son[27]:

$$G = 0.4883; \sqrt{V} = 1.0561; L^2 = 0.8631; R_M = 2.1137 \text{ y } H' = 0.4396$$

Para estar en condiciones de juzgar el grado de desigualdad (grande o pequeña) es necesario que ubiquemos el valor asociado a la medida dentro de un intervalo a cuyos límites sea posible adjudicarles un contenido. Sabemos que ése fue el propósito de normalizar los indicadores en el intervalo 0 y 1, haciendo corresponder la distribución equitativa al primero de estos valores y

[27] Hemos aplicado raíz cuadrada a la varianza relativa para expresarla en las unidades en que está medida la variable.

la concentración total al segundo. Para la distribución en cuestión los valores estandarizados fueron los siguientes[28]:

$$\sqrt{V_N} = 0.02202\text{: } R_M^N = 0.0484 \text{ y } H_N' = 0.1402$$

A pesar de la normalización, los resultados presentan fuertes discrepancias, lo que hace difícil emitir un juicio taxativo acerca del grado de concentración espacial de esta población. Así, por ejemplo, el valor que asume el coeficiente de Gini nos daría pie para sostener que hay un cierto grado de concentración en la población de la zona norte, pero el valor de $R_M^N$ nos apoyaría para aseverar que la desigualdad es casi inexistente. Ahora bien, ¿cómo podemos llegar a afirmaciones tan contradictorias si hemos supuesto que todas estas medidas son indicadores de desigualdad?

Con el propósito de abrir algunas vías de respuesta será necesario examinar el problema con algún detenimiento. Para este fin hemos construido un conjunto de 25 tablas de frecuencias en que la primera corresponde a una situación en que la variable se encuentra perfectamente equidistribuida y a través de sucesivas redistribuciones se concluye en el caso de concentración total. Entre ambos extremos hemos ordenado las distribuciones de menor a mayor grado de desigualdad[29] y en cada caso procedimos a calcular G, $\sqrt{V_N}$, $R_M^N$ y $H_N'$. La información que sirvió de base para los cálculos se entrega en el apéndice No. 2 y los valores alcanzados por las cuatro medidas se presentan en la siguiente tabla:

*Tabla 2.27. Medidas normalizadas de concentración aplicadas a un conjunto de 25 tablas jerarquizadas de acuerdo a grados crecientes de desigualdad*

| Tabla | $G_N$ | $\sqrt{V_N}$ | $R_M^N$ | $H_N'$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.100 | 0.079 | 0.006 | 0.008 |
| 2 | 0.175 | 0.137 | 0.019 | 0.022 |
| 3 | 0.200 | 0.158 | 0.025 | 0.033 |
| 4 | 0.275 | 0.209 | 0.044 | 0.052 |
| 5 | 0.300 | 0.224 | 0.050 | 0.065 |
| 6 | 0.325 | 0.237 | 0.056 | 0.070 |

[28] No presentamos el valor de $L^2$ ya que no es susceptible de normalización.

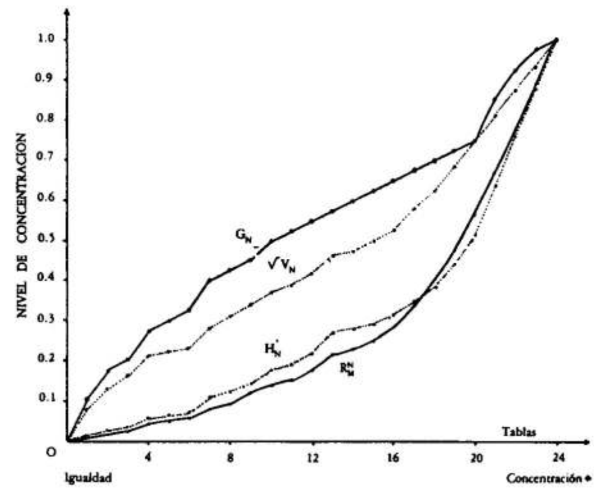
[29] Para construir la secuencia de tablas seguimos el criterio de transferir sistemáticamente un 5% del valor de variable. Como la cantidad de caminos para realizar las redistribuciones consecutivas que nos permiten pasar desde la distribución equitativa a la concentración total es muy grande, el conjunto de tablas que presentamos no agotan las posibilidades por lo que sólo deben considerarse a manera de ejemplo.

| Tabla | $G_N$ | $\sqrt{V_N}$ | $R_M^N$ | $H_N'$ |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 0.400 | 0.285 | 0.081 | 0.111 |
| 8 | 0.425 | 0.306 | 0.094 | 0.121 |
| 9 | 0.450 | 0.345 | 0.119 | 0.141 |
| 10 | 0.500 | 0.371 | 0.138 | 0.175 |
| 11 | 0.525 | 0.387 | 0.150 | 0.189 |
| 12 | 0.550 | 0.418 | 0.175 | 0.219 |
| 13 | 0.575 | 0.461 | 0.213 | 0.270 |
| 14 | 0.600 | 0.474 | 0.225 | 0.277 |
| 15 | 0.625 | 0.500 | 0.250 | 0.292 |
| 16 | 0.650 | 0.536 | 0.288 | 0.315 |
| 17 | 0.675 | 0.581 | 0.338 | 0.347 |
| 18 | 0.700 | 0.632 | 0.400 | 0.389 |
| 19 | 0.725 | 0.689 | 0.475 | 0.444 |
| 20 | 0.750 | 0.750 | 0.563 | 0.517 |
| 21 | 0.850 | 0.814 | 0.663 | 0.635 |
| 22 | 0.925 | 0.877 | 0.769 | 0.755 |
| 23 | 0.975 | 0.939 | 0.881 | 0.877 |
| 24 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

Para disponer de una apreciación global de la información contenida en esta tabla se puede recurrir a la siguiente gráfica:

*Gráfica 2.16.*

*Comportamiento de G, $\sqrt{V_N}$, $H_N'$ y $R_M^N$ al aumentar el grado de desigualdad*



La simple inspección de este diagrama nos muestra que el resultado que obtuvimos con los datos de la tabla 2.25 corresponde a una situación bastante general: al aplicar los diferentes indicadores de desigualdad a una misma distribución de frecuencias obtendremos como resultados tantos valores diferentes como medidas hayamos usado. Este hecho no debiera resultar novedoso en tanto que los coeficientes sólo son distintas funciones matemáticas que se definen con el propósito de indicar de manera resumida el grado de concentración. Es decir, desde el momento que hemos optado por asociar distintas funciones a la noción de desigualdad, necesariamente debemos obtener resultados diferentes.

Pero, el problema no radica en que los valores no sean coincidentes, sino más bien en que sus discrepancias pueden llegar a ser de tal grado, que en situaciones determinadas lleguemos a calificar contradictoriamente el nivel de desigualdad según se use uno u otro coeficiente. En esa circunstancia ¿cuál de los coeficientes indica mejor el nivel de concentración? ¿Cómo llegar a decidir qué valor es el más adecuado? ¿Hay o no una medida mejor que otra para dar cuenta de la desigualdad?

Todas estas preguntas comparten la premisa de que, dada la diferencia entre los valores de los indicadores de concentración, necesariamente hay algunos que la miden adecuadamente y los restantes no. Sin embargo, las correlaciones que hemos calculado a partir de los datos de la tabla 2.27 nos permiten sostener que todos ellos son indicadores equivalentes.

*Tabla 2.28. Correlaciones entre las medidas de desigualdad*[30]

| | G | $\sqrt{V_N}$ | $R_M^N$ | $H_N'$ |
|---|---|---|---|---|
| G | | 0.985 | 0.919 | 0.945 |
| $\sqrt{V_N}$ | | | 0.972 | 0.978 |
| $R_M^N$ | | | | 0.995 |
| $H_N'$ | | | | |

Los altos valores que alcanzan los coeficientes de correlación nos dicen que aún cuando sean diferentes las funciones que se asocien a la noción de desigualdad todos ellos mantienen una estrecha relación lineal. En consecuencia, difícilmente podríamos hacer afirmaciones respecto a la superioridad de un coeficiente sobre otro. La información de la tabla 2.27 nos dice que las cuatro medidas son prácticamente equivalentes, a pesar de que sus valores se ubican en distintos niveles. Es este hecho el que explica la gama relativamente amplia de resultados que se puede apreciar en una aplicación particular.

[30] En el cálculo de correlaciones excluimos las tablas que generan los valores 0 y 1 de los coeficientes.

Parece natural, entonces, que para calificar (como alto, mediano o bajo) el grado de desigualdad existente en una distribución, deba recurrirse no sólo a ubicar el valor específico en la escala limitada por 0 y 1, sino que también habrá que situarlo en relación a los valores que haya alcanzada *el mismo coeficiente* cuando se utilizó en otras situaciones. Así, por ejemplo, en el caso de la tabla 2.25 deberíamos comparar cada indicador con el valor que haya asumido en otras regiones o en la misma zona pero para otros años. La posibilidad de llegar a sustentar afirmaciones contradictorias (haciendo uso de varias medidas de desigualdad) se puede evitar si es que sólo comparamos entre sí los valores generados por *cada coeficiente* o equivalentemente si llegamos a la conclusión que una sola medida de concentración responde a nuestros intereses.

En este último sentido resulta de vital importancia conocer las propiedades estadísticas que satisfacen los indicadores de desigualdad. Sobre la base de los pesos relativos que se adjudiquen a cada uno de los criterios se podrá llevar a cabo una selección que reduzca la cantidad de medidas a sólo las "adecuadas". Si además se encuentra que entre los indicadores adecuados sólo algunos presentan propiedades que resultan ser deseables desde el punto de vista teórico[31] disminuye aún más el campo de elección.

En definitiva, con la información que disponemos no es posible saber si la concentración espacial de la población en la zona norte de México en 1970 es alta, mediana o baja. El camino que hemos seguido para evitar las ambigüedades que se originan en los diferentes valores de los coeficientes, nos permitiría saber si el nivel de la concentración es distinto y en qué sentido lo es, con respecto a, por ejemplo, 1950. O bien si es mayor, menor o igual que el nivel de desigualdad (medido por el mismo indicador) de la región central en la misma fecha.

Para concluir quisiéramos destacar que en la gráfica 2.16, se aprecia de manera más o menos clara una concavidad hacia arriba en las funciones $R_M^N$ y $H_N$. Ello se debe a que estas medidas, además de la condición Pigou-Dalton, cumplen con el criterio de cambio relativo. No acontece lo mismo con las curvas correspondientes al coeficiente de Gini y la varianza relativa normalizada porque sólo cumplen con Pigou-Dalton. Una evidencia en el mismo sentido nos la proveen las correlaciones de la tabla 2.26: se puede apreciar que las relaciones más estrechas se dan entre el coeficiente entrópico de Theil normalizado y $R_M^N$, y entre el coeficiente de Gini y la varianza relativa.

[31] La relación entre algunas preguntas que emergen del campo de la teoría y las medidas de desigualdad se trata en el tercer capítulo.

# III: *Medidas de desigualdad para datos agrupados*

## 3.1 *Introducción*

En el capítulo anterior examinamos con algún detalle las ideas centrales que orientan la construcción de medidas estadísticas para el estudio de la desigualdad. El organizar la exposición a partir de los datos no agrupados nos permitió obviar algunas complejidades inherentes a la técnica estadística y, al hacerlo, abordamos con mayor profundidad los conceptos que dan el soporte básico al análisis de la concentración. Sin embargo, para aproximarnos a las condiciones reales en que se desenvuelve el trabajo con la información estadística, debemos considerar el estudio de la desigualdad en distribuciones de frecuencias agregadas. De hecho, sólo en raras ocasiones el investigador tiene acceso a los datos originales, lo más usual es que deba trabajar a partir de la información publicada por algún organismo especializado.

En este capítulo nos referiremos, en primer lugar, a las consecuencias que acarrea la agrupación de la información sobre las medidas que hemos expuesto anteriormente. Sin mayor análisis podríamos sostener que esta agrupación no tiene efecto sobre el rango relativo, en tanto dicho indicador no depende de la distribución de los datos sino sólo de los valores máximo y mínimo. Queremos aprovechar la oportunidad para señalar que tampoco nos preocuparemos por la desviación media relativa, ya que no es sensible a transferencias cuando las observaciones se encuentran ubicadas en el mismo lado de la media. La eliminación del rango relativo y de la desviación media relativa, restringe el campo del análisis a la varianza relativa, la varianza de los logaritmos, al índice de concentración de Gini, a $R_M$ y al índice entrópico de Theil.

En segundo término, nos preocuparemos por analizar algunos temas que emergen desde el momento en que disponemos de datos agrupados. Nos referimos tanto a los nexos conceptuales y cuantitativos que ligan a las medidas de desigualdad para datos agregados y no agregados, cuanto al problema de discernir los aportes que hacen a la concentración total cada una de las categorías.

## 3.2. *Algunas medidas de desigualdad de uso frecuente*

### 3.2.1. *Varianza relativa*

De aquí en adelante utilizaremos el símbolo $Y_i$ en lugar de $X_i$ para denotar el valor de variable correspondiente al *i*-ésimo agregado de observaciones. En este entendido la varianza relativa para datos agrupados se deberá calcular a través de:

$$(3.1) \qquad \boxed{V_Y = \frac{S^2}{\bar{Y}^2} = \frac{\Sigma\,(Y_i - \bar{Y})^2\, p_i}{\bar{Y}^2}}$$

donde $p_i$ simboliza la frecuencia relativa correspondiente al valor de variable $Y_i$ o la marca de clase.[1] Es decir, $p_i$ representa la relación entre el número de observaciones en la categoría *i* y el total: la proporción del total de observaciones que pertenecen al estrato *i*.

Si la marca de clase $Y_i$ coincide con el promedio de las observaciones incluidas dentro de la categoría *i*, es decir, si $Y_i = \bar{Y}_i$ entonces se cumplirá que:

$$V_Y = V$$

La varianza relativa calculada sobre la base de datos agrupados coincidirá exactamente con la obtenida a partir de los datos originales.

Pero si en lugar de los promedios para cada intervalo sólo disponemos de las marcas de clase,[2] entonces habrá una discrepancia entre ambos valores de las varianzas. El tamaño de la diferencia dependerá de la distancia que haya entre la marca de clase y el correspondiente promedio dentro de cada intervalo. Simbólicamente la discrepancia total (d) será función directa de las diferencias $d_i = \bar{Y}_i - Y_i$ en cada uno de los *m* estratos. En efecto,

---

[1] Punto medio del intervalo.

[2] O cualquier medida de tendencia central que no coincida con el promedio.

$$V = \frac{\Sigma(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 p_i}{\bar{Y}^2} = \frac{\Sigma(Y_i + d_i - \bar{Y})^2 p_i}{\bar{Y}^2}$$

$$V = \frac{\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2 p_i}{\bar{Y}^2} + \frac{\Sigma d_i^2 p_i}{\bar{Y}^2} + \frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y}) d_i p_i}{\bar{Y}^2}$$

$$V = V_Y + \frac{\Sigma d_i^2 p_i}{\bar{Y}^2} + \frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y}) d_i p_i}{\bar{Y}^2}$$

(3.2.) $$\boxed{V = V_Y + d}$$

donde:

$$d = \frac{d_i^2 p_i}{\bar{Y}^2} + \frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y}) d_i p_i}{\bar{Y}^2}$$

La varianza relativa, calculada sobre la base de los datos agrupados en que sólo se dispone de las marcas de clase, en general no coincidirá con la que se obtiene a partir de los datos originales. La ecuación nos indica que surgirá una discrepancia que depende básicamente de la diferencia entre el promedio de cada intervalo y la marca de clase, y de la distancia entre las marcas de clase y el promedio general.

Ahora bien, el hecho de sólo disponer de información clasificada en intervalos de clase ¿llevará necesariamente a que la varianza relativa subestime o sobrestime sistemáticamente el grado de desigualdad que afecta a los datos originales? Para responder esta pregunta analicemos la ecuación 3.2. Supongamos, en primer lugar, que $d_i = C$, es decir, que la discrepancia entre las marcas de clase y sus correspondientes promedios es constante para cada intervalo:

$$d = \frac{C^2 p_i}{\bar{Y}^2} + 2C \frac{\Sigma(Y_i - \bar{Y}) p_i}{\bar{Y}^2}$$

Como el segundo sumando es igual a cero, tenemos que:

$$d = \frac{C^2 p_i}{\bar{Y}^2} > 0$$

Lo que conduce a que:

$$V_Y < V$$

En este caso la varianza relativa calculada sobre la base de las marcas de clase subestimaría el grado de desigualdad existente en las observaciones originales.

Este mismo resultado se tendría si:

$$\Sigma(Y_i - \bar{Y})\, d_i\, p_i > 0$$

o bien si:

$$\frac{\Sigma\ d_i^2\, p_i}{\bar{Y}^2} > \left| \frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y})\, d_i\, p_i}{\bar{Y}^2} \right| \text{con} \quad \frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y})\, d_i\, p_i}{\bar{Y}^2} < 0$$

ya que en este caso *d* será siempre mayor que cero.

La única situación en que $V_Y$ sobrestima el grado de concentración existente en los datos originales, estaría conformada por aquellos casos en que *d* fuese menor que cero, lo que ocurre siempre que:

$$\frac{\Sigma\ d_i^2\, p_i}{\bar{Y}^2} < \left| \frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y})\, d_i\, p_i}{\bar{Y}^2} \right| \text{y} \quad \frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y})\, d_i\, p_i}{\bar{Y}^2} < 0$$

Sin embargo, pareciera que esta condición difícilmente podría cumplirse en la práctica ya que $(Y_i - \bar{Y})$ en ocasiones sería de signo positivo y en otras de negativo, de modo que por simple cancelación de términos tenderá a asumir un valor pequeño y en general esperaríamos que bastante menor que el término $\frac{\Sigma\ d_i^2 p_i}{\bar{Y}^2}$ que siempre es positivo. Decimos que habrá una tendencia a que $\frac{2\Sigma(Y_i - \bar{Y})\, d_i\, p_i}{\bar{Y}^2}$ sea pequeña porque si bien se puede esperar que los términos $(Y_i - \bar{Y})$ se cancelen, su multiplicación por los $d_i$, que también asume signos positivos o negativos, puede contrarrestar esa tendencia en la medida que cada vez que $(Y_i - \bar{Y})$ tome un signo determinado el $d_i$ asuma el mismo signo.

Por lo tanto, esperaríamos, en general, que la varianza relativa calculada sobre la base de datos agrupados subestime el grado de concentración existente en los datos originales. Sin embargo, puede haber situaciones muy especiales en que esa tendencia se vea contrarrestada, y en esos casos el coeficiente sobrestima el nivel de concentración original.

### 3.2.2. *Varianza de los logaritmos*

El cálculo de la varianza de los logaritmos para datos agregados se debe realizar a través de:

$$\boxed{L_Y^2 = \Sigma(\ln Y_i - \overline{\ln Y})^2 \, p_i} \tag{3.3}$$

El valor de $L_Y^2$ coincidirá o no con el de $L^2$ (varianza de los logaritmos para datos no agrupados) dependiendo del grado en que se aproxime cada marca de clase ($Y_i$) al promedio de su correspondiente intervalo ($\bar{Y}_i$).

De hecho si $Y_i = \bar{Y}_i$, entonces:

$$L^2 = L_Y^2 = \Sigma(\ln \bar{Y}_i - \overline{\ln Y})^2 \, p_i$$

Si hay una discrepancia entre las marcas de clase y los promedios de cada intervalo, tendremos que $L_Y^2$ será distinto de $L^2$. Ahora bien, expresemos por medio de la razón $C_i = \dfrac{Y_i}{\bar{Y}_i}$ la discrepancia entre la media de un intervalo y su correspondiente marca de clase. Al coincidir ambos valores en cada estrato tendríamos $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 1$. La no coincidencia entre $Y_i$ e $\bar{Y}$ se reflejará en $C_i$ mayores o menores que 1, según que la marca de clase sea respectivamente mayor o menor que la media aritmética.

A partir de la definición de $C_i$, se tiene que:

$$Y_i = C_i \, \bar{Y}_i$$

Al sustituir esta expresión en 3.3.:

$$L_Y^2 = \Sigma(\ln C_i \bar{Y}_i - \overline{\ln Y})^2 \, p_i$$

Operando algebraicamente llegamos a:

$$L_Y^2 = \Sigma(\ln \bar{Y}_i - \overline{\ln Y})^2 \, p_i + \Sigma(\ln C_i)^2 \, p_i + 2\Sigma(\ln \bar{Y}_i - \overline{\ln Y})\,(\ln C_i) p_i$$

Luego:

$$L_Y^2 = L^2 + \Sigma(\ln C_i)^2\, p_i + 2\Sigma(\ln \bar{Y} - \overline{\ln Y})\,(\ln C_i)\, p_i$$

El análisis de la discrepancia entre la varianza de los logaritmos para datos originales y agrupados es equivalente a estudiar las condiciones bajo las cuales se subestimará o sobrestimará la desigualdad existente en las observaciones originales, cuando los cálculos se realizan sobre la base de datos agregados. Como el estudio es similar al que hemos presentado en la sección anterior nos limitaremos a presentar las conclusiones más importantes. Cualquier análisis más detallado lo puede realizar el lector sobre la base de la ecuación (3.3.) y del camino que hemos seguido para estudiar la varianza.

Si $C_i = C$, es decir, la razón de discrepancia entre cada $Y_i$ e $\bar{Y}_i$ es independiente del intervalo de clase; entonces:

$$L_Y^2 < L^2$$

Es decir, la varianza de los logaritmos calculados sobre la base de la distribución agregada, subestimará la desigualdad calculada en los datos originales.

Si:

$$\Sigma(\ln C_i)^2\, p_i > \left| 2\Sigma(\ln Y_i - \overline{\ln Y})(\ln C_i)p_i \right| \text{ y } 2\Sigma(\ln Y_i - \overline{\ln Y})\ln C_i p_i < 0$$

o

$$(\ln Y_i - \overline{\ln Y})\,(\ln C_i)\, p_i > 0$$

entonces:

$$L_Y^2 < L^2$$

y se subestimará la desigualdad existente en los datos originales. Esta seguramente será la situación más común, ya que el caso contrario sólo se presentará si:

$$\Sigma(\ln C_i)^2\, p_i < \left| 2\Sigma(\ln Y_i - \overline{\ln Y})(\ln C_i)p_i \right| \text{ y } 2\Sigma(\ln Y_i - \overline{\ln Y})\ln C_i p_i < 0 \quad < 0$$

condición que difícilmente se dará en una situación práctica tal como lo hemos planteado en el caso de la varianza relativa.

En general podemos afirmar que, al igual que para la varianza relativa, la varianza de los logaritmos calculada sobre la base de datos agregados tenderá a subestimar el valor que arrojaría aplicada sobre la información original. Sólo en situaciones muy especiales se sobrestimará la desigualdad.

### 3.2.3. *Coeficiente de concentración de Gini*

La relación que guarda el coeficiente de Gini con las frecuencias relativas acumuladas de los poseedores y de lo poseído, nos induce a dar un rodeo (consistente en estudiar el efecto de la agregación sobre dichas frecuencias) en lugar de introducirnos directamente al análisis del coeficiente de Gini.

Al tabular la variable en intervalos de clase ocurren dos cuestiones de interés: (i) se pierde el orden de las observaciones en el interior de cada intervalo y (ii) las frecuencias relativas y por tanto las acumuladas de la variable dependerán de la proporción de observaciones que conforman los estratos.

La primera de estas consecuencias está implícita en el criterio que conduce a la construcción de intervalos ya que en este proceso se pierde la individualidad de las unidades observadas que se reemplazan por un valor característico[3] que se asocia a cada estrato. En esta operación se gana en simplicidad al resumir el conjunto total de observaciones pero se pierde la jerarquía dentro de cada grupo.

Por ejemplo, supongamos que agrupamos 20 observaciones cuyos valores, ordenados de menor a mayor, son los siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X_1 = 1$ | $X_2 = 2$ | $X_3 = 7$ | $X_4 = 10$ | $X_5 = 12$ |
| $X_6 = 15$ | $X_7 = 18$ | $X_8 = 20$ | $X_9 = 22$ | $X_{10} = 24$ |
| $X_{11} = 29$ | $X_{12} = 31$ | $X_{13} = 33$ | $X_{14} = 35$ | $X_{15} = 37$ |
| $X_{16} = 41$ | $X_{17} = 43$ | $X_{18} = 46$ | $X_{19} = 49$ | $X_{20} = 85$ |

Al construir una tabla de distribución de frecuencias con cuatro intervalos de clase de tamaño desigual tendremos, por ejemplo:

*Tabla 3.1. Distribución de frecuencias de 20 valores hipotéticos*

| Intervalos de clase | $Y_i$ | $n_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 – 9 | 5 | 3 | 0.15 | 0.02 | 0.15 | 0.02 |
| 10 – 29 | 20 | 8 | 0.40 | 0.25 | 0.55 | 0.27 |
| 30 – 49 | 40 | 8 | 0.40 | 0.57 | 0.95 | 0.84 |
| 50 – 100 | 75 | 1 | 0.05 | 0.16 | 1.00 | 1.00 |
| | | | 1.00 | 1.00 | | |

[3] Que puede ser la marca de clase o cualquier medida de tendencia central asociada a los intervalos.

La tabla indica el número de observaciones en cada estrato pero ya no permite distinguir su ordenación interna. En cambio sí sabemos que los intervalos de clase están ordenados de mayor a menor.

El segundo efecto de la agrupación, relevante para nuestros propósitos en cuanto influye sobre el índice de Gini calculado sobre datos agregados, es la vinculación entre el número o proporción de poseedores y la proporción poseída. La tabla de distribución de frecuencias señala que un 15% de las unidades posee sólo un 2% del total de la variable, que un 40% posee un 25% y así sucesivamente. Mientras más unidades haya en un intervalo determinado esperaríamos que le correspondiese una mayor proporción del total de la variable. Por ejemplo, parece natural esperar que al cuarto estrato le corresponda una menor proporción de la variable que al segundo. En consecuencia, para el examen de la desigualdad no bastará con analizar sólo los valores de $q_i$, sino que habrá que incorporar algún procedimiento que controle el efecto de los diferentes tamaños de los grupos. Con ese fin expondremos las tres vías de solución más utilizadas:

(i) Construir una nueva distribución de frecuencias en que se agrupen las observaciones en categorías de igual tamaño. Supongamos que decidimos presentar la información en una tabla de 10 intervalos ordenados de menor a mayor, cada uno de ellos con el 10% de las observaciones:[4]

Tabla 3.2. *Distribución de frecuencias en diez estratos de los 20 valores hipotéticos*

| No. de intervalo | Porcentaje de las unidades | Porcentaje de la variable |
|---|---|---|
| 1° | 10% | 0.5% |
| 2° | 10% | 3.0% |
| 3° | 10% | 4.8% |
| 4° | 10% | 6.8% |
| 5° | 10% | 8.2% |
| 6° | 10% | 10.7% |
| 7° | 10% | 12.2% |
| 8° | 10% | 13.9% |
| 9° | 10% | 15.9% |
| 10° | 10% | 24.0% |

Esta tabla permite apreciar que del sexto 10% de las unidades en adelante, la proporción de la variable que le corresponde a cada categoría es supe-

[4] En numerosos trabajos en que se estudia la distribución del ingreso hemos encontrado que a cada uno de estos intervalos se les denomina erróneamente deciles.

rior al tamaño de la misma. Es decir, a partir de ese intervalo se encuentran las unidades favorecidas por la repartición.

La homogeneización del tamaño de los intervalos de clase permite estudiar la desigualdad en la repartición de la variable a través del simple análisis del porcentaje que posee cada estrato.

(ii) El segundo camino para hacer comparables los grupos no requiere de una nueva tabulación (como la recién presentada) sino solamente de una operación adicional. La idea consiste en establecer la relación entre la proporción de la variable que corresponde a un estrato y la proporción de observaciones que lo constituye. Es decir, se construye una relación que nos indica el porcentaje de la variable que posee el 1% de las observaciones en cada intervalo. Este criterio aplicado a la tabla 3.1 nos entrega como resultado:

*Tabla 3.3. Cálculo de la relación entre* $q_i$ y $p_i$

| No. de intervalo | $Y_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $q_i / p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.15 | 0.02 | 0.133 |
| 2 | 20 | 0.40 | 0.25 | 0.625 |
| 3 | 40 | 0.40 | 0.57 | 1.425 |
| 4 | 75 | 0.05 | 0.16 | 3.200 |

En la tabla original, al cuarto intervalo le correspondía una menor proporción de la variable que al tercero, lo que a primera vista parecía explicable por el hecho de tener un tamaño menor, pero al calcular la relación $q_i / p_i$ vemos que a cada 1% de las observaciones del cuarto estrato le corresponde 3.2% de la variable y que en el tercero a cada 1% sólo le corresponde 1.425%.

(iii) La tercera vía para controlar el efecto del tamaño consiste en operar sobre la variable y no en las observaciones como en los casos anteriores. El procedimiento consiste en generar una distribución teórica, construida sobre la base de la norma de igualdad democrática, y comparar con ésta la distribución real.

La proporción de la variable que debería corresponder a cualquier estrato en el caso en que el total se repartiera democráticamente, debería ser igual a la proporción de observaciones en el mismo. La tabla que se expone a continuación muestra una columna $q_i^T$ (proporción teórica de la variable que corresponde al intervalo de clase *i*) que se debe comparar con $q_i$.

*Tabla 3.4. Valores teóricos de las proporciones de variable*

| No. del intervalo | $Y_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $q_i^T$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 0.15 | 0.02 | 0.15 |
| 2 | 20 | 0.40 | 0.25 | 0.40 |
| 3 | 40 | 0.40 | 0.57 | 0.40 |
| 4 | 75 | 0.05 | 0.16 | 0.05 |

La simple *diferencia* entre $q_i$ y $q_i^T$ nos señala de inmediato cuáles son los intervalos favorecidos y cuáles los perjudicados en la repartición.

De las tres opciones que hemos presentado para controlar el efecto tamaño de los estratos, las dos primeras son de uso frecuente en la investigación empírica. La tercera, si bien constituye una posibilidad para satisfacer el mismo objetivo que las dos primeras, raras veces se usa de la manera como la hemos expuesto. Pero, cada vez que en un estudio se calcula el índice de Gini, se hace uso implícito de este camino.

En efecto, si a partir de la última tabla que hemos presentado procedemos a calcular las frecuencias relativas acumuladas tendremos:

*Tabla 3.5. Distribución de frecuencia construida a partir de la norma democrática*

| No. del intervalo | $Y_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $q_i^T$ | $P_i$ | $Q_i$ | $Q_i^T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.15 | 0.02 | 0.15 | 0.15 | 0.02 | 0.15 |
| 2 | 20 | 0.40 | 0.25 | 0.40 | 0.55 | 0.27 | 0.55 |
| 3 | 40 | 0.40 | 0.57 | 0.40 | 0.95 | 0.84 | 0.95 |
| 4 | 75 | 0.05 | 0.16 | 0.05 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

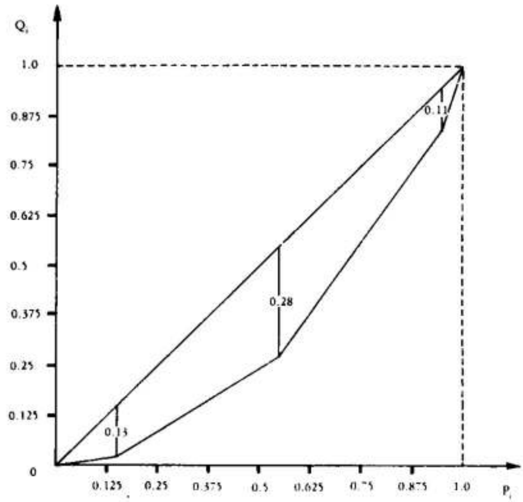
La información que nos proporcionan las tres últimas columnas permite construir el diagrama de concentración. Con $P_i$ y $Q_i^T$ se genera la línea de equidistribución y con $P_i$ y $Q_i$ la poligonal de concentración.

Ahora bien, nuestro problema consiste en calcular el valor del coeficiente de Gini a partir de los datos agregados, que es la forma habitual de presentación de las estadísticas.

Con este fin podríamos proceder a calcular de acuerdo con la definición del indicador de Gini: $\sum_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_i)$; pero por el hecho de haber agregado la información esta suma arrojará un valor menor que el obtenido a partir de los datos originales. Si tenemos *m* intervalos de clase y *n* observaciones, con $m < n$, siempre se cumplirá que:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left| P_i - Q_i \right| < \sum_{i=1}^{n-1} \left| P_i - Q_i \right|$$

*Gráfica 3.1. Diagrama de concentración para datos agrupados*




ya que se reemplazará (n−1) sumandos por (m−1), en que los *m* valores provenientes de la distribución agrupada tendrán valores cercanos a *m* de los valores originales. En el caso de los datos que nos han servido de ilustración, la distribución originará tres sumandos:

$$(0.15 - 0.02) + (0.55 - 0.27) + (0.95 - 0.84) =$$
$$0.13 + 0.28 + 0.11 = 0.52$$

que gráficamente corresponden a las distancias verticales existentes entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz tal como se señala en la gráfica 3.1.

Estos tres puntos tienen una correspondencia aproximada con las discrepancias entre $P_i$ y $Q_i$ ubicadas en el tercer, décimo primer y décimo noveno órdenes, en los datos originales.

*Tabla 3.6. Ordenación de menor a mayor de los 20 datos hipotéticos*

| $P_i$ | $Q_i$ | $P_i - Q_i$ |
|---|---|---|
| 0.05 | 0.0018 | 0.0482 |
| 0.10 | 0.0054 | 0.0946 |
| 0.15 | 0.0179 ➤ | 0.1321 |
| 0.20 | 0.0357 | 0.1643 |
| 0.25 | 0.0571 | 0.1929 |

*Tabla 3.6. Ordenación de menor a mayor de los 20 datos hipotéticos*

| | | |
|---|---|---|
| 0.30 | 0.0839 | 0.2161 |
| 0.35 | 0.1161 | 0.2339 |
| 0.40 | 0.1518 | 0.2482 |
| 0.45 | 0.1911 | 0.2589 |
| 0.50 | 0.2329 | 0.2671 |
| 0.55 | 0.2857 ➤ | 0.2643 |
| 0.60 | 0.3411 | 0.2589 |
| 0.65 | 0.4000 | 0.2500 |
| 0.70 | 0.4625 | 0.2375 |
| 0.75 | 0.5286 | 0.2214 |
| 0.80 | 0.6018 | 0.1982 |
| 0.85 | 0.6786 | 0.1714 |
| 0.90 | 0.7607 | 0.1393 |
| 0.95 | 0.8482 ➤ | 0.1018 |
| 1.00 | 1.0000 | 3.6991 |

El valor de la suma para los datos agregados es más o menos coincidente con:

$$(0.15 - 0.0179) + (0.55 - 0.2857) + (0.95 - 0.8482) =$$
$$0.1321 + 0.2643 + 0.1018 = 0.4982$$

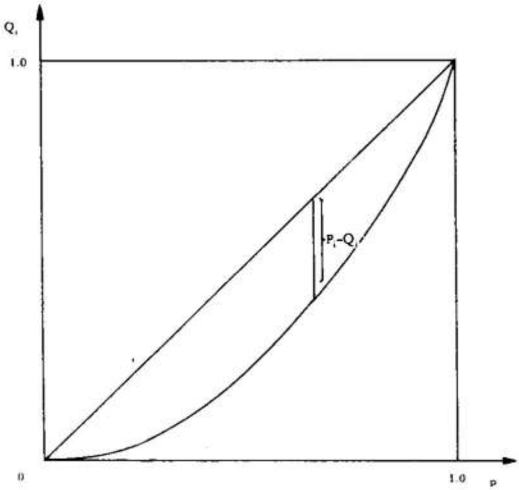
A partir de este ejemplo numérico se puede ver con claridad que la suma en la distribución agregada $\sum_{i=1}^{m-1} (P_i - Q_i)$, será necesariamente menor que la suma en la distribución original $\sum_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_i)$ por cuanto aquélla sólo considera algunos términos, los que están cercanos a los puntos que determinan los límites superiores de los intervalos de clase.

Desde el punto de vista gráfico, intentar aproximarse al valor de: $\sum_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_i)$ a través de $\sum_{i=1}^{m-1} (P_i - Q_i)$ es más o menos equivalente a pretender cubrir el área de concentración a partir de las tres distancias señaladas en la gráfica 3.1, lo cual constituye una subestimación evidente.[5]

[5] Sabemos que para obtener el valor de G se debe dividir $\sum_{i=1}^{m-1} (P_i - Q_i)$ entre $\sum_{i=1}^{m-1} (P_i)$. Si esta última suma se calcula a partir de los datos agrupados entonces también subestimará el valor de $\sum_{i=1}^{n-1} P_i$. Por lo tanto, el grado de error que se cometa al aplicar este procedimiento de cálculo, dependerá de los tamaños relativos de la subestimación que aqueje al numerador y denominador de G.

En consecuencia, para establecer un procedimiento adecuado de cálculo del coeficiente de Gini debemos buscar la manera de cubrir el área de concentración (comprendida entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz) basándose en la información contenida en la tabla de datos agrupados.

*Gráfica 3.2. Area de concentración*




Si aproximamos la poligonal de Lorenz por una línea continua podemos calcular el área de concentración a través de:

$$\int_0^1 (P_i - Q_i)\, d\, P_i$$

Esta área será máxima si los $Q_i$ correspondientes a los primeros $(m-1)$ intervalos son iguales a cero. Luego:

$$\int_0^1 (P_i - Q_i)\, d\, P_i = \int_0^1 P_i\, d\, P_i$$

Si se recuerda que el índice de Gini se define como la relación entre el área de concentración y el área de máxima desigualdad llegamos a:

$$G = \frac{\int_0^1 (P_i - Q_i)\, d\, P_i}{\int_0^1 P_i d\, P_i}$$

Esta forma de calcular el índice de Gini es útil cuando es posible lograr un buen ajuste de una línea continua a los puntos del diagrama de concentración y, que al mismo tiempo, estos puntos sean suficientes como para obtener una estimación confiable de los parámetros de la ecuación.

Sin embargo, la manera usual de realizar el cálculo del coeficiente de Gini para datos agregados surge de descomponer el área en una serie de triángulos y rectángulos que sumados convenientemente, tal como se muestra en el apéndice No. 3, entrega como resultado:

$$\boxed{G = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i (Q_i + Q_{i-1})} \tag{3.4}$$

Fórmula cuya evaluación sólo depende de la información que normalmente se incluye en una tabla de distribución de frecuencias.

El cálculo del índice de concentración de Gini con la expresión 3.4. es relativamente simple y sólo requiere que se obtengan dos columnas adicionales en la tabla de distribución de frecuencias.

*Tabla 3.7. Cálculo del índice de Gini*

| Intervalos de clase | $Y_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $Q_i$ | $(Q_i + Q_{i-})$ | $P_i (Q_i + Q_{i-1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 - 9 | 5 | 0.15 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.003 |
| 10 - 29 | 20 | 0.40 | 0.25 | 0.27 | 0.29 | 0.116 |
| 30 - 49 | 40 | 0.40 | 0.57 | 0.84 | 1.11 | 0.444 |
| 50 - 100 | 75 | 0.05 | 0.16 | 1.00 | 1.84 | 0.092 |
| | | | | | | 0.655 |

Al aplicar (3.4) obtenemos:

$$G = 1 - 0.655 = 0.345$$

En este caso, el valor del coeficiente calculado sobre la base de la tabla, subestima el valor del coeficiente de Gini correspondiente a los valores originales (G = 0.362)

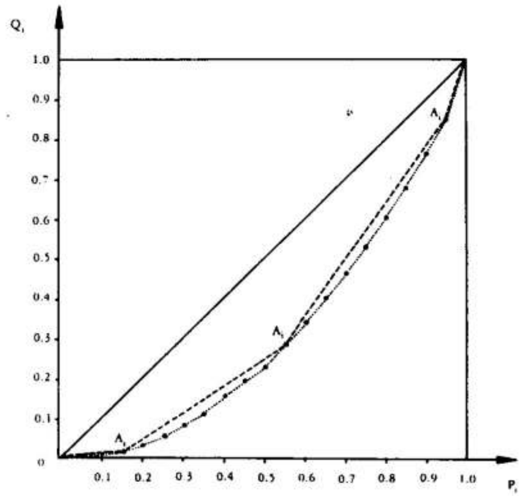
Este resultado es un ejemplo particular de una situación bastante más general. *El valor del índice de Gini, calculado sobre la base de datos agregados, tiende sistemáticamente a subestimar el valor que asume para datos no agrupados.*

Ya hemos visto que una de las consecuencias de la agrupación es que se pierde la información sobre el rango que ocupan las observaciones dentro de una misma clase estadística, y que ésta se reemplaza por el orden relativo de los estratos en que se ha clasificado la variable. La pérdida de información sobre la desigualdad entre los estratos se reflejará en una subestimación del índice de Gini.

Para entender el porqué de la subestimación, supongamos que la desigualdad total existente en la distribución de frecuencias se puede descomponer en dos: las concentraciones entre y dentro de las clases.[6] La interconcentración sería la que surge de la variabilidad entre los intervalos de clase y la concentración interna, aquélla que se produce en el interior de cada estrato. Como en los datos agregados perdemos la distribución de los rangos dentro de cada estrato, desaparece entonces en nuestro cálculo uno de los componentes del nivel global de desigualdad y, por consecuencia lógica, el índice así calculado siempre subestimará la razón de concentración que se obtendría a partir de datos originales. Hay un caso trivial en el cual el índice agregado coincide con el de datos originales y es cuando hay un empate en el rango dentro de cada intervalo de clase, es decir, cuando no hay desigualdad en el interior de cada estrato.

También se puede examinar la subestimación a partir de la gráfica de concentración:

*Gráfica 3.3. Subestimación del índice de Gini*




En este diagrama hemos representado con una línea continua la curva de Lorenz que se obtiene de los datos originales y, por rectas discontinuas, la poligonal resultante de una agrupación en la cual el primer intervalo de clase se forma con las primeras tres observaciones, el segundo con las ocho siguientes,[7] etc.

[6] Más adelante veremos que esta descomposición no es totalmente correcta, pero para nuestra argumentación no es necesario introducir, en este momento, toda la complejidad del tema.

[7] Suponemos, para mayor simplicidad de la exposición, que los límites de los intervalos de clase coinciden con los valores observados de variables.

El hecho de que para realizar el análisis de concentración se deban ordenar previamente los valores de variable (en nuestros desarrollos de menor a mayor), implica que la curva de Lorenz para datos no necesariamente agrupados, debe ser cóncava hacia arriba (excepto en el caso de distribución democrática, en que coincide con la recta de equidistribución) y que mayor será la concavidad mientras mayor sea el grado de desigualdad que presente la variable.

Al representar en esta misma gráfica la poligonal de Lorenz, construida a partir de los datos agregados, se puede apreciar una diferencia entre ambas que conduce a que se subestime el área de concentración. Como el área de máxima desigualdad no se altera por el hecho de que los datos estén o no agrupados, entonces:

$$G = \frac{\text{Area de concentración}}{\text{Area de máxima concentración}}$$

el G calculado sobre la base de datos agrupados necesariamente subestimará el grado de concentración existente en la información original.

Cada recta que conforma el polígono de Lorenz, constituye una expresión gráfica del supuesto que subyace en los cálculos de datos agregados: al no disponerse de los rangos individuales para las unidades ubicadas dentro de un mismo estrato se supone que la distribución interna es uniforme, es decir, se desperdicia o mejor dicho, no se toma en cuenta, la concentración interna. Ahora bien, si la distribución de la variable en el interior de cada estrato es uniforme, entonces la poligonal y la curva de Lorenz coincidirán, ya que esta última resultará de la unión de una serie de puntos ubicados sobre la línea recta.

Pero en tanto haya desigualdad en el interior de cada estrato (lo que se refleja en la concavidad de la curva), existirá una distancia o una diferencia entre las áreas de concentración, discrepancia que hemos sombreado en la gráfica 3.4.

El análisis de la gráfica nos permite no sólo entender las razones que subyacen a la subestimación del grado de desigualdad existente en un conjunto de observaciones cuando se usan datos agrupados, sino también señalar que el tamaño de la discrepancia entre ambos coeficientes de Gini dependerá directamente de la concavidad de la curva de Lorenz, es decir, del nivel de desigualdad existente en los datos no agregados.

Otro elemento que incide directamente sobre la subestimación es el tamaño de cada intervalo de clase. En general, podríamos esperar que mientras mayores sean los tamaños de los intervalos de clase, mayor tenderá a ser la subestimación.

Tomemos a modo de ilustración los datos de nuestra distribución de frecuencias y en lugar de cuatro intervalos de clase definamos sólo dos:

*Tabla 3.8. Cálculo de Gini con dos intervalos de clase*

| Intervalos de clase | $Y_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $Q_i$ | $(Q_i + Q_{i-1})$ | $P_i\ (Q_i + Q_{i-1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 15 | 0.55 | 0.27 | 0.27 | 0.27 | 0.1485 |
| 30 | 65 | 0.45 | 0.73 | 1.00 | 1.27 | 0.5715 |
| | | | | | | 0.720 |

Por lo tanto el valor del coeficiente será:

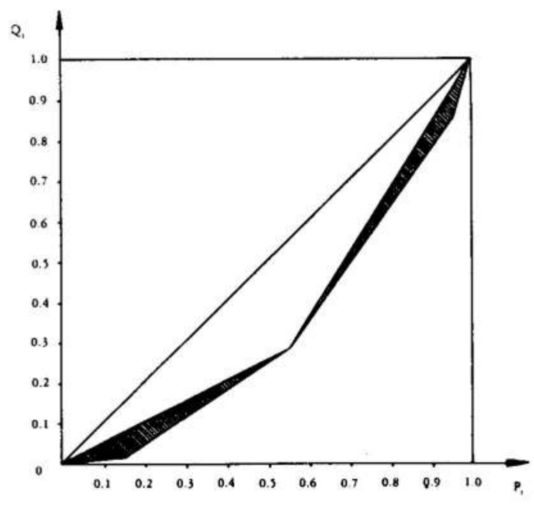
$$G = 1 - 0.72 = 0.28$$

El indice de concentración de Gini para los datos originales es de 0.362, para la tabla con cuatro intervalos de clase es 0.345 y para la distribución con dos estratos es de 0.28. La subestimación crece al disminuir el número de intervalos o equivalentemente al aumentar sus tamaños.

Desde un ángulo meramente lógico, la subestimación debe entenderse como el resultado de una pérdida cada vez mayor de información. En tanto mayores son los intervalos de clase y en consecuencia contengan más observaciones, menos se puede saber de su ordenación interna: menor verosimilitud tiene el supuesto de concentración intraestratos iguales a cero; a mayor tamaño de cada clase, mayor es el número esperado de rangos distintos.

La subestimación inducida por el aumento en el tamaño de los intervalos se visualiza a través de:

*Gráfica 3.4. Efecto de la agregación de categorías sobre el área de concentración*



Sabemos que la poligonal correspondiente a datos agrupados subestima el grado de concentración existente en los datos originales. Ahora bien, al redefinir los intervalos de clase generamos la poligonal de Lorenz representada por las líneas segmentadas. De la gráfica se desprende que el área de concentración asociada a ella es menor que la original. De aquí se concluye que a medida que aumentan los tamaños de los intervalos de clase, mayor es la subestimación del índice de Gini.

En resumen, podemos decir que cuando se realiza el cálculo del índice de Gini con datos agrupados, mayor será la subestimación en tanto que:

(i) Dado el número de intervalos de clase, mayor sea el nivel de concentración dentro de los estratos y

(ii) Dado el grado de la desigualdad, menor sea el número de intervalos de clase.

### 3.2.4. *Algunas medidas derivadas de la gráfica de concentración*

A partir de la gráfica de concentración se pueden definir otras medidas que proporcionan información adicional y que son complementarias al índice de Gini y a la curva de Lorenz.

A continuación expondremos algunas de las más utilizadas.

