Evolución de la Cooperación en un Entorno Sicológico

Rodrigo Mariscal Paredes

rmariscal@colmex.mx

El Colegio de México

Centro de Estudios Económicos

Maestía en Economía: 2006–2008

Junio 2008

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo financiero que me otorgaron a lo largo de la maestría. A El Colegio de México, profesores y demás personal que contribuyeron en mi formación e hicieron mi estancia placentera. Al Dr. Dragan Filipovich que me asesoró (¡y leyó varias veces!), sus comentarios ayudaron por mucho a enriquecer este trabajo –desde luego que la responsabilidad de los errores es totalmente mia–. También quiero agradecer a mi familia y amigos por aquello que comúnmente se les agradece.

RESUMEN

En este trabajo presento una versión sicológica del Dilema del Prisionero (ver Juegos Sicológicos en Genakoplos, J.; Pearce, D. y Stacchetti, E. (1989)[7]) donde los jugadores valoran la reciprocidad. Encuentro que existe un equilibrio cooperador, otro no cooperador y uno más donde se mezcla. Para seleccionar los equilibrios del juego propongo dos formas de Estabilidad Evolutiva adaptadas a los juegos sicológicos: Estrategias Evolutivamente Estables y Creencias Evolutivamente Estables. Encuentro que sólo los equilibrios en estrategias puras son evolutivamente estables en las dos formas, en estrategias y en creencias.

Índice general

1.. Introducción 6

2.. Extensión sicológica del dilema del prisionero 9

3.. Estabilidad evolutiva y equilibrio sicológico 12

3.1. Definición de estabilidad evolutiva en estrategias 12

3.2. Definición de estabilidad evolutiva en creencias 14

4.. Conclusiones 17

Apéndice 18

Appendices 19

.1. Definiciones 19

.2. Demostraciones 20

.3. Juego sicológico de activos: un ejemplo de cuando un equlibrio evolutivo en estrategias no es evolutivo en creencias 22

Índice de figuras

9.1. Dilema del prisionero tradicional 9
10.2. Dilema del prisionero como juego sicológico 10

23.1. Juego sicológico de activos (ejemplo ilustrativo) 23

1. INTRODUCCIÓN

En el Dilema del Prisionero tradicional que se juega una sola vez, el único equilibrio es no cooperador y el resultado es inferior en términos de Pareto. La evidencia empírica no es tan contundente. Al parecer la gente tiende a cooperar más de lo previsto[1].Esto se puede deber a varios motivos; la explicación que ofrezco en este trabajo es que la gente valora la reciprocidad. Materialmente la gente juega el dilema del prisionero tradicional pero quizá en la cabeza tienen otro juego. El juego que propongo es una extensión sicológica del dilema del prisionero donde los jugadores valoran la reciprocidad y eso puede influir en sus decisiones. La clase de juegos con los que trabajo se llaman Juegos Sicológicos. Esta es una clase de juegos donde los pagos del juego dependen de las creencias de los jugadores[2].

El problema con la versión sicológica del juego es que hay multiplicidad de equilibrios, a saber, dos equilibrios en estrategias puras y uno en estrategias mixtas. De modo que hay que tener una forma de seleccionar los equilibrios. Existen diversos métodos para hacer eso. Una forma es probar si las estrategias son Evolutivamente Estables[3]. Sin embargo, los objetos del

---

[1] Existe evidencia de cooperación en experimentos, por ejemplo la revista *Science* en octubre de 1984 realizó un experimento que se asemejaba al Dilema –el porcentaje de cooperación entre la gente fue de más del 60 %–.

En el mismo año, Robert Axelrod organizó un Torneo de Cómputo del Dilema del Prisionero (*Computer Prisoner's Dilemma Tournament*. La descripción y resultados aparecen en Axelrod (1984)[4] y las estrategias que mejor se desempeñaron fueron más cooperadoras de lo que la mayoría esperaba.

En la historia contemporánea, hay un ejemplo de cooperación durante la Primear Guerra Mundial en el Frente Occidental conocido como *Trench Warfare*, documentado por Tony Ashworth (1980)[2]. También se puede ver el libro de Axelrod (1984)[4], Cap. 4.

Más recientemente James Andreoni y John H. Miller (1993)[1] por un lado, y Sara Kiesler, Lee Sproull y Keith Waters (1996)[8] por otro, condujeron experimentos del Dilema con estudiantes y encontraron resultados interesantes de cooperación.

[2] ver Genakoplos, J.; Pearce, D. y Stacchetti, E. (1989)[7] y Dufwenberg, M. (2006)[6].

[3] A veces sucede que los juegos propuestos no tienen un único equilibrio, como en con el Dilema de prisionero sicológico que aquí propongo. No porque la unicidad sea importante sino porque hay veces que los equilibrios

equilibrio sicológico son más complejos. El equilibrio sicológico se compone de un perfil de estrategias y un perfil de creencias. Por lo que se debe hacer una adaptación, es decir, hay que generar una definición de Estabilidad Evolutiva para juegos sicológicos.

El concepto de estabilidad evolutiva que propongo es sobre los dos objetos del equilibrio sicológico. Siguiendo la idea de la estabilidad evolutiva en los juegos normales, propongo una definición de Estabilidad Evolutiva en Estrategias. Luego muestro la aplicación del concepto al Dilema del prisionero sicológico. Encuentro que los equilibrios en estrategias puras son evolutivamente estables en estrategias.

Posteriormente presento una forma adicional de estabilidad evolutiva que tiene que ver con las creencias. Propongo una definición de Estabilidad Evolutiva en Creencias y la aplico a los equilibrios del Dilema del prisionero sicológico. Los resultados son que sólo los equilibrios en estrategias puras son evolutivamente estables en creencias.

