



EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
ECONOMÍA

*EL MODELO DE NELSON-SIEGEL PARA LA
ESTIMACIÓN DE UNA CURVA DE RENDIMIENTO DE CETES*

VÍCTOR MANUEL MARTÍN CAMPOS CAUICH

PROMOCIÓN 1990-1992

ASESOR:

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

FEBRERO DE 2004

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de Tesis Dr. Francisco Venegas-Martínez por su apoyo y paciencia.

A mi esposa Elvia por animarme a terminar este trabajo.

Al Personal de Valmer por las dudas resueltas: Iliana y Samuel.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo proponer modelos extendidos basados en el enfoque Nelson-Siegel para generar una curva de rendimiento de Cetes que refleje mejor las características propias del mercado mexicano.

Un modelo utilizado en los bancos centrales de países desarrollados es la metodología de Nelson y Siegel. Este modelo parsimonioso presenta, en general, un buen ajuste para la curva de rendimiento o estructura intertemporal de plazos de la tasa de Cetes que presentan una joroba o un bache, es decir un máximo o un mínimo en el rango de plazos de los Cetes. Este modelo servirá de base para las propuestas.

En el primer capítulo se presenta el modelo Nelson-Siegel para conocerlo, destacando la función diferencial de segundo orden que lo origina, esto permite generalizar esta ecuación diferencial cuya solución es un polinomio en el factor de la exponencial de la función de tasas forward instantáneas. Se analizan las funciones de Laguerre para extender el modelo Nelson-Siegel sin embargo sólo incorpora grados al polinomio que acompaña a la exponencial. Se presentan extensiones del modelo base y las características de este modelo. En nuestro mercado mexicano era común en el año 2001 que las tasas de mercado de Cetes sugieran curvas con más de una joroba o bache, aunque actualmente las tasas son crecientes. Las características propias de este mercado es presentado en el capítulo 2 así como la forma en que se integran la diversidad de información sobre operaciones de Cetes, lo que lleva a plantear la siguiente pregunta:

¿Como estimar una Curva de Rendimiento de Cetes cuando la distribución de tasas de mercado sugiere curvas con jorobas y baches, considerando la importancia de una buena estimación a muy corto plazo y estabilidad a largo plazo?

Actualmente los proveedores de precios generan una curva nominal libre de riesgo que comprende para el rango de Cetes su curva de rendimiento. En el capítulo 3 se describen en términos generales las metodologías y herramientas analíticas que utilizan estos Proveedores de Precios.

En el capítulo 4 se regresa al modelo Nelson-Siegel para analizar sus características. Por las particularidades del mercado mexicano de Cetes se generaliza la función de tasas forward instantáneas mediante un polinomio de grado 4 o bien empleando 4 parámetros externos, además de incorporarles restricciones a un día y al mayor plazo en que se puede definir una tasa de “mercado”. Los modelos propuestos son presentados dentro de una metodología para estimar la curva de rendimiento de Cetes, tanto si las tasas de mercado tienen jorobas y baches como si son crecientes o decrecientes. El mejor modelo resulta ser la extensión polinomial. Las metodologías propuestas distinguen plazos relevantes y el número de jorobas y baches en estos plazos relevantes es reflejado en el grado del polinomio y en el número de parámetros externos.

Los modelos propuestos pueden ser considerados como “Modelos Nelson-Siegel Generalizados con Restricciones”.

DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS

Capítulo 1. Se inicia el presente trabajo mencionando los países cuyos bancos centrales utilizan el modelo de Nelson y Siegel, luego se encuentra la ecuación diferencial de segundo orden cuya solución es la función que ellos proponen para las tasas forward instantáneas, esta ecuación diferencial es generalizada en un teorema. Nelson y Siegel sugieren utilizar funciones de Laguerre para extender su modelo, sin embargo el autor considera que sólo incorpora grados al polinomio que acompaña a la exponencial. Posteriormente se presenta una revisión de las extensiones hechas al Modelo Nelson-Siegel, siendo la de Svensson la más conocida. Se finaliza con las características del modelo: sus propiedades en los límites, formas de sus curvas, bondades del modelo, etc.

Capítulo 2. En este capítulo se describen las características del Mercado de Cetes a fin de conocerlo mejor. Antes de estimar una curva de rendimiento es necesario dar un tratamiento a la información a fin de integrar la diversidad de operaciones que se realizan con estos títulos. Todo lo anterior es para plantear el problema: ¿Cómo estimar una curva de rendimiento cuando la distribución de tasas de mercado sugiere curvas de rendimiento con diversas jorobas y baches, considerando la importancia de una buena estimación a muy corto plazo y estabilidad a largo plazo?