#### 3.2.4.1. *Razón de ventaja*

Habíamos visto, en el capítulo anterior, que la razón de ventaja se define como la relación entre la proporción del valor total de la variable que corresponde a cada observación, y su participación relativa en el total de casos. Es decir:

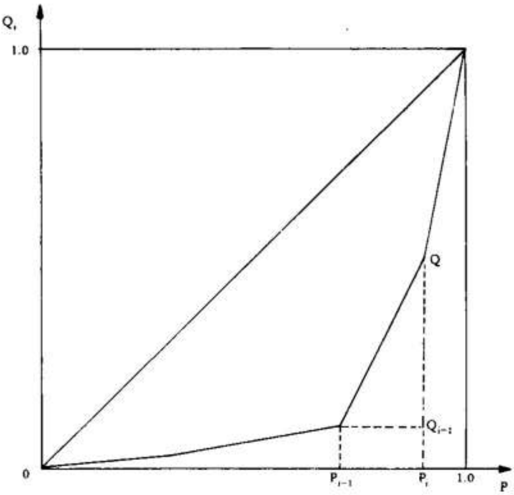
$$R_{v,i} = \frac{X_i \quad \sum_{j=1}^{n} X_j}{1/n} = \frac{q_i}{p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Al clasificar la variable en intervalos esa relación debe reescribirse como

$$(3.5) \qquad \boxed{R_{v,i} = \frac{Y_i / \sum_{j=1}^{m} Y_j}{n_i / n} = \frac{q_i}{p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)}$$

donde $Y_i$ simboliza el valor de la variable para el intervalo *i*. El numerador expresa la proporción de la variable del intervalo de clase *i* dentro del total y $n_i / n$, simboliza el tamaño relativo del mismo.

*Gráfica 3.5. Razón ventaja*




Las razones de ventaja resultan ser iguales a las pendientes de las rectas que conforman la poligonal de Lorenz. Por definición sabemos que la recta que une los puntos $(P_{i-1}, Q_{i-1})$ y $(P_i, Q_i)$ tendrá una pendiente igual a:

$$V_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{q_i}{P_i}$$

La tabla 3.3. nos muestra el resultado de esta operación. La razón de ventaja coincide con una de las maneras utilizadas para controlar el tamaño diferencial de los intervalos de clase. Sabemos que esos valores deben interpretarse como el porciento de la variable que posee cada uno por ciento de las observaciones incluidas en el estrato.

### 3.2.4.2. *Coeficiente de proporciones equitativas*

Este coeficiente sólo resulta ser una extensión del que habíamos analizado en el capítulo anterior. En efecto, se define como el porcentaje de las unidades desfavorecidas por la repartición de la variable. Se calcula por medio de:

$$(3.6) \quad \boxed{R_e = \sum_{i=1}^{r} p_i = P_r}$$

donde r es un punto tal que separa a la distribución en dos conjuntos: uno es el formado por los intervalos cuya razón de ventaja es menor que uno ($q_i / p_i < 1$) y el otro por los estratos en que $q_i / p_i > 1$.

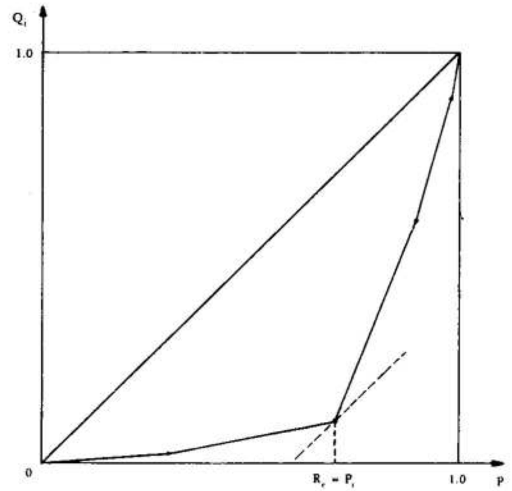
Así podemos calcular $R_e$ en la distribución agrupada (tabla 3.3.) y resulta ser igual a:

$$R_e = 0.15 + 0.40 = 0.55$$

ya que $r = 2$, en virtud que $q_i / p_i < 1$ entre el segundo y tercer intervalos de clase.

Desde el punto de vista geométrico este coeficiente resulta ser igual a la frecuencia acumulada de las observaciones (un valor de abscisa $P_i$) correspondiente a la mayor tangente menor que uno de los segmentos de la poligonal de Lorenz.

*Gráfica 3.6. Coeficiente de proporciones equitativas*




En esta gráfica el coeficiente de proporciones equitativas corresponderá a $P_i = P_r = R_e$, ya que la pendiente en este punto es la mayor tangente inferior a 1. La pendiente en el próximo vértice es mayor que la unidad.

### 3.2.4.3. *Coeficiente de mayoría mínima*

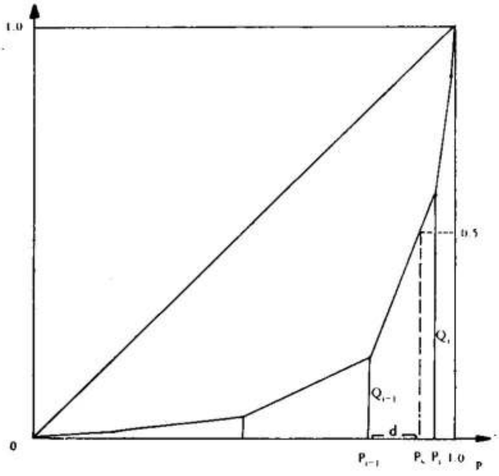
Este también es una simple extensión del que se expuso para el caso de datos agrupados y que fue presentado en el capítulo anterior. Recordemos que desde el punto de vista conceptual se define como el porcentaje de las observaciones que tienen el control de una proporción de la variable mayor que un valor dado. Si por ejemplo, el valor criterio es de un 50%, entonces el coeficiente de mayoría mínima es el valor de abscisa que se determina por medio de:

$$M_m = 1 - P_S$$

donde $P_S$ es el valor de la frecuencia acumulada (valor de abscisa) que corresponde a la ordenada especificada por el criterio (50% en este caso).

Cuando queremos calcular el coeficiente de mayoría mínima en una distribución de frecuencias en que no coincide el valor criterio ($P_S$), con el correspondiente a uno de los intervalos de clase, debemos buscar algún procedimiento que nos permita determinar el valor de $M_m$. Supongamos que la situación a que nos enfrentamos se encuentra bien descrita por medio de la gráfica siguiente:

*Gráfica 3.7. Coeficiente de mayoría mínima*




El valor de $P_S$ no es directamente observable por lo que debemos establecer algún camino que nos permita evaluarlo. Con este propósito usemos las relaciones del diagrama para calcular su magnitud a partir de la suma de la frecuencia acumulada de las observaciones y de la discrepancia: $P_S = P_{i-1} + d$. Ahora bien, para obtener el valor de $P_S$ bastará con determinar $d$ ya que $P_{i-1}$ es una magnitud conocida. Por simple semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{d}{P_i - P_{i-1}} = \frac{0.50 - Q_{i-1}}{Q_i - Q_{i-1}}$$

Al sustituir:

$p_i = P_i - P_{i-1}$

y

$q_i = Q_i - Q_{i-1}$

y despejar *d*, llegamos a:

$$d = p_i \frac{(0.50 - Q_{i-1})}{q_i}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{M_m = 1 - \left[ P_{i-1} + \frac{p_i\,(0.50 - Q_{i-1})}{q_i} \right]} \qquad (3.7)$$

De acuerdo con esta fórmula, tendríamos que:

*Tabla 3.9. Cálculo del coeficiente de mayoría mínima*

| Intervalos de clase | $Y_i$ | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 - 9 | 5 | 0.15 | 0.02 | 0.15 | 0.02 |
| 10 - 29 | 20 | 0.40 | 0.25 | 0.55 | 0.27 |
| 30 - 49 | 40 | 0.40 | 0.57 | 0.95 | 0.86 |
| 50 - 100 | 75 | 0.05 | 0.16 | 1.00 | 1.00 |

Como el valor criterio es $Q_S = 0.50$, las frecuencias acumuladas inmediatamente inferiores serán $Q_{i-1} = Q_2 = 0.27$ y $P_{i-1} = P_2 = 0.55$ y las superiores $Q_i = Q_3 = 0.86$ y $P_i = P_3 = 0.95$. Como $i = 3$ tendremos:

$$M_m = 1 - \left[ 0.55 + \frac{0.40(0.50 - 0.27)}{0.57} \right]$$

$$M_m = 1 - [\, 0.55 + 0.16 \,]$$

$$M_m = 1 - 0.71 = 0.29$$

El 29% de las observaciones disponen de más de un 50% del valor total de la variable.

Esta fórmula puede ser fácilmente extendida para calcular la proporción de observaciones que poseen más de una determinada proporción criterio $k$.

(3.8)
$$\boxed{M_m = 1 - \left[ P_{i-1} + \frac{p_i (k - Q_{i-1})}{q_i} \right]}$$

donde $Q_{i-1}$, es la frecuencia relativa acumulada de la variable que es inmediatamente inferior que el valor criterio $k$ y $Q_i$, la inmediatamente superior. De esta manera se determina el valor del subíndice $i$, y se identifican las frecuencias relativas $p_i$, $q_i$ y $P_{i-1}$.

## 3.3. *Acerca de la forma de la desigualdad: El coeficiente Gini-intervalo*

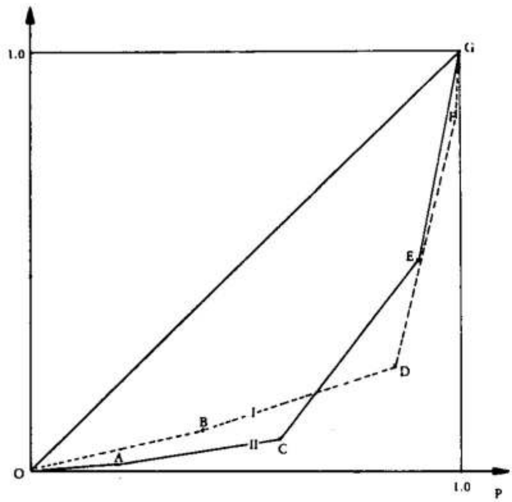
Hemos visto en la sección 2.6 del capítulo anterior, que dos o más conjuntos de datos pueden presentar el mismo nivel de desigualdad lo que no impide que la forma de la concentración sea diferente.

Este hecho se nos presenta también cuando trabajamos sobre la base de distribuciones agregadas que originan dos poligonales (curvas) de Lorenz distintas que delimitan áreas de concentración idénticas. A pesar de la diferencia en la forma de la desigualdad los índices de Gini asumirán el mismo valor.

El problema que abordaremos en esta sección consiste en buscar procedimientos numéricos que (al igual que en el caso de los datos no agrupados) nos permitan estudiar la forma de la concentración.

La construcción de un diagrama de concentración es el camino inmediato para percatarse de las distintas maneras en que se constituye el nivel de desigualdad global.

*Gráfica 3.8. Forma de la concentración*




El área delimitada por la figura OACEG es igual a la que se encuentra en el interior de OBDFG, de manera que el coeficiente de Gini será el mismo para la distribución I que para la II. Ahora bien, el aporte a la desigualdad de los tramos bajos de II es mayor que el que hacen las categorías bajas de I y como el área total es igual en ambos casos, debe cumplirse que la contribución a la desigualdad de los tramos superiores de I debe ser mayor que la que hacen los superiores de II. Es decir, en las distribuciones representadas por la gráfica 3.8 vemos que es distinta la forma que conduce a un mismo nivel global de desigualdad.

¿Qué significan estas formas distintas? Grosso modo la situación representada en la figura es como sigue: en la distribución I las unidades más pobres (vale decir, a las que les corresponde una menor proporción de la variable) reciben proporcionalmente más que las más desfavorecidas por la repartición que refleja la distribución II y que las más ricas en I tienen una participación en el total menor que en II. El mismo nivel de desigualdad se conforma en el caso de la distribución I por un "perjuicio" menor que en II de las unidades pobres y un "beneficio" también menor para las unidades ricas.

Lo anterior es consecuencia de que se debe repartir un pastel de tamaño dado y en tanto a algunas unidades les corresponda una tajada grande, otras necesariamente recibirán una parte más pequeña. Por ello, si las observaciones más pobres de una distribución son menos perjudicadas que las más pobres de otra, se sigue inmediatamente que las más ricas no serán tan beneficiadas como las más favorecidas de la otra distribución.

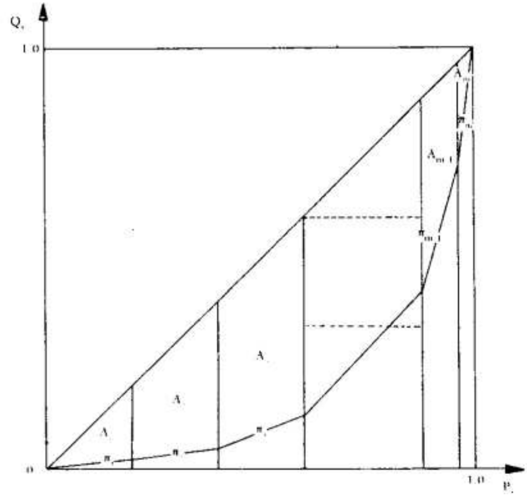
Aun cuando baste construir el diagrama de concentración para distinguir la forma de la desigualdad, resulta ilustrativo abordar su estudio desde el punto de vista numérico.

Para ello aplicamos a cada segmento de la poligonal de Lorenz, la idea básica sobre la cual se construye el índice de Gini. En lugar de tomar toda el área de concentración (A) la descomponemos en una serie de subáreas ($A_1$, $A_2$, ..., $A_m$) tales que sumadas conforman el área total A ($\sum_{i=1}^{m} A_i = A$). A partir de cada una de las $A_i$ se propone un coeficiente de concentración que nos ayuda en el estudio de la forma de la desigualdad. Para ello establecemos la relación entre cada $A_i$ y su correspondiente subárea de concentración máxima $\pi_i$:

$$\boxed{G_i = \frac{A_i}{\pi_i}} \qquad (i = 1,2, \ldots, m) \tag{3.9}$$

obteniéndose así el coeficiente de desigualdad Gini-intervalo ($G_i$).

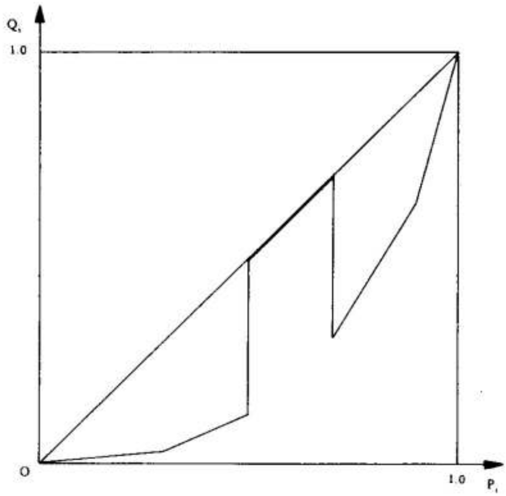
*Gráfica 3.9. Coeficiente Gini-intervalo*




Cada coeficiente $G_j$ puede asumir valores entre cero y uno, ambos extremos incluidos. El valor cero se obtiene cuando $A_i = 0$, es decir, si el segmento de la poligonal de Lorenz se confunde con la línea de equidistribución. $G_i$ será igual a 1 cuando $A_i = \pi_i$, es decir cuando el segmento de la poligonal de Lorenz coincide con el eje de las abscisas. Hay que notar que como las observaciones, o los intervalos de clase están ordenados (en nuestro caso de menor a mayor) basta que $G_1 = 0$ para que todos los restantes $G_i$ sean también iguales a cero. Esto quiere decir que si $G_1 = 0$, entonces $G_2 = G_3 = \ldots = G_m = 0$. Ello es conscuencia de que si los más perjudicados (los que se encuentran en el primer intervalo) tienen una participación en el total de la variable igual a la que les correspondería por la aplicación de la norma democrática entonces no habrá categorías estadísticas beneficiadas.

Por otra parte, el hecho de que si a un intervalo de clase le corresponde menos que la norma democrática, a otro le tendrá que corresponder necesariamente más, unido a la ordenación de menor a mayor participación en la distribución de la variable, implica que no habrá ningún $G_j = 0$ cuando $G_{j-k} > 0$ y $G_{j+k} > 0$, donde tanto *j* como *k* son números enteros positivos y $k < j$. Esta condición significa que si $G_1$ es distinto de cero, ningún segmento de la poligonal coincidirá con la línea de equidistribución. En términos gráficos esta condición significa que es imposible una situación como la siguiente:

*Gráfica 3.10.*




El orden de las observaciones conjuntamente con el hecho de que en la repartición de un total hay perjudicados y beneficiados, tiene como consecuencia que las pendientes de la poligonal (o curva) de Lorenz sean siempre crecientes. En otros términos, en la medida que nos movemos de izquierda a derecha en el diagrama de concentración las razones de ventajas serán siempre crecientes.

Sabemos que hay un punto en que la razón de ventaja es igual a la unidad, y éste divide a las observaciones en dos regiones: en una se encuentran todas las unidades perjudicadas por la repartición y en otra las beneficiadas. Al ordenar los intervalos de clase de menor a mayor, la región de izquierda del punto contendrá los estratos perjudicados y la de la derecha los beneficiados. En otros términos: a la derecha de la razón de ventaja unitaria las pendientes serán siempre mayores que uno; en la medida que nos alejemos de ese punto hacia la derecha las razones de ventaja (y por lo tanto sus equivalentes las pendientes) serán cada vez mayores que uno; cuando nos alejemos hacia la izquierda serán cada vez menores. En consecuencia, en una gráfica de concentración para datos agrupados, las pendientes de la curva de Lorenz necesariamente serán crecientes.

En el apéndice No. 4, se demuestra que al aplicar la definición de $G_i = \frac{A_i}{\pi_i}$ $(i = 1,2, \ldots,m)$ a la gráfica de concentración y al operar algebraicamente se llega al coeficiente Gini-intervalo:

$$\boxed{G_i = 1 - \frac{Q_i + Q_{i-1}}{P_i + P_{i-1}}} \qquad (i = 1,2, \ldots, m) \tag{3.10}$$

Si $Q_i = Q_{i-1} = 0$, es decir, si la participación relativa acumulada de los intervalos $i$ e $(i-1)$ es nula, entonces de acuerdo con (3.10) $G_i = 1$; estaríamos en presencia del máximo de concentración posible. Tal vez sería conveniente señalar que como las observaciones se han ordenado de menor a mayor, entonces también se debe cumplir que $Q_{i-k} = 0$, en que $k = 1,2,\ldots, (i-1)$.

Si por otra parte, $Q_i + Q_{i-1} = P_i + P_{i-1}$, entonces conforme a (3.10) $G_i = 0$. Esta condición se cumple únicamente sobre la línea de equidistribución, ya que:

(i) Como consecuencia de la ordenación de las observaciones:

$$P_{i-1} \geqq Q_{i-1}$$

$$P_i \geqq Q_i$$

Al sumar término a término estas dos inecuaciones se llega a:

$$P_i + P_{i-1} \geqq Q_i + Q_{i-1}$$

y por tanto,

$$(P_i + P_{i-1}) - (Q_i + Q_{i-1}) \geq 0$$

Que en el caso estudiado debe reducirse sólo a la igualdad,

$$(P_i + P_{i-1}) - (Q_i + Q_{i-1}) = 0$$

(ii) Además, por tratarse de frecuencias relativas acumuladas se cumplirá siempre que,

$$P_i \geqq P_{i-1}$$

$$Q_i \geqq A_{i-1}$$

Las dos últimas desigualdades y la igualdad del inciso anterior generan un sistema que sólo se satisface en el caso que:

$$P_{i-1} = Q_{i-1}$$

y

$$P_i = Q_i$$

en cualquier otra situación entra en contradicción. Este resultado se encuentra dentro de lo esperado, en la medida que el índice se ha definido como la relación entre las áreas $A_i$ y $\pi_i$ y el valor unitario sólo ocurre cuando ambas son iguales, es decir, cuando el tramo de poligonal correspondiente al intervalo coincide con el eje de abscisas.

Aun cuando desde el punto de vista aritmético cada $G_i$ puede tomar valores entre 0 y 1 (ambos extremos incluidos) sabemos que si $G_i$ es igual a cero entonces los restantes Gini-intervalos necesariamente serán también nulos. Además, vimos que debido a la jerarquización de las observaciones involucradas en Gini, ningún $G_i$ puede tomar el valor cero si alguno anterior o posterior es distinto a cero. Estas características tienen una explicación de carácter más general en el hecho de que la serie de los coeficientes Gini-intervalo para una distribución dada es decreciente.

Para examinar esta característica consideremos la expresión:

$$Q_1 = a\,P_1$$

Que representa la ecuación de la recta con pendiente *a,* que une el origen con el punto de coordenadas $(P_1, Q_1)$. De acuerdo con (3.10), $G_1$ será:

$$G_1 = 1 - \frac{Q_1}{P_1}$$

y al reemplazar $Q_1$ obtendremos:

$$G_1 = 1 - a$$

es decir, el coeficiente Gini para el primer intervalo es igual al complemento de la pendiente.

Como las inclinaciones de los segmentos que conforman la curva de Lorenz son no-decrecientes, entonces la ecuación de la recta que une el origen con el punto de coordenadas $(P_2, Q_2)$ se puede expresar como:

$$Q_2 = (a + \varepsilon_2) P_2$$

Donde $\varepsilon_2$ es una cantidad no-negativa que refleja la diferencia entre las inclinaciones de primer y segundo segmentos de la poligonal de Lorenz.

Al aplicar (3.10) para el caso en que *i* es igual a 2 tenemos:

$$G_2 = 1 - \frac{Q_2 + Q_1}{P_2 + P_1}$$

Al reemplazar en esta igualdad la relación que establecimos entre $Q_2$ y $P_2$ se llega a:

$$G_2 = 1 - a - \frac{\varepsilon_2}{1 + P_1 / P_2}$$

Como $G_1 = 1 - a$, entonces

$$G_2 = G_1 - \frac{\varepsilon_2}{1 + P_1 / P_2}$$

*Si* $\varepsilon_2$ fuese cero, es decir si el punto $(P_2, Q_2)$ estuviese sobre la recta que une el origen con el punto $(P_1, Q_1)$, entonces $G_2$ sería igual a $G_1$. En cualquier otro caso $G_2$ será menor que $G_1$.

Del mismo modo, si representamos la recta que une al origen con el punto de coordenadas $(P_3, Q_3)$ por:

$$Q_3 = (a + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) P_3$$

donde $\varepsilon_3$ refleja la diferencia entre las inclinaciones del segundo y tercer segmentos de la poligonal. La sustitución de esta ecuación en la fórmula de $G_3$ conduce a:

$$G_3 = 1 - a - \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_3}{1 + P_2 / P_3}$$

Si $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ entonces $G_1 = G_2 = G_3$.

El análisis de esta expresión[8] permite afirmar que $G_3$ es menor que $G_2$. En consecuencia tenemos que:

$$G_1 \geqq G_2 \geqq G_3$$

En general, para el i-ésimo segmento de la poligonal tendremos que la recta que une al origen con $(P_i, Q_i)$ responderá a:

$$Q_i = (a + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_i) P_i$$

y la sustitución originara:

$$G_i = 1 - a - \sum_{j=2}^{i-1} \varepsilon_j - \frac{\varepsilon_i}{1 + \dfrac{P_{i-1}}{P_i}}$$

El estudio[9] de esta igualdad permite afirmar que:

---

[8] La forma de analizar esta expresión se presentará más adelante.

[9] Para analizar la relación entre dos Gini-intervalo consecutivos considérense las expresiones generales.

$$G_{i-1} = 1 - a - \sum_{j=2}^{i-2} \varepsilon_j - \varepsilon_{i-1} \frac{P_{i-1}}{P_{i-1} + P_{i-2}}$$

y

$$G_i = 1 - a - \sum_{j=2}^{i-1} \varepsilon_j - \varepsilon_i \frac{P_i}{P_i + P_{i-1}}$$

Esta última expresión se puede escribir como:

$$G_i = \left[1 - a - \sum_{j=2}^{i-2} \varepsilon_j - (\varepsilon_{i-1}) \frac{P_{i-1}}{P_{i-1} + P_{i-2}}\right] +$$

$$+ (\varepsilon_{i-1}) \frac{P_{i-1}}{P_{i-1} + P_{i-2}} - \varepsilon_{i-1} - (\varepsilon_i) \frac{P_i}{P_i + P_{i-1}}$$

Los términos entre paréntesis son iguales a $G_{i-1}$, por lo tanto:

$$G_i = G_{i-1} - \varepsilon_{i-1} \left(1 - \frac{P_{i-1}}{P_{i-1} + P_{i-2}}\right) - (\varepsilon_i) \frac{P_i}{P_i + P_{i-1}}$$

Como los términos que multiplican a $\varepsilon_{i-1}$ y $\varepsilon_i$ son menores que uno pero mayores que cero, se sigue que:

$$G_i \leq G_{i-1}$$

La igualdad sólo se cumple cuando $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = 0$.

$$G_1 \geqq G_2 \geqq G_3 \geqq \ldots \geqq G_i$$

Nótese que si hay *m* estratos y se cumple que los primeros (m−1) Gini-intervalos son iguales entre sí, el último necesariamente tendrá que ser menor.

Al comparar los valores de $G_i$, tendremos un indicador numérico de la diferencia en la forma de la concentración. Pero antes de seguir el análisis en esta dirección nos preocuparemos por indagar respecto a la vinculación entre los valores de $G_i$ y el del G global. Para determinarla nos basaremos en la definición geométrica de Gini: relación entre áreas.

En el apéndice No. 4, se presenta el desarrollo de esta idea y se demuestra que al ponderar cada $G_i$ por $\pi_i / \pi$, es decir, por la importancia relativa de cada subárea de máxima concentración con respecto al área de máxima desigualdad se llega a:

$$\boxed{G = G_1 \frac{\pi_1}{\pi} + G_2 \frac{\pi_2}{\pi} + \ldots + G_m \frac{\pi_m}{\pi}} \tag{3.11}$$

como

$$G_i = \frac{A_i}{\pi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

entonces,

$$G = \frac{A_i}{\pi_1} \times \frac{\pi_1}{\pi} + \frac{A_2}{\pi_2} \times \frac{\pi_2}{\pi} + \ldots + \frac{A_m}{\pi_m} \times \frac{\pi_m}{\pi}$$

Al simplificar:

$$G = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_m}{\pi}$$

y por lo tanto

$$G = \frac{A}{\pi}$$

Esta expresión demuestra que el sistema de ponderaciones aplicado sobre los coeficientes Gini-intervalo permite obtener el valor de G global.

Los desarrollos geométricos y algebraicos realizados en el apéndice 4 llevan a establecer que para datos agrupados se cumple:

$$\frac{\pi_i}{\pi} = (P_i - P_{i-1})(P_i + P_{i-1})$$

en consecuencia:

$$G = \sum_{i=1}^{m} G_i (P_i - P_{i-1}) (P_i + P_{i-1})$$

Como

$$P_i - P_{i-1} = p_i,$$

entonces esta igualdad puede escribirse de la siguiente manera:

$$(3.12) \qquad \boxed{G = \sum_{i=1}^{m} G_i\, p_i\, (P_i + P_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} G_i \frac{\pi_i}{\pi}}$$

Este resultado nos indica que el coeficiente de concentración de Gini es un promedio ponderado de los coeficientes Gini-intervalo en que los pesos son las correspondientes proporciones entre la subárea y el área de máxima concentración.

Pareciera que cada término de la ecuación (3.11) sólo incorpora información de un intervalo de clase, que si así fuera, los sumandos reflejarían la contribución específica de los estratos a la conformación del nivel de desigualdad global. Entonces, $G_1 \frac{\pi_1}{\pi}$ mediría la cuota con que concurre el primer tramo a la formación de G. La del segundo intervalo se evaluaría a través $G_2 \frac{\pi_2}{\pi}$ y así sucesivamente. Sin embargo, esta interpretación es lícita sólo en apariencia, puesto que tanto los $G_i$ como sus correspondientes ponderaciones dependen de las frecuencias acumuladas $P_i$, $P_{i-1}$, $Q_i$ y $Q_{i-1}$ que por definición contienen a los $p_i$ y $q_i$ referidos a los estratos del primero al i-ésimo (o según el caso, hasta el (i−1)-ésimo)[10]. Como el valor de cada término

[10] Nótese que $G_i$ puede escribirse como:

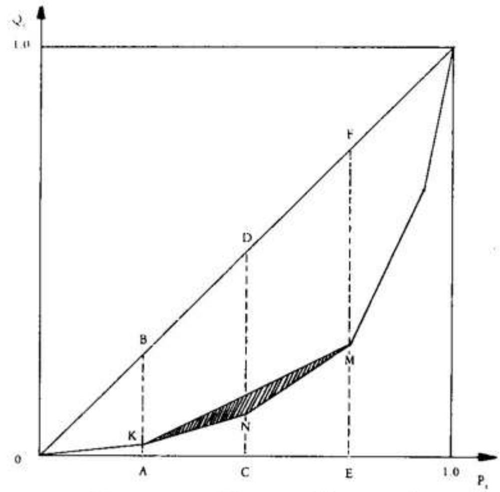
$$G_i = 1 - \frac{2 \sum_{j=1}^{i-1} q_j + q_i}{2 \sum_{j=1}^{i-1} p_j + p_i}$$

y el peso como $\pi_i / \pi = p_i \, (2 \sum_{j=1}^{i-1} p_j + p_i)$.

del G global depende de la información no sólo de la clase que le corresponde sino también de todas las anteriores, se concluye que no se debe interpretar como la aportación propia de ese estrato.

También hay que notar que el coeficiente Gini-intervalo ejerce una especie de control por el tamaño de los intervalos de clase. En efecto, al aumentar el tamaño de los estratos naturalmente tienden también a acrecentarse (entre otras cosas) las frecuencias relativas. Si incrementamos el intervalo *i* lo mismo ocurrirá con $(P_i - P_{i-1})$, es decir, con la distancia a que se encuentran las frecuencias relativas acumuladas de las unidades observadas (ver gráfica 3.11). Una consecuencia directa del aumento del tamaño del intervalo[11] es el crecimiento del área de máxima concentración: pasamos del trapezoide BACD al BAEF. Pero al mismo tiempo aumenta el área de concentración desde BKND a BKMF de modo que al definir el coeficiente como una relación entre la subárea de concentración y la de máxima desigualdad se tienden a compensar los incrementos: el aumento en el tamaño de un intervalo de clase se refleja tanto en el numerador como en el denominador de $G_i$.

*Gráfica 3.11. Tamaños de las clases y el valor del coeficiente Gini-intervalo*




A partir de esta gráfica es posible apreciar que la unión de los intervalos ocasiona una caída en el valor del G global que se explica por la eliminación de la parte KNM del área de desigualdad. Esta disminución también puede analizarse a través de (3.11) que descompone el valor de G en función de los Gini-intervalos. Su variación se deberá básicamente a las alteraciones que experimentan los pesos, puesto que como sabemos, los valores de $G_i$ tenderán a no modificarse.

[11] Para simplificar hemos puesto como ejemplo un caso en que el cambio en el tamaño del intervalo resulta de la unión de dos consecutivos.

Para usar el coeficiente Gini-intervalo en el estudio de la forma de la concentración consideraremos dos distribuciones de frecuencias, lo que nos lleva directamente a preguntarnos por el conjunto mínimo de requisitos que permiten la comparación. El análisis que se desee puede llevar a establecer el paralelo entre dos distribuciones de una misma variable ubicadas en diferentes puntos del tiempo o a buscar las semejanzas en la forma como se reparten dos variables distintas entre el conjunto de unidades. En este último caso el interés radica casi siempre en determinar a través de las formas, la relación entre las variables. Pero si así fuera, sería más conveniente recurrir al análisis de regresión o de correlación. Por ello nuestra atención se dirigirá al cambio que experimenta la distribución de una variable en el tiempo.

La fórmula (3.12) nos dice que para comparar el valor de dos Gini-intervalo es necesario que ambos tengan el mismo número de sumandos, es decir, que el total de estratos sea igual. Por lo tanto, si decidimos agregar dos o más clases en una de las distribuciones, en la otra una operación similar deberá realizarse a fin de que no se viole dicho principio. En la gráfica (3.11) se presentó el efecto que tiene la agregación de dos categorías, sobre la forma de la poligonal. En consecuencia, podríamos alterarla a voluntad a través de la manipulación de este recurso.

Al contrastar la desigualdad en dos distribuciones de frecuencia con diferente forma y el mismo número de intervalos hay que vigilar que las proporciones de las observaciones ($p_i$) sean las mismas, porque en caso contrario los segmentos de las poligonales tendrían diferente longitud (y la forma de la desigualdad cambiaría de inmediato) en los intervalos correspondientes.

Ahora bien, tomemos un ejemplo numérico para ilustrar los conceptos y desarrollos precedentes. Consideremos que disponemos de dos distribuciones de frecuencias que se caracterizan por presentar el mismo valor del coeficiente de Gini global, pero que difieren en cuanto a la forma de la concentración:

*Tabla 3.10. Forma de la concentración*

*Caso I*

| $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $(P_i + P_{i-1})$ | $(Q_i + Q_{i-1})$ | $G_i$ | $\pi_i / \pi$ | $(G_i)(\pi_i / \pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.35 | 0.15 | 0.35 | 0.15 | 0.35 | 0.15 | 0.571 | 0.1225 | 0.070 |
| 0.30 | 0.20 | 0.65 | 0.35 | 1.00 | 0.50 | 0.500 | 0.3000 | 0.150 |
| 0.20 | 0.25 | 0.85 | 0.60 | 1.50 | 0.95 | 0.367 | 0.3000 | 0.110 |
| 0.15 | 0.40 | 1.00 | 1.00 | 1.85 | 1.60 | 0.135 | 0.2775 | 0.037 |
| | | | | | | | | 0.367 |

*Caso II*

| $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $(P_i + P_{i-1})$ | $(Q_i + Q_{i-1})$ | $G_i$ | $\pi_i / \pi$ | $(G_i)(\pi_i / \pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.35 | 0.100 | 0.35 | 0.100 | 0.350 | 0.100 | 0.714 | 0.1225 | 0.088 |
| 0.30 | 0.300 | 0.65 | 0.400 | 1.000 | 0.500 | 0.500 | 0.3000 | 0.150 |
| 0.20 | 0.225 | 0.85 | 0.625 | 1.500 | 1.025 | 0.317 | 0.3000 | 0.095 |
| 0.15 | 0.375 | 1.000 | 1.000 | 1.850 | 1.625 | 0.122 | 0.2775 | 0.034 |
| | | | | | | | | 0.367 |

El total de la columna $(G_i)(\pi_i / \pi_i)$ es igual al valor del Gini agregado. En ambos casos el grado de desigualdad medido por G alcanza a 0.367.

Como en este ejemplo hemos controlado por los tamaños de los grupos (los $p_i$ son los mismos en las dos distribuciones) entonces las contribuciones relativas a la concentración total reflejan directamente los impactos de los $G_i$, es decir, de *la forma* que asume la concentración en ambos casos.

Al comparar los $G_i$ de la tabla vemos que el aporte a la desigualdad que realiza el primer estrato es mayor en la distribución II que en la I. Es decir, aun cuando el nivel de desigualdad global es el mismo, las unidades más desposeídas han resultado más perjudicadas en la repartición del pastel reflejada por la distribución de frecuencias II que en la implícita en I.

Por la naturaleza de las medidas de desigualdad los valores de $G_i$ en los tramos altos tenderán a ser menores en II que en I. Esta es la consecuencia del hecho que lo que pierden algunas unidades otras lo deben ganar.

En este ejemplo numérico se aprecia que la comparación entre los $G_i$ provenientes de distribuciones distintas permite imaginarse la forma como se constituye el nivel de desigualdad global.

Veamos a continuación lo que acontece con la medición de la desigualdad a través de Gini si reagrupamos intervalos de clase. Tomemos la distribución de frecuencias I de la tabla 3.10 y agreguemos el segundo y tercer estratos.

*Tabla 3.11. Cambio en el valor de Gini debido a agrupación en los intervalos de clase*

| $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ | $(P_i + P_{i-1})$ | $(Q_i + Q_{i-1})$ | $G_i$ | $\pi_i / \pi$ | $(G_i)(\pi_i / \pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.35 | 0.15 | 0.35 | 0.15 | 0.35 | 0.15 | 0.571 | 0.1225 | 0.070 |
| 0.50 | 0.45 | 0.85 | 0.60 | 1.20 | 0.75 | 0.375 | 0.6000 | 0.225 |
| 0.15 | 0.40 | 1.00 | 1.00 | 1.85 | 1.60 | 0.135 | 0.2775 | 0.037 |
| | | | | | | | | 0.332 |

Como era de esperarse, de acuerdo con los desarrollos que hemos presentado, al agrupar el segundo y tercer intervalos disminuyó el valor del coeficiente. Ya sabíamos que en la medida que mayor es el nivel de agregación, menor tiende a ser el valor de G. Puesto en otros términos, mientras más grandes son los intervalos de clase, mayor es el tamaño de la "subestimación" con respecto al índice de Gini calculado sobre la base de los datos originales.

Examinemos ahora los $G_i$ antes y después de la agregación de categorías. Hay que notar que en la tabla 3.11 $G_2 = 0.375$, mientras que en el caso I de la 3.10, $G_2 = 0.500$ y $G_3 = 0.367$. Sin embargo, tal como se había establecido el $G_2$ de la tabla modificada no aumenta directamente con el tamaño del nuevo estrato, aún más, aparece un valor intermedio entre $G_2$ y $G_3$ pero más cercano a $G_3$.

Este resultado nos muestra numéricamente que el coeficiente Gini-intervalo es poco sensible a las variaciones en el tamaño de los intervalos de clase y que el $G_i$ resultante de la agregación de dos o más estratos no es igual a un promedio de los $G_i$ de cada uno de ellos. Esta última característica se encontraba implícita cuando examinábamos las consecuencias de la agregación en la gráfica 3.11 y concluíamos que se perdía la parte KNM del área de concentración.

Como conclusión podemos decir que para estudiar la forma en que se constituye el nivel de desigualdad es posible recurrir al coeficiente Gini-intervalo. Si queremos comparar la *forma* de la concentración entre dos o más distribuciones será de utilidad examinar tanto las poligonales de Lorenz como los $G_i$.

## 3.4. *Coeficiente* $R_M$

Para calcular $R_M$, a partir de la información que proporciona una tabla de datos agrupados se usa:

$$\boxed{R_M = \sum_{i=1}^{m} (q_i / p_i)} \tag{3.13}$$

Donde $q_i$ y $p_i$ simbolizan las frecuencias relativas del estrato genérico *i*, de una distribución que tiene *m* intervalos.

El valor que alcance (3.13) será, en general, diferente que el que se obtendría al aplicar $R_M$ a los datos originales. Para examinar el origen de la discrepancia supongamos que formamos un intervalo genérico *h* con $n_h$ observaciones y calculamos su contribución al $R_M$ global:

$$R_{Mh} = q_h \left( \frac{q_h}{p_h} \right) = \frac{q_h^2}{p_h}$$

donde $R_{Mh}$ simboliza el aporte del intervalo *h* a $R_M$.

Cuando el cálculo se hace sobre la base de los datos no agrupados, la contribución al $R_M$ global de las mismas $n_h$ observaciones es igual a:

$$R'_{Mh} = q_{1h}\left(\frac{q_{1h}}{p_{1h}}\right) + q_{2h}\left(\frac{q_{2h}}{p_{2h}}\right) + \ldots + q_{nk,h}\left(\frac{q_{nk,h}}{p_{nk,h}}\right)$$

en que $p_{ih}$ y $q_{ih}$ representan las proporciones correspondientes a la i-ésima observación del estrato *h*.

Luego:

$$R'_{Mh} = \frac{q^2_{1h}}{p_{1h}} + \frac{q^2_{2h}}{p_{2h}} + \ldots + \frac{q^2_{nk,h}}{p_{nk,h}}$$

por simple comparación se aprecia que:

$$R_{Mh} \neq R'_{Mh}$$

para todos los intervalos de clase y por lo tanto se concluye que la medida global arrojará un valor diferente si se calcula con los datos originales, o con la información agrupada.

Para ilustrar estos desarrollos utilizaremos la información referida a las 20 observaciones que hemos usado en las secciones precedentes.

*Tabla 3.12. Cálculo de $R_M$ para los valores originales*

| Valores de la variable | $q_i$ | $p_i$ | $q_i / p_i$ | $q_i(q_i / p_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0018 | 0.05 | 0.0360 | 0.00006 |
| 2 | 0.0036 | 0.05 | 0.0720 | 0.00026 |
| 7 | 0.0125 | 0.05 | 0.2500 | 0.00313 |
| 10 | 0.0179 | 0.05 | 0.3580 | 0.00640 |
| 12 | 0.0214 | 0.05 | 0.4280 | 0.0092 |
| 15 | 0.0269 | 0.05 | 0.5380 | 0.0145 |
| 18 | 0.0321 | 0.05 | 0.6420 | 0.0206 |
| 20 | 0.0357 | 0.05 | 0.7140 | 0.0255 |
| 22 | 0.0393 | 0.05 | 0.7860 | 0.0309 |
| 24 | 0.0429 | 0.05 | 0.8580 | 0.0368 |
| 29 | 0.0518 | 0.05 | 1.0360 | 0.0537 |
| 31 | 0.0554 | 0.05 | 1.1080 | 0.0613 |
| 33 | 0.0589 | 0.05 | 1.1780 | 0.0694 |
| 35 | 0.0625 | 0.05 | 1.2500 | 0.0781 |
| 37 | 0.0661 | 0.05 | 1.3220 | 0.0874 |
| 41 | 0.0732 | 0.05 | 1.4643 | 0.1072 |
| 43 | 0.0768 | 0.05 | 1.5360 | 0.1179 |
| 46 | 0.0821 | 0.05 | 1.6420 | 0.1340 |
| 49 | 0.0875 | 0.05 | 1.7500 | 0.1531 |
| 85 | 0.1518 | 0.05 | 3.0360 | 0.4609 |
| | 1.0000 | 1.00 | | $R_M$ = 1.4716 |

Una de las agrupaciones posibles se presenta en la siguiente tabla de distribución de frecuencias.

*Tabla 3.13. Cálculo de* $R_M$ *para datos agrupados*

| Intervalos de clase | | | $Y_i$ | Total de Var. | $n_n$ | $q_i$ | $p_i$ | $(q_i/p_i)$ | $q_i(q_i/p_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 10 | 5 | 10 | 3 | 0.0179 | 0.15 | 0.1193 | 0.0021 |
| 10 | 20 | 30 | 20 | 150 | 8 | 0.0268 | 0.40 | 0.6200 | 0.1796 |
| 30 | 40 | 50 | 40 | 315 | 8 | 0.5625 | 0.40 | 0.4063 | 0.7910 |
| 50 | 75 | 100 | 75 | 85 | 1 | 0.1518 | 0.05 | 3.0360 | 0.4609 |
| | | | | 560 | 20 | 1.0000 | 1.00 | $R_M$ = | 1.4336 |

Las frecuencias relativas $q_i$ de esta tabla se han calculado usando la expresión $Y_i / Y$ que representa la participación del estrato *i* dentro del total.

Como se puede apreciar, los valores de $R_M$ difieren en ambas tablas.

Nos preocuparemos por estudiar la normalización del coeficiente $R_M$, debido a que las transformaciones necesarias para llevarlo al intervalo definido por los límites 0 y 1, introducen algunas compléjidades que no se presentan cuando se aplica sobre los datos originales.

El valor mínimo de $R_M$ se obtiene cuando a cada proporción de las observaciones le corresponde la misma proporción de la variable:

$$\frac{q_i}{p_i} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

En consecuencia, la distribución democrática de la variable genera:

$$R_M = \sum_{i=1}^{m} q_i(q_i/p_i) = \sum_{i=1}^{m} q_i\,(1) = 1$$

Si, por el contrario, la variable se concentra en una categoría, por ejemplo la *j*, entonces:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_{j-1} = q_{j+1} = \ldots = q_m = 0$$

y

$$q_j = 1$$

Al sustituir estos valores en 3.13 tenemos que en el caso de máxima desigualdad se cumple:

$$R_M = \frac{1}{p_j} = \frac{n}{n_j}$$

donde $n_j$ simboliza la frecuencia absoluta del intervalo j.

Hay que destacar que el máximo de $R_M$ se relaciona inversamente con la proporción de observaciones del estrato *j*, es decir, con aquel que posee el total de la variable. Esta vinculación inversa es consecuencia directa de que el grado en que se desvía la supuesta desigualdad total respecto de la norma democrática depende del tamaño del estrato beneficiado. En efecto, la desigualdad será mayor si el intervalo de clase que tiene el total es relativamente pequeño que si la variable se concentra en uno grande. El grado de máxima concentración será mayor si se produce como consecuencia de la repartición favorable a un estrato que posea el 1% de las observaciones que si benefició a uno que tiene el 80%, por cuanto en el primer caso la distribución estará más alejada de la norma democrática que en el segundo.

De acuerdo con estos resultados $R_M$ siempre asumirá valores en el interior del intervalo definido por:

$$1 \leq R_M \leq \frac{1}{p_j}$$

El índice normalizado entonces será:

$$\boxed{R_M^N = \frac{(R_M - 1)\, p_j}{1 - p_j}} \qquad (j = 1,2,\ldots,m) \tag{3.14}$$

Cuando la variable se reparte equitativamente $R_M = 1$ y $R_M^N = 0$ y si se concentra en el intervalo j, $R_M = \frac{1}{p_j}$ y $R_M^N = 1$. El índice $R_M^N$ asume valores dentro del intervalo

$$0 \leq R_M^N \leq 1$$

en que el 0 corresponde a la equidistribución y el 1 a la concentración total.

La igualdad 3.14 nos muestra que habrá tantos máximos del coeficiente estandarizado como $p_j$ diferentes haya. En efecto, el límite superior no es fijo sino que depende del estrato al que se le adjudique el total. Por ejemplo, si la variable se concentra en el primer intervalo de clase los límites de $R_M$ serán:

$$1 \leq R_M \leq \frac{1}{p_1}$$

pero si se adjudica al quinto:

$$1 \leq R_M \leq \frac{1}{p_5}$$

y si al m-ésimo:

$$1 \leq R_M \leq \frac{1}{p_m}$$

Ahora bien, supongamos que nos interesa aplicar $R_M^N$ en una distribucion de datos agrupados. ¿Cuál de los *m* intervalos de clase deberíamos usar como, su límite superior? La elección que se haga permitirá adscribir diferentes sentidos al resultado que entregue la medida normalizada, lo que se traduce en cierto grado de elasticidad en su uso.

En el caso en que se decida, por ejemplo, usar $p_1$ para determinar el límite superior, el valor de $R_M^N$ podrá interpretarse como el grado en que la distribución efectiva se aproxima a aquélla que se genera bajo el supuesto que hubo una redistribución en favor de las observaciones del primer intervalo. Pero, si elegimos $p_m$, entonces el coeficiente estandarizado nos indicaría el grado de aproximación a la distribución hipotética que surge de suponer que la variable se concentra en el m-ésimo estrato.

Usemos la información de la tabla 3.13 para medir el grado de desigualdad de la distribución con respecto a una repartición hipotética en que el total (560) pasa a manos de la única observación que constituye el cuarto estrato[12].

$$R_M^N = \frac{(1.4336 - 1)}{1 - 0.05} 0.05 = 0.023$$

Este resultado nos señala que la distribución real se encuentra mucho más próxima a la distribución equitativa que al tipo que se plantea en la hipótesis.

Pero si suponemos que el tercer estrato es el único beneficiado por la repartición entonces:

$$R_M^N = \frac{(1.4336-1)\ 0.40}{1 - 0.40} = 0.288$$

Este valor nos permite afirmar que la distribución efectiva se encuentra más próxima a la hipotética que en el caso anterior, pero que de todas maneras el grado de correspondencia entre ambas no es estrecho.