Discución de la literatura de cooperación en el Dilema del Prisionero

En este trabajo presento un resultado de cooperación en el Dilema del prisionero que se juega una sola vez. En la literatura hay resultados de cooperación en el Dilema del prisionero en juegos repetidos. Cuando el juego se repite una infinidad de veces hay resultados de cooperación que surgen desde el principio y continúa al infinito. Por ejemplo con la estrategia *Grim Trigger* los jugadores cooperan en cada etapa del juego, siempre y cuando los jugadores no sean muy impacientes (i.e. tienen un factor de descuento relativamente alto) ver Aumann, R. y Shapley, L. (1994)[3].

Cuando el juego se repite un número finito de veces el único equilibrio es no cooperar.

---

nos parecen poco creibles, existen refinamientos y formas de seleccionar equilibrios. Una forma de selección de equilibrios es probar la Estabilidad Evolutiva de las estrategias.

Los modos de calcular si una estrategia es evolutivamente estable varían con el tipo de juego y la situación. En los torneos de Axelrod (1984)[4] se utilizan simulaciones por computadora para ver qué estrategia se desempeña mejor en repeticiones sucesivas del torneo. Otro método un poco más teórico es el de réplicas dinámicas, véase Samuelson (1997)[13] o Weibull (1995)[14].

El método que aquí utilizo es el que propone John Maynard Smith (1973)[10] y (1982)[11] y consiste en aparear estrategias y verificar que el pago esperado de la estrategia de equilibrio es siempre mayor al pago esperado de la estrategia rival.

Sin embargo, Kreps et.al. (1982)[9] han desarrollado un modelo del dilema del prisionero en un juego repetido un número finito de veces con información incompleta y encuentran que puede haber resultados de cooperación en cada etapa con agentes racionales.

El Dilema de prisionero que propongo captura la reciprocidad a través de la función de pagos sicológicos. De modo que los jugadores se sentirán más proclives a cooperar si creen que el otro jugador está dispuesto a coopera y viceversa, se sentirán más deseosos a no cooperar si creen que el otro jugador no tiene intenciones de cooperar.

El primero en incorporar la reciprocidad y las creencias como una forma de motivar ciertas acciones por parte de los jugadores fue Matthew Rabin (1993)[12]. Recientemente Dufwenberg y Kirchsteiger (2004)[5] extienden los conceptos propuestos por Rabin y desarrollan varios ejemplos. Los mismos Genakoplos, J.; Pearce, D. y Stacchetti, E. (1989)[7] dan un ejemplo de dilema de prisionero repetido con “acumulación de buena voluntad” y muestran que bajo ciertas circunstancias los jugadores pueden cooperan en algunas etapas del juego.

2. EXTENSIÓN SICOLÓGICA DEL DILEMA DEL PRISIONERO

Considero el siguiente juego. Un dilema del prisionero que se juega una sola vez por dos personas que valoran la reciprocidad. Materialmente juegan el tradicional dilema del prisionero (Figura 9.1) pero su pago subjetivo o sicológico está dado por la Figura 10.2.

El Jugador 1 se mueve en renglones y el Jugador 2 se mueve en columnas. Las acciones disponibles son cooperar (C) y no cooperar (NC). La creencia del Jugador 1 se puede definir como la expectativa sobre la probabilidad con la que el Jugador 2 juega cooperar (C): $E_1[\mu_2] = \widetilde{\mu}_2 \in [0,1]$.

Análogamente para el Jugador 2, $E_2[\mu_1] = \widetilde{\mu}_1 \in [0,1]$ es la expectativa de la probabilidad con la que el Jugador 1 juega cooperar (C). Por ejemplo, si el Jugador 1 cree que por algún motivo su adversario va a cooperar con una probabilidad relativamente alta (mayor a $\frac{1}{3}$), es mejor estrategia cooperar (C). En cambio si el Jugador 1 cree que el Jugador 2 coopera con una probabilidad muy baja (menor a $\frac{1}{3}$), entonces le resulta mejor estrategia no cooperar (NC). A continuación presento los cálculos y la definición de equilibrio[1].

	C	NC
C	$\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	$0, 1$
NC	$1, 0$	$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$

Fig. 9.1: Dilema del Prisionero

[1] El concepto de solución que utilizo es de Genakoplos, J.; Pearce, D. y Stacchetti, E. (1989, p. 66)[7] (GPS en adelante). Si no se está familiarizado véase sección .1 del Apéndice.

	C	NC
C	$\frac{2}{3}+\widetilde{\mu}_2\ ,\ \frac{2}{3}+\widetilde{\mu}_1$	$0,1$
NC	$1,0$	$\frac{1}{3}-\widetilde{\mu}_2\ ,\ \frac{1}{3}-\widetilde{\mu}_1$

Fig. 10.2: Dilema del Prisionero Sicológico

Definición 10.1 (Equilibrio Sicológico de Nash)**.** Un equilibrio sicológico de Nash (ESN) del juego $\Gamma^s = \langle N, (\Sigma_i), (U_i) \rangle$ es un par $(b^*, \sigma^*) \in \bar{B} \times \Sigma$ tal que para todo $i \in N$:

(i) $b^* = \beta(\sigma^*)$ [perfil de creencias consistentes con el equilibrio]

(ii) $U_i[b^*, \sigma^*] \geq U_i[b^*, (\sigma_i, \sigma_j^*)], \quad \forall\ \sigma_i \in \Sigma_i,\ \ \sigma_j^* \in \Sigma_{j\ \in N \setminus i}$

El juego del dilema del prisionero sicológico tiene tres equilibrios sicológicos de Nash: uno donde ambos cooperan, uno donde ninguno coopera y uno donde mezclan. En el equilibrio cooperador $a_i = C$; $\widetilde{\mu}_i = \mu_i = 1$; $U_i[(1,0),(C,C)] = \frac{5}{3}$. En el equilibrio no cooperador $a_i = NC$; $\widetilde{\mu}_i = \mu_i = 0$; $U_i[(0,1),(NC,NC)] = \frac{1}{3}$. Y en el equilibrio en estrategias mixtas $\sigma_i = (\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3})$; $\widetilde{\mu}_i = \mu_i = \frac{1}{3}$; $U_i[(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}),((\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}),(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}))] = \frac{1}{3}$.