Capítulo 3. Se inicia destacando la valuación de títulos que realizaba la Bolsa Mexicana de Valores, que dio paso a la figura financiera conocida como proveedor de precios, actualmente existen tres: Valmer, PIP y GBS Data, quienes más que una curva de rendimiento para Cetes generan una curva nominal libre de riesgo que incorpora además de los Cetes información de los Bonos M, este proceso de incorporación es aquí descrito. Luego se describen en términos generales las metodologías que utilizan los Proveedores de Precios, finalizando con un cuadro resumen de los modelos que utilizan.

Capítulo 4. Primeramente se establece para el modelo Nelson-Siegel la relación entre el parámetro externo y el valor mínimo o máximo de la curva. Entre las limitaciones de este modelo está la de no poder generar curvas que combinen jorobas y baches que se han presentado en el mercado mexicano de Cetes. La función de tasas forward instantáneas es generalizada en dos sentidos: mediante un polinomio de grado 4 en el factor de la exponencial y usando 4 parámetros externos. Para garantizar una buena estimación a muy corto plazo (1 día) y estabilidad a largo plazo se incorporan estas restricciones a los modelos propuestos, luego se analiza la relación entre los parámetros externos y los valores extremos de estos modelos. Posteriormente se presentan metodologías para estimar la curva de rendimiento cuando las tasas de mercado sugieren jorobas y baches, y cuando las tasas sean crecientes o decrecientes; estas metodologías propuestas se aplican obteniendo buenas estimaciones, siendo el modelo polinomial el mejor. Finalmente, se indica como ampliar los modelos para incorporar plazos mayores con el propósito de generar un curva nominal libre de riesgo.

ÍNDICE

PORTADA, i

AGRADECIMIENTOS, ii

RESUMEN, iii

DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS, iv

ÍNDICE, v

INTRODUCCIÓN, vi

1. EL MODELO DE NELSON-SIEGEL, 1

1.1 Antecedentes, la Curva de los T-Bills, 1

1.2 Obtención de la Ecuación Diferencial de Nelson-Siegel, 2

1.3 La Ecuación Diferencial Generalizada de Nelson-Siegel, 4

1.4 Funciones de Laguerre, 11

1.5 Extensiones del Modelo, 13

1.6 Características del Modelo, 14

2. CARACTERÍSTICAS DEL MERCADO DE CETES, 18

2.1 Características de los Cetes, 18

2.2 Fórmulas sobre Cetes, 19

2.3 El Mercado de Cetes, 20

2.4 Tratamiento de la Información para la Obtención de Tasas de Mercado, 22

2.5 Existencia de Jorobas y Baches en las Tasas de Mercado, 24

3. ESTIMACIÓN DE LA CURVA POR LOS PROVEEDORES DE PRECIOS, 26

3.1 La Valuación de Títulos en México, 26

3.2 Los Proveedores de Precios ("Price Vendors"), 27

3.3 Incorporación de Información de los Bonos de Largo Plazo de Banxico, 28

3.4 Método Utilizado por Valmer ("Valor de Mercado"), 30

3.5 Método Utilizado por PIP ("Proveedor Integral de Precios"), 34

3.6 Método Utilizado por GBS Data ("Grupo Proveedor de Precios Bursátiles"), 37

4. MODELOS PROPUESTOS PARA EL MERCADO MEXICANO DE CETES, 40

4.1 Análisis del Parámetro Tau, 40

4.2 Ventajas y Limitaciones del Modelo Nelson-Siegel, 44

4.3 Extensiones Propuestas, 45

4.4 Incorporando Restricciones a los Modelos, 50

4.5 Análisis de los Valores Extremos de los Modelos, 52

4.6 Las Metodologías Propuestas, 57

4.7 Resultados de los Modelos, 62

4.8 Cómo Ampliar los Modelos para Incorporar Plazos Mayores, 70

CONCLUSIONES, 71

BIBLIOGRAFÍA, 72

ANEXO 1: El Modelo de los Splines con Polinomios de Cuarto Grado, 74

ANEXO 2: Programa en Gauss de las Metodologías Propuestas, 77

INTRODUCCIÓN

La estimación de una curva de rendimiento de Cetes es fundamental para nuestro Sistema Financiero entre otras cosas, por tomarse como base para la valuación de otros títulos y como referencia para el mercado. Esta curva forma parte de la curva nominal libre de riesgo que están obligados a generar los proveedores de precios que existen en el país. Esta curva libre de riesgo es muy útil para el análisis y administración de riesgos de mercado.