## 3.5. *El coeficiente entrópico de Theil para datos agrupados*

Por el momento sólo sostendremos que este coeficiente de desigualdad, calculado a partir de una tabla de distribución de frecuencia, siempre subestima el grado de concentración existente en los datos originales.

La demostración matemática de esta afirmación así como su prueba numérica se han dejado para el próximo capítulo en virtud que para hacerlo se requiere establecer algunos resultados relativos de la descomposición de esta medida.

---

[12] Nótese que la redistribución alteraría los límites de los intervalos de clase. Pero como ello no incide sobre nuestra argumentación omitimos su consideración explícita.

# IV: Descomposición de las medidas de desigualdad

## 4.1 *Planteamiento del problema*

A lo largo del capítulo anterior nos propusimos, como problema central indagar respecto a las consecuencias que tiene la agrupación de las observaciones sobre la medición de la desigualdad. Nos hemos preocupado por establecer la relación que existe entre las medidas de concentración para los datos originales y para los datos agrupados. Es decir, nos dedicamos a examinar lo que ocurre si disponemos de un conjunto de $n$ observaciones y las agregamos en $m$ intervalos $m \leq n$). La pregunta central que orientó la exposición fue ¿cuál sería la relación entre las medidas de desigualdad susceptibles de ser calculadas en uno y otro caso?

Esta interrogante se convirtió en la columna vertebral de los desarrollos que hemos presentado hasta este punto y las respuestas conforman el contenido básico del capítulo anterior. El problema que nos hemos planteado tiene plena validez en aquellas investigaciones en que se pretende medir desigualdad entre las observaciones originales (ya sea por comparaciones entre pares o como desvío respecto de una norma) en circunstancias en que sólo se dispone de los datos agrupados.

Es usual que los investigadores que sólo tienen acceso a datos secundarios (es decir, que no producen su propia información) deban realizar sus análisis a partir de las publicaciones oficiales y muy difícilmente, por no decir nunca, obtendrán la información original.[1]. Por otro lado, si el esquema teórico del investigador requiere análisis de las observaciones individuales, necesaria-

[1] Debido a la legislación usual que prohíbe a las direcciones de estadísticas divulgar información que permita identificar casos particulares.

mente se producirá una tensión entre los propósitos de la investigación y las fuentes de información. En este caso tiene plena validez teórica y empírica intentar establecer si el coeficiente calculado sobre la base de la distribución subestima o sobrestima, al que se obtiene a partir de los datos originales.

Pero si las categorías teóricas que orientan el estudio se dirigen a referentes empíricos de naturaleza agregada, ya no tendría cabida plantearse preguntas acerca de los efectos de la agregación sobre la medición de la desigualdad existente en los datos originales. Es decir, las interrogantes que guían las decisiones técnicas dependen de los propósitos de la investigación y de la teoría.

Para ilustrar esta idea, tomemos como ejemplo el tipo de estudios de desigualdad que se puede originar en torno a la distribución del ingreso. Por una parte, en la teoría económica del bienestar, adquiere un sentido cabal proponerse como objetivo central de la investigación comparar los ingresos que poseen los distintos miembros de una sociedad[2]. Si sólo se dispone de información agrupada, entonces es relevante preguntarse respecto al sesgo que podría producirse entre la medición realizada sobre la base de esa información y la calculada con los datos no originales. Pero si el trabajo se inscribe en el interior de una línea de pensamiento cuyas categorías teóricas son en sí mismas agregados, tal como sería por ejemplo, el concepto de clases sociales, el tipo de análisis estadístico que se requiere probablemente será diferente. En efecto, si este fuese el caso interesará analizar las *modificaciones* experimentadas, a lo largo del tiempo, por la distribución del ingreso entre las clases sociales, así como las alteraciones que han afectado a sus estratos.

Los planteamientos teóricos que hemos tomado a modo de ejemplo nos muestran como la perspectiva que orienta el estudio incide sobre el planteo de interrogantes que repercuten sobre el análisis y la técnica estadística.

A partir de la teoría económica del bienestar tienden a privilegiarse los problemas de maximización y el análisis en estática comparativa, de manera que no resulta demasiado sorprendente que un estudio de desigualdad, orientado por esta óptica, se plantee como propósito establece el grado y la forma de la desigualdad, existente entre los individuos de una sociedad. De ahí a privilegiar la utilización del índice de Gini hay sólo un paso, ya que según sabemos éste se puede interpretar como una medida tipificada de todas las comparaciones posibles entre pares de observaciones. En este caso se estaría midiendo la desigualdad en la repartición del ingreso a través de todas las diferencias posibles, tomando cada vez las rentas de dos personas. También caen por su propio peso, las preocupaciones respecto a la sobrestimación o subestimación del *grado* de desigualdad cuando sólo se dispone de datos agrupados.

[2] Ver por ejemplos: Amartya Sen, *Op. cit*, pág. 33 y H. Diéguez y A. Petriecolia, *Indices de Desigualdad y su descomposición*, Ensayos Eciel: 5. págs. 132 y 133.

Pero si el estudio está orientado por una teoría cuyo planteamiento básico descansa en los intereses contradictorios de las clases sociales, se buscará un tipo de análisis que dé cuenta de la evolución del conflicto. Se focalizará la manera particular en que se expresan, en la distribución del ingreso, las contradicciones entre las clases sociales. Se dará menos énfasis al análisis del nivel o el grado de desigualdad y se privilegiará el estudio del cambio en la concentración. Además, es evidente que desde esta perspectiva teórica difícilmente tendrá sentido plantearse como problema estadístico la búsqueda de las relaciones entre las medidas basadas en datos originales y agrupados.

La teoría del bienestar se preocupará básicamente por el grado de concentración y el análisis de su subestimación ó sobrestimación. La teoría que descansa en el concepto de clases enfatizará con menos frecuencia el efecto de la agrupación sobre las medidas de desigualdad.

## 4.2. *Consecuencias estadísticas de las proposiciones teóricas*

Analicemos con un poco más de detenimiento la relación entre las concepciones teóricas y sus consecuencias sobre el método estadístico. Pero esta vez prestaremos mayor atención al tipo de análisis de desigualdad que deriva de categorías agregadas y también incluiremos algunas interrogantes que surgen de las teorías que predican sobre el comportamiento de los agregados sociales. Pasaremos entonces a una exposición que privilegia el análisis de las vinculaciones entre categorías teóricas y categorías estadísticas, del cual esperamos extraer algunas interrogantes cuyos orígenes se encuentran fuertemente arraigados a enfoques macrosociales.

Desde el punto de vista estrictamente estadístico la agrupación de observaciones se podría presentar de varias maneras, aun cuando las más usuales serían las siguientes:

i) Una distribución de frecuencias en que la variable ha sido clasificada en intervalos.

ii) Un conjunto de distribuciones de frecuencias como la especificada en (i), pero que unidas conforman la población total. Se trataría de una partición aplicada sobre una población en $K$ categorías mutuamente excluyentes que agotan la población (es decir, además de excluyentes son exhaustivas).

La teoría, en el primero de estos casos, orientará las operaciones que se han de realizar sobre los intervalos de clases de manera que se establezca una medición lo más precisa posible del concepto agregado. Ilustremos esta idea con un par de ejemplos tomados de estudios agrarios. Supongamos que disponemos de una distribución de frecuencias en la que se han clasificado las explotaciones agrícolas por su extensión en hectáreas y que la teoría por medio de la cual se realizará el análisis distingue entre[3] microfincas, explotaciones sub-

[3] Mario Monteforte Toledo, *Centro América 1, subdesarrollo y dependencia*. UNAM, 1972, págs. 191 y 192.

familiares, familiares, multifamiliares medianas y multifamiliares grandes. Cada uno de estos conceptos se define en función del tamaño por área de las explotaciones y a través de ellos se agrupan las observaciones para establecer una tabla como la siguiente:

*Tabla 4.1. Centroamérica distribución de la tierra según grupos de tamaños, en hectáreas, entre los años 1950 y 1952*[4]

| *Tamaño* | *Número* | *Superficie* |
|---|---|---|
| Microfincas | 160.079 | 73.369 |
| Subfamiliar | 517.842 | 1.462.652 |
| Familiar | 136.297 | 2.455.345 |
| Multif. Media | 41.415 | 4.202.155 |
| Multif. Grande | 3.513 | 4.910.845 |
| TOTAL | 859.146 | 13.105.766 |

La construcción de esta distribución de frecuencias sólo puede realizarse a través de la aplicación de los conceptos: microfincas, explotaciones subfamiliares, etc., sobre los intervalos de clase. Son éstos los que orientan la elaboración de sus referentes empíricos. De aquí en adelante es posible continuar con un análisis de desigualdad en el que, en principio, no tendrá cabida preguntarse acerca de la subestimación o sobrestimación de la desigualdad en los datos individuales.

El segundo ejemplo proviene de la obra de Lenin *El desarrollo del capitalismo en Rusia*[5] en la que, al plantearse como uno de los objetivos de la investigación constatar la presencia o ausencia del capitalismo en el agro ruso de fines del siglo XIX, decide analizar la información estadística disponible. Después de sopesar las bondades de la información a su alcance en relación a su objeto de estudio Lenin se decide en favor de la distribución de los predios agrícolas por áreas sembradas (desiatinas), tal como lo muestra, a modo de ilustración la siguiente tabla:

*Tabla 4.2*[6]*. Distrito del Dnieper*

| Grupos de campesinos | % de todas las haciendas | trabajadores varones x 1 Hrea. | De nadiel | De tierra comprada | Arrendado |
|---|---|---|---|---|---|
| I. Que no siembran | 9.0 | 1.0 | 6.4 | 0.9 | 0.1 |
| II. Que siembran hasta 5 desiatinas | 11.0 | 1.1 | 5.5 | 0.04 | 0.6 |

[4] Idem, pág. 197.

[5] Lenin, El *desarrollo del capitalismo en Rusia*. Ed. Progreso, Moscú, 1974.

[6] Lenin, *Op. cit.* Esta tabla se obtuvo de la combinación de las tablas de las páginas 59 y 60.

| Grupos de campesinos | % de todas las haciendas | trabajadores varones x 1 Hrea. | De nádiel | De tierra comprada | Arrendado |
|---|---|---|---|---|---|
| III. Que siembran de 5 a 10 desiatinas | 20.0 | 1.2 | 8.7 | 0.05 | 1.6 |
| IV. Que siembran de 10 a 25 desiatinas | 41.3 | 1.4 | 12.5 | 0.60 | 5.8 |
| V. Que siembran de 25 a 50 desiatinas | 15.5 | 1.9 | 16.6 | 2.3 | 17.4 |
| VI. Que siembran más de 50 desiatinas | 3.1 | 2.3 | 17.4 | 30.0 | 44.0 |
| | 100.0 | | | | |

Sobre la base de la información proporcionada por esta tabla y como un paso intermedio para llegar a establecer la existencia del proletariado y de la burguesía agraria, Lenin construye una estratificación de los campesinos donde distingue ricos, medios y pobres: si el área sembrada es tal que no alcanza para el sustento de una familia entonces el campesino es pobre; si alcanza aproximadamente es medio, y si supera la capacidad de consumo familiar es rico. La aplicación de estas categorías sobre las distribuciones de frecuencias publicadas por los censos rusos de la época le permite construir los tres agregados de campesinos: los pobres se encuentran en los estratos I, II, y III; los medios en el IV y los ricos en el V y VI[7].

El nivel, tipo y forma de la desigualdad existente en la posesión de la tierra, en la compra y venta de fuerza de trabajo y en las relaciones técnicas de producción le permite determinar los referentes empíricos de la burguesía y el proletariado y la existencia de sectores medios[8].

Hay que destacar en este ejemplo, al igual que en el anterior, la manera como operan los conceptos teóricos sobre las categorías estadísticas (intervalos de clase) para llegar a construir sus referentes empíricos. Creemos que no está demás insistir que en este caso tampoco pareciera despertar interés alguno realizar mediciones sobre el grado de concentración al nivel de los predios agrícolas.

La otra manera como frecuentemente se presenta la información referida a categorías agregadas es mediante un conjunto de distribuciones de frecuencias que unidas conforman una global. Las *n* observaciones que constituyen la población se clasifican en *K* grupos y para cada uno de ellos se presentan sus intervalos de clase.

Este sería el caso, por ejemplo, de la información clasificada por ocupaciones y tramos de ingreso, en la que en el interior de las categorías, obreros,

[7] Para ver cómo se justifica esta decisión, véase Lenin, *Op. cit*, pág. 58.

[8] Ver por ejemplo *Op. cit.*, pág. 57 a 74.

empleados, empleadores, trabajadores por cuenta propia, fuerzas armadas y empleados domésticos[9] ($K=6$), tenemos la distribución por tramos de ingreso. También podrían servir como ilustración los datos sobre distribución espacial de la población, tomando como unidad de observación los municipios clasificados como urbanos o rurales ($K=2$) y dentro de ellos la distribución de la edad de sus habitantes.

El hecho de que esté al alcance del investigador el tipo de información que hemos descrito, unido a la naturaleza de su interés conceptual, hace surgir preguntas referidas a la contribución relativa que realiza cada agregado a la desigualdad, así como a la vinculación que existe entre el nivel global de concentración y la manera como se reparte la variable en el interior de cada estrato.

Es evidente que esta clase de interrogantes difícilmente surgirá de la preocupación sobre el grado y forma de la desigualdad existente al nivel de las observaciones individuales (personas, familias, empresas, etc.). Por otra parte, aun cuando las preguntas deriven naturalmente de teorías que privilegian el análisis de categorías agrupadas, difícilmente el estudio tendrá una expresión empírica si no se cuenta con la información adecuada. En esta última situación el problema se agota, según hemos visto, en la forma como deben aplicarse los conceptos sobre la información estadística para generar sus referentes empíricos.

La consecuencia estadística inmediata que produce la conjunción de una teoría que define conceptos agregados con la disponibilidad o la posibilidad de construir la información adecuada, es la de plantearse el problema de las vinculaciones entre la desigualdad total y las desigualdades entre sectores y en el interior de ellos, es decir, un problema estadístico típico de descomposición de una medida. En otros términos las inquietudes relativas al aporte que realiza cada agregado y las relacionadas con la contribución que hace su distribución interna a la desigualdad total.

A manera de ilustración supongamos que poseemos información sobre la distribución del ingreso por ocupaciones que presenta las características que hemos señalado anteriormente. Además el análisis se lleva a cabo a través de una teoría que define sus conceptos en el nivel agregado. Parece natural que en estas circunstancias se recurra a una técnica estadística que permita descomponer el nivel de desigualdad total, en una parte que se explique por la concentración del ingreso entre ocupaciones y en otra que dependa de la manera en que se reparte el ingreso en el interior de cada ocupación. Esta última será la resultante de las desigualdades en la distribución del ingreso dentro de los sectores de obreros, empleados, empleadores, etc.

De las consideraciones anteriores se deriva que habrá que agregar la pro-

---

[9] Arturo León, *Antecedentes para el análisis de la distribución personal y familiar del ingreso. Chile 1970-1973*, Proelce, 1976.

piedad de descomposición, a los criterios básicos que sirven para juzgar las bondades de las medidas de desigualdad. Pero no se trata de un requisito que debe cumplirse en general, tal como aquellos que hemos incluido en el primer capítulo, sino que se encuentra íntimamente vinculado a la perspectiva de reconstrucción de la realidad implícita en la posición teórica adoptada. En efecto, se trata de un criterio que prioritariamente podría adquirir sentido en relación a las preguntas de investigación que surgen desde las teorías que pretenden aprehender los procesos macrosociales.

Orientados por esta idea general examinaremos el coeficiente de Gini, la varianza relativa, la varianza de los logaritmos y el índice de Theil. En los desarrollos incluidos en las próximas secciones no hemos contemplado el coeficiente $R_M$ porque no sabemos si es posible descomponerlo.

### 4.3. *Descomposición del índice de Gini*

Al dividir una población en *K* grupos se abre la posibilidad de distinguir entre tres tipos de desigualdad: la existente en la población total; la que se debe a la forma como se distribuye la variable entre los grupos, es decir, a la participación diferencial de cada agregado en el total, y la interna de cada grupo, vale decir, aquella parte de la desigualdad que surge de la repartición de la variable al interior de cada estrato. En otros términos, la clasificación de las observaciones en un conjunto de categorías mutuamente excluyentes y exhaustivas, posibilita individualizar la contribución que realizan las concentraciones inter e intra grupos al nivel global de desigualdad.

Si midiéramos los componentes que hemos distinguido a través del índice de Gini ¿cuál sería la relación entre el coeficiente global y los calculados entre los grupos y dentro de ellos?

El estudio realizado por Pyatt[10], además de proporcionar una nueva interpretación para el índice de Gini basada en la teoría de los juegos, estableció que éste puede descomponerse en tres partes:

(i) Una que depende de la desigualdad entre los grupos ("inter-Gini").

(ii) Otra que proviene de los niveles de concentración de la variable en el interior de cada agregado ("intra-Gini").

(iii) Y una tercera cuya magnitud es función del grado de sobreposición que haya entre los intervalos de clase (o los valores de la variable)[11]. Hay que recordar que en el cálculo de Gini intervienen las observaciones ordenadas. Este orden general se rompe en tantas jerarquías parciales como grupos se construyan a partir de los datos originales y nada garantiza que no haya intersecciones entre los órdenes.

---

[10] Graham Pyatt, "On the Interpretation and Disaggregation of Gini Coefficients". *The Economic Journal 86,* junio de 1976, págs. 243-255.

[11] *Op. cit.,* pág. 243.

De manera que si:

G : índice global de concentración
$G_E$: índice de interconcentración
$G_D$: índice de intraconcentración
$G_S$: índice de concentración debido a la sobreposición de intervalos en los distintos grupos.

Entonces:

$$G = G_E + G_D + G_S \tag{4.1}$$ [12]

Este autor interpreta el índice de Gini como la ganancia esperada de un juego en que un miembro de una población selecciona un ingreso (Y) del conjunto $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Si el valor elegido (Y) es mayor que el que posee ($Y_i$) entonces el individuo se queda con el valor seleccionado; si acontece lo contrario mantiene su ingreso original.

Esta manera de considerar el índice descansa claramente en concepciones teóricas que privilegian el análisis en nivel individual. La descomposición puede interpretarse como un intento de resolver la tensión existente en los trabajos que privilegian teóricamente lo individual pero sólo tienen acceso a datos agregados.

Desde este punto de vista, se pueden extraer algunas conclusiones respecto a sesgos en el cálculo G:

(i) Si disponemos de la distribución de frecuencias en el interior de cada grupo, entonces se puede calcular el G global sin sesgos, pero hay que tomar en cuenta sus tres componentes.

(ii) Si pensamos que los *K* grupos son los intervalos de clase de una distribución de frecuencias, entonces sólo se podrá calcular $G_E$ y como los otros índices de concentración son mayores o iguales a cero, necesariamente:

$$G \geqq G_E$$

es decir, el índice de concentración calculado sobre la base de datos agregados necesariamente subestimará la desigualdad existente en las observaciones individuales.

La descomposición propuesta por Pyatt se plantea básicamente como una manera de evaluar el impacto de algunas variables explicativas relevantes[13].

---

[12] El lector interesado en las fórmulas de cálculo involucradas en (4.1) puede consultar Diéguez y Petrecolia, *Op. cit.*, págs. 142-147.

[13] Diéguez y Petrecolia, *Op. cit.*, pág. 135.

Hay que remarcar que el desarrollo de la descomposición del índice de Gini se inscribe directamente en la interpretación que lo entiende como un conjunto normalizado de diferencias entre pares de valores y que el centro del interés está constituido por lo individual. En consecuencia no surgen interrogantes acerca del aporte que hacen los grupos a la concentración total ni del que realizan las distribuciones internas de la variable.

Estas preguntas emergen con naturalidad desde teorías que descansan en conceptos que superan lo individual. Sin embargo, a partir de perspectivas teóricas cuyos conceptos requieren de referentes empíricos agregados, tendremos dificultades para interpretar el término que se genera por el traslape de algunos grupos. Así por ejemplo, si estamos interesados en estudiar la desigualdad en la distribución del ingreso entre proletarios, sectores medios y burguesía, ¿tendría sentido saber que una parte de la concentración total se debe, por ejemplo, al hecho de que algunos estratos proletarios presentan ingresos superiores a los de los tramos bajos de empleados? En caso que alguien pueda responder afirmativamente esta pregunta, es decir, en tanto pueda sustentar razonablemente que sí tiene interés desde esa óptica distinguir el factor traslape, entonces podría hacerse uso de la descomposición de Gini. Si la respuesta es negativa, lo que nos parece sería lo normal para este tipo de teorías (por cuanto no adjudican un papel relevante a lo individual sino que sus conceptos apuntan hacia agregados sociales), difícilmente podremos encontrar una ubicación conceptual plausible al término que surge de la superposición de las distribuciones de frecuencias.

Planteadas así las cosas, se requeriría de una medida de desigualdad que se agote en la concentración dentro y entre estratos. Con esta guía pasaremos a examinar la manera como se descompone la varianza y el sentido que puede tener para el análisis de la información agregada.

### 4.4. *Uso de la descomposición de la varianza en el análisis de desigualdad*[14]

Al dividir un conjunto de *n* observaciones en *K* grupos es posible calcular dos clases de varianzas: una que tome en cuenta la dispersión de las medias de cada grupo con respecto al promedio general, y la otra que considere las dispersiones en el interior de cada uno de ellos. El primer tipo de cálculo genera la varianza entre estratos, en tanto que el segundo entrega elementos para obtener las varianzas internas. En efecto, tendremos tantas medidas de variabilidad como agregados (K) que deben promediarse para obtener la intravarianza.

[14] Para el desarrollo de esta sección nos hemos basado en el trabajo de Ackerman et. al. "Algunas Técnicas Estadísticas para estudiar el cambio en los niveles de concentración de una variable". *Demografía y economía*. Vol. XIII, Núm. 3 (39). El Colegio de México, México 1979.

El teorema de descomposición de la varianza establece que:

$$\boxed{S^2 = S^2_E + S^2_D} \tag{4.2}$$

es decir, que la varianza de todas las observaciones ($S^2$) es igual a la suma de la intervarianza y la intravarianza ($S^2_E$, $S^2_D$).

Sabemos que para obtener la varianza a partir de una tabla de distribución de frecuencias se debe aplicar:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 p_i$$

en que $Y_i$ simboliza ya sea la marca de clase del intervalo genérico *i* o bien su promedio, $\bar{Y}$ la media aritmética de todas las observaciones y $p_i$ la frecuencia relativa.

La intravarianza ($S^2_D$) surge de:

$$S^2_D = \sum_{k=1}^{K} S^2_{D,k}\, p_k;\; p_k = \frac{n_k}{n} \; (k = 1,2,\ldots,K)$$

donde $S^2_{D,k}$ simboliza la varianza del grupo genérico k y $p_k$ denota su importancia dentro del total:

$$S^2_{D\,k} = \sum_{i=1}^{n_k} (Y_{k,i} - \bar{Y}_k)^2 p_{k,i} \; (k = 1,2,\ldots,K)$$

en que $Y_{k,i}$ denota el valor de la marca de clase o el promedio del intervalo *i*; $\bar{Y}_k$ la media del grupo y $p_{k,i}$ las frecuencias relativas de los estratos.

La varianza entre estratos se obtiene a través de:

$$S^2_E = \sum_{k=1}^{K} (\bar{Y}_k - \bar{Y})^2 p_k$$

en que todos los símbolos ya han sido previamente definidos.

Sabemos que para evitar la sensibilidad de la varianza ante cambios proporcionales en los valores de la variable, hay que corregirla por el cuadrado de la media, con lo cual la descomposición asume la forma:

$$\boxed{\frac{S^2}{\bar{Y}^2} = \frac{S^2_E}{\bar{Y}^2} + \frac{S^2_D}{\bar{Y}^2} = (CV)^2_E + (CV)^2_D} \tag{4.3}$$

donde:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{S^2_D}{\bar{Y}^2} &= \frac{S^2_{D1,p1}}{\bar{Y}^2} + \frac{S^2_{D2,p2}}{\bar{Y}^2} + \ldots + \frac{S^2_{Dk,pk}}{\bar{Y}^2} = \\ &= (CV)^2_D = (CV)^2_{D,1} + (CV)^2_{D,2} + \ldots + (CV)^2_{D,K}\end{aligned}} \tag{4.4}$$

y

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{S^2_E}{\bar{Y}^2} = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} p_1 + \frac{(\bar{Y}_2 - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} p_2 + \ldots + \frac{(\bar{Y}_K - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} p_K \\ &(CV)^2_E = (CV)^2_{E,1} + (CV)^2_{E,2} + \ldots + (CV)^2_{E,K}\end{aligned}} \tag{4.5}$$

Si sumamos término a término las ecuaciones (4.4) y (4.5) llegamos a (4.6):

$$\boxed{\begin{aligned}(CV)^2 = \frac{S^2}{\bar{Y}^2} &= \left[(CV)^2_{D,1} + (CV)^2_{E,1}\right] + \left[(CV)^2_{D,2} + (CV)^2_{E,2}\right] + \ldots + \\ &+ \left[(CV)^2_{D,K} + (CV)^2_{E,K}\right]\end{aligned}} \tag{4.6}$$

igualdad que nos da la posibilidad de descomponer la concentración total en la suma de los aportes de cada grupo a la desigualdad dentro y entre estratos.

La ecuación (4.3) nos permite sostener que si para medir la desigualdad usamos la varianza relativa, estaremos en condiciones de identificar el aporte que hacen los grupos (interconcentración) y el que realizan sus correspondientes distribuciones internas (intraconcentración).

La igualdad (4.4) expresa la composición de la intradesigualdad, de manera que posibilita la jerarquización de los grupos en función de las contribuciones que se originan en la distribución interna de la variable.

La ecuación (4.5) evalúa la contribución de cada grupo a la interdesigualdad. Es decir, el aporte de cada agregado de acuerdo a la posición relativa que ocupan con respecto al promedio general.

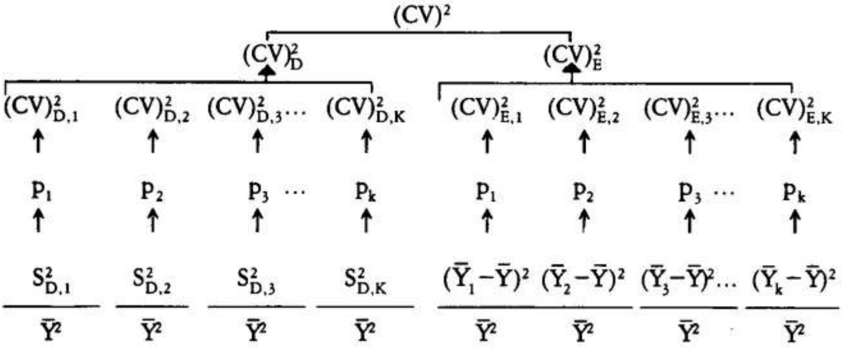
En algunos estudios puede resultar de interés analizar qué parte de la variabilidad del grupo proviene de cada intervalo de clase. Para evitar complicaciones algebraicas innecesarias no continuaremos los desarrollos en esta línea[15].

El procedimiento de descomposición de la varianza relativa puede representarse gráficamente de la siguiente manera:

---

[15] Los lectores interesados en profundizar en este tipo de análisis pueden consultar las obras citadas de Ackerman, y de Cortés y Yocelevzky.

*Gráfica 4.1. Descomposición de la varianza relativa*




En esta gráfica debe entenderse que los $p_k$ multiplican a los términos inmediatamente inferiores a ellos y que ese producto genera los superiores. Así por ejemplo:

$$\frac{S^2_{D,3}}{\bar{Y}^2} \times p_3 = (CV)^2_{D,3}$$

Los términos $(CV)^2_{D,k}$ y $(CV)^2_{E,k}$ se reúnen en un punto de suma para conformar $(CV)^2_D$ y $(CV)^2_E$. En consecuencia, los primeros pueden interpretarse como las contribuciones a la desigualdad que se deben a la concentración interna de la variable en cad agregado $((CV)^2_{D,k})$ y a la distribución del total entre los grupos $((CV)^2_{E,k})$.

Como se puede apreciar en esta gráfica y en las ecuaciones (4.4) y (4.5) tales aportes no sólo dependen de la distribución de la variable sino también de los tamaños relativos de los grupos. En efecto, en el caso de la interdesigualdad hay una parte que se mueve de acuerdo al promedio de la variable en los grupos $\frac{(\bar{Y}_k - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2}$, y otra que depende de sus tamaños relativos. Así, aún cuando un agregado se aleje mucho de la media, su contribución a la desigualdad será menor si su tamaño relativo es pequeño.

En el caso de la intradesigualdad se presenta una situación similar donde también cabe individualizar el papel que juegan los valores de la variable y los tamaños relativos. Sin embargo, también entran en juego los tamaños relativos de los intervalos de clase, implícitamente considerados en $S^2_{D,i}$.

Usaremos las 20 observaciones de la sección 3.2.3 para ilustrar la aplicación de las fórmulas que hemos presentado. También mostraremos los caminos analíticos que abre el teorema de descomposición. Partiremos del supuesto de que la información se refiere a la variable ingreso y que ha sido clasificada regionalmente en tres grupos, norte, centro y sur y que los resultados fueron los siguientes:

*Tabla 4.3. Distribución regional (hipotética) del ingreso*

| | *Norte* | *Centro* | *Sur* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| | 31. | 15 | 1 | 47 |
| | 18 | 12 | 2 | 32 |
| | 29 | 22 | 7 | 58 |
| | 20 | 10 | 37 | 67 |
| | 46 | 24 | — | 70 |
| | 41 | 35 | — | 76 |
| | — | 85 | — | 85 |
| | — | 43 | — | 43 |
| | — | 49 | — | 49 |
| | — | 33 | — | 33 |
| $\bar{Y}$: | 30.833 | 32.800 | 11.750 | 28.0 |
| $S^2$: | 103.139 | 455.960 | 217.688 | 369.200 |

En este ejemplo $K = 3$ y los tamaños de cada grupo son: 6, 10 y 4; respectivamente, por lo que $p_1 = 0.30$; $p_2 = 0.50$ y $p_3 = 0.20$.

La ecuación (4.4) permite la descomposición de $S^2_D / \bar{Y}^2$ en un conjunto de elementos que se interpretan como los aportes que realizan los agregados a la desigualdad interna.

Al aplicar (4.4) a las tres intravarianzas calculadas (una para cada región) llegamos a:

$$\frac{302.460}{784} = \frac{(103.139)\,(0.30)}{784} + \frac{(455.960)\,(0.50)}{784} + \frac{(217.688)\,(0.20)}{784}$$

y mediante las operaciones indicadas obtenemos la siguiente descomposición de la varianza interna:

$$0.386 = 0.040 + 0.291 + 0.055 \qquad (4.7)$$

Gran parte del valor que alcanza la intradesigualdad del ingreso se debe a la zona central. Este hecho se aprecia con claridad al expresar esta última ecuación en proporciones:

$$1.000 = 0.102 + 0.754 + 0.144$$

La región central contribuye con un 75.4% a la formación de la intradesigualdad, mientras que la zona sur con 14.4% y la norte con sólo un 10.2%.

La ecuación (4.5) permite examinar la descomposición de la interdesigualdad en función de los grupos. De esta manera estaremos en condiciones de conocer el peso con que cada grupo concurre a la formación de la concentración entre estratos.

Al aplicar (4.5) a los datos del ejemplo, llegamos a:

$$\frac{66.740}{784} = \frac{(8.026)\,(0.30)}{784} + \frac{(23.040)\,(0.50)}{784} + \frac{(264.063)\,(0.20)}{784}$$

y una vez realizadas las operaciones indicadas:

$$0.085 = 0.003 + 0.015 + 0.067 \tag{4.8}$$

Para apreciar las magnitudes relativas envueltas en esta ecuación la expresamos en proporciones:

$$1.000 = 0.036 + 0.173 + 0.791$$

De quí se desprende que es la zona sur la que tiene mayor peso en la formación de la interdesigualdad, ello se debe fundamentalmente a que su promedio se encuentra bastante alejado de la media general. La región central, que se caracteriza por una fuerte desigualdad interna (según hemos visto al analizar la composición de la intravarianza), realiza un aporte modesto a la concentración interregional del ingreso (17.3%); esto quiere decir que a pesar de su dispersión interna su media se encuentra próxima al promedio general. La zona norte internamente presenta fuerte homogeneidad y se desvía poco de la media general (su contribución a la intervarianza alcanza apenas al 3.6%).

Para computar la ecuación (4.3) bastará con sumar los términos de la izquierda de (4.7) y (4.8). Ellos representan la varianza dentro y entre los estratos, que a su vez son los componentes en que se divide la varianza. En consecuencia tendremos que la medida de desigualdad total corregida por el efecto escala (varianza relativa) se descompone de la siguiente manera:

$$0.471 = 0.386 + 0.085$$

que al escribirse en términos relativos:

$$1.000 = 0.819 + 0.181$$

nos señala que el 81.9% de la desigualdad total se debe a la concentración interna y que sólo un 18.1% es consecuencia de la desigual repartición regional del ingreso.

Ya sabemos el peso con que concurre la zona central a la formación de la desigualdad interna y la importancia de esta última para construir el valor de la varianza relativa. Sobre la base de ese conocimiento estamos en condiciones de sostener que seguramente la zona central debe hacer una contribución significativa al nivel global de concentración. Esta aseveración que sólo nos da una idea de orden se puede precisar a través de la aplicación de (4.6) que nos permite cuantificar el peso de cada región en el valor final de la varianza relativa. Para llevar a cabo la evaluación es posible operar directamente con (4.6) o bien emplear como procedimiento operativo la suma término a término (4.7) y (4.8). Al usar la última de estas vías hemos obtenido:

$$0.471 = 0.043 + 0.305 + 0.123$$

En proporciones:

$$1.000 = 0.091 + 0.649 + 0.261$$

Esta ecuación nos señala que el 64.9% de la desigualdad global se debe a la región central, el 26.1% a la zona sur y el 9.1% al norte[16].

La descomposición de la desigualdad sigue la secuencia dada por las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5): La primera descompone la concentración en la desigualdad dentro y entre estratos en tanto que (4.4) y (4.5) separan los componentes que las constituyen. La ecuación (4.6) nos permite identificar el aporte a la concentración global de las categorías que forman la variable de clasificación.

El teorema de descomposición de la varianza puede extenderse con facilidad al caso en que los datos se clasifiquen con más de un criterio. Con el propósito de mostrar que la generalización se puede realizar sin necesidad de establecer nuevos conceptos y que las formas de cálculo no entrañan complicaciones adicionales, permítasenos introducir como nueva variable el carácter rural o no de la distribución regional del ingreso.

*Tabla 4.4. Distribución (hipotética) del ingreso por regiones y por la característica rural o no rural*

| | Norte | Centro | Sur | Total |
|---|---|---|---|---|
| | 31 | 15 | 1 | |
| | 18 | 12 | 2 | |
| Rural | 29 | 22 | 7 | |
| | | 10 | | |
| | | 24 | | |
| | | 35 | | 206 |
| | 20 | 85 | 37 | |
| No rural | 46 | 43 | | |
| | 41 | 49 | | |
| | | 33 | | 354 |
| Total | 185 | 328 | 47 | 560 |

[16] En los cálculos realizados siempre la primera cifra de la derecha se refiere a la zona norte, la segunda al centro y la tercera al sur.

En esta tabla se encuentran dos distribuciones de frecuencias marginales y una conjunta. La forma de analizar las primeras la presentamos para el caso particular en que se clasificó la información por regiones. El estudio de la desigualdad respecto a la variable rural, no-rural es análogo. La novedad que introduce esta tabla tiene relación con el modo en que se debería hacer el estudio de la desigualdad en la distribución conjunta. Como veremos, el análisis de este caso no introduce mayores complejidades porque a través de una simple reagrupación se puede reducir al caso de un criterio de clasificación. En efecto, la información contenida en la tabla anterior puede presentarse de la siguiente forma:

*Tabla 4.5. Varianzas y promedios de la distribución (hipotética) del ingreso por regiones y por la característica rural y no rural*

| | *Norte* | | *Centro* | | *Sur* | | *Total* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rural | No rural | Rural | No rural | Rural | No rural | |
| | 31 | 20 | 15 | 85 | 1 | 37 | 189 |
| | 18 | 46 | 12 | 43 | 2 | | 121 |
| | 29 | 41 | 22 | 49 | 7 | | 148 |
| | | | 10 | 33 | | | 43 |
| | | | 24 | | | | 24 |
| | | | 35 | | | | 35 |
| Total | 78 | 107 | 118 | 210 | 10 | 37 | 560 |
| $\bar{Y}$ = | 26.000 | 35.667 | 19.667 | 52.500 | 3.333 | 37 | 28.000 |
| $S^2$ = | 32.667 | 126.889 | 72.222 | 384.750 | 6.889 | 0.000 | 369.200 |

Si queremos señalar explícitamente en la simbología los criterios de clasificación deberíamos usar tres subíndices para representar los valores de la variable: uno para cada criterio (dos) y otro para referirnos a las observaciones dentro de cada grupo. En caso que tuviésemos que clasificar la información con tres necesitaríamos cuatro subíndices y así en general para $r$ necesitaríamos $(r + 1)$ subíndices. Aun cuando esta forma de denotar los valores de variable guarda una lógica simple, su manejo es complicado. Por ello parece recomendable seguir la estrategia de considerar cada tabla de distribución de frecuencia conjunta como formada por una serie de columnas y aplicar las fórmulas como si se tratara de un solo criterio de clasificación.

Siguiendo este procedimiento encontramos que la intravarianza corregida por el efecto escala será:

$$\frac{S_D^2}{\bar{Y}^2} = \frac{(32.667)\,(0.15)}{784} + \frac{(126.889)\,(0.15)}{784} + \frac{(72.222)\,(0.30)}{784} + \frac{(384.750)\,(0.20)}{784} + \frac{(6.889)\,(0.15)}{784} + \frac{(0.0000)\,(0.05)}{784}$$

Al realizar las operaciones indicadas llegamos a:

$$0.158 = 0.007 + 0.024 + 0.028 + 0.098 + 0.001 + 0.0000 \tag{4.9}$$

Si expresamos esta ecuación en proporciones:

$$1.000 = 0.044 + 0.152 + 0.177 + 0.621 + 0.006$$

De donde se concluye que la mayor parte de la intradesigualdad se debe a la concentración del ingreso existente en el campo de la zona sur.

El cálculo de la intervarianza también se puede realizar sin dificultades:

$$\frac{S_E^2}{\bar{Y}^2} = \frac{4.000(0.15)}{784} + \frac{(58.783)\,(0.15)}{784} + \frac{(69.439)\,(0.30)}{784} + \frac{(600.250)\,(0.20)}{784} + \frac{(608.461)\,(0.15)}{784} + \frac{(81.000)\,(0.05)}{784}$$

Al realizar las operaciones indicadas llegamos a:

$$0.313 = 0.001 + 0.011 + 0.027 + 0.153 + 0.116 + 0.005 \tag{4.10}$$

Para obtener las contribuciones relativas de cada categoría a la interdesigualdad expresamos estas cifras en proporciones:

$$1.000 = 0.003 + 0.035 + 0.085 + 0.489 + 0.371 + 0.017$$

La mayor parte (86%), de la desigualdad en la distribución del ingreso entre los grupos se debe a la participación que le cabe a la zona central no rural y al campo del sur. Sin embargo, la simple observación de los promedios nos permite afirmar que la primera ha resultado beneficiada por la repartición mientras que la segunda, perjudicada.

La suma de los miembros de la izquierda de las ecuaciones (4.9) y (4.10) nos entrega la descomposición de la desigualdad total en la concentración dentro y entre estratos:

$$0.471 = 0.158 + 0.313$$

al transformar estas cifras en proporciones:

$$1.000 = 0.335 + 0.665$$

podemos apreciar que la desigualdad interna realiza una contribución significativamente mayor a la desigualdad total que la concentración del ingreso en cada uno de los grupos.

Para conocer con cuánto concurren a la formación de la desigualdad total las categorías definidas por el cruce de las variables de clasificación bastará con sumar término a término los miembros del lado derecho de las ecuaciones (4.9) y (4.10):

$$0.471 = 0.008 + 0.035 + 0.055 + 0.251 + 0.117 + 0.005$$

Los pesos relativos de las categorías son:

$$1.000 = 0.017 + 0.074 + 0.117 + 0.533 + 0.248 + 0.011$$

De acuerdo con estas cifras estamos en condiciones de afirmar que la desigualdad global en la distribución del ingreso se forma casi en su totalidad (78.1%) por el aporte de las zonas central no rural y rural del sur.

Como se puede apreciar, los cálculos no difieren de los realizados para agrupaciones con un criterio de clasificación. En ambos casos se sigue la pauta que marcan las ecuaciones (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6). Las rutinas de cálculo serían análogas si se incluyeran tres o más variables clasificatorias.

El reordenamiento de la información de una tabla estadística que permita presentar distribuciones conjuntas como si fuera una serie de marginales, nos exime de tratar detalladamente tal caso cuando expongamos las medidas subsecuentes.

## 4.5. *Aplicación del teorema de descomposición de la varianza*

El uso de la varianza para el estudio de la desigualdad fue aplicado por Ackerman[17] a datos de la distribución del ingreso en Chile entre 1970 y 1972. A continuación nos limitaremos a exponer los resultados para 1970. En el próximo capítulo agregamos los del 1971.

[17] *Op. cit.* págs. 33 y 34.

*Tabla 4.6. Desigualdad del ingreso por catagorías ocupacionales en Santiago de Chile en 1970*

| Cat. Ocupacionales | Aporte de la intradesigualdad | % | Aporte de la interdesigualdad | % | Total | % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Obreros | 0.031 | 2.3 | 0.086 | 14.7 | 0.117 | 6.0 |
| % | (26.5) | | (73.5) | | | |
| Empleados | 0.803 | 58.4 | 0.057 | 9.7 | 0.860 | 43.9 |
| % | (93.4) | | ( 6.6) | | | |
| T x C propia | 0.222 | 16.2 | 0.002 | 0.3 | 0.224 | 11.40 |
| % | (99.1) | | ( 0.9) | | | |
| Empleadores | 0.304 | 22.1 | 0.406 | 69.3 | 0.710 | 36.2 |
| % | (42.8) | | (57.2) | | | |
| F. Armadas | 0.004 | 0.3 | 0.000 | 0.0 | 0.004 | 0.2 |
| % | (100.00) | | | | | |
| E. Domésticos | 0.010 | 0.7 | 0.035 | 6.0 | 0.045 | 2.30 |
| % | (22.2) | | (77.0) | | | |
| Total | 1.374 | 100.00 | 0.586 | 100.00 | 1.960 | 100.00 |
| % | (70,1%) | | (29,9%) | (100%) | | |

Estas cifras ilustran las ecuaciones que descomponen la medida de desigualdad global. En efecto, las cantidades de la línea "total" comprueban la validez de la ecuación (4.3): el aporte a la intradesigualdad (1.374) sumando a la contribución de la interdesigualdad (0.586) conforman el valor de la desigualdad total (1.960). Estas cifras expresadas en porcentajes nos indican que el nivel de concentración global alcanzado por la distribución del ingreso en Santiago de Chile en 1970, se debe en un 70.1% a las desigualdades existentes en el interior de las categorías ocupacionales y que el 29.9% restante se genera en sus posiciones respecto al promedio general.

La columna "total" es una corroboración numérica de la ecuación (4.6) y nos muestra la magnitud con que concurre cada ocupación a la desigualdad sin distinguir si ésta se debe a la posición relativa de la categoría (entre) o a su distribución de frecuencias internas (dentro). El nivel de concentración global que exhibe la información de la tabla se puede explicar sobre la base de las contribuciones de las categorías empleados (43.9%), empleadores (36.2%) y trabajadores por cuenta propia (11.4%) que sumadas constituyen un 91.5% del nivel global de concentración (1.600).

La información que se despliega en las líneas de la tabla deriva de la aplicación de la ecuación (4.6) y muestra la importancia relativa de la desigualdad dentro y entre cada categoría ocupacional.

Así, por ejemplo, del examen de la columna "total" se desprende que las ocupaciones empleados, empleadores y trabajadores por cuenta propia casi agotan el nivel global de concentración. Pero podría interesar saber si se debe a las desigualdades internas de las categorías ocupacionales, a sus posiciones relativas o a una combinación de ambas.

En el caso de los empleados y trabajadores por cuenta propia toda la concentración a la desigualdad (93.4% y 99.1%) se debe a la concentración interna en la repartición de la renta. Para los empleadores no acontece lo mismo, las cifras muestran cierto predominio de la desigualdad originada en su posición relativa (aporte a la interdesigualdad del 57.2%). Este ejemplo es útil para dar sustancia a las posibilidades analíticas que se desprenden de la ecuación (4.6) y hace posible distinguir, dentro del efecto que tiene cada ocupación sobre la concentración global, aquella parte que se deriva de las distribuciones internas de la que surge de sus posiciones relativas.

Por último, la segunda y cuarta columnas ilustran la aplicación de las ecuaciones (4.4) y (4.5), que permiten descomponer la desigualdad dentro y entre sectores por ocupaciones. Sabíamos que gran parte de la desigualdad distribución del ingreso en Santiago de Chile en 1970, se vinculaba a la forma como se distribuía el ingreso dentro de las ocupaciones. Los resultados expuestos en la tercera columna, nos muestran que poco menos de un 60% de la intradesigualdad se debe a los empleados y que casi la totalidad del valor de la varianza se agota cuando sumamos a la contribución de los empleados, la de los empleadores y la de los trabajadores por cuenta propia.

Los porcentajes de la quinta columna indican que los empleadores realizan un aporte de poco menos que un 70% a la desigualdad entre estratos y en unión con los obreros y empleados dan cuenta de poco más de 90% de la concentración ocasionada por las posiciones relativas de las ocupaciones.

El análisis que surge de la descomposición de la varianza despliega un conjunto de respuestas que presentan un alto grado de ajuste a las interrogantes procedentes de teorías cuyos desarrollos conceptuales envían a referentes empíricos agregados. Difícilmente puede justificarse su uso para proporcionar respuestas adecuadas a las preguntas que nacen en teorías cuyos referentes empíricos son observaciones individuales.

## 4.6. *La descomposición de la varianza de los logaritmos*

La justificación para introducir la varianza de los logaritmos como una medida de desigualdad, descansó en el argumento de que la redistribución, por ejemplo, desde las observaciones ricas en favor de las más pobres, debería tener un efecto diferencial sobre la medida de concentración dependiendo de cuán pobres o ricos sean. Se postula que el efecto sobre la desigualdad no sería el mismo si se redistribuyera una unidad de la variable desde uno rico a uno un poco menos rico que si se entrega a uno pobre. En este segundo caso el efecto desconcentrador de la redistribución debería ser mayor que en el primero.

El argumento central que lleva a proponer la varianza de los logaritmos como medida de desigualdad se sostiene sobre consideraciones basadas en lo individual. Se trata de establecer un indicador que refleje el efecto diferencial que la redistribución entre unidades individuales tiene sobre el nivel de concentración, según el nivel en que ésta se produzca.

Para una concepción teórica que reposa en consideraciones de orden individual la descomposición de la varianza de los logaritmos puede ser de interés porque (i) si sólo se dispone de información agrupada, proporciona otra manera de visualizar la estimación de la concentración global o (ii) nos provee de información que ayuda a comprender algunas de las determinantes de las decisiones individuales, por ejemplo, las diferenciales en los niveles de concentración de los ingresos en el interior de los espacios urbanos podrían ser considerados como factores que inciden en la decisión de migrar de los campesinos.

Estos argumentos son insuficientes para justificar el uso de la varianza de los logaritmos en el análisis de la desigualdad si el foco del estudio está guiado por teorías que remiten a referentes empíricos agregados. Es posible justificar su uso si los K grupos pueden pensarse ordenados según la variable objeto del análisis. Si este fuese el caso podríamos sostener que sería conveniente utilizar una medida de desigualdad que sea sensible en el nivel en que se realizan las redistribuciones entre los grupos. Puesto de otra manera: el indicador debiera marcar un efecto mayor en tanto más grande sea la diferencia entre los grupos que han participado en la transferencia. Esta misma propiedad debería poseerla para las redistribuciones internas en una misma categoría. Sabemos que esta última característica es propia de la varianza de los logaritmos y es fácil comprobar que también posee una sensibilidad diferencial ante transferencias que involucren agregados que se sitúan en niveles diferentes de la escala jerárquica.