Proposición 10.1. El juego del *dilema del prisionero sicológico* tiene tres *equilibrios sicológicos de Nash*.

Demostración. Apéndice sección .2

Los resultados se pueden interpretar del siguiente modo. En el equilibrio cooperador los jugadores cooperan ya que por alguna razón creen que hay buena voluntad del otro jugador y el hecho de valoran la reciprocidad los lleva a cooperar. El pago subjetivo que obtienen es mayor a cualquier otro posible, después de todo les gusta ser correspondidos. En el equilibrio no-cooperador, por el contrario, los jugadores no creen que haya suficiente voluntad por parte del otro jugador a cooperar. Todo se reduce al dilema del prisionero tradicional y el pago que obtienen es el mismo que en el Dilema tradicional.

En el equilibrio mixto los jugadores pueden creen que su adversario está dudoso sobre su acción y entonces mezclan según las probabilidades del equilibrio, las cuales garantizan un pago esperado máximo. Aunque el resultado cooperador les da un pago mayor, en equilibrio, la probabilidad que le asignan a cooperar ($\frac{1}{3}$) es mucho menor que la que le dan a no cooperar ($\frac{2}{3}$) y su pago esperado es el mismo que obtendrían en el equilibrio no-cooperador. En términos de Pareto, el equilibrio mixto es en promedio tan malo como el equilibrio no-cooperador[2].

En lo que resta del trabajo muestro que los equilibrios en estrategias puras son robustos. Para esto utilizo el concepto de Estabilidad Evolutiva y lo adapto a los juegos sicológicos. Dado que el equilibrio sicológico de Nash se compone de dos objetos, un perfil de creencias y un perfil de estrategias, muestro que el equilibrio cooperador y el no-cooperador son evolutivamente estables en estrategias y en creencias. Y en cambio el equilibrio mixto no es ni estable en estrategias ni en creencias.

[2] Esto no siempre es el caso, el resultado depende de los pagos materiales del Dilema tradicional.

3. ESTABILIDAD EVOLUTIVA Y EQUILIBRIO SICOLÓGICO

3.1. Definición de estabilidad evolutiva en estrategias

El concepto original postulado por John Maynard Smith (1973)[10] y (1982)[11] está definido para juegos simétricos en forma estratégica. Se trabaja con interacciones aleatorias por pares, es decir, se prueba una estrategia que se presume puede ser evolutivamente estable contra una estrategia "mutante". Los pagos que se obtienen luego de que los individuos juegan su estrategia son una medida de la adaptación biológica en el entorno del juego. A mayor pago, mejor adaptación. La reproducción de la especie, sea de los tipos "normales" o de los "mutantes", sigue el espíritu de la selección natural de Darwin.

Sea $\varepsilon \in (0,1)$ la proporción de *mutantes* en la población y $(1-\varepsilon)$ que la proporción de *normales*. De modo que si deseamos que una estrategia sobreviva a la invasión y que además garantice la extinción de los mutantes se tiene que cumplir la siguiente desigualdad cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$(1-\varepsilon)U[b^*,(\sigma^*,\sigma^*)] + (\varepsilon)U[b^*,(\sigma^*,\sigma)] > (1-\varepsilon)U[b^*,(\sigma,\sigma^*)] + (\varepsilon)U[b^*,(\sigma,\sigma)] \tag{12.1}$$

donde σ^* es la estrategia y b^* la creencia de los normales y σ es la estrategia de los mutantes.

En el contexto de un juego sicológico se tiene que el equilibrio se compone de dos objetos, un perfil de creencias y un perfil de estrategias. Lo más natural es definir estabilidad evolutiva de una estrategia de modo equivalente con la definición tradicional en juegos estratégicos. Se considera la estrategia de equilibrio y se verifica si se cumple la desigualdad (12.1). Las creencias de equilibrio están fijas, cualquier desviación se considera irracional. Tal como en el Equilibrio de Mano Temblorosa (*Trembling Hand Perfection*) donde se permite que haya desviaciones accidentales y pese a esto las creencias de los jugadores (particularmente en equilibrio) son que los oponentes son racionales. Estabilidad evolutiva asume que los jugadores "normales" son los agentes racionales y las desviaciones irracionales o accidentales son hechas por los "mutantes"[1].

Definición 13.2 (Estrategia Evolutivamente Estable)**.** En un juego sicológico simétrico Γ^s, una estrategia $\sigma^* \in \Sigma$ es Evolutivamente Estable si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

(i) $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] \geq U[b^*, (\sigma, \sigma^*)], \qquad \forall \; \sigma \in \Sigma \;, \; b^* = \beta(\sigma^*)$ [ESN]

(ii) $\forall \; \sigma$ mejor respuesta: $U[b^*, (\sigma^*, \sigma)] > U[b^*, (\sigma, \sigma)], \qquad \sigma \neq \sigma^*$

Estabilidad evolutiva en estrategias en el Dilema del prisionero sicológico

Volviendo al dilema del prisionero sicológico (Figura 10.2), es fácil ver que para los dos equilibrios en estrategias puras se satisface la primera condición de la Definición 13.2 con desigualdad estricta, por tanto no existe estrategia que sea mejor respuesta. Las dos estrategias (C) y (NC) son dominantes y evolutivamente estables. En cambio la estrategia mixta no lo es; para comprobarlo basta encontrar alguna estrategia para la cual no lo sea.