Realizar una buena estimación de las referencias de mercado es de vital importancia para valuar los diversos títulos de un portafolio como lo señala el régimen prudencial que establecen las autoridades financieras derivadas de los acuerdos de Basilea de 1995.

Entre los diversos modelos destaca el modelo de Nelson-Siegel que es empleado por los bancos centrales de países como Estados Unidos de América, Canadá, Finlandia, España, India, etc. Veamos un poco de historia.

La Bolsa Mexicana de Valores utilizaba un modelo de mínimos cuadrados ponderados que se basaba en un Polinomio de grado 4 en precios con restricciones de corto y largo plazo. El polinomio de grado 4 en precios equivalía a otro de grado 3 en las tasas de descuento, la restricción de corto plazo se incorporaba al considerar el término fijo del polinomio igual a la tasa de mercado de 1 día, en tanto que la restricción de largo plazo se reflejaba al minimizar en la función objetivo el cuadrado de la derivada en el último plazo estimado.

Al conocer por primera vez el modelo de Nelson y Sigel, me pareció notable su capacidad de generar curvas con un máximo local y su propiedad asintótica plana. Uno de los problemas de la estimación con polinomios es su tendencia explosiva a largo plazo, por lo que la propiedad asintótica del modelo Nelson-Siegel es muy apreciada. No obstante de sus bondades, este modelo sólo puede estimar curvas con un máximo o mínimo local, Nelson y Siegel llaman a estos valores extremos jorobas y en forma de "S", respectivamente; el autor prefiere usar el término "bache" para referirse a un mínimo local.

En el año 2000 el servicio de generar un vector de precios y tasas para el sistema financiero pasó de la BMV a los proveedores de precios, la BMV se asoció con la empresa canadiense Algorithmics quién le presentó la metodología de Nelson y Siegel para modelar las tasas de Cetes que fue inmediatamente aceptada. Ya convertidos en Valmer, Algorithmics sustituye el Modelo Nelson-Siegel por una extensión desarrollada por Svensson que considera un parámetro externo adicional. Sin embargo, durante el año 2001, fue bastante común que las tasas de mercado de Cetes presentaran 3 máximos y/o mínimos locales formados en los plazos relevantes que son a 1, 28, 91,182 y 364 días, por lo que el modelo Svensson-Nelson-Siegel resultó insuficiente; personal de Algorithmics le incorporó otro parámetro externo.

A pesar de que el nuevo modelo consideró 3 parámetros externos para estimar la curva de rendimiento, había la posibilidad teórica de requerir 4 parámetros externos para reproducir el esquema joroba-bache-joroba-bache, y no existía criterios para seleccionar los parámetros externos que demandaban mucho tiempo de ejecución. Además era frecuente una mala estimación para el plazo de un día y era muy inestable a largo plazo. Estas dificultades hizo que se abandonara el modelo Nelson-Siegel y sus extensiones.

No obstante, considero que las bondades del modelo Nelson-Siegel no fue suficientemente aprovechadas, esto motivó el presente trabajo, cuya finalidad es la de proponer extensiones que se ajusten a las condiciones del mercado de Cetes integradas en metodologías de cálculo.

Los modelos propuestos se desarrollan en dos vertientes: el primero generalizando la función lineal que acompaña a la exponencial en el modelo Nelson-Siegel y la otra aumentando el número de parámetros externos, para este último caso se presenta también criterios de selección mediante rangos de variación de los parámetros, en tanto que Svensson solo consideró que éstos sean diferentes.

Las extensiones que otros autores han propuesto dejan libre los coeficientes relacionados con el largo y corto plazo que provocan las dificultades mencionadas antes, por lo que en los modelos propuestos estos coeficientes son fijados. El coeficiente de largo plazo se hace igual a la tasa del mayor plazo posible, en tanto que el coeficiente de corto plazo (la de un día) se fija mediante un proceso iterativo de tal modo que la tasa estimada a un día sea igual a la tasa de mercado a este plazo.

El grado del polinomio y el número de parámetros externos a emplear es igual al número de jorobas y baches que se presentan en los plazos relevantes. La selección del mejor parámetro externo en el modelo polinomial se realiza en un proceso exhaustivo, recorriendo los valores enteros de 1 a 364. En cuanto al modelo de parámetros externos se eligen en una partición determinada por los plazos relevantes en que se presentan las jorobas o baches, por ejemplo $\tau_1 \in [1,28]$, $\tau_2 \in [29,91]$, $\tau_3 \in [92,182]$ y $\tau_4 \in [183,364]$. El criterio de selección de los parámetros externos es aquel que maximice el coeficiente de determinación.