También es conveniente recurrir a la varianza de los logaritmos en aquellos casos en que el investigador dispone de datos agrupados y le interesa otorgar menos peso a los valores altos de la variable que a los bajos. La distancia entre los logaritmos de los números es menor que la existente entre los números mismos.

Es fácil demostrar que la varianza de los logaritmos se puede descomponer en una suma de inter y de intravarianza. Es decir que:

$$\boxed{L^2 = L_D^2 + L_E^2} \tag{4.11}$$

donde:

$$L^2 = \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_i - \overline{\ln Y})^2 \, p_i$$

en que $\overline{\ln Y}$, simboliza la media aritmética de los logaritmos de los valores de la variable.

Por otra parte, si hay $K$ grupos y el tamaño del k-ésimo es $n$, entonces:

$$L_D^2 = \sum_{k=1}^{K} L_{D,k}^2 \, p_k \tag{4.12}$$

donde $p_k$ representa la frecuencia relativa del grupo $k$. Además:

$$L_{D,k}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_{k,i} - \overline{\ln Y_k})^2 \, p_{k,i} \; (k = 1,2,\ldots, K)$$

donde $\overline{\ln Y_k}$ es la media de la clase k y $p_{k,i}$ la frecuencia relativa del intervalo $i$ (o la i-ésima observación) dentro de la clase $k$,

Por último, la varianza de los logaritmos entre los distintos grupos se obtiene a través de:

$$L_E^2 = \sum_{k=1}^{K} (\overline{\ln Y_k} - \overline{\ln Y})^2 \, p_k \tag{4.13}$$

Examinemos a través de un ejemplo numérico el comportamiento que sigue la varianza de los logaritmos ante transferencias entre los miembros de distintos grupos, así como en el interior de los mismos.

Supongamos quince observaciones agrupadas en tres estratos que se muestran en la siguiente tabla:

*Tabla 4.7. Distribución de frecuencia de quince observaciones en tres estratos*

| | | *Estratos* | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| $Y_i$ | $\ln Y_i$ | $n_{1i}$ | $n_{2i}$ | $n_{3i}$ |
| 1 | 0.000 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 0.693 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 1.099 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 1,386 | — | 1 | 2 |
| | | 5 | 4 | 6 |

Las columnas de $Y_j$ y de los $\ln Y_i$ sirven para ejemplificar el criterio en el que se otorga menos importancia a los valores altos de la variable, justificando de este modo el uso de la varianza de los logaritmos. Nótese que la distancia entre los valores de la variable es mayor que la existente entre sus correspondientes logaritmos.

La aplicación de las fórmulas a los datos entrega como resultado:

*Tabla 4.8. Medias y varianzas totales y por grupos de las quince observaciones*

| Estratos | $\ln Y_k$ | $L^2_{D,k}$ |
|---|---|---|
| I | 0.578 | 0.245 |
| II | 0.795 | 0.271 |
| III | 0.876 | 0.234 |
| Total | 0.755 | 0.264 |

Los promedios indican que los estratos están ordenados de menor a mayor.

Una vez que conocemos las varianzas de los logaritmos en los tres grupos se obtiene la intravarianza:

$$L^2_D = \frac{0.245 \times 5 + 0.271 \times 4 + 0.234 \times 6}{15}$$

Al realizar las operaciones indicadas:

$$L^2_D = 0.082 + 0.072 + 0.094$$

y

$$L^2_D = 0.248$$

La intervarianza se calcula a partir de las diferencias entre la media de los logaritmos de cada grupo y el promedio general.

$$L^2_E = \frac{(0.578\text{-}0.755)^2\ 5 + (0.795\text{-}0.755)^2\ 4 + (0.876\text{-}0.755)^2\ 6}{15}$$

El cálculo entrega por resultado:

$$L^2_E = 0.010 + 0.000 + 0.006$$

Y:

$$L^2_E = 0.016$$

Como se puede apreciar:

$$L^2 = L^2_D + L^2_E$$

$0.264 = 0.248 + 0.016$

Para examinar la sensibilidad de la medida cuando se producen transferencias intergrupos supongamos, en primer lugar, que tomamos una unidad de una de las observaciones que tiene 4 en el estrato III y se la entregamos a una de las que sólo tienen uno en el estrato I. Esto significa que la tabla debiera experimentar dos modificaciones. La observación que antes poseía 4 unidades de la variable en el estrato III, después de la redistribución sólo tendrá 3 y la que tenía 1 en el estrato I, tendrá 2. Por lo tanto la tabla original se modifica de la siguiente manera:

*Tabla 4.9. Transferencia extrema en la distribución de las quince observaciones*

| | | | *Estratos* | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| $Y_i$ | $\ln Y_i$ | $n_{1,i}$ | $n_{2,i}$ | $n_{3,i}$ |
| 1 | 0.000 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0.693 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1.099 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 1.386 | — | 1 | 1 |
| | | 5 | 4 | 6 |

Al realizar los cálculos de promedios y varianzas de los logaritmos de las observaciones llegamos a:

*Tabla 4.10. Medias y varianzas después de una transferencia extrema entre las quince observaciones*

| Estratos | $\overline{\ln Y_k}$ | $L^2_{D,k}$ |
|---|---|---|
| I | 0.717 | 0.161 |
| II | 0.795 | 0.271 |
| III | 0.828 | 0.197 |
| Total | 0.782 | 0.207 |

Estos resultados comparados con los que se obtuvieron de la primera tabla muestran algunos hechos que vale la pena destacar:

(i) Dado que se redistribuyó en favor del estrato I y en contra del III, el primero experimentó un alza en el promedio de los logaritmos y el segundo una caída. Pero el traslado de una unidad no provoca el mismo efecto. El aumento en el promedio del primer grupo es bastante más marcado que la débil baja sufrida por el tercer estrato. Estos movimientos claramente van más allá del efecto diferencial que se podría esperar por los tamaños de los grupos (uno tiene 6 y el otro 5 observaciones) y se deben fundamentalmente al hecho de que la transformación logarítmica aplicada sobre los datos empequeñece relativamente las consecuencias de las alteraciones en los valores altos de la variable.

(ii) La naturaleza de la redistribución aplicada sobre los datos originales hace que disminuya la desigualdad en el primero y en el tercer estrato. Al extraer una unidad de una de las observaciones más ricas del tercer estrato se produce una caída en su nivel de desigualdad. Lo mismo acontece con el primer estrato pero por un motivo diferente. La unidad beneficiada por la transferencia subió al valor inmediatamente superior y como era una de las más perjudicadas por la repartición, el efecto será el de una tendencia a la igualdad interna.

(iii) Como la transferencia se produjo entre el primero y tercer estratos, el segundo permanece inalterado, lo que se refleja en que no se modificó el promedio ni la varianza de los logaritmos.

Los cambios de las medias y las varianzas se reflejan en la inter y la intravarianza. En efecto:

$$L_D^2 = \frac{0.161 \times 5 + 0.271 \times 4 + 0.197 \times 6}{15}$$

Por lo tanto:

$$L_D^2 = 0.054 + 0.072 + 0.079$$

y

$$L_D^2 = 0.205$$

Al comparar este valor con el de la intravarianza en la distribución original, se hace manifiesta una caída en los niveles intragrupales de concentración, que se debe al efecto igualitario que indujo la transferencia en el primero y tercer estratos. El aporte que hace el segundo grupo a la desigualdad no se modifica.

El aumento en el promedio del primer estrato y la baja del tercero, traen como consecuencia una disminución en la varianza entre los estratos de los logaritmos:

$$L_E^2 = \frac{(0.717-0.782)^2\ 5 + (0.795-0.782)^2\ 4 + (0.828-0.782)^2\ 6}{15}$$

Al realizar las operaciones:

$L_E^2 = 0.001 + 0.000 + 0.001$

y

$L_E^2 = 0.002$

La disminución de la varianza entre las clases inducida por la transferencia es poco menos que 0.1 y se debe al cambio que experimentaron en su posición relativa el primero y tercer estratos.

En resumen: la transferencia de una unidad desde una observación que tenía 4, en el estrato tres, en favor de una que poseía 1, en el grupo uno, se traduce en una mayor igualdad en la repartición, la que se manifiesta en una caída apreciable de la varianza de los logaritmos (pasa de 0.264 a 0.207). La menor concentración resulta de dos movimientos que se autorrefuerzan. uno que surge de una tendencia a la igualdad dentro del primero y tercer estratos, y otro, que proviene del cambio en la posición relativa de los grupos con respecto al promedio general.

A continuación analizaremos un segundo ejemplo cuyo propósito es mostrar que la varianza de los logaritmos es sensible a los cambios relativos. El ejemplo muestra la ventaja analítica de la descomposición de la varianza de los logaritmos, ya que presenta el caso particular en que la varianza total no se altera, pero sí lo hacen sus componentes.

Supongamos que, al igual que en el caso anterior, se extrae una unidad a una de las observaciones del estrato III con $Y_i = 4$, pero esta vez se favorece a uno de los miembros del estrato II que tiene $Y_i = 1$. Estos dos movimientos alteran la tabla 4.7 de la siguiente manera:

*Tabla 4.11. Transferencia moderada en la distribución de las quince observaciones*

| | | *Estratos* | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| $Y_i$ | $\ln Y_i$ | $n_{1,i}$ | $n_{2,i}$ | $n_{3,i}$ |
| 1 | 0.000 | 2 | — | 1 |
| 2 | 0.693 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1.099 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 1.386 | — | 1 | 1 |
| | | 5 | 4 | 6 |

En esta tabla la frecuencia unitaria correspondiente a $Y_i = 1$ en el segundo estrato desapareció ya que, como consecuencia de la redistribución, ahora tiene dos unidades y por la misma razón la frecuencia absoluta del valor de variable 4 en el tercer grupo descendió de 2 a 1.

El cálculo de la medias y varianzas de los logaritmos dentro y entre los estratos arrojó los siguientes resultados:

*Tabla 4.12. Medias y varianzas después de una transferencia moderada entre las quince observaciones*

| Estratos | $\overline{\ln Y_k}$ | $L^2_{D,k}$ |
|---|---|---|
| I | 0.578 | 0.245 |
| II | 0.968 | 0.086 |
| III | 0.828 | 0.197 |
| Total | 0.782 | 0.207 |

El objetivo previamente explicitado de este ejemplo nos lleva a comparar esta tabla con la 4.10 y no con la 4.8 como se hizo en el análisis de los efectos de la redistribución extrema.

Si hiciéramos una inspección de los resultados a que conducen ambas distribuciones basándose solamente en la varianza de los logaritmos, llegaríamos a la conclusión de que la medida no es sensible al número de estratos que tiene que recorrer la cantidad redistribuida. En este sentido no diferiría de la varianza y si consideramos que su cálculo es un poco más complejo y su interpretación conceptual más abstracta, se concluiría que la varianza de los logaritmos presentaría menos atractivos que la varianza relativa.

La simple comparación de las varianzas grupales de los logaritmos en uno y otro caso ya nos indica que a pesar de que las varianzas totales son iguales, probablemente difieren en su composición. Hay un aumento de alguna significación en la varianza del grupo I (que sólo es el resultado de una vuelta a la situación original), una caída sustancial de la varianza interna de los logaritmos del segundo estrato y, como era de esperarse, la del tercer grupo no se altera (recuérdese que se compara con la tabla 4.10).

Para saber el resultado final de estos cambios en las variables internas será necesario obtener el efecto de la redistribución moderada sobre el valor de la intravarianza:

$$L^2_D = \frac{0.245 \times 5 + 0.086 \times 4 + 0.197 \times 6}{15}$$

Luego:

$$L^2_D = 0.082 + 0.023 + 0.078$$

Y:

$$L^2_D = 0.183$$

El valor de $L^2_D$ resulta menor que el de la intravarianza de los logaritmos en la transferencia extrema (0.205). Ello se debe a la fuerte reducción en la variabilidad interna del segundo grupo.

La intervarianza de los logaritmos es:

$$L^2_E = \frac{(0.578\text{-}0.782)^2\, 5 + (0.968\text{-}0.782)^2\, 4 + (0.828\text{-}0.782)^2\, 6}{15}$$

Realizando los cálculos:

$$L^2_E = 0.014 + 0.009 + 0.001$$

y:

$$L^2_E = 0.024$$

Valor que es algo más de 10 veces mayor que el de la varianza entre los estratos en el caso de redistribución extrema. La comparación de los valores que asumieron las intervarianzas nos dice que el efecto de las transferencias será diferente si tomamos una unidad de la observación más rica y se la traspasamos a la más pobre del primer estrato, que si se la entregamos a la más pobre del segundo. Los cambios experimentados por $L^2_E$ muestran que la medición de la desigualdad a través de este instrumento marca un efecto desconcentrador mayor cuando la redistribución es extrema que cuando es moderada. Es decir, *una unidad transferida desde el estrato más alto al más lejano (el más pobre) tiene un efecto mayor sobre la medida de interdesigualdad que si se hace en favor de un grupo más cercano (uno menos pobre)*. Este es el tipo de sensibilidad que caracteriza a la varianza de los logaritmos y que puede ser una propiedad deseable en una investigación concreta. Esta característica podría conducir a que en un análisis específico se prefiera utilizar la descomposición de la varianza de los logaritmos en lugar del teorema que divide a la varianza en la suma de la inter e intravarianza.

La descomposición de la varianza de los logaritmos puede plantearse de manera análoga a la de la varianza. Es decir, se puede reconocer el peso con que concurre cada grupo a la formación de la inter y de la intravarianza de los logaritmos. Como las rutinas de cálculo son equivalentes y las posibilidades analíticas similares, no continuaremos los desarrollos en esa dirección.

Nos hemos preocupado por enfatizar el efecto de redistribuciones entre estratos. Ahora examinaremos la varianza de los logaritmos cuando las transferencias involucren observaciones pertenecientes al mismo estrato.

Supongamos que extraemos una unidad de una de las observaciones que posee 4 en el tercer estrato y se la entregamos a la que sólo tiene una unidad. Estos cambios producen alteraciones sólo en el tercer estrato de la tabla original:

*Tabla 4.13. Redistribución extrema dentro del tercer estrato*

| | | Estratos | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| $Y_i$ | $\ln Y_i$ | $n_{1,i}$ | $n_{2,i}$ | $n_{3,i}$ |
| 1 | 0.000 | 2 | 1 | — |
| 2 | 0.693 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 1.099 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 1.386 | — | 1 | 1 |
| | | 5 | 4 | 6 |

El cálculo de las varianzas y de los promedios arroja por resultado:

*Tabla 4.14. Medias y varianzas de los logaritmos después de una transferencia extrema dentro del tercer estrato*

| Estratos | $\overline{\ln Y_k}$ | $L^2_{D,k}$ |
|---|---|---|
| I | 0.578 | 0.245 |
| II | 0.795 | 0.271 |
| III | 0.944 | 0.072 |
| Total | 0.782 | 0.207 |

Las medidas estadísticas para el primero y segundo estratos, no se alteran respecto a las calculadas sobre los datos de la tabla original. El promedio general es mayor debido a que al distribuirse en favor de una unidad relativamente más pobre, la "ganancia" es mayor que la correspondiente "pérdida" (esta es una consecuencia directa de la transformación logarítmica). Por otra parte, la varianza de los logaritmos se reduce como consecuencia de que la transferencia implica una mayor igualdad en la repartición.

El análisis de la variabilidad de los logaritmos nos permitirá discernir los movimientos que hay detrás de esta reducción:

$$L^2_D = \frac{0.245 \times 5 + 0.271 \times 4 + 0.072 \times 6}{15}$$

Al realizar las operaciones indicadas llegamos a:

$$L^2_D = 0.082 + 0.072 + 0.029$$

y al sumar:

$$L^2_D = 0.183$$

Este valor señala que una parte de la caída de la varianza total proviene de una disminución de la concentración en el interior de los estratos. Al examinar con detenimiento los sumandos de $L_D^2$, se puede precisar aún más la afirmación anterior. En efecto, es el tercer estrato el que provoca la disminución en le intravarianza como consecuencia directa del tipo de transferencia que se llevó a cabo.

Para la intravarianza tenemos que:

$$L_E^2 = \frac{(0.578\text{-}0.782)^2 \times 5 + (0.795\text{-}0.782)^2 \times 4 + (0.944\text{-}0782)^2\ 6}{15}$$

Por lo tanto:

$$L_E^2 = 0.014 + 0.000 + 0.010$$

y:

$$L_E^2 = 0.024$$

Este valor de $L_E^2$ es menor que el de la tabla primitiva, lo que significa que la transferencia produjo una mayor concentración. Esta es la consecuencia directa del aumento experimentado por el promedio del tercer estrato.

Este ejemplo pretende constituirse en una ilustración numérica del efecto diferencial que tienen sobre la varianza de los logaritmos las redistribuciones entre observaciones de un mismo estrato. Por ello consideremos ahora el caso en que transferimos, en el tercer estrato, una unidad desde el valor de variable $Y_i = 4$, hacia el valor de la variable $Y_i = 2$[18]. Al aplicar esta transferencia sobre la tabla 4.7 se genera:

*Tabla 4.15. Redistribución moderada dentro del tercer estrato*

| | | | *Estratos* | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| $Y_i$ | $\ln Y_i$ | $n_{1,i}$ | $n_{2,i}$ | $n_{3,i}$ |
| 1 | 0.000 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 0.693 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1.099 | 2 | 1 | 3 |
| 4 | 1.386 | — | 1 | 1 |
| | | 5 | 4 | 6 |

[18] La transferencia no se hace en favor de la observación que tiene un $Y_i = 3$ debido a que ésta no alteraría la distribución de frecuencias y por consiguiente no habría modificación alguna.

La frecuencia absoluta $n_{3,3} = 3$ para $Y_i = 3$ se forma por la caída de la observación a la cual se le extrajo una unidad y el alza correspondiente de la que fue beneficiada y que originalmente poseía dos unidades.

Las características descriptivas básicas de esta nueva distribución de frecuencias son las siguientes:

*Tabla 4.16. Medias y varianzas de los logaritmos después de una transferencia moderada dentro del tercer estrato*

| Estratos | $\ln Y_k$ | $L^2_{D,k}$ |
|---|---|---|
| I | 0.578 | 0.245 |
| II | 0.795 | 0.271 |
| III | 0.896 | 0.201 |
| Total | 0.763 | 0.243 |

Este tipo de redistribución produce una reducción menor en la desigualdad que la que genera una transferencia entre dos unidades más alejadas. Es decir, la concentración medida por la varianza de los logaritmos marca un efecto democratizador mayor en el caso en que se favorece a los más desposeídos que en aquél en que los beneficiados se ubican por encima de los más perjudicados.

Igual que en el caso anterior la redistribución sólo afecta las medidas estadísticas del tercer estrato, pero esta vez la merma experimentada por la intravarianza de los logaritmos no ha sido tan espectacular.

La intravarianza de los logaritmos es:

$$L^2_D = \frac{0.245 \text{ x } 5 + 0.271 \text{ x } 4 + 0.201 \text{ x } 6}{15}$$

Al calcular:

$$L^2_D = 0.082 + 0.072 + 0.080$$

y la suma es igual a:

$$L^2_D = 0.234$$

El mayor valor que alcanza $L^2_D$ con respecto al que asumió con la redistribución extrema dentro del mismo estrato refleja lo moderado de la transferencia.

La intervariabilidad de los logaritmos es:

$$L^2_E = \frac{(0.578\text{-}0.763)^2 \text{ x } 5 + (0.795\text{-}0.763)^2 \text{ x } 4 + (0.896\text{-}0.763)^2\ 6}{15}$$

Operando:

$L_E^2 = 0.011 + 0.000 + 0.007$

y:

$L_E^2 = 0.018$

Como consecuencia de la transferencia moderada dentro del tercer estrato aumenta la concentración entre los estratos con respecto a la de los datos originales, pero no tanto como se incrementó con la redistribución extrema.

En el caso de haber usado la varianza como indicador de concentración, las dos redistribuciones dentro de un mismo estrato sólo hubiesen alterado las variabilidades internas y no las posiciones relativas de los grupos. Las transferencias en el interior de una misma categoría no alteran su promedio y tampoco la media general y por lo tanto tampoco se modificarían las varianzas entre los grupos. Cuando se recurre a la varianza de los logaritmos para estudiar desigualdad aceptamos como una propiedad deseable su sensibilidad a la distancia que separa las unidades, y también tenemos que aceptar su consecuencia lógica: en casos de transferencias dentro de un mismo estrato no sólo se alterarán las intravarianzas sino también las varianzas entre los estratos. Ello debido a que la propiedad de sensibilidad al cambio relativo lleva implícita una alteración en el promedio del estrato y en el promedio general.

En conclusión, la varianza de los logaritmos es una medida estadística que otorga una importancia mayor a redistribuirse realizadas entre valores lejanos que entre valores próximos. En una tabla de distribución de frecuencias esta propiedad se desdobla para adjudicar pesos relativos mayores a las transferencias que involucran grupos distantes que a las que envuelven estratos cercanos y, también, para reflejar efectos diferenciales cuando se trata de redistribuciones entre observaciones ubicadas a diferente distancia en el interior de un mismo grupo.

## 4.7. *Aplicación de la varianza de los logaritmos*

Usaremos la distribución de la población por localidades para México en 1970 como ilustración de las potencialidades analíticas del teorema de descomposición de la varianza de los logaritmos. En la tabla 4.17[19] incluimos la información necesaria para llevar a cabo los cálculos, así como los datos de 1960 que serán analizados en el próximo capítulo.

---

[19] Esta tabla fue tomada de Luis Unikel *et. al. El desarrollo urbano de México. Diagnóstico e implicaciones futuras*. El Colegio de México, México, 1976, pág. 31.

*Tabla 4.17. Distribución de la población mexicana por tamaño de localidades 1960-1970*

| Grupos de localidades según el tamaño de la población | 1960 Población (en miles) | 1960 Localidades | 1970 Población (en miles) | 1970 Localidades |
|---|---|---|---|---|
| Total del país | *34923* | *89005* | *49050* | *95906* |
| *Urbana* | *12747* | *122* | *22004* | *178* |
| 15.000 - 19999 | 615 | 35 | 814 | 47 |
| 20.000 - 29999 | 1630 | 51 | 2105 | 72 |
| 50.000 - 99999 | 1533 | 20 | 1706 | 24 |
| 100.000 - 499999 | 2548 | 14 | 6033 | 31 |
| 500.000 - 999999 | 1511 | 1 | 513 | 1 |
| 1.000.000 y más | 4910 | 1 | 10833 | 3 |
| *Mixta* | *2757* | *342* | *3969* | *468* |
| 5.000 - 9999 | 1876 | 270 | 2645 | 365 |
| 10.000 - 14999 | 881 | 72 | 1324 | 103 |
| *Rural* | *19419* | *88540* | *23077* | *95260* |
| Menos de 1.000 | 12127 | 84590 | 13549 | 90218 |
| 1.000 - 2499 | 4761 | 3203 | 6090 | 4036 |
| 2.500 - 4999 | 2531 | 747 | 3438 | 1006 |

Con estos datos no sólo es posible obtener una medición del nivel global de desigualdad, sino también identificar en la distribución de la población por localidades qué parte proviene de la concentración interna de los asentamientos urbanos, mixtos y rurales y cuál surge de las posiciones relativas de estos tres grupos.

Al aplicar las ecuaciones (4.12) y (4.13) obtenemos la siguiente descomposición de la varianza de los logaritmos:

*Tabla 4.18. Descomposición de la desigualdad en la distribución de la población mexicana por tamaño de localidades, 1970*

| | Localidades urbanas | Localidades mixtas | Localidades rurales | Total |
|---|---|---|---|---|
| Intravarianza de los log. | 0.001 | 0.001 | 0.044 | 0.046 |
| Intervarianza de los log. | 0.008 | 0.015 | 0.000 | 0.023 |
| Varianza tot. de los log. | 0.009 | 0.016 | 0.044 | 0.069 |

Según habíamos visto, esta medida difícilmente puede proporcionarnos una idea del *grado de desigualdad* porque el límite superior de su recorrido está indeterminado. Resulta imposible calificar el nivel de concentración sólo con la varianza de los logaritmos. Sin embargo, es posible conocer con qué peso concurre a su formación la desigualdad dentro y entre los estratos, así como el aporte que realiza cada uno de los tres grupos considerados.

La última columna de la tabla 4.18 nos señala que la contribución de la intradesigualdad (0.046) a la formación del valor total (0.069) es sustancialmente mayor que la realizada por la desigualdad entre los estratos (0.023). El examen de la primera línea nos dice que la intravarianza se constituye casi en su totalidad por el nivel de concentración que existe entre los estratos de las localidades rurales (0.044) en tanto que las cifras de la segunda línea permiten sostener que la posición relativa del grupo de las localidades mixtas genera la mayor parte de la intervarianza de los logaritmos (0.015).

La línea total muestra que una parte sustancial del nivel de desigualdad global se debe a la distribución inequitativa de la población en el interior de los asentamientos humanos en el campo. El 0.069 casi se agota al agregar las localidades mixtas a las rurales. Pero difieren en la composición de sus aportes, ya que en el grupo de las mixtas la contribución (0.016) se genera casi exclusivamente en su posición relativa (0.015).

Para el sentido común es difícil justificar que una parte importante del nivel global de concentración se deba al peso del sector rural en la intravarianza. Si el estrato rural de menos de 1000 habitantes tiene una importancia de 94.1% ¿cómo entender que sean estos asentamientos la fuente de tal nivel de desigualdad? La respuesta se debe buscar en el tipo de datos de que disponemos. No tenemos información referida a cada localidad, sino sólo a estratos. Por lo tanto, estas medidas deben interpretarse en relación a los intervalos y no a las observaciones individuales[20]. El valor de la intravariabilidad rural se explica por el hecho que de los tres estratos que lo conforman, el de menos de mil habitantes representa un 58.7% de la población campesina y tiene una importancia de 94.8% entre las localidades rurales.

Este ejemplo no sólo es útil como un medio para sugerir los caminos que puede seguir el análisis de la información al aplicar el teorema de descomposición de la varianza de los logaritmos, sino también para mostrar las limitaciones del indicador para medir el *grado de la desigualdad*.

### 4.8. *Descomposición del índice de Theil*

Theil propone usar el concepto de entropía como indicador de desigualdad cuando ya existía una larga lista de coeficientes para ese propósito. El argumento central que utiliza para sostener las bondades del coeficiente entrópico sobre los restantes, radica en su facilidad de descomposición y en el

[20] El efecto de la agregación sobre las medidas de desigualdad fue el tema central de las secciones 4.1 y 4.2.

hecho de que cumple con todos los criterios que deben satisfacer los buenos indicadores de desigualdad.

Para estudiar la descomposición de H expresaremos la entropía de la manera siguiente:

$$(4.14) \quad \boxed{H_T = \sum_{i=1}^{n} q_i \log \frac{q_i}{p_i} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_K} q_{j,k} \log \frac{q_{j,k}}{p_{j,k}}}$$

donde el término que contiene la doble suma muestra la forma de calcular la entropía si las observaciones se han clasificado en *K* grupos. Los subíndices *j* y *k* se refieren a las observaciones y los estratos respectivamente.

Reescribamos esta última expresión:

$$H_T = \sum_{k=1}^{K} q_k \sum_{j=1}^{n_k} \frac{q_{j,k}}{q_k} \left(\log \frac{q_{j,k} / q_k}{p_{j,k} / p_k} \cdot \frac{q_k}{p_k}\right)$$

Al separar los términos que conforman el argumento del logaritmo tendremos:

$$H_T = \sum_{k=1}^{K} q_k \sum_{j=1}^{n_k} \frac{q_{j,k}}{q_k} \left(\log \frac{q_{j,k} / q_k}{p_{j,k} / p_k} + \log \frac{q_k}{p_k}\right)$$

en consecuencia:

$$(4.15) \quad \boxed{H_T = \sum_{k=1}^{K} q_k \sum_{j=1}^{n_k} \frac{q_{j,k}}{q_k} \log \frac{q_{j,k} / q_k}{p_{j,k} / p_k} + \sum_{k=1}^{k} q_k \log \frac{q_k}{p_k}}$$

El segundo término de la derecha resulta de que los $q_k / p_k$ son constantes respecto a al suma que se aplica sobre el subíndice *j* y que:

$$\sum_{j}^{n_k} q_{j,k} / q_k = \frac{1}{q_k} \sum_{j}^{n_k} q_{j,k} = \frac{q_k}{q_k} = 1$$

La expresión $q_{j,k} / q_k$, simboliza la participación relativa que tiene la unidad *j* en el total de la variable en el grupo *k*. Si $Y_{jk}$ representa el valor de variable que posee la unidad *j* del grupo *k*, $Y_k$ el total del grupo *k* e *Y* el total general. Entonces:

$$\frac{q_{j,k}}{q_k} = \frac{\frac{Y_{j,k}}{Y}}{\frac{Y_k}{Y}} = \frac{Y_{j,k}}{Y_k}$$

Del mismo modo $p_{j,k} / p_k$ expresa la importancia relativa de la unidad *j* dentro de los elementos del grupo *k*.

Dadas estas interpretaciones de $q_{j,k} / q_k$ y $p_{j,k} / p_k$ la expresión:

$$H_{D,k} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{q_{j,k}}{q_k} \log \frac{\frac{q_{j,k}}{q_k}}{\frac{p_{j,k}}{p_k}}$$

donde:

$$\sum_{j=1}^{n_k} q_{j,k} / q_k = 1 \quad y \quad \sum_{j=1}^{n_k} p_{j,k} / p_k = 1$$

Luego, $H_{D,k}$ es la entropía del grupo genérico[21] *k*. Como habrá *K* de éstas, se procede a agregarlas ponderando por las correspondientes $q_k$. Tenemos entonces:

$$\boxed{H_D = \sum_{k=1}^{K} q_k H_{D,k}} \tag{4.16}$$

En que $H_D$ es la intraentropía.

El segundo término de la derecha de (4.15):

$$H_E = \sum_{k=1}^{K} q_k \log \frac{q_k}{p_k} \tag{4.17}$$

representa la interentropía. En que $q_k$ simboliza la participación de la clase *k* dentro del total y $p_k$ su participación relativa en las observaciones. Además $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$. El reemplazo de (4.16) y (4.17) en la igualdad (4.15) nos permite sostener que la entropía total es igual a la suma de la inter y la intraentropía. La medida entrópica permite descomponer la desigualdad total en la suma de la intra más la interdesigualdad:

$$\boxed{H_T = H_D + H_E} \tag{4.18}$$

[21] Nótese que tiene la misma estructura que (2.24).

$$H = \Sigma\, q_i \log q_i / p_i$$

A través de esta expresión se puede explicar por qué si sólo contamos con información clasificada en estratos, subestimaremos el grado de desigualdad existente en los datos no agrupados. En efecto, la entropía es siempre no negativa y esto significa que:

$$H_T \geqq 0 \; ; H_D \geqq 0 \text{ y } H_E \geqq 0$$

Los intervalos de clase de una distribución de frecuencias pueden pensarse como la división del conjunto de observaciones en grupos mutuamente excluyentes. Con base en esa información se obtiene la interentropía. Como en este caso no conocemos la distribución de la variable dentro de cada intervalo de clase, no estamos en condiciones de obtener sus correspondientes entropías. Dado que $H_T$ representa la desigualdad existente en los datos no agrupados, $H_E$ la que proviene de la tabla, y considerando que:

$$H_D > 0$$

entonces:

$$H_T > H_E$$

En consecuencia el grado de concentración calculado sobre una tabla de distribución de frecuencias será siempre menor que el de los datos originales.

Las teorías cuyas conceptualizaciones lleven a privilegiar la medición de la desigualdad en el nivel individual, si sólo disponen de información estratificada, sistemáticamente subestimarán el grado de concentración.

Las ideas recién expuestas se ilustrarán a partir de la siguiente información:

*Tabla 4.19. Cálculo de la entropía en una distribución hipotética desagregada*

| Val. de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i / p_i$ | $\ln q_i / p_i$ | $q_i \ln q_i / q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.002 | 0.050 | 0.036 | -3.324 | -0.006 |
| 2 | 0.004 | 0.050 | 0.072 | -2.631 | -0.010 |
| 7 | 0.013 | 0.050 | 0.250 | -1.386 | -0.017 |
| 10 | 0.017 | 0.050 | 0.358 | -1.027 | -0.018 |
| 12 | 0.021 | 0.050 | 0.428 | -0.849 | -0.018 |
| 15 | 0.027 | 0.050 | 0.538 | -0.620 | -0.017 |
| 18 | 0.032 | 0.050 | 0.642 | -0.443 | -0.014 |
| 20 | 0.036 | 0.050 | 0.714 | -0.337 | -0.012 |
| 22 | 0.039 | 0.050 | 0.786 | -0.241 | -0.010 |
| 24 | 0.043 | 0.050 | 0.858 | -0.153 | -0.007 |
| 29 | 0.051 | 0.050 | 1.036 | 0.035 | 0.002 |
| 31 | 0.055 | 0.050 | 1.108 | 0.103 | 0.006 |
| 33 | 0.059 | 0.050 | 1.178 | 0.164 | 0.010 |

| Val. de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i / p_i$ | $\ln q_i / p_i$ | $q_i \ln q_i / q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 0.063 | 0.050 | 1.250 | 0.223 | 0.014 |
| 37 | 0.066 | 0.050 | 1.322 | 0.279 | 0.019 |
| 41 | 0.073 | 0.050 | 1.464 | 0.381 | 0.028 |
| 43 | 0.077 | 0.050 | 1.536 | 0.429 | 0.033 |
| 46 | 0.082 | 0.050 | 1.642 | 0.496 | 0.041 |
| 49 | 0.088 | 0.050 | 1.750 | 0.560 | 0.049 |
| 85 | 0.152 | 0.050 | 3.036 | 1.111 | 0.169 |
| 560 | 1.0000 | 1.000 | | | 0.240 |

En esta tabla hemos incluido el detalle de las operaciones necesarias para calcular el índice de desigualdad de Theil y obtuvimos:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n} q_i \log \frac{q_i}{p_i} = 0.240$$

Supongamos que decidimos agrupar las 20 observaciones en cuatro intervalos de clase y que al hacerlo se originó la siguiente tabla:

*Tabla 4.20. Cálculo de la entropía en una distribución hipotética agregada*

| Intervalo de clase | | $Y_i$ | $n_k$ | $p_k$ | $q_k$ | $q_k / p_k$ | $\ln q_k / p_k$ | $q_k \ln q_k / p_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9 | 5 | 3 | 0.15 | 0.018 | 0.120 | -2.126 | -0.038 |
| 10 | 29 | 20 | 8 | 0.40 | 0.268 | 0.670 | -0.401 | -0.107 |
| 30 | 49 | 40 | 8 | 0.40 | 0.562 | 1.406 | 0.341 | 0.192 |
| 50 | 99 | 75 | 1 | 0.05 | 0.152 | 3.036 | 1.115 | 0.168 |
| | | | | | | | | 0.215 |

La información de esta tabla nos permite calcular la interentropía:

$$H_E = 0.215$$

que, como era de esperar, asume un valor inferior al de la entropía calculada sobre la base de los datos originales. Estos datos nos permiten ilustrar el hecho que si nos interesa obtener el nivel de desigualdad existente en la información no agregada y sólo dispusiéramos de una tabla de distribución de frecuencias agrupada, entonces la subestimaríamos. En el ejemplo, la discrepancia entre ambos procedimientos de cálculo es:

$$H_T - H_E = 0.240 - 0.215 = 0.025$$

Sabemos por la ecuación que descompone la entropía total en la suma de la inter y la intraentropía, que el origen de esta diferencia se debe a que no se toman en cuenta las desigualdades existentes en el interior de cada intervalo de clase.

Para continuar con la ilustración haremos uso de los datos agrupados para establecer los niveles que alcanzan las entropías dentro de cada uno de los cuatro estratos.

En el primer intervalo de clase hemos agrupado las tres primeras observaciones. Para calcular su entropía debemos obtener la importancia relativa que tienen dentro del grupo cada uno de los casos ($p_{j,1} / p_1$) así como las de sus correspondientes valores de variables ($q_{j,1} / q_1$):

$$p_{1,1} / p_1 = \frac{0.050}{0.015} = 0.333 \; ; \quad p_{2,1} / p_1 = \frac{0.05}{0.015} = 0.333;$$

$$p_{3,1} / p_1 = \frac{0.05}{0.015} = 0.333 \quad y \quad \sum_{j=1}^{3} p_{j,1} / g_1 = 1.000$$

Además:

$$q_{1,1} / q_1 = \frac{0.002}{0.018} = 0.101 \; ; \quad q_{2,1} / q_1 = \frac{0.004}{0.018} = 0.201;$$

$$q_{3,1} / q_1 = \frac{0.012}{0.018} = 0.698 \quad y \quad \sum_{j=1}^{3} q_{j,1} / q_1 = 1.000$$

La siguiente tabla incluye los cálculos necesarios para obtener la entropía del primer intervalo de clase:

*Tabla 4.21. Cálculo de la entropía del primer intervalo de clase en una distribución hipotética agregada*

| $q_{j,1}/q_1$ | $p_{j,1}/p_1$ | $q_{j,1}/q_1/p_{j,1}/p_1$ | $\ln(q_{j,1}/q_1/p_{j,1}/p_1)$ | $q_{j,1}/q_1 \ln(q_{j,1}/q_1/p_{j,1}/p_1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.101 | 0.333 | 0.302 | -1.198 | -0.121 |
| 0.201 | 0.333 | 0.603 | -0.505 | -0.102 |
| 0.698 | 0.333 | 2.095 | 0.740 | 0.517 |
| | | | | 0.294 |

La entropía del primer intervalo de clase es:

$$H_{D,1} = 0.294$$

Para el segundo estrato (que incluye las ocho observaciones que siguen a las tres primeras) tenemos los siguientes resultados:

*Tabla 4.22. Cálculo de la entropía del segundo intervalo de clase en una distribución hipotética agregada*

| $q_{j,2}/q_2$ | $p_{j,2}/p_2$ | $q_{j,2}/q_2/p_{j,2}/p_2$ | $\ln(q_{j,2}/q_2/p_{j,2}/p_2)$ | $q_{j,2}/q_2 \ln(q_{j,2}/q_2/p_{j,2}/p_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.067 | 0:125 | 0.534 | -0.627 | -0.042 |
| 0.080 | 0.125 | 0.639 | -0.448 | -0.036 |
| 0.100 | 0.125 | 0.802 | -0.220 | -0.022 |
| 0.120 | 0.125 | 0.958 | -0.043 | -0.005 |
| 0.133 | 0.125 | 1.066 | 0.064 | 0.009 |
| 0.147 | 0.125 | 1.173 | 0.159 | 0.023 |
| 0.160 | 0.125 | 1.281 | 0.248 | 0.040 |
| 0.193 | 0.125 | 1.546 | 0.436 | 0.084 |
| 1.000 | 1.000 | | | 0.051 |

Luego:

$$H_{D,2} = 0.051$$

Para el tercer estrato tenemos:

*Tabla 4.23. Cálculo de la entropía del tercer intervalo de clase en una distribución agregada*

| $q_{j,3}/q_3$ | $p_{j,3}/p_3$ | $q_{j,3}/q_3/p_{j,3}/p_3$ | $\ln(q_{j,3}/q_3/p_{j,3}/p_3)$ | $q_{j,3}/q_3 \ln(q_{j,3}/q_3/p_{j,3}/p_3)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.099 | 0.125 | 0.788 | -0.238 | -0.024 |
| 0.105 | 0.125 | 0.838 | -0.177 | -0.019 |
| 0.111 | 0.125 | 0.889 | -0.118 | -0.013 |
| 0.118 | 0.125 | 0.940 | -0.062 | -0.007 |
| 0.130 | 0.125 | 1.041 | 0.040 | 0.005 |
| 0.136 | 0.125 | 1.092 | 0.088 | 0.012 |
| 0.146 | 0.125 | 1.168 | 0.155 | 0.023 |
| 0.155 | 0.125 | 1.245 | 0.219 | 0.035 |
| 1.000 | 1.000 | | | 0.012 |

Por lo tanto:

$$H_{D,3} = 0.012$$

La entropía del cuarto intervalo de clase es igual a cero, porque sólo tiene una observación:

$$H_{D,4} = 0$$

De acuerdo con (4.16) la intraentropía será:

$$H_D = q_1 H_{D,1} + q_2 H_{D,2} + q_3 H_{D,3} + q_4 H_{D,4}$$

$$H_D = 0.018 \times 0.294 + 0.268 \times 0.051 + 0.562 \times 0.012 + 0.152 \times 0$$

$$H_D = 0.005 + 0.014 + 0.007 + 0.0000$$

$$H_D = 0.026$$

Este valor coincide (excepción hecha de los errores de aproximación) con la diferencia $H_T - H_E$ y por lo tanto constituye una comprobación numérica de la ecuación que descompone la entropía en la suma intra e interentropías. Además nos sirve como ejemplo para mostrar cómo se subestima la desigualdad existente en los datos no agrupados al usar información en que se han organizado las observaciones en intervalos de clase.

En el capítulo anterior planteamos que necesitábamos algunos resultados adicionales para demostrar que el coeficiente de Theil cumple con las condiciones que se le exigen a los "buenos" indicadores de desigualdad. A continuación nos dedicaremos a esta labor así como a entregar un ejemplo numérico.

La entropía es insensible a transformaciones proporcionales en la variable. En efecto, su valor depende de $q_i$ y de $p_i$ que son las partes proporcionales de la variable y de las unidades respectivamente, que corresponden a la i-ésima observación. Sabemos que las proporciones no se alteran debido a cambios de escala.

Para examinar la entropía desde el punto de vista de las condiciones Pigou-Dalton y de cambio relativo, supongamos que se realiza una transferencia desde una observación "rica" *l* hacia una "pobre" *m*. La proporción de la variable perteneciente a la primera disminuirá en la misma cantidad que aumenta la de la segunda, de manera que:

$$q_l + q_m = q_l' + q_m' \tag{4.19}$$

en que los términos de la izquierda simbolizan las proporciones que tenían los sujetos *l* y *m* antes de la transferencia y los de la derecha las proporciones con que quedan después de la misma. Todos los otros términos componentes de la entropía se mantendrán inalterados de modo que el sentido y naturaleza del cambio se agota en lo que ocurre en los términos específicos referidos a las observaciones *l* y *m*.

Supongamos que el conjunto de *n* observaciones formamos dos grupos, uno con las observaciones *l* y *m* entre las cuales se produce la redistribución y el otro con las n-2 unidades restantes. Según el teorema de descomposición tendremos:

$$H_T = q_1 H_{D,1} + q_2 H_{D,2} + H_E$$

De acuerdo con (4.19) después de la transferencia $q_1$ permanece inalterado, por lo que no se modificará la interentropía. Por otra parte, tampoco habrá variaciones en el término $q_2 H_{D,2}$ ya que representa la contribución del grupo 2 a la intraentropía y éste no ha sido objeto de transferencias. En consecuencia, para analizar la sensibilidad de H a una redistribución bastará con estudiar las modificaciones que sufre $H_{D,1}$, es decir, la intraentropía del grupo 1:

$$H_{D,1} = \frac{q_{l,1}}{q_1} \log \frac{q_{l,1} / q_1}{1/2} + \frac{q_{m,1}}{q_1} \log \frac{q_{m,1} / q_1}{1/2}$$

Al desarrollar:

$$H_{D,1} = \frac{q_{l,1}}{q_1} \log \frac{q_{l,1}}{q_1} + \frac{q_{m,1}}{q_1} \log \frac{q_{m,1}}{q_1} - \frac{q_{l,1}}{q_1} \log \frac{1}{2} - \frac{q_{m,1}}{q_1} \log \frac{1}{2}$$

Se llega a:

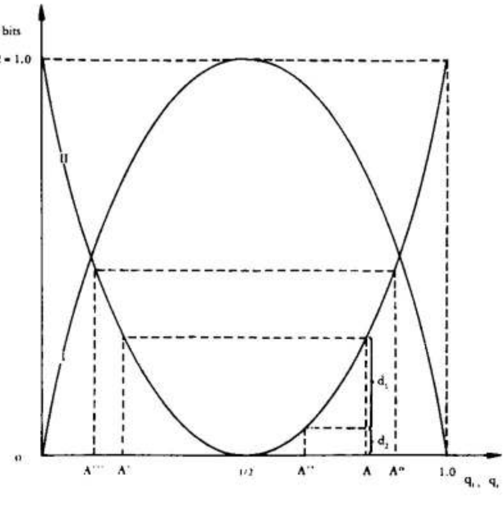
$$H_{D,1} = - \frac{q_{l,1}}{q_1} \log \frac{1}{\frac{q_{l,1}}{q_1}} - \frac{q_{m,1}}{q_1} \log \frac{1}{\frac{q_{m,1}}{q_1}} + \frac{(q_{l,1} + q_{m,1})}{q_1} \log 2$$

Como $q_{l,1} + q_{m,1} = q_1$, el coeficiente de log 2 es igual a la unidad. Arreglando convenientemente los términos tendremos:

$$H' = \log 2 - H_{D,1} = \frac{q_{l,1}}{q_1} \log \frac{1}{\frac{q_{l,1}}{q_1}} + \frac{q_{m,1}}{q_1} \log \frac{1}{\frac{q_{m,1}}{q_1}} \tag{4.20}$$

En un capítulo anterior señalábamos que la curva I de la siguiente gráfica representa adecuadamente la función entrópica para un suceso con dos alternativas de ocurrencia (bit).

*Gráfica 4.2. Entropía como medida de desigualdad*



Como la entropía alcanza valores más altos en tanto mayor es la igualdad, para transformarla en una medida de desigualdad se ha restado de su valor máximo (que en este caso es log 2). Para representar la forma gráfica de H' en (4.20) consideremos los valores extremos de la entropía del primer grupo. $H_{D,1}$ será igual a cero si $q_{l,1} / q_1$ es igual a cero o a uno. En este caso H' = log 2. $H_{D,1}$ asumirá el valor máximo log 2, si $q_{l,1} / q_1 = 1/2$ es decir, cuando la variable se reparte equitativamente entre *l* y *m* por lo tanto H' será nula. Además siempre se cumple que $H_{D,1} + H' = \log 2$, lo que quiere decir que la suma de las ordenadas de las funciones $H_{D,1}$ y H' para un mismo valor de abscisa debe ser constante. De acuerdo con estas características se concluye que entre ambas funciones hay una asociación inversa. Estas relaciones se han sintetizado en la curva II de la gráfica, la que también es simétrica respecto a $q_{l,1} / q_1 = 1/2$.

Para examinar la sensibilidad de esta función a las transferencias, supongamos que la situación inicial está representada por el punto $q_{l,1} / q_1 = A$, es la proporción de la variable en manos de la observación rica del grupo 1. Como este grupo sólo consta de dos elementos, el "pobre" alcanza el valor complementario $q_{m,1} / q_1 = 1-A$. En tanto la transferencia reparta la variable entre *l* y *m* dentro del intervalo definido por A y A', disminuirá el nivel de desigualdad. Tómese como ejemplo el caso en que después de la redistribución la observación rica pasa a tener una participación $q_{l,1} / q_1 = A''$ (donde $A' < A'' < A$) lo que implica que la unidad pobre alcanza a $\frac{q_{m,1}}{q_1} = 1-A''$. Estas restricciones matemáticas expresan el hecho de que la desigualdad disminuirá siempre que la transferencia sea tal que la observación que tenía originalmente una mayor participación de la variable no se empobrezca más allá del nivel original en que estaba la unidad que se beneficia de la transferencia. La forma de la función nos garantiza que si la restricción se satisface, entonces automáticamente la observación relativamente más pobre no se enriquecerá más allá del nivel alcanzado por la unidad beneficiada en el reparto de la redistribución.