Los resultados dicen que si la creencia común es que se va a cooperar ($\mu = 1$), jugar cooperar (C) se vuelve una estrategia dominante para ambos jugadores. Y de la misma forma si la creencia es de no cooperar ($\mu = 0$), jugar no cooperar (NC) es una estrategia dominante. Estos equilibrios son robustos por sí mismos y eso lo captura la estabilidad evolutiva de estrategias. En cambio en el equilibrio mixto, fijando las creencias de equilibrio ($\mu = \frac{1}{3}$), los jugadores son indiferentes entre cualquier estrategia: si el Jugador 2 juega $\sigma_2 = (q, 1-q)$ el Jugador 1 es indiferente entre cooperar (C) y no cooperar (NC) para cualquier $q \in [1, 0]$. Eso quiere decir que cualquier estrategia es tan buena como la de equilibrio y por tanto la estrategia de equilibrio no puede ser evolutivamente estable.

[1] Ni los normales ni los mutantes se pueden distinguir entre sí. La población es suficientemente grande de modo que los resultados de juegos pasados no influyen en las decisiones futuras de los jugadores [ver Weibull, J. (1995)[14], p. 34.]. La interpretación tradicional de juegos es que si algún jugador se desvía debe ser por accidente pues no cabe la irracionalidad. Otra interpretación es que los jugadores tienen creencias diferentes que no son necesariamente las de equilibrio [ver Samuelson, L. (1997)[13], p. 16]. Excluyo esta última interpretación pues en el equilibrio sicológico de Nash las creencias están especificadas y son las de equilibrio.

Proposición 14.2. Sólo los equilibrios de estrategias puras del *dilema del prisionero sicológico* son *evolutivamente estables en estrategias*.

Demostración. Apéndice sección .2

3.2. Definición de estabilidad evolutiva en creencias

Para este concepto tomo las creencias y las estrategias que han sido obtenidas del equilibrio sicológico de Nash. Me interesa evaluar las creencias de equilibrio contra otras posibles creencias. Por eso las perturbaciones se deben hacer sobre las creencias fuera de equilibrio. Pero al cambiar la creencia de un jugador puede pasar que la estrategia que se tenía deje de ser mejor respuesta. Al "mutar" una creencia se debe tener una estrategia asociada con dicha creencia que sea mejor respuesta. Es decir, la estrategia está en función de la creencia mutada y se tiene que la estrategia "σ" es mejor respuesta a la nueva creencia "b", y se denota como $\sigma(b)$. De ese modo se pueden evaluar los pagos de manera que se satisfaga la siguiente desigualdad cuando $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)U[b^*,(\sigma^*,\sigma^*)] + (\varepsilon)U[b^*,(\sigma^*,\sigma(b))] > \\ (1-\varepsilon)U[b,(\sigma(b),\sigma^*)] + (\varepsilon)U[b,(\sigma(b),\sigma(b))]\end{aligned} \tag{14.2}$$

donde $U[b^*,(\sigma^*,\sigma^*)]$ es la evaluación de la creencia de un "normal" (b^*) y la estrategia de un "normal" (σ^*) cuando se aparea con un "normal". $U[b^*,(\sigma^*,\sigma(b))]$ es la evaluación de la creencia de un "normal" (b^*) y la estrategia de un "normal" (σ^*) cuando se aparea con un "mutante" que tiene la estrategia "mutante" [$\sigma(b)$] asociada a la creencia "mutante" (b). $U[b,(\sigma(b),\sigma^*)]$ es la evaluación de la creencia de un "mutante" (b) y la estrategia de un "mutante" [$\sigma(b)$] cuando se aparea con un "normal" que tiene la estrategia "normal" (σ^*). Y por último, $U[b,(\sigma(b),\sigma(b))]$ es la evaluación de la creencia de un "mutante" (b) y la estrategia de un "mutante" [$\sigma(b)$] cuando se aparea con un "mutante" que tiene la estrategia "mutante" [$\sigma(b)$] asociada a la creencia "mutante" (b).

Nótese que en la estabilidad evolutiva en estrategias sólo puede suceder que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma^*)] \geq U[b^*,(\sigma,\sigma^*)]$ (condición del equilibrio sicológico de Nash). En cambio para el caso de las creencias, puede pasar que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma^*)] \leq U[b,(\sigma(b),\sigma^*)]$. Con la estabilidad evolutiva en las estrategias, el equilibrio de Nash está autocontenido en la definición (ver Definición 13.2). Pero con la estabilidad evolutiva en las creencias, hay una evaluación de la utilidad con creencias fuera de equilibrio.

Definición 15.3 (Creencia Evolutivamente Estable)**.** En un juego sicológico simétrico Γ^s, una creencia $b^* \in \bar{B}$ es Evolutivamente Estable si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

(i) $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] \geq U[b^*, (\sigma, \sigma^*)], \qquad \forall\ \sigma \in \Sigma\ ,\ \ b^* = \beta(\sigma^*) \quad$ [ESN]

(ii) No existe b tal que: $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] < U[b, (\sigma(b), \sigma^*)], \quad \forall\ \sigma(b) \neq \sigma^*$

(iii) Si $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] = U[b, (\sigma(b), \sigma^*)] \ \Rightarrow\ U[b^*, (\sigma^*, \sigma(b))] > U[b, (\sigma(b), \sigma(b))]$

La interpretación que doy es que puede haber mejores cosas en qué creer. Aunque los jugadores no eligen sus creencias, de pronto surgen individuos que por algún motivo creen en otra cosa. Lo que se quiere saber desde el punto de vista del analista es si conviene creer en algo diferente a lo que "dice" el equilibrio que hay que creer. Un perfil de estrategias de equilibrio que se mantiene aun variando las creencias debe ser un mejor equilibrio sicológico.