¿Qué acontece si la redistribución es tan drástica que queda fuera del recorrido definido por los límites A y A'? Para responder a esta interrogante supongamos que el nuevo punto es A''' que nos indica que la unidad anteriormente más rica es ahora más pobre ($\frac{q_{l,1}}{q_1} = A'''$) y que la previamente pobre es ahora más rica ($\frac{q_{m,1}}{q_1} = (1-A''')$). La distancia entre ellas es ahora mayor, de modo que el nivel de desigualdad ha aumentado. Esta situación sería equivalente a la representada por el punto $A^{iv}$ que correspondería a una transferencia regresiva, es decir, a un aumento en la participación relativa de la observación rica *l* y la correspondiente disminución de la unidad pobre *m*. La diferencia entre ambas formas de repartir el pastel estriba en que en un caso la observación perjudicada se transforma en la más rica (*l*) y en el otro es la beneficiada, pero en ambos casos coincide el nivel de desigualdad, lo que se refleja adecuadamente en la medida entrópica. De este breve análisis se deriva que el coeficiente de Theil es sensible a las transferencias y que aumenta su valor cuando la redistribución introduce un mayor nivel de desigualdad y disminuye en caso contrario. Esto quiere decir, expresado de manera suscinta, que el coeficiente entrópico cumple con la condición Pigou-Dalton.

Por otra parte, la curvatura de la función representada por II garantiza que el efecto que tenga un monto transferido sobre la medida de desigualdad, dependerá del nivel en que la redistribución tenga lugar.

Para ilustrar esta afirmación partamos de la situación original expresada en la gráfica, en que el más "rico" tenía una participación A y el más pobre una igual a 1-A. Al redistribuir progresivamente y alcanzar el punto A'', la medición del nivel de desigualdad se reduce en $d_1$. Si volvemos a transferir la misma cantidad en favor de *m*, llegamos al punto de equidistribución (nótese que la distancia entre A y A'' es la misma que entre A'' y 1/2) y la caída en la medida de desigualdad será en este caso igual a $d_2$. La forma de la curva nos lleva a sostener que $d_2 < d_1$. Al transferir una misma cantidad, la medida de concentración registra efectos diferenciales. La simple observación de la curva II nos permite sostener que si la transferencia tiene lugar entre una observación muy rica y otra muy pobre la entropía experimenta una reducción mayor si se produce entre aquella y otra menos pobre. También se puede observar que lo inverso es cierto. Por lo tanto, el coeficiente entrópico de Theil cumple con el criterio de cambio relativo.

Examinemos a través de un ejemplo numérico la sensibilidad que muestra este índice a las transferencias. Usaremos para ello la información de la tabla 4.19 a la que correspondía un H = 0.240. Supongamos ahora que tomamos cinco unidades de variable de la observación más rica y se la entregamos a la más pobre:

*Tabla 4.24. Entropía de la distribución hipotética después de una transferencia extrema*

| Val. de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i/p_i$ | $\ln q_i/p_i$ | $q_i/p_i \; \ln q_i/q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.004 | 0.050 | 0.072 | -2.631 | -0.010 |
| 6 | 0.011 | 0.050 | 0.220 | -1.514 | -0.017 |
| 7 | 0.012 | 0.050 | 0.250 | -1.386 | -0.017 |
| 10 | 0.018 | 0.050 | 0.358 | -1.027 | -0.018 |
| 12 | 0.021 | 0.050 | 0.428 | -0.849 | -0.018 |
| 15 | 0.027 | 0.050 | 0.538 | -0.610 | 0.017 |
| 18 | 0.032 | 0.050 | 0.642 | -0.443 | -0.014 |
| 20 | 0.036 | 0.050 | 0.714 | -0.336 | -0.012 |
| 22 | 0.039 | 0.050 | 0.786 | -0.241 | -0.010 |
| 24 | 0.043 | 0.050 | 0.858 | -0.153 | -0.007 |
| 29 | 0.052 | 0.050 | 1.036 | 0.035 | 0.002 |
| 31 | 0.055 | 0.050 | 1.108 | 0.103 | 0.006 |

| Val. de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i/p_i$ | $\ln q_i/p_i$ | $q_i/p_i \ \ln q_i/q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 0.059 | 0.050 | 1.178 | 0.164 | 0.010 |
| 35 | 0.063 | 0.050 | 1.250 | 0.223 | 0.014 |
| 37 | 0.066 | 0.050 | 1.322 | 0.279 | 0.019 |
| 41 | 0.073 | 0.050 | 1.460 | 0.381 | 0.028 |
| 43 | 0.076 | 0.050 | 1.536 | 0.429 | 0.033 |
| 46 | 0.082 | 0.050 | 1.640 | 0.496 | 0.041 |
| 49 | 0.087 | 0.050 | 1.750 | 0.560 | 0.049 |
| 80 | 0.143 | 0.050 | 2.857 | 1.049 | 0.150 |
| 560 | 1.000 | 1.000 | | | 0.210 |

Hemos decidido incluir toda la información para que se pueda observar al comparar con la tabla 4.19 que sólo se han modificado dos de los valores componentes de la entropía. El de la observación más rica que cayó desde 0.169 hasta 0.150 y el de la más pobre que bajó de -0.006 a -0.017. Las restantes cantidades se mantuvieron como consecuencia de que una redistribución sólo afecta la participación en el total de la variable de las observaciones involucradas. Tal como era de esperar, la transferencia tuvo como consecuencia una disminución en el nivel de desigualdad que alcanzó:

$$0.240 - 0.210 = 0.030$$

Para examinar lo que acontece si la redistribución se hace en favor de una observación menos pobre, supongamos que favorece a aquélla que tiene 35. Sabemos que la única modificación con respecto a la tabla original se manifestará en las frecuencias relativas de las dos observaciones objeto de la transferencia, cuyos valores serán ahora:

*Tabla 4.25. Efecto sobre la entropía de la distribución hipotética, inducido por una transferencia moderada*

| Val. de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i/p_i$ | $\ln q_i/p_i$ | $q_i \ln q_i/p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 0.071 | 0.050 | 1.429 | 0.357 | 0.026 |
| 80 | 0.143 | 0.050 | 2.857 | 1.050 | 0.150 |

Con estos valores se llega a una entropía igual a 0.233, producto de la redistribución que indujo una disminución en el nivel de desigualdad (la H original era igual a 0.240). Sin embargo, ésta fue menor que en el caso de la transferencia extrema. La reducción sólo fue de:

$$0.240 - 0.233 = 0.007$$

cantidad sustancialmente menor que la caída de 0.030.

## 4.9. *Aplicación del índice de Theil*

Usaremos el coeficiente entrópico para examinar cómo se distribuye la producción industrial venezolana por sectores y actividades industriales en 1968. También agregamos la información de 1973 que se usará en los análisis del próximo capítulo.

*Tabla 4.26. Valor de la producción y ocupación en la industria manufacturera fabril según sectores industriales y agrupaciones económicas, 1968 y 1973*

| Sectores | Producción (miles de bolívares de 1968) | | | | Ocupación (miles de personas) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1968 | (%) | 1973 | (%) | 1968 | (%) | 1973 | (%) |
| *Ind. Tradicionales* | *9188* | *(0.542)* | *12440* | *(0.527)* | *110.3* | *(0.539)* | *126.5* | *(0.501)* |
| Alimentos | 4816 | (0.284) | 6901 | (0.292) | 40.8 | (0.199) | 48.3 | (0.191) |
| Bebidas | 1155 | (0.068) | 1562 | (0.066) | 8.8 | (0.043) | 10.0 | (0.040) |
| Tabaco | 523 | (0.031) | 685 | (0.029) | 2.7 | (0.013) | 3.1 | (0.012) |
| Textil | 1052 | (0.062) | 1486 | (0.063) | 21.2 | (0.104) | 21.2 | (0.084) |
| Vest. y calzado | 973 | (0.057) | 1131 | (0.048) | 21.2 | (0.104) | 25.3 | (0.100) |
| Cuero y pieles | 153 | (0.009) | 99 | (0.004) | 2.2 | (0.011) | 2.3 | (0.009) |
| Madera y corcho, muebles y accesorios. | 516 | (0.030) | 576 | (0.024) | 13.4 | (0.065) | 15.8 | (0.063) |
| *Ind. Intermedias* | *4199* | *(0.248)* | *6311* | *(0.267)* | *53.3* | *(0.261)* | *67.8* | *(0.268)* |
| Papel y celulosa | 699 | (0.041) | 1059 | (0.045) | 7.3 | (0.036) | 8.7 | (0.034) |
| Prod. Químicos | 1286 | (0.076) | 2084 | (0.088) | 14.9 | (0.073) | 19.3 | (0.076) |
| Caucho y sus prod. | 367 | (0.022) | 515 | (0.022) | 4.5 | (0.022) | 5.4 | (0.021) |
| Prod. plásticos | 166 | (0.010) | 292 | (0.012) | 2.7 | (0.013) | 5.6 | (0.022) |
| Min. no metálicos | 850 | (0.050) | 1208 | (0.051) | 14.5 | (0.071) | 17.4 | (0.069) |
| Metálicas básicas | 831 | (0.049) | 1153 | (0.049) | 9.4 | (0.046) | 11.4 | (0.045) |
| *Ind. Mecánicas* | *2785* | *(0.164)* | *4245* | *(0.180)* | *30.0* | *(0.147)* | *43.8* | *(0.173)* |
| Prod. Metálicos | 708 | (0.042) | 1135 | (0.048) | 11.7 | (0.057) | 17.6 | (0.070) |
| Maq. Exc. eléctrica | 160 | (0.009) | 208 | (0.009) | 3.1 | (0.015) | 3.8 | (0.015) |
| Maq. y Equipo eléctrico | 562 | (0.033) | 838 | (0.035) | 5.5 | (0.027) | 8.5 | (0.034) |
| Mat. de Transporte | 1355 | (0.080) | 2064 | (0.087) | 9.7 | (0.047) | 13.9 | (0.055) |
| *Grupo Residual* | *768* | *(0.046)* | *611* | *(0.026)* | *11.0* | *(0.054)* | *14.5* | *(0.057)* |
| Artes gráficas | 583 | (0.034) | 443 | (0.019) | 7.6 | (0.037) | 9.9 | (0.039) |
| Diversas | 185 | (0.012) | 168 | (0.007) | 3.4 | (0.017) | 4.6 | (0.018) |
| *TOTAL* | 16940 | (1.000) | 23607 | (1.000) | 204.6 | (1.000) | 252.6 | (1.000) |

(Fuente: Dirección General de Estadística y Censos Nacionales, Ministerio de Fomento, República de Venezuela, *Anuario estadístico 1974,* tomo II, págs. 291 y 294).

En esta tabla se encuentran además de los datos originales, las participaciones porcentuales en el total, de las actividades y sectores de las industrias manufactureras fabriles.

Con esta información estamos en condiciones de obtener no sólo una medición entrópica del nivel total de desigualdad[22] en la distribución de la producción por trabajadores, según las ramas industriales, sino también de identificar las fuentes que la forman. El teorema que divide a la entropía en la suma de la intra e interentropías nos permite juzgar sus importancias relativas, así como sus composiciones internas.

*Tabla 4.27. Descomposición de la desigualdad en la distribución de la producción industrial venezolana en 1968, por ocupación y ramas industriales*

| | Industria tradicionales | Industria intermedias | Industria mecánicas | Industria diversas | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Intra entropía | 0.065 | 0.004 | 0.012 | 0.001 | 0.082 |
| Inter entropía | 0.003 | -0.013 | 0.018 | -0.007 | 0.001 |
| TOTAL | 0.068 | -0.009 | 0.030 | -0.006 | 0.083 |

Hay que notar que estos resultados provienen de la aplicación de la ecuación (4.15) a los datos de la tabla 4.24 y que muestran las distribuciones de la producción y ocupación por actividades y sectores económicos. Como consecuencia, la entropía muestra la desigualdad en la producción alcanzada con respecto al personal ocupado.

En este caso, también se puede conceptualizar el índice entrópico como una medida de productividad. El argumento del logaritmo ($q_i / p_i$) puede interpretarse como una medida de productividad ya que muestra, para cada actividad, la relación entre las proporciones de producción y de trabajadores. Por lo tanto la entropía es un promedio del logaritmo de las productividades, en que los pesos son las participaciones de cada actividad en el total producido.

La columna total de la tabla 4.27 nos indica que el nivel global de desigualdad se conforma casi íntegramente por las desigualdades internas de los sectores industriales y que las diferencias entre ellos son mínimas. El examen de la primera línea muestra que la mayor diversidad de la distribución de la producción entre los trabajadores se encuentra en las industrias tradicionales (0.065) y en menor medida en las mecánicas (0.012).

La homogeneidad entre los cuatro sectores económicos se manifiesta en el bajo valor de la interentropía (0.001). Sin embargo, los datos del segundo renglón nos señalan que es producto de cancelaciones entre términos positi-

[22] No normalizaremos el coeficiente de Theil ya que no nos interesa obtener una medición del grado de desigualdad sino que nos preocupa el uso del teorema de descomposición.

vos y negativos. Debe recordarse que un valor negativo significa que al sector le corresponde un porcentaje de producción menor que el de ocupación, es decir, que la medida de productividad es menor que uno y que por lo tanto se trata de un sector de baja eficiencia económica. Las industrias intermedias y diversas se caracterizan por bajas productividades en tanto que a las mecánicas les corresponden altos niveles. A pesar de esta diferenciación entre sectores, las cifras muestran un parque industrial relativamente compacto.

El renglón total, muestra que las principales fuentes del nivel global de desigualdad se encuentran en el grupo de las industrias tradicionales y en el sector de las industrias mecánicas. El primero contribuye básicamente con su diversidad interna (0.065) en tanto que el aporte del segundo se origina, en primer lugar, por su alto nivel de productividad respecto al resto de las agrupaciones de industrias (0.018) y en segundo lugar por su desigualdad interna (0.012).

En el próximo capítulo examinaremos los cambios experimentados por la distribución de la producción en la industria manufacturera venezolana entre 1968 y 1973.

### 4.10. *Reajuste de los valores de variable de un grupo por una constante y su efecto sobre las medidas de desigualdad*

Agregaremos a las propiedades que deben satisfacer los buenos indicadores de desigualdad un criterio adicional que adquiere relevancia en distribuciones de frecuencias para datos agrupados. Si la información se clasificó en $K$ grupos y multiplicamos por una constante los valores de variable de sólo uno de ellos, ¿cuál debería ser el efecto sobre las medidas de desigualdad?

Podría parecer natural que una situación como la descrita se expresara en un cambio en el nivel global de desigualdad producido por modificaciones en el grado de interconcentración. Una amplificación o una reducción de los valores en sólo un grupo cambia su posición en relación a los restantes y en consecuencia se altera el nivel de la interdesigualdad. El impacto sobr el grado de concentración en el grupo afectado debiera ser nulo en la medida que su distribución de frecuencias sólo experimentó una traslación paralela y por lo tanto los indicadores estadísticos de intraconcentración deberían permanecer inalterados. Pero no sólo debieron mantenerse los valores de las medidas de intradesigualdad sino que también los aportes de los grupos a la intraconcentración total[23], es decir, *un reajuste con las características que hemos señalado sólo debiera expresarse a través de modificaciones en las medidas de interdesigualdad manteniéndose tanto los valores de las medidas de intraconcentración como los aportes que realizan a la misma las distintas*

[23] Recuérdese que el aporte de los grupos a la desigualdad resulta de las medidas de desigualdad por cada uno de ellos multiplicados por sus respectivas ponderaciones.

*categorías.* En lo sucesivo examinaremos hasta qué punto la varianza, la varianza de los logaritmos y el índice de Theil cumplen con este criterio.

La varianza corregida por el efecto escala es una medida insensible a las amplificaciones o reducciones proporcionales en los valores *de todos los valores de variables*, pero sufre alteraciones si los cambios proporcionales se producen en el interior de sólo una de las categorías. Si tomamos los datos de la tabla 4.3 y amplificamos por 10 los ingresos de las observaciones de la zona sur tendremos:

*Tabla 4.28. Efecto de un reajuste en la zona sur sobre la varianza de la distribución regional (hipotética) del ingreso*

| | *Norte* | *Centro* | *Sur* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| | 31 | 15 | 10 | 56 |
| | 18 | 12 | 20 | 50 |
| | 29 | 22 | 70 | 121 |
| | 20 | 10 | 370 | 400 |
| | 46 | 24 | | 70 |
| | 41 | 35 | | 76 |
| | | 85 | | 85 |
| | | 43 | | 43 |
| | | 49 | | 49 |
| | | 33 | | 33 |
| $\bar{Y}$: | 30.833 | 32.800 | 117.5 | 49.150 |
| $S^2$: | 103.139 | 455.960 | 21768.750 | 5781.328 |

La simple comparación entre estos promedios y los correspondientes a la distribución original, nos permite sostener que el reajuste de los ingresos en la zona sur y su mantenimiento en el norte y en el centro, trae como consecuencia una alteración en la intervarianza corregida por el efecto escala: una zona que estaba originalmente bastante por debajo del promedio general pasa ahora a estar sustancialmente por encima. La modificación en la interdesigualdad se reflejará adecuadamente en la medida de la intervariabilidad.

Las intravarianzas de las zonas norte y centro permanecen inalteradas y la del sur se amplifica por el cuadrado de la constante. Una propiedad deseable de la descomposición de la varianza corregida por el efecto escala sería que en presencia de reajustes en un solo grupo se mantuviese su aporte a la intravariabilidad. Sin embargo, esto no ocurrirá porque el factor que evita que la amplificación se manifieste en la medida ($\bar{Y}^2$) se modificará sólo en parte:

$$\bar{Y}^2 = (\bar{Y}_1 p_1 + \bar{Y}^2 p_2 + K\bar{Y}_3 p_3)^2$$

(donde *K* es el factor de reajuste) mientras que la varianza se modificará en

$K^2$, por lo que será afectada la contribución del grupo a la intravariabilidad. Esto se reflejará en un cambio en las *contribuciones relativas* y absolutas de los grupos a la intravarianza.

A manera de resumen parcial podríamos decir que si bien la descomposición de la varianza relativa no es sensible a transformaciones proporcionales aplicadas sobre *todos los valores de variable*, sí lo es en el caso en que aplicamos una constante a sólo un agregado puesto que se modificará su aporte a la inter y a la intradesigualdad. Si bien la alteración en la composición de la intervarianza corregida por el efecto escala es el reflejo de un reparto diferente del pastel entre los grupos, el cambio que se registra en la intravarianza y sus componentes no correspondería a una alteración en la repartición de la variable. En efecto, si aumentamos en 10 veces los ingresos de los habitantes del sur, la repartición interna no se ha modificado aunque sí se elevó el nivel.

La sensibilidad de la intravarianza a los cambios proporcionales en los valores de variable de un grupo se debe a que el factor de corrección es la media general y no la del grupo.

Es conveniente puntualizar que:
(i)El estudio de la desigualdad a través de la ecuación de descomposición de la varianza relativa presenta el problema de marcar cambios en la intradesigualdad si se han transformado proporcionalmente los valores de un grupo.
(ii) Ello se debe a que el factor de corrección utilizado es la media general y no el promedio de cada uno de los agregados. Más adelante examinaremos una forma de corregir este problema. Y
(iii) Que lo dicho en los dos puntos anteriores se puede generalizar a cualquier situación en que los cambios proporcionales se aplicaron a algunos grupos pero no a todos.

Ilustraremos estas conclusiones a partir de los datos de la tabla 4.28. A continuación expondremos los resultados del cálculo de la concentración del ingreso regional después del reajuste. Para facilitar las comparaciones en cada caso incluiremos las ecuaciones análogas que se obtuvieron con los datos originales. A estas últimas las identificaremos por I, y a las primeras por II.

Las intravarianzas en uno y otro casos son iguales a:

$$\text{(I) } S_D^2 = 30.942 + 227.980 + 43.538 = 302.460$$
$$\text{(II) } S_D^2 = 30{,}942 + 227.980 + 4353.800 = 4612.672$$

La composición de la intravarianza (no corregida por efecto escala) no se altera en las zonas norte y centro y se amplifica por $K^2 = (10)^2 = 100$ para la zona sur. Por este simple hecho las contribuciones relativas de cada región se verán alteradas.

Al aplicar la transformación proporcional a los valores de la zona sur también cambia el promedio general que sube de 28.000 a 49.150, en consecuencia al corregir estas ecuaciones por el cuadrado de la media se modificarán los valores absolutos de las contribuciones de las zonas a la intradesigualdad global.

$$(\mathrm{I})\ S_D^2 / \bar{Y}_I^2 = 0.039 + 0.291 + 0.0560 = 0.386$$

$$(\mathrm{II})\ S_D^2 / \bar{Y}_{II}^2 = 0.013 + 0.094 + 1.802 = 1.909$$

Los valores con que concurren las zonas norte y centro a la formación de la intradesigualdad en uno y otro caso experimentaron una alteración en sus valores absolutos, sin embargo, sus correspondientes relaciones se mantienen constantes e igualan a:

$$\frac{\bar{Y}_I^2}{\bar{Y}_{II}^2} = 3.081$$

Al expresar en términos relativos la composición de la intravarianza se pueden apreciar los cambios en los aportes regionales:

$$(\mathrm{I})\ 1.000 = 0.102 + 0.754 + 0.144$$
$$(\mathrm{II})\ 1.000 = 0.007 + 0.049 + 0.944$$

los cuales se explican en gran medida por el alza de la zona sur después del reajuste de los ingresos.

Para completar el ejemplo examinaremos la información relativa a las intervarianzas corregidas por el efecto escala:

$$(\mathrm{I})\ S_E^2 / \bar{Y}_I^2 = 0.003 + 0.015 + 0.067 = 0.085$$

$$(\mathrm{II})\ S_E^2 / \bar{Y}_{II}^2 = 0.042 + 0.055 + 0.387 = 0.484$$

las cuales se modificaron debido al cambio en el promedio general y a la mejoría experimentada por la posición relativa de la zona sur. En general advertimos, por una parte, que aumentó la dispersión global entre los grupos y que en términos proporcionales:

$$(\mathrm{I})\ 1.000 = 0.036 + 0.163 + 0.791$$
$$(\mathrm{II})\ 1.000 = 0.086 + 0.114 + 0.800$$

las alteraciones no fueron sustanciales.

Por último tenemos la composición de las medidas de desigualdad global:

$$(\mathrm{I})\ 0.471 = 0.386 + 0.085$$
$$(\mathrm{II})\ 2.393 = 1.909 + 0.484$$

Hemos dicho que el problema que presenta el uso de la descomposicion de la varianza como indicador de desigualdad, radica en que la intravarianza es sensible a las transformaciones proporcionales aplicadas sobre los valores de la variable en algunos grupos (pero no en todos). Y que esta característica se debe al hecho que el factor de corrección utilizado no es la media de cada grupo sino el promedio general.

Theil[24] nos proporciona una manera simple de corregir este defecto de la varianza relativa. Nos entrega una expresión que descompone el cuadrado del coeficiente de variabilidad en la suma de un inter y un intracoeficiente (ambos elevados al cuadrado):

$$\frac{S_T^2}{\bar{Y}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{K} (\bar{Y}_k - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} + \sum_{k=1}^{K} p_k \frac{\bar{Y}_k^2}{\bar{Y}^2} \left[ \frac{S_k^2}{\bar{Y}_k^2} \right]$$

De esta manera al introducir cambios proporcionales en los valores de la variable del grupo genérico *K*, el término encerrado entre corchetes no se altera, pero al modificarse al promedio general y el del grupo en proporciones diferentes se alterará el término $\frac{\bar{Y}_k^2}{\bar{Y}^2}$, y en consecuencia la contribución de los distintos grupos a la intradesigualdad. En consecuencia esta descomposición no elimina el problema que aqueja a la descomposición de la varianza relativa como medida de desigualdad.

El hecho que hemos mostrado no es sino la consecuencia de un resultado general que plantea Theil:

$$\frac{\sum_{k=1}^{K} \bar{Y}_k p_k}{\bar{Y}^2} = \frac{\bar{Y}^2 + \Sigma(\bar{Y}_k - \bar{Y})^2 p_k}{\bar{Y}^2} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{K} (\bar{Y}_k - \bar{Y})^2 p_k}{\bar{Y}^2}$$

Esta ecuación muestra que las ponderaciones que se aplican sobre los coeficientes de intravariabilidad por lo menos alcanza el valor unitario y que el exceso sobre uno depende del cuadrado del coeficiente de intervariabilidad. Es decir, los pesos son mayores en la medida que mayor es la interdesigualdad. El hecho de que los pesos sumen más de uno y que además la inter aparezca con una influencia sobre la intraconcentración hace poco conveniente recurrir a la descomposición del coeficiente de variación.

---

[24] Theil, H. *Economics and Information Theory*, North Holland Publishing co., Amsterdam, 1967, pág. 125.

El efecto del reajuste de los valores de variables sobre la varianza de los logaritmos en sólo uno de los grupos, se puede examinar a través de:

$$L^2 = L_D^2 + L_E^2$$

donde:

$$L_D^2 = \sum_{k=1}^{K} L_{D,k}^2 = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_k} (\ln Y_{ki} - \overline{\ln Y_k})^2 \, p_{ki}$$

y

$$L_E^2 = \sum_{k=1}^{K} (\overline{\ln Y_k} - \overline{\ln Y})^2 \, p_k$$

Al reajustar por una constante *c* los valores de variable en la categoría *k* se tendrá:

$$\boxed{\ln c\,Y_k = \ln c + \ln Y_k} \tag{4.21}$$

Este resultado tiene dos implicaciones que resultan de interés para analizar la forma como esta medida reacciona al reajuste proporcional en un solo grupo: (i) se altera el valor de la media general de los logaritmos[25] ($\overline{\log Y}$) y las posiciones relativas de cada grupo con respecto a la media global de la distribución, lo que se refleja en un cambio en la intervarianza de los logaritmos y (ii) la varianza de los logaritmos dentro del grupo no se modifica y como las ponderaciones se mantienen, tampoco varía el peso con que concurre cada agregado a la formación de la intradesigualdad. En efecto, al multiplicar por una constante los valores del grupo *k* tenemos que:

$$\boxed{\ln c\,Y_{ki} = \ln c + \ln Y_{ki}} \tag{4.22}$$

La varianza de los logaritmos de *k* después del reajuste, es igual a:

$$\boxed{L_{D,k}^2 = \sum_{i=1}^{n_k} (\ln c\,Y_{ki} - \overline{\ln c\,Y_k})^2 \, p_{ki}} \tag{4.23}$$

Al reemplazar las igualdades (4.21) y (4.22) en (4.23) se tiene que:

[25] La media general $\overline{\ln Y}$ es un promedio ponderado de la media de los logaritmos de cada grupo en que los pesos son sus importancias relativas. Al modificarse $\overline{\ln Y_k}$ y mantenerse los promedios de las restantes categorías así como sus ponderaciones necesariamente cambia el valor de $\overline{\ln Y}$

$$L^2_{D,k} = \sum_{i=1}^{n_k} (\ln c + \ln Y_{ki} - \ln c - \ln Y_k)^2\, p_{ki} =$$

$$L^2_{D,k} = \sum_{i=1}^{n_k} (\ln Y_{ki} - \ln Y_k)^2\, p_{ki}$$

Una transformación proporcional aplicada sobre los valores de variable de un grupo se refleja sólo en la medida de inter y no en la de intravariabilidad. En otros términos, la varianza de los logaritmos nos indica que el cambio global en el nivel de desigualdad proviene solamente de una modificación en las posiciones relativas de los grupos.

Este resultado nos permite afirmar que la varianza de los logaritmos sí cumple con el criterio de cambio proporcional en un grupo.

Examinemos el ejemplo de la distribución regional del ingreso en que se ha multiplicado por diez las rentas de la zona sur:

*Tabla 4.29. Efecto de un reajuste en la zona sur sobre la varianza de los logaritmos de la distribución regional (hipotética) del ingreso*

| | *Norte* | *Centro* | *Sur* | *Total* | *Sur (reajustado)* | *Total* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3.434 | 2.708 | 0.000 | 6.142 | 2.303 | 8.445 |
| | 2.890 | 2.485 | 0.693 | 6.068 | 2.996 | 8.371 |
| | 3.367 | 3.091 | 1.946 | 8.404 | 4.249 | 10.707 |
| | 2.996 | 2.303 | 3.611 | 8.910 | 5.914 | 11.213 |
| | 3.829 | 3.178 | | 7.070 | | 7.070 |
| | 3.714 | 3.555 | | 7.269 | | 7.269 |
| | | 4.428 | | 4.428 | | 4.428 |
| | | 3.761 | | 3.761 | | 3.761 |
| | | 3.892 | | 3.892 | | 3.892 |
| | | 3.497 | | 3.497 | | 3.497 |
| $\bar{Y}$: | 3.371 | 3.291 | 1.563 | 2.970 | 3.865 | 3.430 |
| $S^2_k$: | 0.117 | 0.404 | 1.885 | 1.110 | 1.885 | 0.663 |

De esta tabla nos interesa destacar que:

(i) La varianza de la región sur no se ha modificado después del reajuste. Antes y después su valor sigue siendo igual a 1.885.

(ii) Lo que, combinado con el hecho de que las ponderaciones se mantuvieron antes y después del reajuste, implica que no se modifiquen los aportes de cada región a la intradesigualdad:

(I) $L^2_D = 0.117 \times 0.30 + 0.404 \times 0.50 + 1.885 \times 0.20 = 0.614$

(II) $L_D^2 = 0.117 \times 0.30 + 0.404 \times 0.50 + 1.885 \times 0.20 = 0.614$

(iii) El promedio de la zona sur ha aumentado (en log 10 = 2.302) lo que se tradujo en un incremento en la media general (en 0.2 log 10 = 0.4605) y en un cambio en las posiciones relativas de los grupos. La zona sur, que tenía el promedio más bajo antes del reajuste, después pasó al primer lugar. Estas modificaciones se expresan sintéticamente en la medida de interdesigualdad:

(I) $L_E^2 = (3.372 - 2.970)^2 \times 0.30 + (3.291 - 2.970)^2 \times 0.50 + (1.563 - 2.970)^2 \times 0.2$

(II) $L_E^2 = (3.372 - 3.430)^2 \times 0.30 + (3.291 - 3.430)^2 \times 0.50 + (3.865 - 3.430)^2 \times 0.2$

Al realizar las operaciones indicadas llegamos a:

(I) $L_E^2 = 0.048 + 0.052 + 0.396 = 0.496$

(II) $L_E^2 = 0.001 + 0.009 + 0.038 = 0.048$

El reajuste ha disminuido la distancia entre los logaritmos de las medias de los grupos y el promedio general. Como consecuencia la intervarianza de los logaritmos sufrió una reducción importante. Sin embargo, el peso relativo con que concurre cada agregado no cambió tan espectacularmente:

(I) $L_E^2 = 1.000 = 0.098 + 0.104 + 0.798$

(II) $L_E^2 = 1.000 = 0.021 + 0.198 + 0.781$

La descomposición de la desigualdad total en la suma de la inter e intra desigualdad resulta antes y después del reajuste:

(I) $L^2 = 0.614 + 0.496 = 1.110$

(II) $L^2 = 0.614 + 0.048 = 0.662$

La amplificación por 10 de los ingresos de la región sur sólo afectó a la medida de interconcentración la cual disminuyó desde 0.496 hasta 0.048. Esta caída se refleja directamente en la medida global (ya que $L_D^2$ no se altera) marcando en consecuencia que el reajuste ha tenido un efecto democratizador (ha bajado $L^2$ desde 1.100 a 0.662). Nótese que este resultado es contradictorio con el que se llega al aplicar la varianza relativa, puesto que en ese caso la desigualdad había aumentado. Por el momento sólo anotaremos esta diferencia ya que será objeto de tratamiento específico un poco más adelante.

Por último tenemos la descomposición de la varianza de los logaritmos por regiones:

(I) 1.110 = 0.083 + 0.254 + 0.773

(II) 0.662 = 0.036 + 0.211 + 0.415

El ejemplo numérico no hace otra cosa que contestar el hecho de que la varianza de los logaritmos cumple con el criterio de cambio proporcional en un grupo: la modificación en el nivel global de desigualdad se produce vía las posiciones relativas de las categorías y se mantiene constante la intradesigualdad.

Nos resta por analizar el efecto que tiene sobre la medida de Theil el reajuste aplicado a un grupo.

Recordemos que el coeficiente entrópico depende de la relación entre las proporciones de valores de variable y de unidades, de modo que al multiplicar los valores de un sólo grupo se tendrá que:

(i) se modificarán las proporciones que muestran la participación relativa de cada grupo dentro del total de la variable ($q_k$) y como no se han alterado las proporciones en las unidades, entonces necesariamente se producirá un cambio en la interentropía.

(ii) No habrá variaciones en la entropía del grupo en que se ha multiplicado por *c*. Si todos los valores de variables del grupo genérico *k* se han multiplicado por una constante, entonces las proporciones de variables que le corresponde a cada observación dentro del grupo no se modifica;

$$q_{ik} = \frac{c\,Y_{ik}}{\sum\limits_{i=1}^{n_k} c\,Y_{ik}} = \frac{Y_{ik}}{\sum\limits_{k=1}^{n_k} Y_{ik}}$$

y como las frecuencias relativas ($p_{ik}$) no han cambiado, entonces:

$$H_{D,k} = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{q_{ik}}{q_k} \log \frac{q_{ik}/q_k}{p_{ik}/p_k}$$

la entropía del grupo *k* es insensible a las transformaciones proporcionales en los valores de la variable.

(iii) Sin embargo, las contribuciones de los agregados a la intradesigualdad se modificarán en virtud de que la intraentropía se forma con las entropías de cada *grupo ponderadas por sus participaciones relativas en el total de la variable* ($q_k$):

$$H_D = \sum_{k=1}^{k} H_{D,k}\, q_k$$

y los valores de $q_k$ cambiarán al aplicar la constante *c* a sólo un grupo.

En resumen, cuando amplificamos o reducimos proporcionalmente los valores de variable en sólo una categoría, se produce un cambio en la entropía total el cual se explica por modificaciones tanto en la contribución de la inter como de la intraentropía. En consecuencia, el índice de Theil no cumple con el criterio de cambio proporcional dentro de un grupo.

Ilustremos a través de nuestro ejemplo las ideas recién expuestas. Sabemos que el valor de la entropía total es igual a H = 0.240 que se compone regionalmente de la siguiente manera:

*Tabla 4.30. Entropía de la distribución regional (hipotética) del ingreso antes del reajuste*

| Valor de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i \ln q_i / p_i$ | $q_{ik}/q_k$ | $p_{ik}/p_k$ | $q_{ik}/q_k \ln \frac{q_{ik}/q_k}{P_{ik}/P_k}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Norte* | | | | | | |
| 31 | 0.055 | 0.050 | 0.006 | 0.168 | 0.167 | 0.001 |
| 18 | 0.032 | 0.050 | -0.014 | 0.097 | 0.167 | -0.052 |
| 29 | 0.052 | 0.050 | 0.002 | 0.157 | 0.167 | -0.010 |
| 20 | 0.036 | 0.050 | -0.012 | 0.108 | 0.167 | -0.047 |
| 46 | 0.082 | 0.050 | 0.041 | 0.249 | 0.167 | 0.099 |
| 41 | 0.073 | 0.050 | 0.028 | 0.222 | 0.167 | 0.063 |
| 185 | | | | 1.000 | 1.000 | 0.054 |
| *Centro* | | | | | | |
| 15 | 0.027 | 0.050 | -0.017 | 0.046 | 0.100 | -0.036 |
| 12 | 0.021 | 0.050 | -0.018 | 0.037 | 0.100 | -0.037 |
| 22 | 0.039 | 0.050 | -0.010 | 0.067 | 0.100 | -0.027 |
| 10 | 0.018 | 0.050 | -0.018 | 0.031 | 0.100 | -0.036 |
| 24 | 0.043 | 0.050 | -0.007 | 0.073 | 0.100 | -0.023 |
| 35 | 0.063 | 0.050 | 0.014 | 0.107 | 0.100 | 0.007 |
| 85 | 0.152 | 0.050 | 0.109 | 0.259 | 0.100 | 0.249 |
| 43 | 0.077 | 0.050 | 0.033 | 0.131 | 0.100 | 0.036 |
| 49 | 0.088 | 0.050 | 0.049 | 0.149 | 0.100 | 0.060 |
| 33 | 0.059 | 0.050 | 0.010 | 0.101 | 0.100 | 0.001 |
| 328 | | | | 1.000 | 1.000 | 0.191 |

| | Valor de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i \ln q_i / p_i$ | $q_{ik} / q_k$ | $p_{ik} / p_k$ | $q_{ik} / q_k \ln \frac{q_{ik} / q_k}{p_{ik} / p_k}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Sur* | 1 | 0.002 | 0.050 | -0.006 | 0.021 | 0.250 | -0.053 |
| | 2 | 0.004 | 0.050 | -0.010 | 0.143 | 0.250 | -0.075 |
| | 7 | 0.013 | 0.050 | -0.017 | 0.149 | 0.250 | -0.077 |
| | 37 | 0.067 | 0.050 | 0.019 | 0.787 | 0.250 | 0.903 |
| | 47 | 1.000 | 1.000 | 0.240 | 1.000 | 1.000 | 0.698 |

En las últimas cuatro columnas de este cuadro hemos incluido la información relativa al cálculo de las intraentropías que resultaron ser: para la zona norte 0.054, para el centro 0.191 y para el sur 0.698.

*Tabla 4.31. Entropía de la distribución regional (hipotética) del ingreso después del reajuste*

| | Valor de var. | $q_i$ | $p_i$ | $q_i \ln q_i / p_i$ | $q_{ik} / q_k$ | $p_{ik} / p_k$ | $q_{ik} / q_k \ln \frac{q_{ik} / q_k}{p_{ik} / p_k}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Norte* | | | | | | | |
| | 31 | 0.032 | 0.050 | -0.015 | 0.168 | 0.167 | 0.001 |
| | 18 | 0.018 | 0.050 | -0.018 | 0.097 | 0.167 | -0.052 |
| | 29 | 0.030 | 0.050 | 0.016 | 0.157 | 0.167 | -0.010 |
| | 20 | 0.020 | 0.050 | -0.018 | 0.108 | 0.167 | -0.047 |
| | 46 | 0.047 | 0.050 | 0.003 | 0.249 | 0.167 | 0.099 |
| | 41 | 0.042 | 0.050 | 0.008 | 0.221 | 0.167 | 0.063 |
| | 185 | | | | 1.000 | 1.000 | 0.054 |
| *Centro* | | | | | | | |
| | 15 | 0.015 | 0.050 | -0.018 | 0.046 | 0.100 | -0.036 |
| | 12 | 0.012 | 0.050 | -0.017 | 0.037 | 0.100 | -0.037 |
| | 22 | 0.022 | 0.050 | -0.018 | 0.067 | 0.100 | -0.027 |
| | 10 | 0.010 | 0.050 | -0.016 | 0.031 | 0.100 | -0.036 |
| | 24 | 0.024 | 0.050 | -0.018 | 0.073 | 0.100 | -0.030 |
| | 35 | 0.036 | 0.050 | -0.012 | 0.107 | 0.100 | 0.007 |
| | 85 | 0.087 | 0.050 | 0.047 | 0.259 | 0.100 | 0.247 |
| | 43 | 0.044 | 0.050 | -0.006 | 0.131 | 0.100 | 0.036 |
| | 49 | 0.050 | 0.050 | 0.002 | 0.149 | 0.100 | 0.060 |
| | 33 | 0.034 | 0.050 | 0.013 | 0.101 | 0.100 | 0.001 |
| | 328 | | | | 1.000 | 1.000 | 0.191 |
| *Sur* | | | | | | | |
| | 10 | 0.010 | 0.050 | -0.016 | 0.021 | 0.250 | -0.053 |
| | 20 | 0.020 | 0.050 | -0.018 | 0.043 | 0.250 | -0.075 |
| | 70 | 0.071 | 0.050 | -0.025 | 0.149 | 0.250 | -0.077 |
| | 370 | 0.376 | 0.050 | 0.760 | 0.787 | 0.250 | 0.903 |
| | 470 | | | | 1.000 | 1.000 | 0.698 |
| Tot. | 983 | 1.000 | 1.000 | 0.602 | | | |

Al comparar las dos últimas tablas hay que destacar que: (i) El nivel de desigualdad global, medido por el coeficiente entrópico ha aumentado. Antes del reajuste alcanzaba el valor de 0.2404 y después pasó a 0.602. (ii) Que las entropías dentro de cada grupo se han mantenido en sus mismos valores antes y después de haber reajustado los ingresos de la zona sur. Ambos resultados confirman las aseveraciones de carácter general que hemos realizado.

Por otra parte, la contribución de cada región a la intradesigualdad se ha modificado en virtud de que han variado los pesos que afectan a las entropías de los grupos. En efecto:

$$\text{(I) } H_D = (185/560)(0.054) + (328/560)(0.191) + (47/560)(0.698)$$

$$\text{(II) } H_D = (185/983)(0.054) + (328/983)(0.191) + (470/983)(0.698)$$

Realizando las operaciones indicadas tenemos que:

$$\text{(I) } H_D = 0.018 + 0.112 + 0.059 = 0.189$$

$$\text{(II) } H_D = 0.010 + 0.064 + 0.334 = 0.408$$

La intraentropía aumentó de valor debido al cambio en las proporciones de la variable que posee cada grupo aun cuando las medidas de las desigualdades internas no se han modificado. Este aumento en $H_D$ se reflejará en la medida de concentración total lo que contradice el criterio de cambio proporcional aplicado sólo sobre un grupo.

También el reajuste de los ingresos de la zona sur se expresará en una modificación del valor del coeficiente de interdesigualdad:

*Tabla 4.32. Composición de la interentropía de la distribución regional (hipotética) del ingreso, antes y después del reajuste*

| | Antes | | | | Después | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Val. de var. | $q_k$ | $p_k$ | $q_k \ln q_k/p_k$ | Val. de var. | $q_k$ | $p_k$ | $q_k \ln q_k/p_k$ |
| 185 | 0.330 | 0.300 | 0.032 | 185 | 0.188 | 0.300 | -0.088 |
| 328 | 0.586 | 0.500 | 0.093 | 328 | 0.334 | 0.500 | -0.135 |
| 47 | 0.084 | 0.200 | -0.073 | 470 | 0.478 | 0.200 | 0.417 |
| 560 | 1.000 | 1.000 | 0.052 | 983 | 1.000 | 1.000 | 0.194 |

El coeficiente de interdesigualdad pasa de 0.052 a 0.194 al multiplicar por 10 los ingresos de la zona sur.

El cambio en el nivel de concentración total inducido por el reajuste se debe en parte a la interdesigualdad y en parte al hecho que la medida de intradesigualdad acusa su impacto:

$$(I)\ H = 0.189 + 0.052 = 0.241$$

$$(II)\ H = 0.408 + 0.194 = 0.602$$

También se puede calcular la cuota con que concurren los grupos a la formación de la desigualdad global. Para ello basta sumar sus correspondientes contribuciones a la inter e intraconcentración:

$$(I)\ H = \left[0.018 + 0.032\right] + \left[0.112 + 0.093\right] + \left[0.059 + (-0.073)\right]$$

$$(II)\ H = \left[0.010 + (-0.088)\right] + \left[0.064 + (-0.135)\right] + \left[0.334 + 0.417\right]$$

Al realizar las operaciones indicadas concluimos que:

$$(I)\ H = 0.050 + 0.205 + (-0.014) = 0.240$$

$$(II)\ H = -0.078 - 0.071 + 0.750 = 0.602$$

El signo negativo en la primera ecuación nos señala que antes del reajuste la zona sur había resultado perjudicada por el reparto y los negativos en la segunda, que las zonas relativamente menos favorecidas después del reajuste son el norte y centro.

Los desarrollos que hemos presentado en esta sección se han basado en el supuesto que la amplificación o reducción de los valores de variable han afectado sólo a un grupo. Sin embargo, los resultados que hemos logrado se pueden extender fácilmente a dos situaciones generales:

(i) Que se reajusten los valores de variables en algunos grupos pero no en todos o,

(ii) que se multipliquen los valores de las observaciones que constituyen cada grupo por constantes diferentes (por ejemplo, en el grupo 1 por $C_1$, en el 2 por $C_2$ y así sucesivamente).

Examinemos la forma en que registran estas dos opciones las tres ecuaciones de descomposición de las medidas bajo estudio.

Tanto la primera como la segunda de estas formas de reajuste se reflejará en un cambio en la intravarianza relativa ya que la división de $S^2_D$ entre el cuadrado de la media general no logra neutralizar el hecho que las varianzas de los grupos objetos del reajuste aumentan en el cuadrado de la constante. En efecto, si en la opción (i) suponemos que se multiplican por una constante *C* los valores de todos los grupos menos uno (por ejemplo, el primero) tendremos:

$$\bar{Y}_C^2 = (\bar{Y}_1 + C\,\bar{Y}_2 + \ldots + C\,\bar{Y}_k)^2$$

y las varianzas grupales corregidas serán:

$$\frac{S_1^2}{\bar{Y}_c^2};\ \frac{C^2\,S_2^2}{\bar{Y}_c^2};\ \ldots\ ;\ \frac{C^2\,S_K^2}{\bar{Y}_c^2}$$

en que $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_K^2$ simbolizan las varianzas antes del reajuste. Como $\bar{Y}_c^2 \neq C^2\,\bar{Y}$ entonces se cumplirá que:

$$\frac{S_1^2}{\bar{Y}_c^2} \neq \frac{S_1^2}{\bar{Y}^2};\ \frac{C^2\,S_2^2}{\bar{Y}_c^2} \neq \frac{S_2^2}{\bar{Y}^2};\ \ldots\ ;\ \frac{C^2\,S_K^2}{\bar{Y}_c^2} \neq \frac{S_K^2}{\bar{Y}^2}$$

En consecuencia, el control por el efecto escala no es efectivo en la medida que se alteran las varianzas grupales, la intravarianza y la contribución de los grupos a la intradesigualdad.

En el segundo caso tenemos que:

$$\bar{Y}_c^2 = (c_1\,\bar{Y}_1 + c_2\,\bar{Y}_2 + \ldots + c_k\,\bar{Y}_k)^2$$

en que $c_1 \neq c_2 \neq c_K$

y las varianzas grupales corregidas después del reajuste serán:

$$\frac{C_1^2\,S_1^2}{\bar{Y}_c^2};\ \frac{C_2^2\,S_2^2}{\bar{Y}_c^2};\ \ldots\ ;\ \frac{C_k^2\,S_k^2}{\bar{Y}_c^2}$$

De la simple observación de la fórmula de $\bar{Y}^2$ se concluye que en general:

$$\frac{C_1^2\,S_1^2}{\bar{Y}_c^2} \neq \frac{S_1^2}{\bar{Y}^2};\ \frac{C_2^2\,S_2^2}{\bar{Y}_c^2} \neq \frac{S_2^2}{\bar{Y}^2};\ \ldots\ ;\ \frac{C_K^2\,S_K^2}{\bar{Y}_c^2} \neq \frac{S_K^2}{\bar{Y}^2}$$

En consecuencia, el reajuste de los valores de variable de todos los grupos menos uno por una constante o la multiplicación de cada grupo por una constante distinta, se reflejará en cambios en las varianzas grupales, sus aportes a la intravarianza y por lo tanto, en modificaciones en la medida de intradesigualdad. De esta manera hemos generalizado los resultados anteriormente expuestos.

La varianza de los logaritmos de cada grupo, así como la contribución que realizan a la intradesigualdad, permanecen inalterados si el reajuste de los valores de variable se realiza a través de cualquiera de los dos caminos.