Estabilidad evolutiva en creencias en el Dilema del prisionero sicológico

De los tres equilibrios en el Dilema del prisionero sicológico, únicamente los equilibrios en estrategias puras tenían estrategias evolutivamente estables (ver Proposición 14.2). Ahora se puede mostrar que, para el equilibrio cooperador, $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] = \frac{5}{3} > U[b, (\sigma(b), \sigma^*)] = 1$ para toda creencia b y estrategia asociada con dicha creencia $\sigma(b) \neq \sigma^*$. Lo mismo sucede con el equilibrio no-cooperador, $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] = \frac{1}{3} > U[b, (\sigma(b), \sigma^*)] = 0$ para toda creencia b y estrategia asociada con dicha creencia $\sigma(b) \neq \sigma^*$. Por tanto ambos equilibrios tienen creencias evolutivamente estables. En el equilibrio mixto, por el contrario, cualquier creencia b es mejor (i.e. $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] < U[b, (\sigma(b), \sigma^*)]$) y además se puede verificar que siempre sucede que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma(b))] = U[b, (\sigma(b), \sigma(b))]$. Por lo que la creencia no puede ser evolutivamente estable.

Dadas las creencias de equilibrio no conviene creer ni hacer otra cosa. Por ejemplo en el equilibrio cooperador, cuando el Jugador 2 coopera, al Jugador 1 le puede convenir jugar no cooperar (NC) y creer que el Jugador 2 no coopera (i.e. $\widetilde{\mu}_2 = 0$) y obtiene un pago de uno. No obstante estaría mejor si jugara cooperar (C) y creyera que el Jugador 2 cooperó (i.e. $\widetilde{\mu}_2 = 1$) pues tendría un pago de $\frac{5}{3}$. Lo mismo sucede en el equilibrio no-cooperador, al Jugador 1 le conviene más jugar no cooperar (NC) y creer que el Jugador 2 no coopera (i.e. $\widetilde{\mu}_2 = 0$)[2].

Proposición 16.3. Sólo los equilibrios de estrategias puras del *dilema del prisionero sicológico* son *evolutivamente estables de creencias*.

Demostración. Apéndice sección .2

[2] No todos los equilibrios que son evolutivamente estables de estrategias tienen que ser evolutivamente estables de creencias. En el Apéndice sección .3 presento un ejemplo de juego sicológico cuando esto no sucede.

4. CONCLUSIONES

Encuentro que en el dilema del prisionero sicológico el equilibrio cooperador y el no-cooperador son robustos ante perturbaciones de estrategias y de creencias, es decir, son Evolutivamente estables en estrategias y Evolutivamente estables en creencias. Lo primero quiere decir que dadas las estrategias de equilibrio, si mantenemos constantes las creencias de equilibrio, no existe una perturbación en estrategias que mejore la estrategia de equilibrio. Y lo segundo dice que si permitimos que las creencias varíen, no existe una perturbación en estrategias y en creencias que mejore a las creencias y a las estrategias de equilibrio.

Algo que no muestra este trabajo, en lo que respecta a las definiciones de estabilidad evolutiva, es si éstas podrían seleccionan equilibrios independientemente del juego que se trate. Esto es que para cualquier juego sicológico, finito, simétrico y en forma estratégica, el conjunto de estrategias y creencias que son evolutivamente estables en estrategias y/o en creencias es un subconjunto propio del conjunto de estrategias y creencias del equilibrio sicológico de Nash.

Apéndice

.1. Definiciones

Definición 19.4. Las creencias del jugador $i \in N$ de orden k para el conjunto de estrategias mixtas $\Sigma = \Sigma_i \times \Sigma_j = \Delta(A_i) \times \Delta(A_j)$ se definen como:

- $B_i^k = \Delta(\Sigma_{-i} \times B_{-i}^1 \times B_{-i}^2 \times \cdots \times B_{-i}^{k-1})$
- $B_{-i}^k = \times_{j \neq i} B_j^k$
- $B^k = \times_{i \in N} B_i^{k-1}$
- $b_i = (b_i^1, b_i^2, ...) \in \times_{k=1}^{\infty} B_i^k = B_i$

Por convención y de acuerdo con los supuestos de racionalidad y conocimiento común tomo $\bar{B}_i^k$ como las creencias *colectivamente coherentes*, para mayor detalle ver GPS (1989)[7], p.64. Dado esto se puede definir la función de pagos como un mapeo $U_i : \bar{B}_i \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ con $i \neq j$:

$$U_i(b_i, \sigma) = \sum_{a \in A} (\prod_{j \in N} \sigma_j(a_j)) u_i(b_i, a) \,, \qquad b_i \in \bar{B}_i \;, \quad \sigma(a) \in \Sigma \tag{19.1}$$

La función $u_i(b_i, s)$ es el pago que recibe el jugador i cuando se juega el perfil de acciones $a \in A$ y alberga las creencias b_i. Cuando el juego es simétrico, $u_1(b_1, (a_1, a_2)) = u_2(b_2, (a_2, a_1)) = u(b, (a_1, a_2))$ siempre que $b_1 = b_2$.

Definición 19.5. Un juego sicológico en forma estratégica $\Gamma^s = \langle N, (\Sigma_i), (U_i) \rangle$

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, conjunto de jugadores
- Σ_i , conjunto de distribuciones de probabilidad sobre A_i
- $U_i : \bar{B}_i \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, función de utilidad para cada $i \in N$ expresada en la ecuación (19.1)

La evaluación de la ecuación (19.1) se hace para un perfil de estrategias dado un perfil de creencias representado por b_i. Este objeto es un parámetro endógeno en el juego. El orden de creencias que se incluyen en la función de pagos se determina con la especificación del juego asi como el número de jugadores, el perfil de acciones y los pagos. El equilibrio que se propone contempla dos objetos, un perfil de estrategias σ^* (como en un juego normal) y un perfil de creencias consistentes con el equilibrio $\beta(\sigma^*)$. Si resulta que el perfil de estrategias de equilibrio es σ^*, cada jugador $i \in N$ debe creer con certeza que los oponentes jugaron $\sigma^*_{j \neq i}$. Es decir, el perfil de creencias debe ser $\beta(\sigma^*) = (\beta_i(\sigma^*), \beta_j(\sigma^*)) \in \bar{B}$ (ver GPS (1989)[7], p. 65).

.2. Demostraciones

Proposición 10.1. Tomando primero el equilibrio cooperador. Si la expectativa del Jugador 1 de que el Jugador 2 coopere es $\widetilde{\mu}_2 > \frac{1}{3}$, entonces al Jugador 1 le conviene cooperar independientemente de lo que haga el Jugador 2. No obstante, para que las creencias del Jugador 1 sean consistentes, tiene que ser el caso que el Jugador 2 juegue cooperar con una probabilidad $\mu_2 > \frac{1}{3}$. De este modo el Jugador 1 jugaría cooperar, es decir, $\mu_1 = 1$.

El Jugador 2 también tiene que tener creencias consistentes, por lo que $\widetilde{\mu}_1 = \mu_1 = 1$. Pero si $\widetilde{\mu}_1 = 1$ al Jugador 2 le conviene cooperar independientemente de lo que haga el Jugador 1 (i.e. $\mu_2 = 1$). Y para que las creencias del Jugador 1 sean consistentes, $\widetilde{\mu}_2 = \mu_2 = 1$. La prueba es análoga para el equilibrio no-cooperador.

Tomando ahora el equilibrio mixto. Por el principio de indiferencia, la utilidad de cada jugador debe ser igual en el soporte de la distribución. Si hay un equilibrio mixto donde el Jugador 2 mezcla, entonces la utilidad del Jugador 1 tiene que satisfacer la siguiente igualdad: $\widetilde{\mu}_2 \left(\frac{2}{3} + \widetilde{\mu}_2\right) = \widetilde{\mu}_2 + (1 - \widetilde{\mu}_2)\left(\frac{1}{3} - \widetilde{\mu}_2\right)$. Despejando para $\widetilde{\mu}_2$ se obtiene un único valor de $\widetilde{\mu}_2 = \frac{1}{3}$. Si hay un equilibrio mixto donde el Jugador 1 mezcla, entonces la utilidad del Jugador 2 tiene que satisfacer la siguiente igualdad: $\widetilde{\mu}_1 \left(\frac{2}{3} + \widetilde{\mu}_1\right) = \widetilde{\mu}_1 + (1 - \widetilde{\mu}_1)\left(\frac{1}{3} - \widetilde{\mu}_1\right)$. Despejando para $\widetilde{\mu}_1$ se obtiene un único valor de $\widetilde{\mu}_1 = \frac{1}{3}$. Pero las creencias deben ser consistentes para ambos jugadores, esto es, $\widetilde{\mu}_1 = \mu_1 = \frac{1}{3}$ y $\widetilde{\mu}_2 = \mu_2 = \frac{1}{3}$. De modo que $\sigma_1 = \sigma_2 = (\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3})$ y estas son justo las estrategias que los hace indiferentes. $\square$

Proposición 14.2. Tomando primero el equilibrio cooperador. La primera condición de la Definición 13.2 se satisface por ser equilibrio sicológico de Nash (ESN) (ver Proposición 10.1). Para ver que la segunda condición se satisface, supongamos por contradicción que no se satisface (ii) de la Definición 13.2. Esto es supongamos que $\sigma^* = (1,0)$ y $b^* = (1,0)$ son un ESN y que existe una mejor respuesta $\sigma \neq (1,0)$ tal que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma)] \leq U[b^*,(\sigma,\sigma)]$.

Fijando la creencia $b^* = (1,0)$ tenemos que $\widetilde{\mu}_i = 1$. Como σ es mejor respuesta a σ^* entonces tiene que ser que $U[b^*,(\sigma,\sigma^{**})] \geq U[b^*,(\sigma^*,\sigma^{**})]$ para alguna $\sigma^{**} \in \Sigma$.

De la matríz de pagos del Dilema del prisionero sicológico (Figura 10.2) vemos que si $\widetilde{\mu}_i = 1$, cooperar [i.e. $\sigma^* = (1,0)$] es una estrategia dominante. Lo cual quiere decir que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma^a)] > U[b^*,(\sigma',\sigma^a)]$ para toda $\sigma' \in \Sigma$ y toda $\sigma^a \in \Sigma^a$. En particular debe ser que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma^{**})] > U[b^*,(\sigma,\sigma^{**})]$ para $\sigma^{**} \in \Sigma$. Lo cual es una contradicción: σ no puede ser una mejor respuesta. La prueba para equilibrio no-cooperativo es análoga.