Examinemos el efecto que produce sobre la varianza de los logaritmos de un grupo genérico *k* el reajuste por una constante *C* aplicada sobre un conjunto de grupos que no cubran la totalidad. En cada uno de ellos tendremos que:

$$L_k = \sum_{i=1}^{n_k} (\ln c\, Y_{ik} - \overline{\ln c\, Y_k})^2\, p_{ik}$$

$$L_k = \sum_{i=1}^{n_k} (\ln c + \ln Y_{ik} - \ln c - \overline{\ln Y_k})^2\, p_{ik}$$

y

$$L_k = \sum_{i=1}^{n_k} (\ln Y_{ik} - \overline{\ln Y_k})^2\, p_{ik}$$

La varianza de los logaritmos de cada grupo *k* que ha sido objeto del reajuste no se modifica y como los aportes a la intradesigualdad resultan de ponderar cada $L_k$ por sus importancias relativas ($P_k$) tampoco se alteran las contribuciones grupales ni el valor de la intravarianza de los logaritmos. En símbolos:

$$L_D = \sum_{k=1}^{K} L_k\, p_k$$

Al multiplicar las varianzas que conforman las *k* categorías en que hemos dividido el total de observaciones por constantes distintas $C_1, C_2, \ldots, C_K$, se presentará una situación totalmente paralela a la recién analizada. En efecto, en el grupo genérico *k* se cumple que:

$$L_k = \sum_{i=1}^{n_k} (\log C_k\, Y_{ik} - \overline{\log C_k\, Y_k})^2\, p_{ik}$$

$$L_k = \sum_{i=1}^{n_k} (\log Y_{ik} - \overline{\log Y_k})^2\, p_{ik}$$

Y, por lo tanto, tampoco se modifican las contribuciones de cada grupo a la intradesigualdad ni el valor global de la intravarianza de los logaritmos.

Consideremos a continuación las consecuencias que tienen los dos tipos de reajuste sobre la intraentropía. En todos los grupos que se aplique la constante *C* no se produce una alteración en la participación relativa en el ingreso. Por ejemplo, en la categoría genérica *k* tendremos:

$$\frac{C\, q_{ik}}{C\, q_k} = \frac{q_{ik}}{q_k}$$

Esto significa que la intraentropía de cada grupo reajustado no se modifica·

$$H_{D,k} = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{Cq_{ik}}{Cq_k} \log \frac{\dfrac{Cq_{ik}}{Cq_k}}{\dfrac{p_{ik}}{p_k}} = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{q_{ik}}{q_k} \log \frac{\dfrac{q_{ik}}{q_k}}{\dfrac{P_{ik}}{p_k}}$$

Pero, sí cambian las contribuciones que realiza cada grupo a la intraentropía así como el valor global de esta última. Ello es consecuencia de que los factores de ponderación que se usan para agregar las entropías grupales son las participaciones relativas de cada grupo en la variable ($q_k$). Ahora bien, los $q_k$ sí han variado antes y después del reajuste. Por ejemplo, si se ha reajustado en *C* a todos los grupos, excepto al primero, tendremos:

$$q_1' = \frac{Y_1}{CY - Y_1} \neq \frac{Y_1}{Y} = q_1 \; ; \; q_2' = \frac{C\,Y_2}{CY - Y_1} \neq \frac{Y_2}{Y} = q_2 \ldots$$

$$\ldots\, q_K' = \frac{C\,Y_K}{CY - Y_1} \neq \frac{Y_K}{Y} = q_K$$

en que $Y_1$, $Y_2$,..., $Y_K$ simbolizan los totales de los grupos 1, 2, ... , K e Y el valor total que alcanza la variable en el conjunto completo de observaciones, además $q_k$ y $q_k'$ expresan las participaciones grupales relativas antes y después del reajuste, respectivamente.

Antes de aplicar la constante c a los (k-1) grupos teníamos que la intraentropía se componía de la siguiente manera:

$$H_D = q_1 H_{D,1} + q_2 H_{D,2} + \ldots + q_k H_{D,k} \; .$$

$$H_D = \sum_{k=1}^{K} H_{D,k}\, q_k$$

y después del reajuste será igual a:

$$H_D' = q_1' H_{D,1} + q_2' H_{D,2} + \ldots + q_k' H_{D,k} \neq$$

$$H_D' = \sum_{k=1}^{K} H_{D,k}\, q_k'$$

como

$$q_1 \neq q_1' \; ; \; q_2 \neq q_2' \; ; \ldots ; \; q_k \neq q_k'$$

entonces:

$$q_k H_{D,k} \neq q_k' H_{D,k} \; (k = 1, 2, \ldots, K)$$

y

$$H_D \neq H_D'$$

La primera de estas desigualdades muestra el cambio en la contribución de cada grupo a la intradesigualdad y la segunda una alteración en la intraentropía antes y después del reajuste.

Una situación totalmente análoga se produce con el reajuste de cada grupo por constantes diferentes $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Resulta evidente que si $C_1 \neq C_2 \neq \ldots \neq C_k$ las participaciones relativas de cada grupo en el total de la variable serán diferentes antes y después del reajuste: $q_1 \neq q_1$ ; $q_2 \neq q_2^1$ ;...; $q_k \neq q_k^1$ y por lo tanto se modifican las contribuciones de los grupos a la intradesigualdad así como el valor de la intraentropía.

A manera de resumen podemos sostener que el reajuste de los valores de variable por una constante en (k-1) grupos o la multiplicación de los mismos por constantes distintas $C_1, C_2, \ldots, C_k$, no sólo modifica las medidas de interdesigualdad de los tres indicadores, sino que en algunos casos también altera el valor de algunas medidas de intradesigualdad lo que contradice el criterio de cambio proporcional en algunos grupos. Específicamente encontramos para los dos tipos de reajuste que:

(i) No modifican el valor de la intravarianza de los logaritmos ni tampoco el peso con que concurren los agregados a la intraconcentración.

(ii) Alteran las varianzas relativas de los grupos objeto de la multiplicación por la constante o constantes y, por ello, se modifica el nivel y la composición de la intradesigualdad. La variación experimentada por el nivel se manifiesta directamente en el grado de concentración total.
(iii) Las entropías de los grupos no se modifican pero sí sus contribuciones y por esta vía se explica parte del cambio en la desigualdad global.

Las ecuaciones que permiten descomponer los índices de desigualdad en la suma de la inter e intraconcentración, nos sirven también para identificar qué parte del cambio sufrido por una medida es inducido por una alteración genuina del nivel de desigualdad y qué parte se debe al instrumento estadístico a través del cual se hace la medición. En efecto, un reajuste proporcional aplicado sobre uno o varios grupos no modifica los niveles de desigualdad en cada uno de ellos y, en consecuencia, no deberían cambiar sus contribuciones a la intradesigualdad. El nivel global de concentración experimenta variaciones en función de las posiciones relativas de cada uno de los agregados. Si como consecuencia del tipo de reajustes que hemos considerado un índice estadístico manifiesta una alteración en la intraconcentración, estará incorporando un componente no genuino en la medición de la desigualdad global que es producto del artefacto estadístico.

Para ilustrar estas ideas realizamos un examen comparativo de la manera como recogen las tres medidas bajo estudio el reajuste de los ingresos de la zona sur. Los datos de la tabla que exponemos a continuación provienen de los cálculos que ya han sido presentados.

*Tabla 4.33. Comparación del efecto que tiene una transformación proporcional en los valores de variable del sur sobre: la varianza relativa, la varianza de los logaritmos y el índice de Theil*

| | | Dentro | Entre | Total |
|---|---|---|---|---|
| Varianza relativa | I | 0.386 | 0.085 | 0.471 |
| | II | 1.409 | 0.484 | 2.393 |
| Varianza de los logaritmos | I | 0.614 | 0.496 | 1.110 |
| | II | 0.614 | 0.048 | 0.662 |
| Entropía | I | 0.189 | 0.052 | 0.241 |
| | II | 0.408 | 0.194 | 0.602 |

I : valores originales
II: valores con reajuste por 10 en el grupo sur.

La varianza corregida y la entropía muestran que el reajuste aplicado a la zona más pobre (zona sur), fue tan violento que aumentó el nivel de concentración global. Por el contrario, la varianza de los logaritmos nos señala que la desigualdad ha disminuido. ¿Cómo es posible que se llegue a conclusiones tan opuestas?

En el caso de los índices que marcan un aumento en el nivel de desigualdad hay una parte que ha sido inducida por la intradesigualdad y de acuerdo con nuestra argumentación correspondería a un efecto no genuino producto del artefacto estadístico. Nótese que el valor de la intravarianza de los logaritmos se mantuvo. Además la intervarianza relativa y la interentropía nos indican que aumentó el nivel de interdesigualdad mientras que la varianza de los logaritmos nos señaló lo contrario. Esta diferencia se debe al hecho de que al aplicar la transformación logarítmica a los valores de variable (en este caso los promedios de los grupos) se les da a los valores grandes un peso menor que a los pequeños y, en consecuencia, al aporte a la interdesigualdad que realiza la zona sur después del reajuste es menor que antes del mismo.

El resultado contradictorio que arroja la varianza de los logaritmos en comparación con la varianza corregida por el efecto escala y el coeficiente de Theil proviene del hecho de que estas dos últimas medidas muestran un cambio no genuino en sus intraconcentraciones y de que la varianza de los logaritmos adjudica una importancia diferencial a las discrepancias según el nivel en que éstas se encuentran.

La posibilidad de que las tres medidas de desigualdad arrojen un resultado contradictorio, dependerá del valor que tenga el factor o factores de reajuste y de la posición relativa del grupo o grupos afectados. Considérense para ilustrar esta idea los valores contenidos en la siguiente tabla:

*Tabla 4.34. Comparación del efecto que tienen transformaciones proporcionales en los valores del grupo rural sobre: la varianza relativa, la varianza de los logaritmos y el índice de Theil*

| | | Dentro | Entre | Total |
|---|---|---|---|---|
| Varianza corregida | I | 0.246 | 0.225 | 0.471 |
| | II | 0.319 | 0.005 | 0.324 |
| | III | 0.417 | 0.131 | 0.548 |
| Varianza de los logaritmos | I | 0.737 | 0.373 | 1.110 |
| | II | 0.737 | 0.005 | 0.742 |
| | III | 0.737 | 0.071 | 0.808 |
| Indice entrópico | I | 0.131 | 0.109 | 0.240 |
| | II | 0.174 | 0.003 | 0.177 |
| | III | 0.196 | 0.071 | 0.267 |

I: valores originales
II: valores reajustados por 3
III: valores reajustados por 6

Las medidas de desigualdad y los coeficientes de reajuste se han aplicado sobre las 20 observaciones. Pero esta vez usamos como información básica la clasificación rural, no rural de la tabla 4.4. Se decidió multiplicar por 3 los valores de la zona rural para aproximar ambos promedios (el rural originalmente era de 17.167 y el urbano alcanzaba a 44.250 lo que se tradujo en que las tres medidas marcaran una caída en los niveles de desigualdad. En el caso de la varianza de los logaritmos se debe a la disminución de su componente intra y en el de la varianza corregida y el índice entrópico a una baja mayor en la intraconcentración que el alza experimentada por su componente dentro que es producto del artefacto estadístico.

El otro factor utilizado para reajustar los valores originales fue 6, con lo que los promedios de ambos grupos se distancian sólo un poco más con respecto a la situación original, pero esta vez la diferencia se establece en un nivel más alto. Ante este reajuste los tres indicadores de desigualdad marcan una tendencia hacia una mayor concentración con respecto al caso en que el factor fue 3, pero tanto la varianza relativa como el índice de Theil, nos señalan que la desigualdad es mayor que la existente en los valores originales y la varianza de los logaritmos, que es menor. Esto se debe en parte al efecto "artefacto" inducido por la intravarianza y por la intraentropía y en parte a que la diferencia de las medidas se da entre valores más altos a los cuales la varianza de los logaritmos les adjudica una importancia relativa menor.

## 4.11. *A modo de conclusión*

En este capítulo iniciamos la exposición estableciendo algunas relaciones entre teoría y técnica. Incluimos como criterio estadístico adicional, la propiedad de descomposición e incorporamos explícitamente algunas consideraciones sobre el nivel de agregación en que se definen los conceptos teóricos y sus efectos sobre la elección de las medidas de desigualdad.

Hemos mostrado la vinculación entre el índice de Gini y las teorías que basan su poder explicativo en conceptos que conducen a privilegiar el estudio de unidades individuales. Desde este tipo de perspectiva es comprensible y natural que se privilegie su interpretación como un promedio de todas las diferencias (en valores absolutos), posibles entre los valores de variable y que ello sea destacado como uno de los elementos que hay que tomar en cuenta para decidirse en favor de Gini:

> "En conclusión: el índice de Gini tiene interpretaciones económicas claras y de directa concepción intuitiva[26]..."

Además, los estudios de desigualdad realizados a partir de esta óptica muestran especial preocupación por el grado de subestimación en que se in-

[26] *Diéguez y Petriecolia.*

curre al disponer sólo de datos agregados. Sabemos que es usual que el investigador tenga acceso amplio a la información contenida en las tablas estadísticas publicadas por organismos especializados, y que por lo tanto sólo estará en condiciones de calcular el grado de desigualdad existente entre los datos agregados, el que difiere al de los no agrupados. La tensión entre el tipo de información disponible y los requerimientos teóricos lleva a preocuparse por el tamaño del sesgo.

Asimismo, resulta comprensible que para las teorías que privilegian lo individual no presente un interés mayor el que la medida sea o no susceptible de descomposición. Los resultados de Pyatt[27] no resultan interesantes desde el punto de vista analítico ni operativo[28] sino que en tanto y cuanto permiten arrojar luz sobre algunos factores explicativos de los niveles de desigualdad.

Para las teorías que descansan en conceptos agregados el criterio de descomposición resulta ser de vital importancia, pues de esta manera se puede analizar la contribución que realiza cada grupo. Por otra parte, la interpretación de la desigualdad en términos de comparaciones individuales no tienen sentido. El uso de Gini en estudios realizados desde esta óptica se puede justificar por su interpretación en términos de desvíos respecto a la norma democrática.

Queremos destacar cómo el criterio de descomposición es central para un tipo de teoría y periférico para el otro.

Las ideas expuestas en este capítulo nos permiten señalar que si se trata de medir el nivel de desigualdad en un estudio que se inscribe dentro de una teoría que privilegia lo individual, el coeficiente más apropiado parecería ser el índice de concentración de Gini, a pesar de que no refleje de manera adecuada las transferencias realizadas entre unidades ubicadas en distintos niveles (no represente adecuadamente los cambios relativos).

Pero si el análisis está orientado por una perspectiva teórica cuyos conceptos remiten a agregados estadísticos, tal vez será más conveniente recurrir a la varianza relativa, al coeficiente de Theil o a la varianza de los logaritmos. La decisión en favor de una de estas medidas, debiera tomarse considerando que la varianza de los logaritmos no posee recorrido cuyo límite superior sea conocido, lo que puede llegar a ser de vital importancia toda vez que la preocupación central consista en obtener una medida del *nivel* de desigualdad existente en una distribución de frecuencias. En este caso la decisión debiera favorecer a la varianza relativa o al índice de Theil ya que es posible normalizarlos.

Pero si en el estudio se privilegia la propiedad de descomposición ¿cómo realizar la elección si los tres índices la satisfacen? Desde el punto de vista estadístico la respuesta debe buscarse en los criterios que deben cumplir las

[27] *Op. cit.*
[28] Diéguez y Petriecolia.

"buenas medidas de desigualdad". Sabemos que la varianza corregida por el efecto escala no cumple con la condición de cambio relativo y que ella y el índice de Theil introducen un efecto ilusorio sobre la medición de la intradesigualdad. La varianza de los logaritmos cumple con todos los criterios, excepto con el de tener un recorrido limitado. La decisión en favor de uno u otro coeficiente dependerá del peso que se adjudique a cada criterio.

# V: El estudio dinámico de la desigualdad

## 5.1 *Introducción*

En la dos primeras secciones del capítulo anterior planteamos las vinculaciones entre el esquema teórico que orienta sustantivamente el estudio, el tipo de preguntas que de él emergen, la naturaleza de los datos y las medidas de desigualdad que presentan un mayor grado de adecuación a esas interrogantes.

Hemos establecido que el enfoque teórico determina: (i) que nuestro interés se centre en el estudio de la desigualdad de las observaciones individuales o de los agregados estadísticos, (ii) que se privilegie el análisis del nivel de desigualdad o el estudio de su composición y del cambio a través del tiempo y (iii) que parte de la preocupación estadística se concentre o no en torno a los problemas de sobre o subestimación de la desigualdad existente en los datos originales.

Las secciones finales del capítulo anterior fueron dedicadas al estudio de las medidas estadísticas que permiten analizar el nivel y composición de la concentración de una variable entre un conjunto de agregados sociales. en este capítulo examinaremos las potencialidades que tienen la varianza relativa, el índice de concentración de Theil y la varianza de los logaritmos para llevar a cabo el estudio dinámico de la desigualdad. Pero, antes de avanzar sobre las cuestiones técnicas, intentaremos ubicar lo más precisamente posible la preocupación central que orienta este capítulo en relación al material expuesto.

Es usual que en las investigaciones en que se estudia la desigualdad en el nivel agregado, o en aquéllas que incluyen consideraciones sobre la misma, se lleve a cabo un conjunto de mediciones a través del tiempo y a partir de ellas se analice la evolución temporal de la concentración, distinguiendo las tendencias de las variaciones cíclicas y estacionales.

Interesa, por ejemplo, saber si las características básicas del funcionamiento del modelo económico traen como consecuencia un proceso de concentración del ingreso personal, o bien, si el conflicto político y social se tradujo en la democratización de la propiedad de la tierra o de los medios de producción.

Este tipo de intereses han generado estudios que se limitan al análisis de series de tiempo en que la variable cuyo comportamiento debe explicarse es alguna medida de desigualdad (casi siempre el índice de Gini). Aún más, como normalmente se cuenta con información escasa, las proyecciones de tendencias se realizan sobre la base de una precaria cantidad de información que incluso inhibe la aplicación de las técnicas estadísticas de análisis de series cronológicas. Con dos, tres o a lo más cuatro mediciones en un secuencia de puntos en el tiempo se pretende dar pie empírico a las elaboraciones teóricas.

Tanto el estudio estadístico de series de tiempo como la interpretación que se adjudica a los índices de concentración basados en unos pocos datos, corresponden a un tipo de análisis de la información que no se pregunta por la manera en que se ha pasado desde un *nivel de desigualdad* a otro, cuestión que puede tener alguna relevancia tanto en términos teóricos como empíricos; al mismo tiempo, desde el punto de vista estadístico, incorpora un tipo de preocupación que induce a interrogantes diferentes a las usuales. Quisiéramos saber si, por ejemplo, la democratización en la distribución del ingreso puede entenderse como la consecuencia de un proceso de mayor igualdad entre las clases o más bien como una homogeneización entre las clases sociales. Aún más, pudiéramos estar interesados en conocer los aportes que realizan a la democratización las distintas clases. O, si observamos una tendencia hacia la concentración del crédito entre las empresas industriales, puede resultar de interés distinguir si ello es consecuencia de una apropiación creciente por las empresas internacionales o bien si se debe a un proceso de desigualdad creciente en el interior, tanto de las industrias nacionales como de las empresas cuyo capital proviene fundamentalmente del extranjero.

En este capítulo nos preocuparemos por indagar a la manera en que se pasa desde un nivel de desigualdad a otro. Nos interesará identificar los componentes del cambio entre dos puntos. El análisis de las tendencias en la evolución de los niveles de desigualdad cae dentro del campo estadístico de las series de tiempo y por lo tanto no se encuentra dentro de los límites de este trabajo. Sin embargo, sí es pertinente estudiar detenidamente la *composición del cambio en los niveles de desigualdad*.

## 5.2. *El papel de la inter e intradesigualdad en el cambio de las medidas de desigualdad.*

Los desarrollos que presentamos en el capítulo anterior nos permiten afirmar, que para un punto del tiempo, tanto la descomposición de la varianza relativa como la del índice de concentración de Theil y la de la varianza de los logaritmos, pueden expresarse en términos genéricos como la suma de las contribuciones que hace cada grupo al nivel global de desigualdad. Hemos visto que todas ellas se pueden descomponer en la suma de la medida de inter y la de intradesigualdad y que a su vez cada una pueda obtenerse a través

de la agregación de las contribuciones que realizan las categorías o grupos.
En términos simbólicos tenemos entonces que:

$$(5.1) \qquad \boxed{T_t = D_t + E_t}$$

donde:
$T_t$ es el valor que alcanza la medida de desigualdad global en el tiempo genérico t.
$D_t$ simboliza la medición de la intradesigualdad en el tiempo t
$E_t$ representa a la interdesigualdad en t

La ecuación (5.1) resume en términos generales la descomposición de las medidas en su componente "dentro" y "entre". Así, en el caso en que usemos como indicador de concentración la varianza corregida por el efecto escala tendremos que:

$$(5.2) \qquad \boxed{\begin{array}{c} T_t = \dfrac{S_t^2}{\bar{Y}_t^2}\,;\; D_t = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \dfrac{S_{k,t}^2 \cdot p_{k,t}}{\bar{Y}_t^2} \\ \text{y} \quad E_t = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \dfrac{(\bar{Y}_{k,t} - \bar{Y}_t)^2\, p_{k,t}}{\bar{Y}_t^2} \end{array}}$$

La única diferencia de esta simbología con respecto a la usada anteriormente radica en que hemos agregado el subíndice *t* para poner todos los términos en referencia al tiempo.
Pero si hubiésemos decidido usar la varianza de los logaritmos como medida de desigualdad tendríamos entonces que:

$$(5.3) \qquad \boxed{T_t = L_t^2\,; \quad D_t = L_{D,t}^2 \quad \text{y} \quad E_t = L_{E,t}^2}$$

Las fórmulas de cálculo y las definiciones de $L_t$, $L_{D,t}$ y $L_{E,t}$ se entregaron en los capítulos anteriores, la única novedad es el subíndice que se refiere al tiempo.
En el caso en que se haya decidido utilizar el índice de Theil como medida de concentración tendremos que:

$$(5.4) \qquad \boxed{T_t = H_{T,t}\,; \quad D_t = H_{D,t} \quad \text{y} \quad E_t = H_{E,t}}$$

Al igual que para la varianza corregida por el efecto escala y para la varianza de los logaritmos, todos los símbolos de las igualdades (5.4) se definieron en los capítulos anteriores.
La ecuación que expresa la descomposición del nivel de desigualdad global se puede poner referido a un punto del tiempo cualquiera (t + s) donde $s \neq 0$:

$$(5.5) \qquad \boxed{T_{t+s} = D_{t+s} + E_{t+s}}$$

Esta igualdad es totalmente análoga a (5.1) y por lo tanto expresa en términos generales la propiedad de descomposición de la varianza relativa, del índice de concentración de Theil y de la varianza de los logaritmos. En consecuencia, es posible escribir un conjunto de ecuaciones análogas a (5.2), (5.3) y (5.4) con la única diferencia que esta vez deben referirse al tiempo (t + s).

(5.6)
$$\boxed{T_{t+s} = \frac{S^2_{t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}\; ; \quad D_{t+s} = \frac{\sum_{k=1}^{K} S^2_{k,t+s}\, p_{k,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}} \quad \text{y} \quad E_{t+s} = \frac{\sum_{k=1}^{K} (\bar{Y}_{k,t+s} - \bar{Y}_{t+s})^2\, p_{k,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}}$$

(5.7)
$$\boxed{T_{t+s} = L^2_{t+s}\; ; \quad D_{t+s} = L^2_{D,t+s} \quad \text{y} \quad E_{t+s} = L^2_{E,t+s}}$$

(5.8)
$$\boxed{T_{t+s} = H_{T,t+s}\; ; \quad D_{t+s} = H_{D,t+s} \quad \text{y} \quad E_{t+s} = H_{E,t+s}}$$

Si a la ecuación (5.1) le restamos (5.5) tenemos que:

(5.9)
$$\boxed{T_t - T_{t+s} = (D_t - D_{t+s}) + (E_t - E_{t+s})}$$

El miembro de la izquierda nos indica la variación experimentada por el nivel de desigualdad global entre t y t + s. El primer término de la derecha nos señala el cambio que sufrió el nivel de intradesigualdad entre ambos tiempos y el segundo la variación que en el mismo período afectó a la interdesigualdad. De acuerdo con estas interpretaciones, la ecuación (5.9) nos permite identificar la parte del cambio en el nivel total de desigualdad que se debe a modificaciones en los niveles de intraconcentración y diferenciarla de aquella que se genera en alteraciones en los niveles de concentración. Puesto de otra manera, *esta ecuación nos permite identificar y cuantificar las variaciones experimentadas por la inter e intradesigualdad como dos fuentes que originan y agotan el cambio sufrido por el nivel global de desigualdad.* La variación experimental por la intraconcentración entre t y (t + s) unida a la sufrida por la interconcentración en el mismo lapso igualan al cambio que afectó la repartición de la variable en ese período.

Para interpretar los posibles resultados que puede arrojar la ecuación (5.9) supongamos que s > 0, es decir, que (t + s) es un instante de tiempo posterior a t. Cuando el nivel de desigualdad es menor en (t + s) que en t:

$$T_t > T_{t+s}$$

asumirá un valor positivo. Por el contrario un signo negativo será el resultado si:

$$T_t < T_{t+s}$$

y deberá interpretarse como un aumento en el nivel de concentración en el lapso bajo consideración. Luego, si (t + s) es un tiempo posterior a *t*, entonces un signo positivo de (5.9) indica una tendencia hacia una distribución más equitativa de la variable y uno negativo un aumento en el nivel de desigualdad a través del tiempo.

De manera análoga tenemos que si:

$$D_t > D_{t+s}$$

entonces el primer términos de la derecha de (5.9) será positivo indicando que en t y (t + s) se produjo un proceso de desconcentración en la repartición intragrupal de la variable, y si

$$D_t < D_{t+s}$$

el cambio será negativo como consecuencia de un aumento en los niveles de desigualdad dentro de los grupos.

De igual forma, un valor positivo en el segundo término de la derecha de (5.9) nos señala que entre los grupos hubo una distribución más equitativa de la variable en (t + s) que en t. Se tendrá un valor negativo en la situación exactamente contraria.

En este momento estamos en condiciones de afirmar que si (t + s) es un tiempo posterior a t, tendremos que siempre que los componentes de (5.9) tomen valores positivos se debe interpretar como una caída de los niveles de desigualdad, y como un aumento cuando asuman valores negativos.

El signo del miembro de la izquierda de (5.9) resulta de alguna de las cuatro combinaciones que se representan en la siguiente tabla:

*Tabla 5.1. Composición del cambio del nivel de desigualdad global*

| | | Cambio de la Intradesigualdad | |
|---|---|---|---|
| | | + | − |
| Cambio de la Interdesigualdad | + | + | ? |
| | − | ? | − |

Las casillas de la diagonal principal tienen una interpretación inequívoca.

La combinación ( + , + ) indica que entre t y (t + s) ha sabido una tendencia hacia la igualdad tanto en el interior de los grupos como entre ellos. La situación opuesta se encuentra representada en la casilla definida por la combinación (-,-). Es decir, en el lapso considerado hubo un proceso de concentración no sólo entre los grupos sino que también dentro de ellos.

Las casillas de la diagonal secundaria pueden arrojar como resultado valores positivos o negativos lo que dependerá de la magnitud de las medidas involucradas. Por ejemplo, si tuvo lugar un proceso de concentración dentro de los grupos, pero simultáneamente se ha presentado una tendencia a la igualdad entre los mismos (situación representada por la casilla definida por la primer línea y la segunda columna), el signo que asuma (5.9) será positivo sólo en el caso que el movimiento hacia la igualdad entre las clases supere al de la concentración dentro. En la situación contraria será negativo.

En resumen, un movimiento hacia una distribución más equitativa de la variable entre t y (t + s) se puede originar de las siguientes maneras: (i) Una caída simultánea de los niveles de inter e intradesigualdad. (ii) Una merma mayor en la intradesigualdad que el aumento da la concentración entre clases. y (iii) una baja en los niveles de interdesigualdad mayor que el aumento experimentado por la concentración dentro de los grupos.

Un signo negativo se forma por una combinación de movimientos exactamente opuesta a la que hemos señalado, es decir por: (i) Un aumento de los niveles de concentración dentro y entre los estatos. (ii) Un alza en la intradesigualdad que supera al movimiento hacia la igualdad entre las clases (iii) Un cambio hacia una intraigualdad menor que el aumento experimentado por la concentración entre estratos.

Para ilustrar estas ideas así como para dar un mayor nivel de concreción a las fórmulas introduciremos un ejemplo numérico.

*Tabla 5.2. Distribución regional (hipotética) del ingreso en los tiempos t y (t + s)*

| *Norte* | | *Centro* | | *Sur* | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | (t + s) | t | (t + s) | t | (t + s) |
| 31 | 33 | 15 | 15 | 1 | 10 |
| 18 | 20 | 12 | 12 | 2 | 15 |
| 29 | 31 | 22 | 22 | 7 | 30 |
| 20 | 25 | 10 | 10 | 37 | 45 |
| 46 | 50 | 24 | 24 | | |
| 41 | 41 | 35 | 35 | | |
| | | 85 | 85 | | |
| | | 43 | 43 | | |
| | | 49 | 49 | | |
| | | 33 | 33 | | |

Esta información es básicamente la misma que nos ha servido para ilustrar el material que hemos entregado en el capítulo anterior, sólo agregamos los valores que asumen los ingresos en (t + s) y hemos supueso que la distribución original se refería al tiempo t.

Sobre la base de estos datos estamos en condiciones de evaluar la ecuación (5.9) para cada una de las tres medidas de desigualdad. Como en el capítulo anterior ya calculamos los valores que asumían los indicadores en t sólo nos resta obtenerlos para el tiempo (t + s).

Para el caso de la varianza relativa tenemos que en (t + s) los elementos básicos que conforman la ecuación de descomposición toman los siguientes valores:

$$\overline{Y}_{1,t+s} = 33.333 \; ; \; \overline{Y}_{2,t+s} = 32.800 \; ; \; \overline{Y}_{3,t+s} = 25.000 \; ;$$

$$\overline{Y}_{t+s} = 31.400$$

$$S^2_{1,t+s} = 98.220 \; ; \; S^2_{2t+s} = 455.960 \; ; \; S^2_{3,t+s} = 187.500 \text{ y}$$

$$S^2_{t+s} = 305.240$$

donde los subíndices 1, 2 y 3 denotan las zonas norte, centro y sur respectivamente. A partir de estos datos se obtienen las cuotas con que concurren las inter e intravarianzas para conformar la varianza relativa:

$$\frac{305.240}{(31.400)^2} = \left[ \frac{(98.220)\,(0.300)}{(31.400)^2} + \frac{(455.960)\,(0.500)}{(31.400)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(187.500)\,(0.200)}{(31.400)^2} \right] + \left[ \frac{(33.333 - 31.400)^2\,(0.300)}{(31.400)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(32.800 - 31.400)^2\,(0.500)}{(31.400)^2} + \frac{(25.000 - 31.400)^2\,(0.200)}{(31.400)^2} \right]$$

Al realizar las operaciones indicadas se obtiene:

$$0.309 = 0.299 + 0.010$$

Según los cálculos realizados en el capítulo anterior sabemos que la ecuación en t es:

$$0.471 = 0.386 + 0.085$$

Restando término a término a esta igualdad la inmediatamente anterior encontramos el valor numérico que asume (5.9):

$$0.471 - 0.309 = (0.386 - 0.299) + (0.085 - 0.010)$$

$$0.161 = 0.087 + 0.074$$

Al ser menor el valor de la varianza en (t + s) que en t se concluye que disminuyó la desigualdad de la distribución del ingreso en ese lapso. Además, la ecuación nos dice que la caída en el nivel de concentración se debe tanto a una mejor repartición del ingreso dentro de las regiones como a una distribución más igualitaria entre ellas.

Si bien estos cálculos los hemos efectuado siguiendo la lógica que origina la fórmula (5.9) también pueden ser realizados a través de la ecuación:

$$\boxed{\frac{S_t^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2} = \left[\frac{S_{D,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{D,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right] + \left[\frac{S_{E,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{E,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right]} \tag{5.10}$$

que es la forma específica que asume la ecuación de decomposición del cambio cuando se usa la varianza relativa como indicador de desigualdad.

Al usar la varianza de los logaritmos la ecuación de descomposición del cambio (5.9) toma la forma:

$$\boxed{L_t^2 - L_{t+s}^2 = \left[L_{D,t}^2 - L_{D,t+s}^2\right] + \left[L_{E,t}^2 - L_{E,t+s}^2\right]}$$

En la tabla 5.3 entregamos la información:

*Tabla 5.3. Distribución regional (hipótetica) del logaritmo del ingreso en los tiempos t y (t + s)*

| Norte | | Centro | | Sur | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | t + s | t | t + s | t | t + s |
| 3.434 | 3.497 | 2.708 | 2.708 | 0.000 | 2.303 |
| 2.890 | 2.996 | 2.485 | 2.485 | 0.693 | 2.708 |
| 3.367 | 3.434 | 3.091 | 3.091 | 1.946 | 3.401 |
| 2.996 | 3.219 | 2.303 | 2.303 | 3.611 | 3.807 |
| 3.829 | 3.412 | 3.178 | 3.178 | | |
| 3.714 | 3.714 | 3.555 | 3.555 | | |
| | | 4.423 | 4.423 | | |
| | | 3.761 | 3.761 | | |
| | | 3.892 | 3.892 | | |
| | | 3.497 | 3.497 | | |

que permite obtener los valores de las medidas básicas y de este modo evaluar [(5.11)]:

$$\overline{Y}_{1,t+s} = 3.461;\ \overline{Y}_{2,t+s} = 3.291\ ;\ \overline{Y}_{3,t+s} = 3.055\ ;\ \overline{Y}_{t+s} = 3.295$$

$$S^2_{1,t+s} = 0.091;\ S^2_{2,t+s} = 0.404;\ S^2_{3,t+s} = 0.343\ ;\ S^2_{t+s} = 0.318$$

Según los cálculos realizados en el capítulo anterior, tenemos que:

$$L^2_t = 1.110;\ L^2_{D,t+s} = 0.614 \text{ y } L^2_{E,t} = 0.496$$

y al evaluar las medidas de inter e intradesigualdad en (t + s):

$$L^2_{t+s} = 0.318$$

$$L^2_{D,\,t+s} = (0.091)\,(0.300) + (0.404)(0.500) + (0.343)(0.200) = 0.298$$

$$L^2_{E,t+s} = (3.462 - 3.295)^2(0.300) + (3.291 - 3.295)^2(0.500) +$$

$$+\ (3.055 - 3.295)^2(0.200) = 0.020$$

Al alimentar (5.11) con los valores que alcanzan las medidas de desigualdad en los tiempos t y (t + s) concluimos que:

$$1.110 - 0.318 = (0.614 - 0.298) + (0.496 - 0.020)$$
$$0.792 = 0.316 + 0.476$$

Los signos positivos que afectan a todos los componentes de esta igualdad nos permiten afirmar que entre t y (t + s) ha habido una tendencia hacia una repartición más equitativa del ingreso la que se produce a consecuencia de un doble proceso igualitario. En efecto, en el período hubo una desconcentración dentro de cada región al mismo tiempo que disminuyeron las distancias relativas entre los ingresos de las zonas.

Si para medir el grado de desigualdad existente en las distribuciones en t y (t + s) hemos usado el coeficiente entrópico de Theil, entonces (5, 9) asume la siguiente forma:

$$\boxed{H_{T,t} - H_{T,t+s} = \left[(H_{D,t} - H_{D,t+s}) + (H_{E,t} - H_{E,t+s})\right]} \tag{5.12}$$

En la tabla 5.4 se encuentra la información necesaria para evaluar esta ecuación:

*Tabla 5.4. Proporción (hipótetica) del ingreso regional que corresponde a cada observación en t y (t + s).*

| Norte | | Centro | | Sur | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | t + s | t | t + s | t | t + s |
| 0.055 | 0.053 | 0.027 | 0.024 | 0.002 | 0.016 |
| 0.032 | 0.032 | 0.021 | 0.019 | 0.004 | 0.024 |
| 0.052 | 0.049 | 0.039 | 0.035 | 0.013 | 0.048 |
| 0.036 | 0.040 | 0.018 | 0.016 | 0.066 | 0.072 |
| 0.082 | 0.080 | 0.043 | 0.038 | | |
| 0.073 | 0.065 | 0.062 | 0.056 | | |
| | | 0.152 | 0.135 | | |
| | | 0.077 | 0.069 | | |
| | | 0.088 | 0.078 | | |
| | | 0.059 | 0.053 | | |
| 0.330 | 0.319 | 0.586 | 0.522 | 0.084 | 0.159 |

Los datos de esta tabla nos sirven para calcular las entropías totales y la información contenida en la última línea constituye la base para obtener los valores de las interentropías. Sin embargo, para calcular la intraentropía es necesario transformar los datos a participaciones de la unidades en el interior de cada grupo:

*Tabla 5.5 Proporción (hipotética) del ingreso regional que corresponde a cada unidad en relación al total que pertenece a su grupo*

| *Norte* | | *Centro* | | *Sur* | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | t + s | t | t + s | t | t + s |
| 0.168 | 0.165 | 0.046 | 0.046 | 0.021 | 0.100 |
| 0.097 | 0.100 | 0.037 | 0.037 | 0.043 | 0.150 |
| 0.157 | 0.155 | 0.067 | 0.067 | 0.149 | 0.300 |
| 0.108 | 0.125 | 0.030 | 0.030 | 0.787 | 0.450 |
| 0.249 | 0.250 | 0.073 | 0.073 | | |
| 0.221 | 0.205 | 0.107 | 0.107 | | |
| | | 0.259 | 0.259 | | |
| | | 0.131 | 0.131 | | |
| | | 0.149 | 0.149 | | |
| | | 0.101 | 0.101 | | |
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

Sabemos que la entropía total en t se descompone de la siguiente manera:

$$H_{T,t} = 0.189 + 0.052 = 0.241$$

Al realizar los cálculos de las entropías en (t + s) obtenemos:

$$H_{t,t+s} = 0.144, \quad H_{D,t+s} = 0.138 \;\; y \;\; H_{E,t+s} = 0.006$$

sustituyendo estos valores en (5.12):

$$0.097 = 0.051 + 0.046$$

Estos resultados permiten concluir que entre t y (t + s) hubo un proceso de redistribución del ingreso que ha favorecido tanto a los más pobres dentro de las regiones como a las zonas más desposeídas.

Para finalizar esta sección, quisiéramos señalar que cuando es posible expresar el índice como combinación lineal de efectos, la medición del cambio en los niveles de desigualdad es agregativa en el tiempo. Supongamos que tenemos información para un tercer punto en el tiempo que representamos por r y que es posterior a *s*(r > s), de manera que t, (t + s) y (t + r) se ubican en una secuencia temporal. El cambio experimentado por la desigualdad entre (t + s) y (t + r) se puede expresar como:

$$\boxed{T_{t+s} - T_{t+r} = (D_{t+s} - D_{t+r}) + (E_{t+s} - E_{t+r})} \tag{5.13}$$

Esta ecuación surge como una traslación temporal de (5.9). Al sumar término a término las ecuaciones que descomponen el cambio entre *t* y (t + s) [(5.9)] y entre (t + s) y (t + r) [(5.13)] tenemos:

$$(T_t - T_{t+s}) + (T_{t+s} - T_{t+r}) = (D_t - D_{t+s}) +$$
$$+ (D_{t+s} - D_{t+r}) + (E_t - E_{t+s}) + (E_{t+s} - E_{t+r})$$

cancelando términos, llegamos a:

$$\boxed{(T_t - T_{t+r}) = (D_t - D_{t+r}) + (E_t - E_{t+r})} \tag{5.14}$$

Esta ecuación nos indica que el cambio experimentado por el nivel de desigualdad entre t y (t + r) también se puede obtener sumando la variación entre t y (t + s) y entre (t + s) y (t + r).

Con el propósito de dar concreción a la propiedad agregativa en el tiempo de las medidas bajo consideración, supongamos que la distribución regional del ingreso en (t + r) es:

*Tabla 5.6. Distribución regional (hipótetica) del ingreso en (t + r)*

| Norte | Centro | Sur |
|---|---|---|
| 33 | 15 | 12 |
| 20 | 12 | 20 |
| 31 | 22 | 30 |
| 25 | 10 | 45 |
| 50 | 24 | |
| 41 | 35 | |
| | 85 | |
| | 43 | |
| | 40 | |
| | 33 | |

La única diferencia con la distribución en (t + s) se encuentra en que los dos ingresos más bajos de la zona sur aumentaron, lo que deberá reflejarse en una caída en el nivel de desigualdad.

Los cálculos de las tres medidas aplicadas sobre esta información han arrojado las siguientes ecuaciones de descomposición:

(i) Varianza relativa

$$0.294 = 0.287 + 0.007$$

(ii) Varianza de los logaritmos

$$0.288 = 0.277 + 0.011$$

(iii) Coeficiente entrópico de Theil

$$0.134 = 0.131 + 0.003$$

Si recordamos que las ecuaciones que descomponen la medida de desigualdad en la suma de inter más intraconcentración en t y (t + s) fueron:

(i) Varianza relativa
en t: $0.471 = 0.386 + 0.085$
en (t + s): $0.310 = 0.299 + 0.011$

(ii) Varianza de los logaritmos:
en t: $1.110 = 0.614 + 0.496$
en (t + s): $0.318 = 0.298 + 0.020$

(iii) Indice de concentración de Theil:
en t: $0.241 = 0.189 + 0.052$
en (t + s): $0.144 = 0.138 + 0.006$

Las diferencias de los niveles de concentración entre pares consecutivos de puntos en el tiempo son:

(i) Diferencias entre varianzas relativas
Entre t y (t + s): $0.161 = 0.087 + 0.074$
Entre (t + s) y (t + r): $0.016 = 0.012 + 0.004$

Al sumar término a término estas igualdades obtenemos:

$$0.179 = 0.100 + 0.079$$

Igualdad que es idéntica a la diferencia entre las ecuaciones en t y en (t + r). Es decir, la suma de los cambios consecutivos entrega como resultado la variación total.

De la misma manera se puede comprobar la propiedad de cambio en la descomposición temporal para:

(ii) Varianza de los logaritmos
Entre t y (t + s): $0.792 = 0.316 + 0.476$
Entre (t + s) + (t + r): $0.030 = 0.021 + 0.009$

La suma es igual a: $0.822 = 0.337 + 0.485$
Que es igual a la diferencia entre las ecuaciones en *t* y (t + r)

(iii) Indice de Theil
Entre t y (t + s): $0.097 = 0.051 + 0.046$
Entre (t + s) y (t + r): $0.009 = 0.007 + 0.002$
La suma es: $0.106 = 0.058 + 0.048$

Ecuación idéntica a la que se obtendría al hacer el cálculo directamente en t y (t + r).

La propiedad de descomposición temporal de las tres medidas de desigualdad se puede extender a un número cualquiera de puntos en el tiempo. Como la generalización sigue *exactamente* el procedimiento que hemos descrito para el caso de tres puntos no insistiremos. A continuación nos preocuparemos por estudiar la descomposición de las medidas de desigualdad desde otro ángulo.

### *5.3 Contribución que realizan los grupos al cambio temporal de la desigualdad*

En la sección anterior vimos cómo se puede usar el teorema de descomposición para analizar las fuentes que han provocado el cambio en los niveles de desigualdad entre dos puntos del tiempo. Pero el potencial analítico no se agota en este punto ya que a partir de la ecuación que descompone la desigualdad global en la suma de la inter más la intradesigualdad, es posible alcanzar un mayor nivel de desagregación que permite identificar el aporte que realiza cada grupo (o cada categoría de clasificación) a la concentración global.

Es una propiedad común a la varianza relativa, al coeficiente entrópico de Theil y a la varianza de los logaritmos, el que las medidas de inter e intradesigualdad se descompongan en un punto t cualquiera del tiempo según:

$$\boxed{D_t = D_{1,t} + D_{2,t} + \ldots + D_{K,t} = \sum_{k=1}^{K} D_{k,t}} \tag{5.15}$$

$$\boxed{E_t = E_{1,t} + E_{2,t} + \ldots + E_{K,t} = \sum_{k=1}^{K} E_{k,t}} \tag{5.16}$$

En estas ecuaciones referidas al tiempo t, tenemos que $D_t$ y $E_t$ representan el aporte que realizan la inter y la intraconcentración a la desigualdad global. Los términos genéricos $D_{k,t}$ y $E_{k,t}$ simbolizan la contribución que hace el grupo *k* a la intra e interdesigualdad respectivamente. En consecuencia, la igualdad (5.15) nos dice que el nivel que alcanzó la intraconcentración en el tiempo *t* puede verse como la suma de los aportes que realizan los diversos grupos. Y la ecuación (5.16) puede ser interpretada como la suma de las contribuciones que realizan los grupos para conformar el grado de interdesigualdad existente en *t*. En ambos casos el nivel que haya alcanzado la desigualdad (ya sea inter o intra) se agota en los aportes hechos por las categorías.

Al sumar término a término las dos ecuaciones precedentes, llegamos a una igualdad matemática que nos proporciona una nueva manera de analizar el nivel de concentración global en el tiempo t:

$$\boxed{T_t = D_t + E_t = (D_{1,t} + E_{1,t}) + (D_{2,t} + E_{2,t}) + \ldots + (D_{K,t} + E_{K,t})} \tag{5.17}$$

Todos los símbolos que componen (5.17) se definieron anteriormente. Ahora bien, cada término entre paréntesis del miembro de la derecha nos proporciona un indicador de la cuota con que concurre cada grupo a la desigualdad global. Aún más, nos permite distinguir aquella parte que se origina en la intravariabilidad, de aquella que se debe a la intervariabilidad. Por ejemplo, un término cualquiera $(D_{k,t} + E_{k,t})$ evalúa el aporte que realiza a la desigualdad global el grupo *k*, al mismo tiempo que nos permite separar la parte que se debe a la repartición intragrupos $(D_{k,t})$ de aquella que proviene de la distribución intergrupos $(E_{k,t})$.

Así como las ecuaciones (5.15) y (5.16) nos permiten obtener una medida de la contribución de los grupos a la inter e intraconcentración, la igualdad (5.17) nos proporciona una manera de descomponer el nivel de desigualdad global en los aportes de cada una de las categorías.

Las igualdades (5.15), (5.16) y (5.17) se pueden desplazar al tiempo (t + s) (en que s > 0) de manera que:

$$\boxed{D_{t+s} = D_{1,t+s} + D_{2,t+s} + \ldots + D_{K,t+s} = \sum_{k=1}^{K} D_{k,t+s}} \tag{5.18}$$

$$\boxed{E_{t+s} = E_{1,t+s} + E_{2,t+s} + \ldots + E_{K,t+s} = \sum_{k=1}^{K} E_{k,t+s}} \tag{5.19}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T_{t+s} &= D_{t+s} + E_{t+s} = (D_{1,t+s} + E_{1,t+s}) + (D_{2,t+s} + E_{2,t+s}) + \ldots \\ &\quad + (D_{K,t+s} + E_{K,t+s}) \end{aligned}} \tag{5.20}$$

Estas igualdades son enteramente análogas a las tres anteriores por lo que no repetiremos las interpretaciones a que da lugar, la única diferencia se encuentra en la referencia al tiempo, cuestión que ha originado que uno de los subíndices sea $(t+s)$ en lugar de t.

Al restar (5.18) a (5.15) disponemos de una ecuación que nos permite analizar la composición del cambio en la medida de intradesigualdad.

$$\boxed{D_t - D_{t+s} = (D_{1,t} - D_{1,t+s}) + (D_{2,t} - D_{2,t+s}) + \ldots + (D_{K,t} - D_{K,t+s})} \tag{5.21}$$

Cada término entre paréntesis del miembro de la derecha nos indica el aporte de cada una de las *K* categorías a la intraconcentración. La suma conforma la variación que ha experimentado la intradesigualdad entre *t* y $(t+s)$.

Un resultado similar, aunque esta vez para la medida de interconcentración, se obtiene al establecer la diferencia término a término entre (5.16) y (5.18).

$$\boxed{E_t - E_{t+s} = (E_{1,t} - E_{1,t+s}) + (E_{2,t} - E_{2,t+s}) + \ldots + (E_{K,t} - E_{K,t+s})} \tag{5.22}$$

Esta ecuación nos permite examinar los componentes del cambio que han afectado a la desigualdad entre t y $(t+s)$. Los términos del miembro de la derecha nos muestran las alteraciones que han sufrido los k grupos en sus posiciones relativas entre t y $(t+s)$, las que sumadas conforman una medida del cambio de la concentración en el período.