Tomando ahora el equilibrio mixto. Tenemos que la primera condición de la Definición 13.2 se satisface por ser ESN (ver Proposición 10.1). Para ver que la segunda condición no se satisface, supongamos por contradicción que (ii) de la Definición 13.2 se satisface. Esto es que $\sigma^* = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ y $b^* = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ son un ESN y que existe algún σ mejor respuesta tal que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma)] \leq U[b^*,(\sigma,\sigma)]$.

Sea $\sigma = (1,0)$. De la matríz de pagos del Dilema del prisionero sicológico (Figura 10.2) vemos que para b^* (i.e. $\widetilde{\mu}_i = \frac{1}{3}$), $U[b^*,(\sigma,\sigma^*)] = \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(0) = \frac{1}{3}$ y el resultado que ya se conocía $U[b^*,(\sigma^*,\sigma^*)] = \frac{1}{3}$. Esto quiere decir que σ es mejor respuesta. Además comprobamos que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma)] = \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(1) = 1$ y que $U[b^*,(\sigma,\sigma)] = 1$. Lo cual es una contradicción: existe una σ mejor respuesta y $U[b^*,(\sigma^*,\sigma)] = U[b^*,(\sigma,\sigma)]$. □

Proposición 16.3. Tomando primero el equilibrio cooperador. Tenemos que la primera condición de la Definición 15.3 se satisface por ser ESN (ver Proposición 10.1). Para ver que la segunda condición se satisface, supongamos por contradicción que no se satisface (ii) de la Definición 15.3. Esto es supongamos que $\sigma^* = (1,0)$ y $b^* = (1,0)$ son un ESN y existe un b^a tal que $U[b^*,(\sigma^*,\sigma^*)] < U[b^a,(\sigma(b^a),\sigma^*)], \ \ \forall \ \sigma(b^a) \neq \sigma^*$.

Sea $b^a = (\mu, 1-\mu)$ y tomamos $\mu > \frac{1}{3}$. Entonces la estrategia racional asociada a la creencia b^a es $\sigma(b^a) = (1,0) = \sigma^*$. Pero la condición exige que $\sigma(b^a) \neq \sigma^*$, lo cual es una contradicción.

Sea $b^a = (\mu, 1-\mu)$ y tomamos $\mu = \frac{1}{3}$. Entonces la estrategia racional asociada a la creencia b^a es $\sigma(b^a) = (q, 1-q) \neq \sigma^*$, con $q \in (1, 0]$; notese que si $q = 1 \Rightarrow \sigma(b^a) = \sigma^*$ (!).

Dado esto podemos ver que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] = \frac{5}{3}$ y $U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)] = (1)q + (1)(1 - q) = 1$ y por tanto $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] > U[b, (\sigma(b), \sigma^*)]$ lo cual es una contradicción.Si $p < \frac{1}{3}$ entonces la estrategia racional asociada a la creencia es $\sigma(b) = (0, 1) \neq \sigma^*$. Con esto tenemos que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] = \frac{5}{3}$ y $U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)] = 1$ y por tanto $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] > U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)]$, lo cual es una contradicción. Nótese que la tercera condición, esto es, (iii) de la Definición 15.3 no es activa porque siempre sucede que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] > U[b, (\sigma(b), \sigma^*)]$.

Sea $b^a = (\mu, 1-\mu)$ y tomamos $\mu < \frac{1}{3}$. Entonces la estrategia racional asociada a la creencia b^a es $\sigma(b^a) = (0, 1) \neq \sigma^*$. Con esto tenemos que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] = \frac{5}{3}$ y $U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)] = 1$ y por tanto $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] > U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)]$, lo cual es una contradicción. Nótese que la tercera condición, esto es, (iii) de la Definición 15.3 no es activa porque siempre sucede que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] > U[b, (\sigma(b), \sigma^*)]$. La prueba para equilibrio no-cooperativo es análoga.

Tomando ahora el equilibrio mixto. Tenemos que la primera condición de la Definición 15.3 se satisface por ser ESN (ver Proposición 10.1). Para ver que la segunda condición no se satisface, supongamos por contradicción que se satisface (ii) de la Definición 15.3. Esto es supongamos que $\sigma^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $b^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ son un ESN y que no existe un b^a tal que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] < U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)], \quad \forall \ \sigma(b^a) \neq \sigma^*$.

Sea $b^a = (1, 0)$ (i.e. $\mu = 1$) y sea $\sigma(b^a) = (1, 0)$, la estrategia racional asociada a la creencia b^a. Con esto tenemos que $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] = \frac{1}{3}$ y $U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)] = \frac{1}{3}(\frac{5}{3}) + \frac{2}{3}(0) = \frac{5}{9}$ y por tanto $U[b^*, (\sigma^*, \sigma^*)] < U[b^a, (\sigma(b^a), \sigma^*)]$, lo cual es una contradicción. $\square$

.3. *Juego sicológico de activos: un ejemplo de cuando un equlibrio evolutivo en estrategias no es evolutivo en creencias*

Considere el juego de Figura 23.1, la matríz de la izquierda representa los pagos sicológicos. Dos inversionistas tienen la opción de comprar un activo riesgoso tipo A, que paga una unidad de rendimiento sólo cuando todos invierten en él, y un activo seguro tipo B, que paga la mitad de lo que paga el activo riesgoso con certeza. Los jugadores no pueden comunicarse entre ellos y eligen su compra al mismo tiempo.