Llegamos a un resultado totalmente análogo al restar término a término la igualdad (5.20) a (5.17):

(5.23)

$$\boxed{\begin{aligned} T_t - T_{t+s} &= (D_t - D_{t+s}) + (E_t - E_{t+s}) = \Big[(D_{1,t} - D_{1,t+s}) + (E_{1,t} + E_{1,t+s})\Big] + \\ &+ \Big[(D_{2,t} - D_{2,t+s}) + (E_{2,t} - E_{2,t+s})\Big] + \ldots \\ &+ \Big[(D_{K,t} - D_{K,t+s}) + (E_{K,t} - E_{K,t+s})\Big] \end{aligned}}$$

La igualdad (5.23) descompone el cambio que ha experimentado entre t y (t + s) el nivel global de desigualdad (miembro de la izquierda) en, por una parte, las modificaciones que han afectado en ese período a las medidas de intra e interdesigualdad (miembro del centro) lo que no es más que una reiteración de lo expuesto en la sección precedente y por otra parte, en las alteraciones que en ese lapso han sufrido las categorías. Cada término encerrado entre corchetes nos provee de una medida del peso con que concurre cada grupo al cambio en la medida de desigualdad global. Las diferencias encerradas por los paréntesis separan la parte que se origina en alteraciones en la intradesigualdad y la que proviene de la interdesigualdad en el período bajo consideración.

En cuanto a los signos que pueden afectar los términos que constituyen estas ecuaciones no hay mucho que agregar con respecto a lo dicho en la sección anterior. Tendremos un signo positivo si con el transcurso del tiempo la distribución de la variable es cada vez más equitativa y uno negativo en la situación contraria. Por lo tanto, en el caso que

$$D_{k,t} > D_{k,t+s}$$

se tendrá que el grupo genérico *k* habrá hecho una contribución a la intraigualdad en la repartición de la variable y si

$$D_{k,t} < D_{k,t+s}$$

el aporte de la categoría *k* será en favor de la concentración intracategorías.

Se presenta una situación análoga en el caso de la medida de desigualdad entre grupos, la inecuación

$$E_{k,t} > E_{k,t+s}$$

nos señala que el grupo *k* hace una contribución a la igualdad entre las categorías, y que por el contrario si

$$E_{k,t} < E_{k,t+s}$$

entonces es hacia la concentración entre estratos.

El que una categoría cualquiera *k* contribuya a la igualdad o a la concentración global dependerá de si la expresión:

$$(D_{k,t} - D_{k,t+s}) + (E_{k,t} - E_{k,t+s})$$

Es positiva o negativa. Si es positiva el aporte será hacia una mayor igualdad en (t + s) que en t y si es negativa hacia un incremento en los niveles de desigualdad.

Los distintos caminos a través de los cuales se puede llegar a un signo positivo o negativo en la medida de desigualdad total son básicamente los tres que hemos examinado en la sección 5.2, lo que nos proporciona una buena excusa para no exponerlos en ésta.

A lo largo de esta exposición hemos entregado las ecuaciones que permiten estudiar la desigualdad global en términos de las cuotas con que concurren cada uno de los grupos sin hacer referencia a ninguna medida en particular. En las páginas siguientes examinaremos las formas específicas que adoptan las ecuaciones de descomposición del cambio cuando se usan como medidas de concentración la varianza relativa, la varianza de los logaritmos y el coeficiente entrópico de Theil. Usaremos la información contenida en las tablas de la sección precedente para ilustrar las aplicaciones de los indicadores de desigualdad bajo estudio.

Si optamos por la varianza relativa para medir el grado de desigualdad existente en una distribución de frecuencias, entonces la ecuación (5.21) toma la forma:

(5.24)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{S^2_{d,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{d,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}} &= \left(\frac{S^2_{d1,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{d1,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}\right) + \\ &+ \left(\frac{S^2_{d2,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{d2,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{S^2_{dk,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{dk,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}\right) \end{aligned}}$$

La ecuación (5.22) que permite identificar los aportes que realizan los grupos a las alteraciones temporales en la intervariabilidad será:

(5.25)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{S^2_{e,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{e,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}} &= \left(\frac{S^2_{e1,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{e1,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}\right) + \\ &+ \left(\frac{S^2_{e2,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{e2,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{S^2_{ek,t}}{\bar{Y}^2_t} - \frac{S^2_{ek,t+s}}{\bar{Y}^2_{t+s}}\right) \end{aligned}}$$

Y la ecuación (5.23) que descompone el cambio que ha experimentado la desigualdad entre t y (t + s) en función de los aportes de las *K* categorías, asume la forma:

(5.26)

$$\frac{S_t^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2} =$$

$$= \left[\left(\frac{S_{d1,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{d1,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right) + \left(\frac{S_{e1,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{e1,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right)\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{S_{d2,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{d2,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right) + \left(\frac{S_{e2,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{e2,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right)\right] + \ldots$$

$$+ \left[\left(\frac{S_{dk,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{dk,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right) + \left(\frac{S_{ek,t}^2}{\bar{Y}_t^2} - \frac{S_{ek,t+s}^2}{\bar{Y}_{t+s}^2}\right)\right]$$

Sobre la base de la información contenida en la tabla 5.2 procedimos a calcular los distintos elementos que conforman estas tres últimas ecuaciones:

*Tabla 5.7. Medias aritméticas y varianzas de la distribución regional ingreso en t y (t + s)*

| | *Regiones* | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Norte* | | *Centro* | | *Sur* | | *Total* | |
| | t | (t + s) | t | (t + s) | t | (t + s) | t | (t + s) |
| Promedios | 30.833 | 33.333 | 32.800 | 32.800 | 11.7500 | 25.000 | 28.000 | 31.400 |
| Varianzas | 103.139 | 98.222 | 455.960 | 455.960 | 217.688 | 187.500 | 302.460 | 305.240 |
| Ponderaciones | 0.300 | 0.300 | 0.500 | 0.500 | 0.200 | 0.200 | — | — |

En este ejemplo tenemos sólo tres categorías o grupos (k = 3) por lo que cada una de las ecuaciones tendrá tres componentes, cada uno de los cuales representará la contribución de la región correspondiente al cambio en la intra, en la inter o a la desigualdad total.

Al sustituir los valores adecuados de la tabla (5.7) en la igualdad (4.24) tenemos:

$$\frac{302.459}{(28)^2} - \frac{294.947}{(31.4)^2} =$$

$$= \left[ \frac{(103.139)(0.300)}{(28)^2} - \frac{(98.222)(0.300)}{(31.4)^2} \right] +$$

$$+ \left[ \frac{(455.960)(0.500)}{(28)^2} - \frac{(455.960)(0.500)}{(31.4)^2} \right] +$$

$$+ \left[ \frac{(217.688)(0.200)}{(28)^2} - \frac{(187.5)(0.200)}{(31.4)^2} \right]$$

Realizando las operaciones encontramos que el cambio en la intradesigualdad asciende a:

$$(0.386 - 0.299) = (0.039 - 0.030) + (0.291 - 0.231) + (0.056 - 0.038) =$$
$$= 0.087 = 0.009 + 0.060 + 0.018$$

El signo positivo que afecta a todos los términos de esta igualdad indica que entre t y (t + s) todas las cuotas regionales fueron hacia una mayor igualdad lo que se manifiesta en una caída en la medida de intradesigualdad. En la sección anterior habíamos constatado la disminución en la intraconcentración, ahora podemos identificar las fuentes que han provocado el cambio. Así por ejemplo, los valores numéricos que componen la última ecuación permiten afirmar que en términos absolutos el aporte mayor a la intraigualdad se debe a la zona central, cuestión que resulta sorprendente si examinamos los datos originales. En efecto, la información contenida en la tabla (5.2) se caracteriza porque la distribución del ingreso en la zona central se mantuvo constante entre *t* y (t + s) entonces ¿Cómo es posible que sea justamente esa región la que realiza un mayor aporte a la intraigualdad? Ello se debe al factor de corrección $\overline{Y}^2$, porque al aumentar el promedio entre t y (t + s), no habiéndose alterado la varianza ni la ponderación, necesariamente debe caer la relación $S^2_{d2,t+s} / \overline{Y}^2_{t+s}$ con respecto a $S^2_{d2,t} / \overline{Y}^2_t$. Nos encontramos así con el hecho de que el factor de corrección provoca un cambio en la medida de intradesigualdad que no corresponde a una alteración genuina en la concentración de la variable.

En el capítulo anterior habíamos visto que tanto las transformaciones proporcionales aplicadas a todos los grupos, excepto por lo menos uno, como la multiplicación de las categorías por constantes distintas provocaban alteraciones en la intravarianza corregida por el efecto escala sin que ello correspondiera a modificaciones en los niveles de intradesigualdad. Ahora constatamos que la medida de intravariabilidad corregida puede llegar a marcar una contribución de una categoría al cambio, sin que se hayan alterado los valores de variable en el tiempo. Es el factor de corrección el que hace aparecer un cambio en la medición sin que ello sea reflejo de una modificación efectiva del nivel de intradesigualdad.

Dado que el cambio en el aporte a la intraconcentración se realiza en cada categoría a partir de valores ubicados en distintos niveles, sería conveniente entregar también medidas de sus modificaciones relativas. Así, por ejemplo, en la zona norte se pasa de 0.039 a 0.030 lo que significa una caída del 24.30%, de igual modo la baja en la zona central es de 20.47% y la de la región sur alcanza a 31.65%.

La información de la tabla 5.7. también nos sirve para evaluar la ecuación (5.25) que nos permite identificar el aporte de los grupos a la interdesigualdad. En efecto, al reemplazar los valores numéricos adecuados en (5.25) tenemos:

$$\frac{66.740}{(28)^2} - \frac{10.293}{(31.4)^2} =$$

$$\left[\frac{(30.833-28.000)^2(0.300)}{(28.000)^2} + \frac{(33.333-31.400)^2(0.300)}{(31.4000)^2}\right] +$$

$$\left[\frac{(32.800-28.000)^2(0.500)}{(28.000)^2} + \frac{(32.800-31.400)^2(0.500)}{(31.400)^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{(11.750-28.000)^2(0.200)}{(28.000)^2} + \frac{(25.000-31.400)^2(0.200)}{(31.400)^2}\right]$$

Al realizar las operaciones llegamos a:

$$(0.471-0.310) = (0.003-0.001) + (0.015-0.001) + (0.067-0.008) =$$
$$= 0.075 = 0.002 + 0.014 + 0.059$$

Como los componentes de esta ecuación son todos positivos, es posible sostener que en el período comprendido entre t y (t + s), hubo un movimiento hacia una mayor interigualdad que ha resultado de una tendencia a una distribución más equitativa del ingreso en el nivel regional. Las rentas promedio de las tres regiones se encuentran más próximas a la media general en (t + s) que en t, cuestión que se puede observar directamente en la tabla (5.7). La contribución más significativa es la que tuvo lugar en la zona sur que ha más que doblado su renta media en tanto que la región norte experimentó una pequeña alza y la de la sur se mantuvo.

Aun cuando en términos absolutos es la zona sur la que más contribuyó a la interigualdad, desde el punto de vista del cambio relativo este papel le correspondió a la zona central, cuya media ha pasado de estar bastante por encima del promedio general en t a ubicarse en la cercanía del mismo pero en (t + s). La zona central experimentó una baja de 93.2% en (t + s) con respecto a t, seguida por la región sur que fue de 87.7% y por el norte cuyo aporte relativo a la caída en el nivel de interdesigualdad fue de 64.5%.

Para evaluar el cambio en el nivel global de desigualdad tenemos dos posibilidades, o bien procedemos a reemplazar los valores numéricos en los términos de la ecuación (5.26) o bien sumamos término a término las cuotas con que concurren los grupos a la formación de la inter e intraconcentración. Siguiendo este último camino llegamos a obtener el siguiente resultado:

$$0.162 = (0.011 + 0.074 + 0.077)$$

Esta ecuación muestra que entre t y (t + s) tuvo lugar un proceso progresivo de distribución del ingreso y que gran parte de esta tendencia se debe a las contribuciones realizadas por las zonas sur y centro. Anteriormente identificamos la parte de este cambio que se genera en un proceso de intraigualdad y la que se debe a uno de interigualdad, ahora queremos destacar que el aporte que hace la zona central a una repartición más democrática del ingreso se debe en gran parte a que la intravarianza ha marcado un efecto espurio. Recuérdese que la distribución del ingreso de la zona central no se modificó entre t y (t + s) y que paradójicamente es ésta la que hace el mayor aporte a la intraigualdad. La contribución total de la región del centro es igual a:

$$0.074 = 0.060 + 0.014$$

en que el primer sumando del miembro de la derecha muestra una tendencia ilusoria a la equidistribución. Es decir, gran parte del 0.074 (exactamente 0.060) es una creación del instrumento utilizado para medir la desigualdad.

Examinemos a continuación la forma que adoptan las ecuaciones (5.21), (5.22) y (5.23) cuando decidimos usar la varianza de los logaritmos. Con la información de la tabla 5.2 ilustraremos la forma de cálculo y bosquejaremos el tipo de análisis que es posible realizar.

Al especificar la ecuación (5.21) en términos de la varianza de los logaritmos tenemos:

$$(5.27) \quad \boxed{\begin{aligned} L^2_{D;t} - L^2_{D;t+s} = (L^2_{D,1;t} - L^2_{D,1;t+s}) + (L^2_{D,2;t} - L^2_{D,2;t+s}) + \ldots + \\ + (L^2_{D,K,t} - L^2_{D,K;t+s}) \end{aligned}}$$

igualdad que nos permite calcular el aporte que realizan los *K* grupos al cambio en el nivel de intraconcentración.

Las contribuciones de las *K* categorías a la interigualdad entre t y (t + s) se obtienen a través de:

$$(5.28) \quad \boxed{\begin{aligned} L^2_{E;t} - L^2_{E;t+s} = (L^2_{E,1;t} - L^2_{E,1;t+s}) + (L^2_{E,2;t} - L^2_{E,2;t+s}) + \ldots + \\ + (L^2_{E,k;t+s} - L^2_{E,k;t+s}) \end{aligned}}$$

fórmula que resulta directamente de (5.22).

A partir de (5.23) obtenemos la ecuación que nos permite calcular el aporte de los grupos a la variación de la desigualdad total entre t y (t + s).

$$(5.29) \quad \boxed{\begin{aligned} L^2_t - L^2_{t+s} = & \left[(L^2_{D,1;t} - L^2_{D,1;t+s}) + (L^2_{E,1;t} - L^2_{E,1;t+s})\right] + \\ & + \left[(L^2_{D,2;t} - L^2_{D,2;t+s}) + (L^2_{E,2;t} - L^2_{E,2;t+s})\right] + \ldots \\ & + \left[(L^2_{D,K;t} - L^2_{D,K;t+s}) + (L^2_{E,K,t} - L^2_{E,K;t+s})\right] \end{aligned}}$$

Al igual que en el caso de la ecuación (4.26) cada término encerrado entre corchetes representa a la contribución total que realiza cada grupo al cambio en el nivel de desigualdad. El primero de los términos encerrado por un paréntesis (a su vez entre corchetes) indica la parte de la variación que se debe a las alteraciones dentro de los grupos y el segundo a los cambios en las posiciones relativas de los agregados.

En la siguiente tabla presentamos de manera resumida las medidas estadísticas que permiten evaluar las tres últimas ecuaciones que hemos presentado.

*Tabla 5.8. Medias aritméticas y varianzas de la distribución regional (hipotética) del logaritmo del ingreso en t y (t + s)*

| | Regiones | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Norte | | Centro | | Sur | | Total | |
| | t | (t + s) | t | (t + s) | t | (t + s) | t | (t + s) |
| Promedios | 3.372 | 3.462 | 3.291 | 3.291 | 1.563 | 3.055 | 2.970 | 3.295 |
| Varianzas | 0.117 | 0.091 | 0.404 | 0.404 | 1.885 | 0.343 | 1.110 | 0.318 |
| Ponderaciones | 0.300 | 0.300 | 0.500 | 0.500 | 0.200 | 0.200 | — | — |

Sobre la base de esta información resulta relativamente simple evaluar las ecuaciones (5.27), (5.28) y (5.29). En efecto, la igualdad (5.27) asume los siguientes valores:

$$0.614 - 0.298 = (0.035 - 0.027) + (0.202 - 0.202) + (0.377 - 0.069) = \\ = 0.316 = 0.008 + 0.000 + 0.308$$

Esta ecuación nos permite señalar que entre t y (t + s) tuvo lugar un proceso de distribución más equitativa en el interior de las tres regiones. Que la contribución absoluta y relativa más importante se debe a la zona sur y que a la zona central no le ha cabido participación alguna en el proceso de intraigualdad[1]. Ya sabíamos desde el capítulo anterior que la varianza de los logaritmos era insensible a las transformaciones proporcionales aplicadas sobre algunos grupos (no todos) y a la multiplicación por constantes diferentes. A través de este ejemplo vemos que a diferencia de la varianza corregida por efecto escala no genera un efecto ilusorio sobre la medida de intradesigualdad.

Las modificaciones que han afectado a las posiciones relativas de los grupos entre t y (t + s) se pueden estudiar a partir de la evaluación de la igualdad (5.28):

$$(0.497 - 0.019) = (0.049 - 0.008) + (0.052 - 0.000) + \\ + (0.396 - 0.011) = 0.478 = 0.041 + 0.052 + 0.385$$

El cambio en favor de una mayor interigualdad en (t + s) con respecto a t se debe fundamentalmente al alza que han experimentado en este período los ingresos de la zona sur y a una relativa estabilidad en las otras dos regiones.

La simple observación de los datos expuestos en la tabla (4.2) nos permite ver que los cambios que registran la intra y la intervarianza de los logaritmos siguen bastante de cerca las alteraciones que afectan los datos entre t y (t + s).

[1] No hay que olvidar que la contribución resulta del producto de la varianza por la ponderación.

Los ingresos bajos de las observaciones de la zona sur se elevaron sustancialmente y en términos relativos aumentó menos el valor más alto, lo que se refleja en una disminución importante en la medida de intradesigualdad. Por otra parte, el sur que originalmente estaba en la peor posición relativa, es decir, muy distante de las otras regiones mejoró acortando la distancia con respecto a las otras regiones al mismo tiempo que el centro y el norte se aproximaron al promedio general. Estos movimientos son los que explican que sea la región sur la que concurra con un mayor peso al proceso de igualdad.

El resultado que nos entrega la ecuación que descompone el cambio total es:

$$0.794 = 0.049 + 0.052 + 0.693$$

La mayor parte del cambio en favor de una distribución más equitativa del ingreso entre t y (t + s) se origina en la contribución que realiza la zona sur. Los análisis previos nos muestran que ello se debe a una combinación de efectos casi similares, producto de procesos tendientes hacia la equidistribución tanto en su interior como en comparación con las otras dos zonas.

Consideramos a continuación la forma que asumen las ecuaciones que expresan los cambios en los niveles de desigualdad, cuando usamos el coeficiente entrópico de Theil.

La ecuación (5.21) asume la forma

$$\boxed{H_{D;t} - H_{D;t+s} = \left[H_{D,1;t} - H_{D,1;t+s}\right] + \left[H_{D,2;t} - H_{D,2;t+s}\right] + \ldots + \left[H_{D,K;t} - H_{D,K;t+s}\right]} \tag{5.30}$$

Del mismo modo especificamos la igualdad (5.22)

$$\boxed{H_{E;t} - H_{E;t+s} = \left[H_{E,1;t} - H_{E,1;t+s}\right] + \left[H_{E,2;t} - H_{E,2;t+s}\right] + \ldots + \left[H_{E,K;t} - H_{E,K;t+s}\right]} \tag{5.31}$$

Estas dos últimas ecuaciones permiten examinar los componentes del cambio de la intra e interdesigualdad entre t y (t + s) en función de las contribuciones realizadas por los grupos.

Cuando se usa la entropía como indicador de desigualdad la ecuación (5.23) asume la forma:

(5.32)

$$H_{T,t} - H_{T,t+s} = (H_{D,1;t} - H_{D,1;t+s}) + (H_{E,1;t} - H_{E,1;t+s})$$
$$+ (H_{D,2;t} - H_{D,2;t+s}) + (H_{E,2;t} - H_{E,2;t+s}) + \ldots + (H_{D,K;t} - H_{D,K;t+s}) +$$
$$+ (H_{E,K;t} - H_{E,K;t+s})$$

Esta ecuación que también resulta de la suma término a término de (5.30) y (5.31) nos permite examinar el cambio en el nivel global de desigualdad en el período bajo consideración identificando los aportes que han realizado las distintas categorías.

En seguida procederemos a evaluar estas ecuaciones a partir de la información de la tabla 5.2. Los datos básicos necesarios para alimentar las fórmulas se despliegan en la siguiente tabla.

*Tabla 5.9 Entropías regionales en t y (t + s) y participaciones relativas de las regiones en el ingreso y en la población en ese período*

| | *Norte* | | *Centro* | | *Sur* | | *Total* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | t | (t + s) | t | (t + s) | t | (t + s) | t | (t + s) |
| Entropías | 0.055 | 0.043 | 0.191 | 0.191 | 0.698 | 0.152 | 0.240 | 0.144 |
| Part. en el ingreso | 0.330 | 0.319 | 0.586 | 0.522 | 0.084 | 0.159 | 1.000 | 1.000 |
| Part. en la población | 0.300 | 0.300 | 0.500 | 0.500 | 0.200 | 0.200 | 1.000 | 1.000 |

La composición regional del cambio en la intradesigualdad entre t y (t + s) se obtiene a través de la ecuación (5.30):

$$(0.189 - 0.138) = (0.018 - 0.014) + (0.112 - 0.100) +$$
$$+ (0.059 - 0.024) = 0.051 = 0.004 + 0.012 + 0.035$$

El hecho de que todos los términos de esta ecuación sean positivos nos permite sostener que en (t + s) la distribución del ingreso dentro de cada región ha sido más equitativa que en t. Es decir, se produjo en las tres zonas una redistribución interna que resultó en una mayor intraigualdad a través del tiempo.

En términos absolutos las contribuciones más significativas al proceso de igualdad fueron las realizadas por las zonas sur y centro, mientras que las disminuciones relativas más importantes se deben a las regiones sur y norte.

Al igual que en el caso de la varianza corregida por el efecto escala, resulta sorprendente que el índice de Theil registre un aporte a la intraigualdad de la zona central, en circunstancias que sabemos que entre t y (t + s) permaneció inalterada su distribución interna del ingreso. Si observamos los datos contenidos en la tabla 5.9 encontramos que entre t y (t + s) no se modificó la entropía de la región central, lo que refleja adecuadamente lo acontecido con los datos originales, sin embargo, su contribución a la intradesigualdad sí cambió porque entre esos puntos del tiempo variaron las ponderaciones. No hay que olvidar que las cuotas de los grupos a la intraentropía resultan del producto de sus *participaciones relativas en la variable* por sus correspondientes entropías. Es la variación experimentada por el peso lo que modifica el aporte que hace la región central a la intradesigualdad lo que origina que en la medición aparezca un efecto espurio en tanto no corresponde a cambios efectivos en la distribución interna del ingreso. Lo mismo que la varianza corregida por el efecto escala, el índice de concentración de Theil puede llegar a registrar modificaciones en el aporte a la intradesigualdad sin que se produzcan variaciones en los datos originales.

Al evaluar la ecuación (5.31) tenemos que:

$$(0.052 - 0.006) = (0.032 - 0.019) + (0.093 - 0.023) + [-0.073 - (-0.036)] =$$
$$= 0.046 = 0.013 + 0.07 - 0.037$$

Entre t y (t + s) tuvo lugar un proceso que llevó a una mayor igualdad en la distribución del ingreso intergrupal. Al observar la manera como se conforma la medida de interdesigualdad nos encontramos con que las contribuciones de las zonas norte y centro fueron en el sentido de una distribución del ingreso regionalmente más equitativa. El signo negativo que afecta al valor asociado a la región sur debe interpretarse como una contribución a la interdesigualdad. Sabemos que la entropía asume un signo negativo en tanto la participación en el ingreso es menor que en las unidades, es decir, es negativa en el caso de las observaciones perjudicadas. En este ejemplo, la región sur tiene una participación permanentemente desmejorada en la distribución de la renta (-0.073 en t). Cuando mejora en (t + s) pero no lo suficiente como para pasar a ser una de las beneficiadas (-0.036) aparece con un saldo neto negativo que corresponde al aporte a una mayor interigualdad en la repartición del ingreso por zonas geográficas en tanto mejoró su posición relativa.

Los pesos totales con que concurren las regiones a una distribución más equitativa del ingreso en (t + s) que en t se cuantifican a través de la ecuación (5.32):

$$0.097 = 0.017 + 0.082 + (-0.002)$$

Este resultado es una consecuencia directa de los movimientos entre t y (t + s) que ya hemos analizado. Hay que recordar que parte de la contribución que realiza la zona del centro es consecuencia del instrumento de medición.

En la sección anterior demostramos y comprobamos numéricamente que las medidas bajo estudio son agregativas en el tiempo. Una propiedad totalmente análoga se cumple en el caso en que disponemos de las contribuciones de los grupos al cambio total. En efecto, la variación de la desigualdad entre (t + s) y (t + r) se puede descomponer:

$$\text{(5.33)} \quad \boxed{\begin{aligned} (T_{t+s}-T_{t+r}) &= (D_{1,t+s}-D_{1,t+r}) + (D_{2,t+s}D_{2,t+r}) + \ldots + \\ &+ (D_{K,t+s}-D_{K,t+r}) + (E_{1,t+s}-E_{1,t+r}) + (E_{2,t+s}-E_{2,t+r}) + \ldots + \\ &+ (E_{K,t+s}-E_{K,t+r}) \end{aligned}}$$

Sumando término a término la ecuación (5.33) a la (5.23) se llega a:

(5.34)

$$\boxed{\begin{aligned} (T_t-T_{t+s}) + (T_{t+s}-T_{t+r}) &= \Big[(D_{1,t}-D_{1,t+s}) + (D_{1,t+s}-D_{1,t+r})\Big] + \\ &+ \Big[(D_{2,t}-D_{2,t+s}) + (D_{2,t+s}-D_{2,t+r})\Big] + \ldots \\ &+ \Big[(D_{K,t}-D_{K,t+s}) + (D_{K,t+s}-D_{K,t+r})\Big] + \Big[(E_{1,t}-E_{1,t+s}) + (E_{1,t+s}-E_{1,t+r})\Big] + \\ &+ \Big[(E_{2,t}-E_{2,t+s}) + (E_{2,t+s}-E_{2,t+r})\Big] + \ldots + \Big[(E_{K,t}-E_{K,t+s}) + (E_{K,t+s}-E_{k,t+r})\Big] \end{aligned}}$$

Resolviendo los paréntesis encontramos que:

$$(5.35) \quad \boxed{\begin{aligned}(T_t-T_{t+r}) &= (D_{1,t}-D_{1,t+r})+(D_{2,t}-D_{2,t+r})+\ldots+(D_{K,t}-D_{K,t+r})+\\ &+(E_{1,t}-E_{1,t+r})+(E_{2,t}-E_{2,t+r})+\ldots+(E_{K,t}-E_{K,t+r})\end{aligned}}$$

La ecuación (5.34) suma los cambios experimentados por la desigualdad entre t y (t + s) y entre (t + s) y (t + r). Los desarrollos algebraicos nos muestran que el resultado que se obtiene es idéntico al que se llegaría al calcular directamente entre t y (t + r). El lado derecho de (5.35) nos permite afirmar que lo anterior es válido también para la contribución realizada por cada grupo.

La tabla (5.10) que se genera sobre la base de la información de las tablas 5.5 y 5.6 permite la comprobación numérica de esta propiedad:

*Tabla 5.10 Cambios de las medidas de desigualdad entre puntos en el tiempo*

| | Varianza relativa entre: | | | Varianza de los logaritmos | | | Entropía entre: | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Regiones | *t*y(t + s) | (t + s)y(t + r) | *t*y(t + r) | *t*y(t + s) | (t + s)y(t + r) | *t*y(t + r) | *t*y(t + s) | (t + s)y(t + r) | *t*y(t + r) |
| Norte | 0.012 | 0.001 | 0.013 | 0.048 | 0.002 | 0.050 | 0.017 | 0.004 | 0.021 |
| Centro | 0.073 | 0.006 | 0.079 | 0.052 | 0.000 | 0.052 | 0.082 | 0.007 | 0.089 |
| Sur | 0.077 | 0.011 | 0.088 | 0.693 | 0.028 | 0.721 | -0.002 | -0.001 | -0.003 |
| Total | 0.161 | 0.018 | 0.179 | 0.793 | 0.030 | 0.823 | 0.097 | 0.010 | 0.107 |

Tanto para el cambio en el nivel de desigualdad global como para las contribuciones realizadas por las regiones se cumple que la variación entre t y (t + r) es igual a la suma de las modificaciones que experimentó la concentración entre t y (t + s) y entre (t + s) y (t + r).

## 5.4 *Aplicaciones*

En esta sección se continúa la exposición de los ejemplos con datos reales presentados en el cuarto capítulo. En esa oportunidad nos preocupamos por indagar acerca del peso con que concurrían la inter y la intradesigualdad para formar el nivel global de concentración, así como por cuantificar los aportes de los diferentes agregados.

Ahora pondremos el acento en el estudio del cambio que experimentaron los niveles de desigualdad de una variable entre dos momentos. No nos preocuparemos por mostrar los pasos que se deben cumplir para generar la medición ni los análisis referidos al segundo instante considerado ya que son totalmente análogos a los incluidos en el capítulo anterior.

Nuestro interés se limitará a ilustrar la interpretación estadística de los resultados dinámicos y a señalar algunas vías analíticas que se desprenden de ellos. El carácter de esta sección y el propósito de los ejemplos nos exime de un análisis demasiado meticuloso.

### 5.4.1 *El cambio en la desigualdad y la varianza relativa*

En la sección 4.5 ilustramos el uso del teorema de la descomposición de la varianza relativa basándonos en un trabajo de Werner Ackerman[2]. En el mismo estudio se incluye una tabla, que entre otra información, entrega una medición de los cambios experimentados por la distribución del ingreso personal, en Santiago de Chile entre 1970 y 1971.

*Tabla 5.11 Descomposición de la varianza relativa entre 1970 y 1971*

| | |
|---|---|
| *Intervariabilidad* | *0.276* |
| Obreros | 0.017 |
| Empleados | -0.018 |
| Traba. por Cta. Propia | -0.004 |
| Empleadores | 0.284 |
| Fuerzas Armadas | -0.001 |
| Empleados Domésticos | -0.002 |
| *Intraviariabilidad* | *0.417* |
| Obreros | 0.010 |
| Empleados | 0.151 |
| Traba. por Cta. Propia | 0.058 |
| Empleadores | 0.193 |
| Fuerzas Armadas | -0.003 |
| Empleados Domésticos | 0.008 |
| *Variabilidad Total* | *0.693* |
| Obreros | 0.027 |
| Empleados | 0.133 |
| Trab. por Cta. Propia | 0.053 |
| Empleadores | 0.477 |
| Fuerzas Armadas | -0.003 |
| Empleados Domésticos | 0.006 |

El valor alcanzado por la medida de desigualdad total (0.693) nos indica que entre 1970 y 1971 tuvo lugar un proceso de redistribución progresiva del ingreso personal que se debe, en su mayor parte, a la contribución que reali-

[2] Ackerman *et al.*, *Op. cit.*, Pág. 356.

zan empleadores (0.477) y los empleados (0.133). También se puede apreciar que todas las categorías ocupacionales excepto "Fuerzas Armadas" aportan su cuota al proceso de desconcentración.

También se puede observar que en el movimiento hacia una mayor equidad, la caída en la intradesigualdad (0.417) es bastante mayor que la sufrida por la interdesigualdad (0.276). La descomposición de la intravariabilidad por categorías ocupacionales muestra que los "empleadores" (0.193) y "empleados" (0.151) experimentaron los procesos de homogeneidad interna más significativos. El examen de la intervariabilidad nos permite sostener que los empleadores y obreros fueron los únicos grupos que contribuyeron a la igualdad, aun cuando el sentido de sus aportes difirió ya que los primeros empeoraron su posición relativa y los segundos la mejoraron.

En general los datos permiten afirmar que entre 1970 y 1971 tuvo lugar en Santiago de Chile un proceso de distribución progresiva del ingreso personal que se debió, en primer lugar, a una compresión dentro de las categorías ocupacionales, especialmente "empleados" y "empleadores", y, en segundo lugar, a una disminución de las diferencias entre los promedios de las ocupaciones, en particular, de los "empleadores" y "obreros". Los movimientos combinados de la inter y la intradesigualdad llevan a que una parte sustancial de la redistribución del ingreso se deba a la cuota con que concurren los empleados.

### *5.4.2. El cambio en la desigualdad y la varianza de los logaritmos*

Con la información de la tabla 4.17 que entregó la distribución de la población mexicana por tamaño de localidad en 1960 y 1970, realizamos el cálculo de la inter, la intra y la varianza total de los logaritmos de 1960, siguiendo el mismo procedimiento que describimos en la sección 4.6. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

*Tabla 5.12 Descomposición de la desigualdad en la distribución de la población mexicana por tamaño de localidades, 1960.*

| | *Loc. Urb.* | *Loc. Mix.* | *Loc. Rur.* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| Intravar. de los log. | 0.000 | 0.000 | 0.050 | 0.050 |
| Intervar. de los log. | 0.005 | 0.017 | 0.000 | 0.022 |
| Varianza total de los log. | 0.005 | 0.017 | 0.050 | 0.072 |

Los análisis que pueden derivarse de esta información son análogos a los realizados cuando examinamos los datos de 1970, por lo que no serán objeto de un estudio particular, sino que entran como uno de los ingredientes que permiten enfocar el examen del cambio.

Con los datos de las tablas 4.18 y 5.12 obtenemos:

*Tabla 5.13 Descomposición del cambio experimentado por la distribución de la población mexicana por tamaño de localidades entre 1960 y 1970.*

| | *Loc. Urb.* | *Loc. Mix.* | *Loc. Rur.* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| Intravar. de los log. | -0.001 | -0.001 | 0.006 | 0.004 |
| Intervar. de los log. | -0.003 | -0.002 | 0.000 | −0.001 |
| Varianza total de los log. | -0.004 | 0.001 | 0.006 | 0.003 |

El valor que alcanza la varianza total de los logaritmos (0.003) es positivo porque $L^2$ en 1970 es menor que en 1960, es decir, porque tuvo lugar un proceso de desconcentración de la población por localidades, clasificadas por tramos de población.[3]

La columna total nos dice que el valor que asume el coeficiente resulta de un proceso de desconcentración dentro de los agregados (0.004) y de una tendencia hacia una mayor desigualdad entre ellos (-0.001).

La primera línea de la tabla nos señala que el proceso global de intraigualdad tuvo lugar en el interior de las zonas rurales.

El examen del renglón total muestra el aporte de los agregados al cambio en la concentración. Entre 1960 y 1970 se dio una tendencia hacia una menor desigualdad en la distribución de la población entre las localidades rurales (0.006), en tanto que entre las urbanas ocurría el fenómeno inverso. En el período bajo análisis disminuyó la contribución realizada por las zonas urbanas al nivel global de igualdad (-0.004). Este valor se debe en gran parte (-0.003) a que el promedio del agregado (medido en logaritmos) se alejó de la media general de los logaritmos.

En conclusión, la distribución de la población mexicana por tamaño de localidades clasificadas en urbanas, mixtas y rurales, experimentó un proceso de desconcentración entre 1960 y 1970. Las tendencias básicas que conforman este resultado se encuentran en una mayor igualdad intrarrural y en una concentración de la población urbana en relación a las localidades mixtas y rurales.

[3] No debe olvidarse que la información original se refiere a intervalos de clase y no a localidades individuales.

### 5.4.3. *El cambio en la desigualdad y la entropía*

Los datos de la tabla 4.26 nos permitieron estudiar la composición de la desigualdad en la distribución de la producción por nivel de ocupación y ramas industriales, para el año 1968. En esa misma tabla se encuentra la información que permite calcular los componentes de la entropía en 1973.

*Tabla 5.14 Descomposición de la desigualdad en la distribución de la producción industrial venezolana, por ocupación y ramas industriales, 1973*

| | Industrias tradicionales. | Industrias intermedias | Industrias mecánicas | Industrias diversas | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Intraentropía | 0.076 | 0.007 | 0.013 | 0.001 | 0.097 |
| Interentropía | 0.026 | -0.001 | 0.007 | -0.020 | 0.012 |
| Total | 0.102 | 0.006 | 0.020 | -0.019 | 0.109 |

Con la información de las tablas 4.27 y 5.14 se construye:

*Tabla 5.15 Descomposición del cambio de la desigualdad en la producción industrial venezolana, por ocupación y rama entre 1968 y 1973.*

| | Industrias tradicionales. | Industrias intermedias | Industrias mecánicas | Industrias diversas | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Intraentropía | -0.011 | -0.003 | -0.001 | 0.000 | -0.015 |
| Interentropía | -0.023 | -0.012 | 0.011 | 0.013 | 0.011 |
| Total | -0.034 | -0.015 | 0.010 | 0.013 | -0.026 |

Entre 1968 y 1973 la producción de la industria fabril venezolana sufrió un proceso de concentración con respecto a la ocupación (-0.026) que se debió en gran parte a una mayor heterogeneidad entre los agregados económicos (-0.011) y en menor medida a una creciente desigualdad dentro de los cuatro tipos de industrias (-0.015).

La primera línea de la tabla 5.15 refleja que el proceso de heterogeneidad creciente tuvo significación sólo dentro de las industrias tradicionales (-0.011). Del segundo renglón se desprende que las contribuciones de las industrias a la interentropía son en el sentido de una mayor desigualdad, excepto las mecánicas diversas. El proceso hacia una mayor diversificación en la producción industrial tuvo mayor acento dentro de las industrias tradicionales (-0.034) y de las intermedias (-0.015) en tanto que en las mecánicas se dio una tendencia hacia la igualdad.

Las cuatro columnas que forman el cuerpo de la tabla comparten la característica de una interentropía más grande (en valor absoluto) que en su correspondiente intraentropía. Sabíamos que la mayor concentración en 1973 que en 1968 es producto de una heterogeneidad creciente entre los agregados industriales. El examen de las columnas revela que esta *tendencia afecta por igual a todas las agrupaciones industriales*. En 1973 hay más heterogeneidad entre la productividad de todas las ramas, que en 1968.

En síntesis, en el período bajo consideración la industria manufacturera venezolana se caracterizó por una creciente concentración de la producción entre los trabajadores (productividad), que se debió en gran parte a una mayor heterogeneidad entre las industrias y en menor medida a una mayor desigualdad interna. Estos procesos mostraron mayor énfasis en las industrias tradicionales e intermedias, mientras que en las mecánicas y diversas se dio una tendencia hacia la igualdad.

## 5.5 *Descomposición temporal del índice de Gini*

El cálculo del índice de concentración de Gini a partir de una distribución de frecuencias en que las observaciones se agruparon en intervalos de clase, permite analizar los aportes hechos por cada agregado a la variación en los niveles de desigualdad.

La diferencia básica con respecto a las medidas presentadas en las secciones anteriores de este mismo capítulo, radica en que la descomposición lineal del índice de Gini (en un punto cualquiera del tiempo), supone que los cálculos se basan en una tabla de datos agrupados, y por lógica consecuencia no estaremos en condiciones de obtener indicadores estadísticos referidos a los niveles alcanzados por la intradesigualdad. Sólo podremos establecer el grado de interdesigualdad de los intervalos de clase.

Sabemos que el índice de concentración de Gini se puede expresar como un promedio ponderado de los coeficientes Gini-intervalos. Es decir, para un punto t cualquiera en el tiempo tenemos que:

$$(5.35) \qquad \boxed{G_t = G_{1,t}\frac{\pi_{1,t}}{\pi} + G_{2,t}\frac{\pi_{2,t}}{\pi} + \ldots + G_{m,t}\frac{\pi_{m,t}}{\pi}}$$

Donde $G_t$ simboliza a la razón de concentración en el tiempo t, $G_{i,t}$ ($i = 1,2, \ldots, m$) al coeficiente Gini-intervalo correspondiente al i-ésimo estrato en t y $\frac{\pi_{i,t}}{\pi}$ representa la ponderación en t.

Interpretaremos cada término del lado derecho de (5.35) como la contribución que en el tiempo *t* hacen al nivel total de desigualdad cada uno de los $m$ intervalos de clases, aportes que compuestos a través de su suma conforman la medida del nivel de concentración existente en t.

Es posible escribir una ecuación equivalente a (5.35) pero referida al tiempo posterior (t + s) en lugar de t (s > 0).

$$G_{t+s} = G_{1,t+s} \frac{\pi_{1,t+s}}{\pi} + G_{2,t+s} \frac{\pi_{2,t+s}}{\pi} + \dots + G_{m,t+s} \frac{\pi_{m,t+s}}{\pi} \tag{5.36}$$

La interpretación de esta ecuación es análoga a la anterior y sus símbolos se definen de la misma manera. La única diferencia estriba en que esta vez se refieren al tiempo (t + s) y no a t.

Ahora bien, al restar (5.36) a (5.35) descomponemos el cambio que ha sufrido el nivel de desigualdad entre t y (t + s).

$$G_t - G_{t+s} = G_{1,t} \frac{\pi_{1,t}}{\pi} - G_{1,t+s} \frac{\pi_{1,t+s}}{\pi} + G_{2,t} \frac{\pi_{2,t}}{\pi} - G_{2,t+s} \frac{\pi_{2,t+s}}{\pi} + \dots + G_{m,t} \frac{\pi_{m,t}}{\pi} - G_{m,t+s} \frac{\pi_{m,t+s}}{\pi} \tag{5.37}$$

Esta ecuación descompone la variación de la medida de desigualdad global, en las cuotas con que han concurrido los m intervalos de clase. El término genérico:

$$G_{i,t} \frac{\pi_{i,t}}{\pi} - G_{i,t+s} \frac{\pi_{i,t+s}}{\pi} \quad (i = 1,2, \dots, m) \tag{5.38}$$

puede interpretarse como la medida de la contribución que ha realizado el i-ésimo intervalo de clase al cambio en el nivel total de desigualdad.

Toda vez que un intervalo de clase disminuya su contribución al nivel de desigualdad global tendremos que:

$$G_{i,t} \frac{\pi_{i,t}}{\pi} > G_{i,t+s} \frac{\pi_{i,t+s}}{\pi}$$

y (5.38) será positiva, y negativa en el caso que:

$$G_{i,t} \frac{\pi_{i,t}}{\pi} < G_{i,t+s} \frac{\pi_{i,t+s}}{\pi}$$

es decir, cuando la cuota a la desigualdad global del estrato *i* aumenta a través del tiempo.

Del mismo modo, la desigualdad total disminuyó en el tiempo si (5.37) es positivo. En otros terminos, si:

$$G_t > G_{t+s}$$

y aumentó en la situación contraria.

Antes de presentar un ejemplo numérico que sirva como ilustración de estas ideas recordemos la fórmula que permite calcular el índice Gini-intervalo:

$$G_i = 1 - \frac{Q_i + Q_{i-1}}{P_i + P_{i-1}} \quad (i = 1,2, \ldots, m)$$

y los factores de ponderación:

$$\frac{\pi_i}{\pi} = (P_i + P_{i-1})(P_i - P_{i-1}) \qquad (i = 1,2, \ldots, m)$$

Estas dos últimas igualdades se pueden poner en correspondencia con un tiempo cualquiera.

Los datos referidos al tiempo t contenidos en la tabla 5.2 se agruparon en cuatro intervalos de clase. Los resultados básicos se exponen a continuación así como la información útil para el cálculo del coeficiente Gini-intervalo.

*Tabla. 5.16 Distribución del ingreso (hipotética) en el tiempo t.*

| Intervalos de clase | | $q_i$ | $p_i$ | $Q_i$ | $P_i$ | $(Q_{i-1}+Q_i)$ | $(P_{i-1}+P_i)$ | $G_i$ | $\frac{\pi_i}{\pi}$ | $R_i \frac{\pi_i}{\pi}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.018 | 0.150 | 0.018 | 0.150 | 0.018 | 0.150 | 0.881 | 0.023 | 0.020 |
| 11 | 30 | 0.268 | 0.400 | 0.286 | 0.550 | 0.304 | 0.700 | 0.566 | 0.280 | 0.159 |
| 31 | 50 | 0.562 | 0.400 | 0.848 | 0.950 | 1.134 | 1.500 | 0.244 | 0.600 | 0.146 |
| 51 | 100 | 0.152 | 0.050 | 1.000 | 1.000 | 1.848 | 1.950 | 0.052 | 0.098 | 0.005 |
| | | 1.000 | 1.000 | | | | | | 1.000 | 0.330 |

Al agrupar los valores de variables referidos a (t + s) de la tabla (5.2) en los mismos intervalos de clase que en *t* se tiene:

*Tabla. 5.17 Distribución por tramos de ingreso (hipotética) en el tiempo (t + s)*

| Intervalos de clase | | $q_i$ | $p_i$ | $Q_i$ | $P_i$ | $(Q_{i-1} + Q_i)$ | $(P_{i-1} + P_i)$ | $G_i$ | $\frac{\pi_i}{\pi}$ | $G_i \frac{\pi_i}{\pi}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | Indet. | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 30 | 0.244 | 0.450 | 0.244 | 0.450 | 0.244 | 0.450 | 0.459 | 0.203 | 0.093 |
| 31 | 50 | 0.541 | 0.450 | 0.785 | 0.900 | 1.029 | 1.350 | 0.238 | 0.608 | 0.145 |
| 51 | 100 | 0.215 | 0.100 | 1.000 | 1.000 | 1.785 | 1.900 | 0.061 | 0.190 | 0.011 |
| | | 1.000 | 1.000 | | | | | | 1.000 | 0.249 |

Sobre la base de la comparación de estas dos últimas tablas observamos que los cambios más destacados son:

(i) El alza que experimentó el estrato inferior fue de tal magnitud que entre t y (t + s) ha quedado desierto. Es decir, en (t + s) no hay participación en el ingreso ni en las unidades por lo que su coeficiente Gini-intervalo se encuentra indeterminado. Sin embargo, con el propósito de obtener un indicador de su contribución al nivel global de desigualdad supusimos que $R_1 \frac{\pi_i}{\pi} = 0$

(ii) Los dos tramos intermedios si bien en (t + s) bajaron su participación relativa en la cuota del ingreso con respecto a la que tenían en t, han aumentado sus tamaños relativos. Esto es una consecuencia directa del alza en el intervalo de clase inferior ya que las unidades que la conformaban en t han pasado en (t + s) a los tramos intermedios.

(iii) El estrato de clase en que se ubican las observaciones privilegiadas aumentaron en (t + s) con respecto a t no sólo en lo que se refiere a su participación en el ingreso sino también en las observaciones. Los reajustes que afectaron los ingresos se tradujeron en que en (t + s) una mayor proporción de los casos se encuentra en los más altos niveles.

Todos estos movimientos nos conducen a sostener la idea de que en el lapso en cuestión tuvo lugar una redistribución progresiva del ingreso que se caracteriza porque los tres primeros intervalos aportaron a la igualdad, en tanto que el último ha contribuido a la concentración.

Al dar contenido numérico a la ecuación (5.37) obtenemos una medida sintética de estos cambios.

$$0.330 - 0.249 = (0.020 - 0.000) + (0.159 - 0.093) + \\ + (0.146 - 0.145) + (0.005 - 0.011)$$

Al realizar las operaciones indicadas se obtiene.

$$0.081 = 0.020 + 0.066 + 0.001 - 0.006$$

Una rápida mirada a esta ecuación nos permite sostener que entre t y (t + s) tuvo lugar un proceso de reducción de los niveles de desigualdad producto de las contribuciones realizadas por los tres primeros intervalos de clase. Este proceso más que compensó las tendencias concentradoras del tramo superior. Estos resultados nos permiten evaluar los pesos absolutos y relativos con que concurren los estratos a la formación del cambio en el nivel global de desigualdad.