En el juego sicológico la creencia del Jugador 1 se puede definir como la expectativa sobre la probabilidad con la que el Jugador 2 compra el activo tipo A: $E_1[\mu_2] = \widetilde{\mu}_2 \in [0,1]$. Análogamente para el Jugador 2, $E_2[\mu_1] = \widetilde{\mu}_1 \in [0,1]$ es la expectativa de la probabilidad con la que el Jugador 1 compra el activo tipo A. Cuando los dos compran el activo tipo A obtienen la mayor ganancia material y sicológica; ganan una unidad y además se sienten muy contentos por haber acertado en su decisión. Si el Jugador 1 compra el activo tipo A y el Jugador 2 el tipo B ambos obtienen un pago sicológico de cero. El Jugador 1, que compró el activo tipo A, obtiene un pago material de cero porque el activo no tiene valor si no tiene alguien que lo respalde y sicológicamente su pago es cero porque se siente triste por haber fallado. El Jugador 2, que compró el activo B, obtiene un pago material seguro sin embargo se siente mal por haber perdido la oportunidad de ganar más, de modo que obtiene un pago sicológico de cero aunque su pago material es de $\frac{1}{2}$. Si ambos jugadores compran el activo tipo B no sienten remordimientos y obtienen el pago seguro aunque menor.

	A	B
A	$1\ ,\ 1$	$0\ ,\ \frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{2}\ ,\ 0$	$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}$

	A	B
A	$\widetilde{\mu}_2\ ,\ \widetilde{\mu}_1$	$0\ ,\ 1-\widetilde{\mu}_1$
B	$1-\widetilde{\mu}_2\ ,\ 0$	$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}$

Fig. 23.1: Juego Sicológico de Activos

Este juego tiene sólo dos equilibrios sicológicos en estrategias puras. Uno en donde los dos jugadores compran el activo A y otro donde compran el activo B. Las dos estrategias, tanto comprar el activo A como comprar el activo B son evolutivamente estables. Si se fijan las creencias de equilibrio no conviene hacer otra cosa más que lo que dice el equilibrio. No obstante, cuando se permite variar las creencias, la creencia de que se compra el activo A no es evolutivamente estable; únicamente la creencia de que se va a comprar el activo B es evolutivamente estable.

Para ver por qué, tómese el ESN $= \{\sigma_i = A; \widetilde{\mu}_i = \mu = 1\}$. Si los jugadores "normales", que hacen y creen lo que el equilibrio "dice", compran el activo A y creen $\mu = 1$, entonces puede llegar un "mutante" y comprar el activo B creyendo que $\mu = 0$. En promedio esos "mutantes" obtienen más que los "normales" [ver ecuación (14.2)].

El resultado se puede interpretar del siguiente modo. Si el Jugador 1 cree que el activo A no va a ser comprado por el otro jugador, lo más racional es comprar el activo B. Si al final del juego él se entera de que el Jugador 2 compró el activo B no tiene problema con sus creencias porque su estrategia es una mejor respuesta. Ahora bien si el Jugador 1 observa que al final del juego el otro compró el activo A, y dado que él compró el activo B, le convendría creer que el Jugador 2 no compró el activo A (i.e. $\widetilde{\mu}_2 = 0$), como si se autoengañara. Aunque su pago material es el mismo, sicológicamente estaría más contento creyendo que el Jugador 2 no compró el activo A. Cuando se compra el activo A, lo converso no sucede: el Jugador 1 compra el activo A y el Jugador 2 compra el B, y ahora el Jugador 1 no tiene forma de "cambiar" sus creencias con este resultado. En términos de la matríz de pagos cuando $\mu = 1$ el mínimo pago que se pueden garantizar un jugador es de $\frac{1}{3}$, y cuando $\mu = 0$ el mínimo pago que se pueden garantizar es $\frac{1}{2}$, que es mayor.

Bibliografía

[1] Andreoni, J. y Miller, J. H. (1996) “Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners’s Dilemma: Experimental Evidence”, *The Economic Journal* (**103**), pp. 570–585.

[2] Ashworth, T. (1980) *Trench Warfare, 1914–1918: The Live and Let Live System*, Holmes & Meier.

[3] Aumann, R. y Shapley, L. (1994) “Long-term Competition –A Game-Theoretic Analysis”, pp. 1–15. En *Essays in Game Theory* (N. Megiddo, ed.), Springer-Verlag.

[4] Axelrod, R. (1984) *The Evolution of Cooperation*, Harper Collins Publishers.

[5] Dufwenberg, M. y Kirchsteiger, G. (2004) “A Theory of Sequential Reciprocity”, *Games and Economic Behavior* (**47**), pp. 268–298.

[6] Dufwenberg, M. (2006) “Psychological Games”, Mimeo. En *The New Palgrave Dictionary of Economics* (S. N. Durlauf y L. E. Blume, ed.), Macmillan [versión preliminar].

[7] Genakoplos, J.; Pearce, D. y Stacchetti, E. (1989) “Psychological Games and Sequential Rationality”, *Games and Economic Behavior* (**1**), pp. 60–79.

[8] Kiesler, S.; Sproull, L.; Waters, K. (1996) “A Prisoner’s Dilemma Experiment on Cooperation with People and Human-like Computers”, *Journal of Personality and Social Psychology* (**70**), pp. 47–65.

[9] Kreps, D. M.; Milgrom, P.; Roberts, J. y Wilson, R. (1982) “Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoner’s Dilemma”, *Journal of Economic Theory* (**27**), pp. 245–252.

[10] Maynard Smith, J. y Price, G. R. (1973) “The Logic of Animal Conflicts”, *Nature* (**246**), pp. 15–18.

[11] Maynard Smith, J. (1982) *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press.

[12] Rabin, M. (1993) “Incorporating Fairness into Game Theory and Economics”, *American Economic Review* (**83**), pp. 1281–1302.

[13] Samuelson, L. (1997) *Evolutionary Games and Equilibrium Selection*, The MIT Press.

[14] Weibull, J. (1995) *Evolutionary Game Theory*, The MIT Press.