La mayor contribución se debe al segundo intervalo de clase que en unión del primero prácticamente agotan todos los cambios significativos. El aporte a la igualdad que realiza el tercero es leve y tampoco es demasiado fuerte la tendencia concentradora del cuarto intervalo de clase. Como se puede apreciar, en virtud de los valores numéricos asociados a cada tramo estamos en condiciones de calificar la importancia de las modificaciones lo que no es posible hacer con facilidad comparando directamente las tablas.

El cuadro es un poco distinto si hacemos el análisis de las contribuciones relativas. El primer intervalo de clase contribuye con el mayor aporte relativo ya que en (t + s) pasa a tener una participación nula en el nivel desigualdad, es decir, aporta todo de lo que es capaz (0.020) y en consecuencia su contribución relativa es del 100%. El segundo tramo experimenta una disminución de 0.066 con respecto a un total posible de 0.159, vale decir, su aporte relativo alcanza a un 40%. La cuota relativa del tercer estrato es insignificante ya que sólo alcanza a un poco más que el 1% y la variación relativa en favor de una mayor concentración del cuarto intervalo de clase alcanza casi el 26%.

Si desplazamos en el tiempo a la ecuación (5.37) de manera que sea un indicador del cambio experimentado por la desigualdad entre (t + s) y (t + r) en que (r > s) tendremos que:

(5.39)

$$\boxed{\begin{aligned} G_{t+s} - G_{t+r} = {} & G_{1,t+s}\frac{\pi_{1,t+s}}{\pi} - G_{1,t+r}\frac{\pi_{1,t+r}}{\pi} + G_{2,t+s}\frac{\pi_{2,t+s}}{\pi} \\ & - G_{2,t+r}\frac{\pi_{2,t+r}}{\pi} + \ldots + G_{m,t+s}\frac{\pi_{m,t+s}}{\pi} - G_{m,t+r}\frac{\pi_{m,t+r}}{\pi} \end{aligned}}$$

Al sumar (5.37) a (5.39) encontramos que:

$$(G_t - G_{t+s}) + (G_{t+s} - G_{t+r}) = G_{1,t}\frac{\pi_{1,t}}{\pi} - G_{1,t+s}\frac{\pi_{1,t+s}}{\pi} + G_{1,t+s}\frac{\pi_{1,t+s}}{\pi}$$

$$- G_{1,t+r}\frac{\pi_{1,t+r}}{\pi} + G_{2,t}\frac{\pi_{2,t}}{\pi} - G_{2,t+s}\frac{\pi_{2,t+s}}{\pi} + G_{2,t+s}\frac{\pi_{2,t+s}}{\pi} - G_{2,t+r}\frac{\pi_{2,t+r}}{\pi} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + G_{m,t}\frac{\pi_{m,t}}{\pi} - G_{m,t+s}\frac{\pi_{m,t+s}}{\pi} + G_{m,t+s}\frac{\pi_{m,t+s}}{\pi} - G_{m,t+r}\frac{\pi_{m,t+r}}{\pi}$$

Y al cancelar términos:

$$\boxed{G_t - G_{t+r} = G_{1,t}\frac{\pi_{1t}}{\pi} - G_{1,t+r}\frac{\pi_{1,t+r}}{\pi} + G_{2,t}\frac{\pi_{2,t}}{\pi} - G_{2,t+r}\frac{\pi_{2,t+r}}{\pi} + \ldots\ldots + G_{m,t}\frac{\pi_{m,t}}{\pi} - G_{m,t+r}\frac{\pi_{m,t+r}}{\pi}} \quad (5.40)$$

Esta ecuación nos señala que la descomposición de Gini en Gini-intervalos es agregativa en el tiempo. Es decir, si disponemos de la variación global y de los aportes realizados por los intervalos entre t y (t + s) y entre (t + s) y (t + r) es posible determinar por simple suma el cambio entre t y (t + r).

Tomemos, a manera de ejemplo, la información de la tabla 5.6 y procedamos a agruparla de acuerdo a los intervalos de clases que hemos definido.

*Tabla. 5.18 Distribución del ingreso (hipotética) en el tiempo (t + r)*

| Intervalos de clase | | $q_i$ | $p_i$ | $Q_i$ | $P_i$ | $(Q_i + Q_{i-1})$ | $(P_{i-1} + P_i)$ | $G_i$ | $\frac{\pi_i}{\pi}$ | $G_i \frac{\pi_i}{\pi}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | Indet. | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 30 | 0.252 | 0.450 | 0.252 | 0.450 | 0.252 | 0.450 | 0.440 | 0.202 | 0.089 |
| 31 | 50 | 0.535 | 0.450 | 0.787 | 0.900 | 1.039 | 1.350 | 0.230 | 0.608 | 0.140 |
| 51 | 100 | 0.213 | 0.100 | 1.000 | 1.000 | 1.787 | 1.900 | 0.059 | 0.190 | 0.011 |
| | | 1.000 | 1.000 | | | | | | 1.000 | 0.240 |

Entre (t + s) y (t + r) tuvo lugar un nuevo proceso de redistribución progresiva del ingreso y a juzgar por:

$$\begin{aligned}(0.249 - 0.240) &= (0.000 - 0.000) + (0.093 - 0.089) + \\ &= (0.146 - 0.140) + (0.011 - (0.011) \\ 0.009 &= 0.000 + 0.004 + 0.005 + 0.000\end{aligned}$$

Todos los intervalos de clase que estaban en condiciones de hacer una contribución a la igualdad lo han hecho positivamente.

Los resultados de la tabla 5.19 comprueban numéricamente el carácter agregativo en el tiempo del índice de concentración de Gini.

*Tabla 5.19 Cambios en la contribución a la desigualdad de los intervalos de clase entre dos puntos del tiempo.*

| Intervalos de clase | | Entre t y (t + s) | Entre (t + s) y (t + r) | Entre t y (t + r) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.020 | 0.000 | 0.020 |
| 11 | 30 | 0.066 | 0.004 | 0.070 |
| 31 | 50 | 0.001 | 0.005 | 0.006 |
| 51 | 100 | -0.006 | 0.000 | -0.006 |
| Total | | 0.081 | 0.009 | 0.090 |

## 5.6 *Aplicación de la descomposición del índice de Gini*

Para ilustrar el uso de la ecuación (5.37) nos basaremos en los datos de la distribución de la tierra en El Salvador para los años 1950 y 1961.

*Tabla 5.20 Distribución de la tierra por tamaños en El Salvador, 1950 y 1961*[4]

| | *1950* | | | | | *1961* | | | | | *1950-1961* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Tamaños* | $p_i$ | $q_i$ | $G_i$ | $\frac{\pi_i}{\pi}$ | $G_i\frac{\pi_i}{\pi}$ | $p_i$ | $q_i$ | $G_i$ | $\frac{\pi_i}{\pi}$ | $G_i\frac{\pi_i}{\pi}$ | $\Delta G_i\frac{\pi_i}{\pi}$ |
| Microfincas | 0.403 | 0.023 | 0.943 | 0.162 | 0.153 | 0.472 | 0.039 | 0.917 | 0.223 | 0.204 | -0.051 |
| Subfamiliar | 0.483 | 0.166 | 0.836 | 0.623 | 0.521 | 0.442 | 0.180 | 0.814 | 0.613 | 0.499 | 0.022 |
| Familiar | 0.090 | 0.215 | 0.682 | 0.168 | 0.115 | 0.067 | 0.206 | 0.660 | 0.127 | 0.084 | 0.031 |
| Multif. Media | 0.018 | 0.192 | 0.482 | 0.035 | 0.017 | 0.015 | 0.198 | 0.470 | 0.030 | 0.014 | 0.003 |
| Multif. Grande | 0.006 | 0.404 | 0.200 | 0.012 | 0.002 | 0.004 | 0.327 | 0.187 | 0.008 | 0.001 | 0.001 |
| Total | 1.000 | 1.000 | | 1.000 | 0.808 | 1.000 | 1.000 | | 1.000 | 0.802 | 0.006 |

[4] La información original se tomó de Mario Monteforte Toledo, *Centro América 1. Subde-*

Por motivos de presentación en esta tabla no incluimos los pasos intermedios. Sólo entregamos la información básica que permite reconstruir el cálculo.

Los resultados de la última columna de la tabla muestran que en la República de El Salvador tuvo lugar, entre 1950 y 1961, un levísimo proceso de desconcentración en la propiedad de la tierra. De la simple observación de la discrepancia se podría afirmar que, para todos los efectos prácticos, nada aconteció en el lapso bajo consideración. Sin embargo, al examinar la forma como se constituye es posible detectar algunos fenómenos que por presentar tendencias contradictorias se cancelan y no se manifiestan en el valor global.

En efecto, el único estrato cuyo aporte es hacia una mayor concentración en 1961 que en 1950 es el de microfincas (-0.051) contrarrestando una tendencia generalizada hacia una mayor igualdad en los restantes. Del análisis comparativo de los resultados del primer renglón se desprende que la mayor desigualdad se debe básicamente a un cambio en la ponderación (pasa de 0.162 a 0.223) ya que los $G_i$ se modifican levemente. Al mirar las correspondientes participaciones relativas en los predios ($p_i$) y en las áreas ($q_i$) se observa que la cuota de las microfincas a una mayor concentración se explica por un proceso de fraccionamiento de las propiedades pequeñas.

Los resultados de la tabla 5.20 nos indican que los valores de los $G_i$ son sistemáticamente menores en 1961 que en 1950 y que lo mismo es válido para los pesos excepto en las microfincas. En la combinación de valores más pequeños en los índices de cada intervalo ($G_i$) y de sus pesos, deben buscarse los factores que llevan al leve proceso global de desconcentración.

Al sumar los cambios entre t y (t + s) segunda columna) y entre (t + s) y (t + r) (tercera columna) se obtiene una medida que representa el aporte que ha hecho cada categoría a la alteración en los niveles de desigualdad entre t y (t + r) (cuarta columna).

## 5.7 *Algunas consideraciones finales*

El ejemplo desarrollado en la sección 5.5 es un buen punto de partida para aproximarse a la identificación de los elementos centrales que se encuentran por detrás de las variaciones cronológicas de los niveles de desigualdad. El análisis comparativo de las tablas 5.16 y 5.17 nos ha llevado a concluir que el segundo y tercer intervalos de clase contribuyeron positivamente a la igualdad.[5] Habíamos dicho que el sentido del aporte se lo otor-

*sarrollo y Dependencia.* UNAM México, 1972, págs. 193 y 197. Las definiciones de cada categoría según tamaño es la siguiente:
Microfincas: menos de 1 hectárea; Subfamiliar: 1 a 9.9 Has.; Familiar: 10 a 49.9 Has.; Multifamiliar media: 50 a 199 Has. y Multifamiliar grande: 200 o más Has.

[5] No nos referimos al primer estato porque en (t + s) quedó desierto.

gaba el aumento que habían experimentado entre t y (t + s) sus tamaños ya que sus participaciones relativas en el ingreso habían disminuido. Es decir, la tendencia concentradora que proviene de una participación decreciente en el ingreso de las capas más desposeídas (efecto ingreso), fue más que compensada por el efecto democratizador que deriva del tamaño (hubo un ascenso en los ingresos de las unidades que en t estaban ubicadas en el escalón más bajo) de manera que el movimiento final fue que ambos intervalos de clase realizaron una contribución neta de la igualdad. Por otra parte, el intervalo superior ha hecho un aporte concentrador entre t y (t + s), el cual resultó de un efecto combinado y mutuamente reforzado del ingreso y del tamaño. Recuérdese que la participación en el ingreso de este estrato pasó de 0.152 en t a 0.215 en (t + s) y que su tamaño relativo pasó de 0.050 en t a 0.100 en (t + s).

En este ejemplo se encuentran presentes los elementos que constituyen una situación perfectamente general. La evolución temporal de la desigualdad es el resultado del ritmo que han seguido dos procesos que la conforman. Por una parte, el desarrollo cronológico que gobierna el desenvolvimiento de la variable que va a ser distribuida y por otra, las leyes que determinan la evolución de las unidades. Podríamos pensar en un experimento conceptual en que se suponga constante el número de casos permitiendo que varíe tanto el monto absoluto de la variable que se va a repartir como los parámetros que determinan la forma en que se distribuye, de modo que los cambios que se observan en los niveles de desigualdad sean una consecuencia directa de lo que podríamos denominar un "efecto variable". O bien, suponer que se ha dejado libre el proceso de desarrollo de las unidades y que no se alteró el nivel de la variable ni la forma de su distribución de manera que el cambio en el nivel de concentración sea sólo consecuencia del "efecto tamaño". Es decir, la evolución de los niveles de desigualdad es una resultante de los cambios temporales en la variable y en las unidades por lo tanto, es el producto de la combinación entre el "efecto variable" y el "efecto tamaño".[6]

Hay ocasiones en que la naturaleza de los datos permite, una vez constatado el cambio temporal en los niveles de desigualdad, identificar con algún grado de precisión la fuente que probablemente lo originó. Así por ejemplo, si para estudiar el cambio en el tiempo de la distribución del ingreso de un país o de una ciudad se utilizó un panel, podemos suponer que el número de unidades se encuentra bajo control con lo cual la fuente de variación radicará en los procesos que subyacen a la evolución de la variable (efecto variable). Es claro que su identificación gozará de un mayor nivel de precisión

[6] El análisis de la relación entre demografía y distribución del ingreso, se puede ver en: Joseph Potter. "Factores Demográficos y Distribución del Ingreso", en *Demografía y Economía*. Vol. XIII. Núm. 3 (39), El Colegio de México, México 1979.

en la medida que se mantengan relativamente constantes los factores que gobiernan la mortalidad del panel en el largo plazo o bien que el estudio no cubra un período muy extenso. Tal vez el ejemplo inverso puede ser el análisis de la variación en la concentración de la propiedad agraria en un país o en una región que ha agotado el desarrollo de su frontera agrícola. Habiéndose establecido, por ejemplo, un aumento en la desigualdad de la propiedad agrícola entre dos censos, habrá que buscar las causas en los procesos determinantes de la dinámica demográfica, social y política que inciden sobre el "número de propietarios agrícolas".

Las dos situaciones que hemos reseñado corresponden a casos más o menos puros que se acercan a las condiciones impuestas por el experimento conceptual, sin embargo, no es poco frecuente que las series estadísticas disponibles reflejen el impacto conjunto de las fuentes que inciden sobre la evolución temporal de los niveles de desigualdad. Así por ejemplo, los análisis sobre la distribución personal del ingreso basados en datos censales o los estudios del cambio en la propiedad agrícola confeccionados a partir de los censos agropecuarios, deben reconocer que probablemente en el período intercensal no sólo hubo alteraciones en los niveles y en la forma en que se ha distribuido la variable que se ha de repartir, sino que también ha tenido lugar una modificación en el número de unidades, de manera que la evolución cronológica de los niveles de concentración puede verse como una síntesis resultante de ambos tipos de movimientos.

Estas ideas que se han planteado en relación a los niveles globales de desigualdad pueden ser afinadas un poco más si procedemos a considerar la desigualdad al nivel de grupos o agregados de unidades individuales. Podríamos estar interesados en analizar los cambios que ha sufrido: la distribución del ingreso por clases sociales, la propiedad agrícola medida por tamaño de área, la repartición del crédito entre empresas industriales clasificadas en nacionales y extranjeras, etc. En todos estos casos la distribución de la variable entre las unidades no sólo dependerá de la dinámica global sino también de las diferenciales de reproducción de los distintos grupos, es decir, de la evolución de los tamaños relativos de las clases sociales, por el cambio en la composición de los propietarios agrícolas y por la relación variable entre empresas nacionales y extranjeras.

Suponiendo constante el nivel de ingreso así como los parámetros que determinan su distribución, se puede producir una tendencia creciente en los niveles de desigualdad por el simple hecho que las tasas de crecimiento de las clases desposeídas son mayores que las clases privilegiadas, tendencia que puede ser reforzada por un proceso de generación de trabajadores no poseedores de medios de producción que hacen aumentar aún más, por ejemplo, el tamaño del proletariado o si el estudio se lleva a cabo en ciudades, al crecimiento "natural" se agregan los flujos migratorios que usualmente inducen cambios sobre la composición de la población urbana.

La distribución de las empresas según su origen, en nacionales o extranjeras, puede variar como una consecuencia del modelo económico que sigue un país, el cual por ejemplo, puede llegar a crear las condiciones que favorezcan la operación del capital transnacional en contra del nacional, lo que puede traducirse en el abandono de la burguesía nacional del campo de la producción.

La reproducción diferencial de las clases sociales tambien afectaría la dinámica del cambio en la propiedad de la tierra, la que, aunada a las normas sociales referidas a la herencia y el desarrollo del capitalismo en la agricultura, conduce, normalmente, a tasas de crecimiento marcadamente diferentes las que incidirán de manera directa en los niveles de desigualdad social.

Hay que considerar que también la variable que se reparte suele ser el resultado directamente observable de procesos sociales. No hay necesidad de argumentar demasiado para sostener esta idea cuando se trata del ingreso, del crédito o de los gastos públicos. Sin embargo, puede llegar a pensarse que aun en el caso de la distribución de la tierra juegan determinaciones sociales en la expansión de la frontera agrícola. En efecto, los límites que alcance en un momento del tiempo dependerá del grado de avance tecnológico en relación a la recuperación de tierras o de la capacidad de hacer aptas para la producción agraria aquellas tierras que en otro estadio tecnológico se consideraban no cultivables.

El tipo de factores que se encuentra por detrás de los procesos que conforman la evolución de la desigualdad, nos permite sostener que las inquietudes que nos hemos planteado se encuentran en el interior del marco delimitado por la desigualdad social. El análisis de su dinámica puede conceptualizarse como el estudio del desarrollo cronológico de la síntesis de los determinantes sociales que subyacen, tanto a la variable que se distribuye como al desarrollo del número de observaciones o de los tamaños relativos de las categorías agregadas.

Si estamos interesados en llevar a cabo un análisis que identifique los factores sociales que se encuentran en la base del cambio cronológico en los niveles de desigualdad, entonces el primer paso será plantearse como problema separar aquella parte de la variación temporal que depende de los procesos que afectan a la variable, de aquélla que deriva directamente de la evolución de los tamaños. La individualización de ambos tipos de efectos y sus repercusiones sobre la concentración, nos capacitará para llegar a disponer de un conocimiento más fino respecto a sus determinaciones sociales. Por el contrario, si no nos preocupamos por separar los efectos de los procesos sobre el cambio en los niveles de desigualdad, será difícil indagar respecto a los factores sociales que lo determinan en la medida que se mezclarían aquéllos directamente relacionados a la dinámica de la variable con los asociados al desarrollo temporal de las unidades de observación. Así, por ejemplo, si estuviéramos interesados en estudiar los factores sociales relacionados con el cambio que ha experimentado en cierto período la distribución de la propiedad agrícola (en un país con frontera abierta) deberíamos, en primer lugar, intentar distinguir la parte de la variación en la desigualdad producto de una alteración en la cantidad de tierra disponible y en los parámetros que gobiernan su distribución, de aquella parte que resulta de la dinámica de desenvolvimiento de las unidades y, en segundo lugar, preguntarnos acerca de los condicionantes sociales que estarían relacionados a uno y otro tipo de procesos.

Aún más, la distinción de las dos fuentes directas que inciden sobre la desigualdad puede llegar a ser de importancia en una situación en que las medidas aplicadas nos indiquen que entre dos puntos del tiempo no hubo cambios, cuando en realidad lo que sucedió es que las tendencias hacia la igualdad, por ejemplo, inducidas por los factores sociales que se relacionan con la variable, fueron compensadas por un movimiento inverso en el número de observaciones. Es decir, el nivel de desigualdad puede permanecer constante en el tiempo debido a que los procesos sociales que lo determinan desarrollan una serie de factores que se contrarrestan.

El tratamiento sistemático de este tema así como las posibilidades técnicas de análisis se encuentran claramente fuera de los límites que hemos establecido para este trabajo. Estas conclusiones sólo tienen la intención de bosquejar la complejidad que reviste el tema cuando se examina desde el ángulo de aquellas teorías sociales cuyo propósito radica en la búsqueda de explicaciones sociales de los procesos observados.

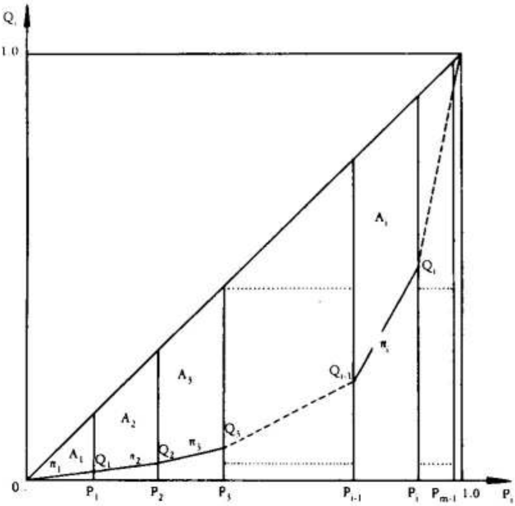
*APENDICE 1*

*Una expresión del índice de Gini para datos no agrupados*

Tenemos que demostrar que es posible calcular el valor de G a través de:

$$G' = \frac{2}{n}(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n) - \frac{(n+1)}{n}$$

Con el propósito de llegar a esta fórmula iniciemos el desarrollo a partir de la definición geométrica del índice de Gini.




En esta gráfica $\pi_i$ simboliza el área delimitada por el segmento de la línea de equidistribución que corresponde a la parte del eje de abscisas delimitado por $P_i$ y $P_{i-1}$ y por los segmentos verticales $Q_i$ y $Q_{i-1}$. $A_i$ denota la parte del área de concentración correspondiente al i-ésimo intervalo, o a la i-ésima observación según se trate de los datos agrupados u originales.

La fórmula de Gini que deriva del desarrollo geométrico requiere que evaluemos el área de concentración. Su cálculo se simplifica si usamos un procedimiento indirecto que consiste en obtener primero el área $\Sigma(\pi_i - A_i) = (\pi - A)$ que se encuentra delimitada por el eje de abscisas, la poligonal de Lorenz y la vertical paralela al eje de ordenadas levantada en el punto $P_n = 1.0$.

De acuerdo con esta simbología el coeficiente de Gini asume la forma:

$$G = \frac{1/2 - (\pi - A)}{1/2} = 1 - 2\,(\pi - A)$$

Ahora bien, para el cálculo del área ($\pi$ - A) procederemos a su descomposición en una serie de triángulos y rectángulos, tal como se puede apreciar en la gráfica. Al aplicar sistemáticamente este principio obtenemos:

$$(\pi_1 - A_1) = \frac{1}{2} P_1 Q_1$$

$$(\pi_2 - A_2) = (P_2 - P_1)Q_1 + \frac{1}{2}(P_2 - P_1)(Q_2 - Q_1) = \frac{1}{2}(P_2 - P_1)\;(Q_2 + Q_1) =$$
$$= \frac{1}{2} p_2 (Q_2 + Q_1)$$

$$(\pi_3 - A_3) = (P_3 - P_2)Q_2 + \frac{1}{2}(P_3 - P_2)(Q_3 - Q_2) = \frac{1}{2}(P_3 - P_2)(Q_3 + Q_2) =$$
$$= \frac{1}{2} p_3 (Q_3 + Q_2)$$

$$(\pi_i - A_i) = (P_i - P_{i-1})Q_{i-1} + \frac{1}{2}(P_i - P_{i-1})(Q_i - Q_{i-1}) = \frac{1}{2}(P_i - P_{i-1})(Q_i + Q_{i-1}) =$$
$$= \frac{1}{2} p_i \;(Q_i + Q_{i-1})$$

$$(\pi_n - A_n) = (P_n - P_{n-1})\,Q_{n-1} + \frac{1}{2}(P_n - P_{n-1})\,(Q_n - Q_{n-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}(P_n - P_{n-1})(Q_n + Q_{n-1}) = \frac{1}{2} p_n (Q_n Q_{n-1})$$

De donde:

$$(\pi \quad A) = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i \; - A_i) = \frac{1}{2} \Sigma \quad p_i \;(Q_i + Q_{i-1}$$

Si disponemos de las observaciones originales entonces se cumple:

$$P_i = \frac{i}{n} \text{ y } p_i = \frac{1}{n}$$

Luego:

$$(\pi_1 - A_i) = \frac{1}{2n}(Q_i + Q_{i-1})$$

y

$$(\pi - A) = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i - A_i) = \frac{1}{2_n} \sum_{i=1}^{n} (Q_i + Q_{i-1})$$

En consecuencia:

$$1-(\pi - A) = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{Q_1}{2}\right] + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(Q_2 + Q_1)}{2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(Q_3 + Q_2)}{2}\right] + \dots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(Q_n - Q_{n-1})}{2}\right]$$

Nótese que para escribir esta última igualdad hemos hecho uso de:

$$1 = \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^{\text{n veces}}$$

Al reeplazar las frecuencias acumuladas por las sumas de las frecuencias relativas simples que las constituyen:

$$1-(\pi - A) = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{q_1}{2}\right] + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(q_1 + q_2 + q_2)}{2}\right] +$$

$$+ \dots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{(q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} + q_n)}{2}\right]$$

Examinemos cada uno de los sumandos que hemos encerrado entre corchetes.
Para el primer termino tenemos:

$$\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{q_1}{2}\right] = \frac{1}{n}\left[q_1 + q_2 + \dots + q_n - \frac{q_1}{2}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{q_1}{2} + \sum_{i=2}^{n} q_i\right]$$

Para el segundo término:

$$\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\frac{(2q_1+q_2)}{2}\right]=\frac{1}{n}\left[\cancel{q_1}+q_2+\ldots+q_n-\cancel{q_1}\ \frac{q_2}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{q_2}{2}+\sum_{i=3}^{n}q_i\right]$$

Para el tercer término:

$$\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\frac{(2q_1+2q_2+q_3)}{2}\right]=\frac{1}{n}\left[\cancel{q_1}+\cancel{q_2}+q_3+\ldots+q_n-\cancel{q_1}-\cancel{q_2}-\frac{q_3}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{q_3}{2}+\sum_{i=4}^{n}q_i\right]$$

En n-ésimo término será:

$$\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\ \frac{(2q_1+2q_2+2q_3+\ldots+2q_{n-1}+q_n)}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\cancel{q_1}+\cancel{q_2}+\cancel{q_3}+\ldots+\cancel{q_{n-1}}+q_n-\cancel{q_1}-\cancel{q_2}-\cancel{q_3}-\ldots-\cancel{q_{n-1}}-\frac{q_n}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{q_n}{2}$$

Al reemplazar estas igualdades llegamos a:

$$1-(\pi-A)=\frac{1}{n}\left[\frac{q_1}{2}+\sum_{i=2}^{n}q_i\right]+\frac{1}{n}\left[\frac{q_2}{2}+\sum_{i=3}^{n}q_i\right]+$$

$$+\frac{1}{n}\left[\frac{q_3}{2}+\sum_{i=4}^{n}q_i\right]+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{q_n}{2}$$

Expresión que puede escribirse como:

$$1-(\pi-A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{2}+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}q_i+\frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n}q_i+\ldots+\frac{1}{n}q_n$$

Si sumamos y restamos $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} q_i$ en el lado derecho de esta ecuación obtenemos:

$$1-(\pi-A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} q_i + \frac{1}{n}\sum_{i=3}^{n} q_i + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n} q_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{2}$$

Luego:

$$1-(\pi-A) = \frac{1}{n}\left[q_1 + q_2 + \ldots + q_n\right] + \frac{1}{n}\left[q_2 + q_3 + \ldots + q_n\right] +$$

$$+ \frac{1}{n}\left[q_3 + \ldots + q_n\right] + \frac{1}{n} q_n - \frac{1}{2n}$$

ya que $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$

Entonces:

$$1-(\pi-A) = \frac{1}{n}\left[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n\right] - \frac{1}{2n}$$

$$1-(\pi-A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} iq_i - \frac{1}{2n}$$

Este resultado lo sustituimos en:

$$G' = 1 - 2(\pi - A)$$

para determinar la fórmula del coeficiente de Gini:

$$G' = 1 - 2\left[1 - \left(\frac{1}{n}\Sigma\, iq_i - \frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$G' = 1 - 2\left[\frac{2n+1}{2n} - \frac{1}{n}\Sigma\, iq_i\right]$$

$$G' = 1 + \frac{2}{n}\Sigma\ iq - \frac{2n + 1}{n}$$

Para simplificar la igualdad usemos la relación $\frac{n}{n} = 1$

$$G' = \frac{2}{n}\Sigma\ iq_i + \frac{n}{n} - \frac{2n + 1}{n}$$

$$G' = \frac{2}{n}\Sigma\ iq_i - \frac{(n + 1)}{2}$$

Es decir,

$$G' = \frac{2}{n}\left[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n\right] - \frac{(n\text{-}1)}{n}$$

Una vez que establecimos la fórmula para G' nos interesa demostrar que su relación con G está dada por

$$G' = (1 - \frac{1}{n})\, G$$

Tomemos la definición del índice de concentración de Gini:

$$G = \frac{\overset{n-1}{\Sigma}(P_i - Q_i)}{\overset{n-1}{\Sigma}\, p} = 1 - \frac{\overset{n-1}{\Sigma}\, Q_i}{\overset{n-1}{\Sigma}\, P}$$

$$\sum^{n-1} p = p_1 + (p_1 + p_2) + (p_1 + p_2 + p_3) + \ldots + (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}$$

Sabemos que para los datos no agrupados se cumple que:

$$p_i = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Al sustituir obtenemos:

$$\sum^{n-1} P_i = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \ldots + \Big(\overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}^{(n-1)\text{ veces}} + \ldots + \frac{1}{n}\Big)$$

$$\sum^{n-1} P_i = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \frac{n-1}{n}$$

Los numeradores de estas fracciones constituyen la suma de los primeros (n-1) números naturales y por lo tanto tendremos:

$$\sum^{n-1} P_i = \frac{1}{n}\left[\frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$$

Al reemplazar esta igualdad en la definición de G se llega a:

$$G = 1 - \frac{2\Sigma Q_i}{n-1}$$

Con el propósito de establecer la relación entre G y G' procederemos a transformar $\Sigma Q_i$:

$$\sum^{n-1} Q_i = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_{n-1}$$

$$\sum^{n-1} Q_i = (1-q_2-q_3-q_4-q_n) + (1-q_3-q_4-\ldots-q_n) + (1-q_4-\ldots-q_n) +$$

$$+ (1-q_{n-1}-q_n) + (1-q^n)$$

Al agrupar convenientemente los términos se llega a:

$$\sum^{n-1} Q_i = n-\left[nq_n + (n-1)q_{n-1} + (n-2)q_{n-2} + \ldots + 4q_4 + 3q_3 + 2q_2 + q_1\right]$$

Sustituyamos este desarrollo de $\Sigma Q_i$ en G:

$$G = 1 - \frac{2}{n-1} \sum^{n-1} Q_i =$$

$$= 1 - \frac{2}{n-1}\left[n-(q_2 + 2q_2 + 3q_2\, 3q_3 + \ldots + nq_n\right]$$

y agrupemos términos:

$$G = \left[1 - \frac{2n}{n-1}\right] + \frac{2}{n-1}\left[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n\right]$$

Sumando y reordenando tenemos:

$$G = \frac{2}{n-1}\left[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n\right] - \frac{n+1}{n-1}$$

Multipliquemos esta igualdad por $(n-1)/n$

$$\frac{(n-1)}{n} G = \frac{2}{n}\left[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n\right] - \frac{(n+1)}{n}$$

Sabemos que:

$$G' = \frac{2}{n}\left[q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + nq_n\right] - \frac{(n+1)}{n}$$

Por lo tanto:

$$\frac{(n-1)}{n} G = G'$$

ó

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) G = G'$$

## *APENDICE 2*

### *Una serie de 25 tablas jerarquizadas por oden creciente de desigualdad desde la distribución equitativa hasta la concentración total*

La información que se entrega en este apéndice originó la tabla 2.26 del texto. Los cuadros que se exponen se encuentran vinculados a través de una redistribución sistemática de 5 unidades cada vez. Sin embargo, la secuencia que mostraremos representa sólo uno de los caminos en que esto se puede hacer. Hay otras posibilidades que no son exploradas sistemáticamente lo que nos impide realizar un planteamiento general, por lo que los resultados que presentamos deben tomarse como simples ilustraciones.

*Tabla 0*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.20 | 0.20 |
| 2 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.40 | 0.40 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.60 |
| 4 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.80 |
| 5 | 20 | 0.20 | 0.20 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 1*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 0.20 | 0.15 | 0.20 | 0.15 |
| 2 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.40 | 0.35 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.55 |
| 4 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.75 |
| 5 | 25 | 0.20 | 0.25 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 2*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 0.20 | 0.15 | 0.20 | 0.15 |
| 2 | 15 | 0.20 | 0.15 | 0.40 | 0.30 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.50 |
| 4 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.70 |
| 5 | 30 | 0.20 | 0.30 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 3*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.20 | 0.10 |
| 2 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.40 | 0.30 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.50 |
| 4 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.70 |
| 5 | 30 | 0.20 | 0.30 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 4*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.20 | 0.10 |
| 2 | 15 | 0.20 | 0.15 | 0.40 | 0.25 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.45 |
| 4 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.65 |
| 5 | 35 | 0.20 | 0.35 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 5*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.20 | 0.10 |
| 2 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.40 | 0.20 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.40 |
| 4 | 30 | 0.20 | 0.30 | 0.80 | 0.70 |
| 5 | 30 | 0.20 | 0.30 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 6*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.20 | 0.10 |
| 2 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.40 | 0.20 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.40 |
| 4 | 25 | 0.20 | 0.25 | 0.80 | 0.65 |
| 5 | 35 | 0.20 | 0.35 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 7*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.40 | 0.15 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.35 |
| 4 | 30 | 0.20 | 0.30 | 0.80 | 0.65 |
| 5 | 35 | 0.20 | 0.35 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 8*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.40 | 0.15 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.35 |
| 4 | 25 | 0.20 | 0.25 | 0.80 | 0.60 |
| 5 | 40 | 0.20 | 0.40 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 9*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.40 | 0.15 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.35 |
| 4 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.55 |
| 5 | 45 | 0.20 | 0.45 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 10*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.60 | 0.30 |
| 4 | 25 | 0.20 | 0.25 | 0.80 | 0.55 |
| 5 | 45 | 0.20 | 0.45 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 11*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 15 | 0.20 | 0.15 | 0.60 | 0.25 |
| 4 | 30 | 0.20 | 0.30 | 0.80 | 0.55 |
| 5 | 45 | 0.20 | 0.45 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 12*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.60 | 0.20 |
| 4 | 35 | 0.20 | 0.35 | 0.80 | 0.55 |
| 5 | 45 | 0.20 | 0.45 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 13*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 40 | 0.20 | 0.40 | 0.80 | 0.55 |
| 5 | 45 | 0:20 | 0.45 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 14*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 35 | 0.20 | 0.35 | 0.80 | 0.50 |
| 5 | 50 | 0.20 | 0.50 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 15*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 30 | 0.20 | 0.30 | 0.80 | 0.45 |
| 5 | 55 | 0.20 | 0.55 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 16*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 25 | 0.20 | 0.25 | 0.80 | 0.40 |
| 5 | 60 | 0.20 | 0.60 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 17*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 20 | 0.20 | 0.20 | 0.80 | 0.35 |
| 5 | 65 | 0.20 | 0.65 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 18*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 15 | 0.20 | 0.15 | 0.80 | 0.30 |
| 5 | 70 | 0.20 | 0.70 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 19*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 10 | 0.20 | 0.10 | 0.80 | 0.25 |
| 5 | 75 | 0.20 | 0.75 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 20*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.20 | 0.05 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.10 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.15 |
| 4 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.80 | 0.20 |
| 5 | 80 | 0.20 | 0.80 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 21*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 0.20 | 0.00 | 0.20 | 0.00 |
| 2 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.40 | 0.05 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.10 |
| 4 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.80 | 0.15 |
| 5 | 85 | 0.20 | 0.85 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 22*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 0.20 | 0.00 | 0.20 | 0.00 |
| 2 | — | 0.20 | 0.00 | 0.40 | 0.00 |
| 3 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.60 | 0.05 |
| 4 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.80 | 0.10 |
| 5 | 90 | 0.20 | 0.90 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 23*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 0.20 | 0.00 | 0.20 | 0.00 |
| 2 | — | 0.20 | 0.00 | 0.40 | 0.00 |
| 3 | — | 0.20 | 0.00 | 0.60 | 0.00 |
| 4 | 5 | 0.20 | 0.05 | 0.80 | 0.05 |
| 5 | 95 | 0.20 | 0.95 | 1.00 | 1.00 |

*Tabla 24*

| *Unidad* | *Valor de la variable* | $p_i$ | $q_i$ | $P_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 0.20 | 0.00 | 0.20 | 0.00 |
| 2 | — | 0.20 | 0.00 | 0.40 | 0.00 |
| 3 | — | 0.20 | 0.00 | 0.60 | 0.00 |
| 4 | — | 0.20 | 0.00 | 0.80 | 0.00 |
| 5 | 100 | 0.20 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

## *APENDICE 3*

### *Una fórmula que permite calcular el valor del coeficiente de Gini para datos agrupados*

Hemos visto en el apéndice I que la definición geométrica del índice de Gini origina:

$$G = \frac{1/2 - (\pi - A)}{1/2} = 1 - (\pi - A)$$

Como suponemos que los datos están agrupados no es posible sustituir $p_i = \frac{1}{n}$ en la expresión que nos permitió evaluar $(\pi - A)$. En consecuencia usaremos la igualdad:

$$\pi - A = 1/2 \sum_{i=1}^{m} p_i (Q_i + Q_{i-1})$$

Al reemplazar en la ecuación para G, llegamos a:

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i (Q_i + Q_{i-1})$$

Esta expresión nos permite calcular el coeficiente de Gini a partir de la información habitualmente disponible en una tabla de distribución de frecuencias.

Esta fórmula se puede presentar de manera levemente distinta, al hacer uso de:

$$p_i = (P_i - P_{i-1})$$

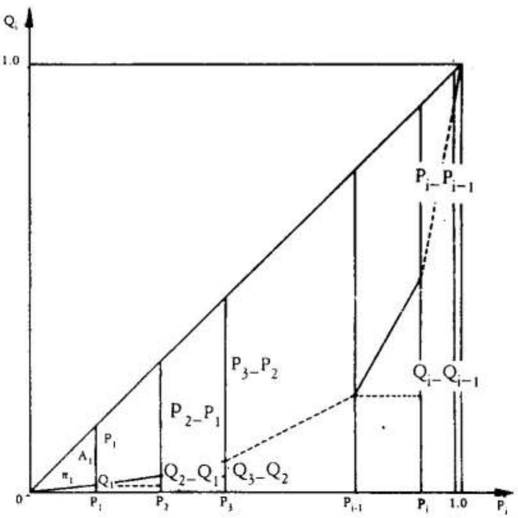
que origina:

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} (P_i - P_{i-1}) (Q_i + Q_{i-1})$$

## *APENDICE 4*

### *Gini-intervalo*

El centro de nuestro interés radica en obtener una expresión matemática que nos permita identificar la contribución que realiza, al valor global del índice de Gini, cada uno de los intervalos de clase que conforman una distribución de frecuencias. Para alcanzar este propósito se recurre a la idea básica que da sustento y origina este coeficiente: relacionar el área de concentración con la de máxima desigualdad. Que adecuada a cada intervalo sería: relacionar la subárea de concentración ($A_i$) con la de máxima desigualdad en el intervalo.




La expresión geométrica de esta idea nos lleva a definir el coeficiente Gini-intervalo para la i-ésima clase como:

$$G_i = \frac{A_i}{\pi_i}$$

Por los desarrollos del apéndice I sabemos que es relativamente simple calcular $(\pi_i - A_i)$ que se encuentran delimitadas por el eje de las abscisas y por la curva de Lorenz. En efecto, tenemos que:

$$(\pi_1 - A_1) = \frac{P_1 Q_1}{2}$$

$$(\pi_2 - A_2) = (P_2 - P_1)(Q_1) + \frac{1}{2}(P_2 - P_1)(Q_2 - Q_1) =$$

$$= \frac{(P_2 - P_1)(Q_1 + Q_2)}{2} = \frac{p_2(Q_1 + Q_2)}{2}$$

$$(\pi_3 - A_3) = (P_3 - P_2)Q_2 +$$

$$+ \frac{(P_3 - P_2)(Q_3 - Q_2)}{2} = \frac{(P_3 - P_2)(Q_3 + Q_2)}{2} = \frac{p_2(Q_3 + Q_2)}{2}$$

$$(\pi_i - A_1) = (P_i - P_{i-1})Q_{i-1} +$$

$$+ \frac{(P_i - P_{i-1})(Q_i - Q_{i-1})}{2} = \frac{(P_i - P_{i-1})(Q_i + Q_{i-1})}{2} = \frac{p_i(Q_i + Q_{i-1})}{2}$$

Por otra parte, los valores de las subáreas de máxima concentración simbolizadas por las letras $\pi$ serán iguales a:

$$\pi_1 = \frac{P_1 P_1}{2}$$

$$\pi_2 = (P_2 - P_1)P_1 + \frac{(P_2 - P_1)(P_2 - P_1)}{2} = \frac{(P_2 - P_1)(P_2 + P_1)}{2} = \frac{p_2(P_2 + P_1)}{2}$$

$$\pi_3 = (P_3 - P_2)P_2 + \frac{(P_3 - P_2)(P_3 - P_2)}{2} = \frac{(P_3 - P_2)(P_3 + P_2)}{2} = \frac{p_3(P_3 + P_2)}{2}$$

$$\pi = (P_i - P_{i-1})P_{i-1} + \frac{(P_i - P_{i-1})(P_i - P_{i-1})}{2} = \frac{(P_i - P_{i-1})(P_i + P_{i-1})}{2} = \frac{p_i(P_i + P_{i-1})}{2}$$

A partir de estos dos conjuntos de expresiones se puede obtener una expresión aritmética que permita evaluar cualquier subárea de concentración ($A_i$). Así por ejemplo, si nos interesa determinar $A_i$ procedemos a:

$$A_i = \pi_i - (\pi_i - A_i) = \frac{p_i(P_i + P_{i-1})}{2} - \frac{p_i(Q_i + Q_{i-1})}{2}$$

Luego:

$$A_i = \frac{p_i}{2}\left[(P_i + P_{i-1}) - (Q_i + Q_{i-1})\right]$$

Al aplicar la definición de Gini intervalo para el intervalo *i*

$$G_i = \frac{A_i}{\pi_i} = \frac{\frac{p_i}{2}\left[(P_i + P_{i-1}) - (Q_i + Q_{i-1})\right]}{\frac{p_i}{2}\left[P_i + P_{i-1}\right]}$$

concluimos que:

$$G_i = 1 - \frac{Q_i + Q_{i-1}}{P_i + P_{i-1}}$$

Tenemos un caso particular cuando *i* asume el valor 1. El coeficiente Gini-intervalo para el primer estrato resulta ser:

$$G_1 = 1 - \frac{Q_1 + Q_0}{P_1 + P_0}$$

Si suponemos que:

$$Q_0 = P_0 = 0$$

llegamos a:

$$G_1 = 1 - \frac{Q_1}{p_1} = 1 - \frac{q_1}{p_1}$$

Expresión que se verifica si obtenemos directamente la expresión correspondiente a $G_1$.

El otro caso extremo se presenta si i = m. El coeficiente en el último estrato asume la forma

$$G_m = 1 - \frac{1 + Q_{m-1}}{1 + P_{m-1}}$$

Si simbolizamos el área total de máxima concentración por $\pi$ entonces se cumple:

$$\pi = \sum_{i=1}^{m} \pi_i$$

Del mismo modo si denotamos por *A* el área de concentración entonces:

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i$$

Sabemos que el índice de Gini se define como:

$$G = \frac{A}{\pi} = \frac{\Sigma A_i}{\Sigma \pi_i}$$

Además

$$G_i = \frac{A_i}{\pi_i}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} G_i \left(\frac{\pi_i}{\pi}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{\pi_i} \cdot \frac{\pi_i}{\pi} = \frac{\Sigma A_i}{\pi} = \frac{\Sigma A_i}{\Sigma \pi_i}$$

Esta ecuación nos dice que si ponderamos los coeficientes Gini-intervalos por su correspondiente relación entre la subárea de máxima concentración ($\pi_i$) y el área de máxima concentración ($\pi$), se obtiene el Gini global.

Sabemos que:

$$\pi_i = \frac{(P_i - P_{i-1})(P_i + P_{i-1})}{2}$$

y que:

$$\pi = \frac{1}{2}$$

porque se trata del área de un triángulo rectángulo e isósceles de catetos unitarios.

Luego la relación:

$$W_i = \frac{\pi_i}{\pi} = (P_i - P_{i-1})(P_i + P_{i-1}) = P_i^2 - P_{i-1}^2$$

y

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = \sum_{i=1}^{m} P_i^2 - \sum_{i=1}^{m} P_{i-1}^2$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_m^2 - P_1^2 - P_2^2 - \ldots - P_{m-1}^2$$

$$= P_m^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$$

Al aplicar estas ponderaciones a $G_i$ obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} G_i W_i = \sum_{i=1}^{m} \left[1 - \frac{Q_i + Q_{i-1}}{P_i + P_{i-1}}\right]\left[(P_i - P_{i-1})(P_i + P_{i-1})\right]$$

y al desarrollar:

$$\sum_{i=1}^{m} G_i W_i = \sum_{i=1}^{m} (P_i - P_{i-1}) - \sum_{i=1}^{m} (P_i - P_{i-1})(Q_i + Q_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{m} G_i W_i = \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} p_i(Q_i + Q_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{m} G_i W_i = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i(Q_i + Q_{i-1})$$

El lado derecho de esta expresión es la fórmula de cálculo para el G global, por lo que:

$$\boxed{G = \sum_{i=1}^{m} G_i W_i}$$

*Técnicas estadísticas para el estudio de la desigualdad social,* de Fernando Cortés y Rosa Ma. Rubalcava, se terminó de imprimir en el mes de febrero de 1983, en los Talleres de PIZANO-VERA Y ASOCIADOS, S. A., Av. 10 Núm. 130, Col. Ignacio Zaragoza. La portada fue impresa por Rossete y Asociados Artes Gráficas, S. A., Calzada de los Misterios 591, México, D. F. Se tiraron 1 000 ejemplares más sobrantes para reposición. Diseñó la portada Mónica Diez-Martínez. Cuidó de la edición el Departamento de Publicaciones de El Colegio de México.

Centro de Estudios
Sociológicos

En este libro se presenta un desarrollo sistemático de las técnicas estadísticas para el estudio de la desigualdad social. Su orientación es básicamente pedagógica por lo que sus temas se han ordenado según un grado creciente de dificultad, dentro de cada uno se parte de conceptos elementales para remontarse a los más complejos.

El esfuerzo expositivo se ha concentrado en la explicación de los conceptos, es decir, en presentar en términos lógicos los alcances y limitaciones de cada opción estadística dejando, en lo posible, las complejidades matemáticas para los apéndices. Para una mejor comprensión del contenido se ha optado por mostrar, en detalle, cada uno de los pasos incluidos en los cálculos.

Además de este sesgo pedagógico, también tiene como propósito servir de texto de apoyo a las investigaciones sociales que se propongan indagar en torno a los problemas de desigualdad. Es en función de la investigación que se han incluido no sólo los temas estadísticos tradicionales en esta materia, sino también se establecen vínculos entre las opciones teóricas, unidad de análisis y medidas del grado de desigualdad, así como el estudio de su cambio a través del tiempo y el espacio. Atendiendo a este propósito se incluyen una serie de aplicaciones a campos temáticos que van más allá del estudio de la distribución del ingreso. Las aplicaciones se refieren al análisis de la concentración de variables que representan procesos sociales concretos.

Desde el punto de vista docente o de la investigación este texto presenta la ventaja de reunir material que se encuentra disperso en revistas especializadas y en capítulos o secciones ya sea de libros dedicados a tratar problemas de desigualdad o de textos de estadística.

CM

El Colegio de México

Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales
FLACSO