La metodología anterior se aplica, desde luego, cuando se tienen tasas de mercado con jorobas y baches en los plazos relevantes. Cuando las tasas de mercado son decrecientes o crecientes , como lo son actualmente, el número de plazos relevantes determina el grado del polinomio y el número de parámetros externos a utilizar; además, el modelo polinomial se evalúa sólo en los plazos relevantes y el modelo de parámetros externos utiliza como parámetros los plazos relevantes.

Cabe destacar que el grado del polinomio y el número de parámetros externos es variable, depende del número de jorobas o baches que se presentan en los plazos relevantes. Para el caso en que existan 4 plazos relevantes y se presentan una joroba y un bache en estos plazos, el polinomio a utilizar es de grado 2 o bien, se debe emplear 2 parámetros externos. En caso de existir jorobas o baches en plazos que no sean los relevantes, éstos no son tomados en cuenta.

EL MODELO DE NELSON-SIEGEL

En este primer capítulo se pretende dar conocer el modelo de Nelson-Siegel con la intención de completar algunas de sus afirmaciones lo cual nos permitirá generalizarlo.

Se inicia mencionando los bancos centrales que utilizan este modelo, luego se presenta la ecuación diferencial de segundo orden referida pero no mostrada por Nelson y Siegel, cuya solución da origen a su modelo: una función lineal en el factor de la exponencial. La ecuación diferencial de Nelson-Siegel es generalizada en un Teorema deducido por el autor cuya demostración es presentada.

Nelson y Siegel afirman que su modelo puede verse como una constante mas una función de Laguerre que sugiere un método para la generalización de modelos de grados más altos. Sin embargo, al analizar las funciones de Laguerre el autor considera que sólo incorpora grados al polinomio que acompaña a la exponencial. Posteriormente se presenta una revisión de las extensiones hechas al Modelo Nelson-Siegel, siendo la de Svensson la más usada. El capítulo finaliza con las características del modelo: sus propiedades en los límites, formas de sus curvas, bondades del modelo, etc.

1.1 Antecedentes, la Curva de los T-Bills.

En 1987 C. Nelson y A. Siegel publican en Journal of Business un modelo simple y parsimonioso, es decir con pocos parámetros, capaz de representar el rango de formas asociadas con las curvas de rendimiento, esto es, monótonas, encorvadas y en forma de "S". Este modelo mostró una correlación del 96% entre las tasas de rendimiento y el plazo al vencimiento de los T-Bills durante el período 1981-83.

Este modelo realizado para el Banco Central de Estados Unidos y su extensión más conocida propuesta por L. Svensson (1994), son actualmente empleados por bancos centrales de países desarrollados como Francia, España, Inglaterra, USA, etc, ver cuadro 1, tomado de un artículo de D. Filipovic' (1998):

Central Bank	Curve Fitting Procedure
Finland	Svensson
France	Nelson-Siegel, Svensson
Norway	Svensson, cubic splines
Spain	Nelson-Siegel, Svensson
Sweden	Svensson
Switzerland	Svensson
UK	Nelson-Siegel, Svensson, cubic splines
USA	Nelson-Siegel, Svensson, smoothing splines

Cuadro 1: Modelos Utilizados por algunos Bancos Centrales.

1.2 Obtención de la Ecuación Diferencial de Nelson-Siegel.

Una clase de funciones que generan las formas típicas de las curvas de rendimiento es aquella asociada con soluciones de ecuaciones diferenciales. La Teoría de las expectativas de la estructura intertemporal de tasas de interés señala que si las tasas spot son generadas por una ecuación diferencial, entonces las tasas forward serán la solución de dicha ecuación.

Denotemos con $r(m)$ la tasa forward instantánea al vencimiento m , en su artículo Nelson y Siegel consideran que $r(m)$ es solución de una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales y diferentes (la cual no es indicada), esta solución puede expresarse como:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau_1) + \beta_2 * \exp(-m/\tau_2) \quad (1)$$

donde τ_1 y τ_2 son constantes temporales asociadas con la ecuación, y β_0 , β_1 y β_2 son determinados por condiciones iniciales.

Hallemos la ecuación diferencial a la que hacen referencia, se propone:

$$y'' + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) * y' + \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right) * y - \frac{\beta_0}{\tau_1\tau_2} = 0 \quad (2)$$

Probemos que la expresión (1) es solución de la ecuación anterior.

Se tiene que

$$y = r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau_1) + \beta_2 * \exp(-m/\tau_2)$$

por tanto

$$y' = r'(m) = -\frac{\beta_1}{\tau_1} * \exp(-m/\tau_1) - \frac{\beta_2}{\tau_2} * \exp(-m/\tau_2)$$

$$y'' = r''(m) = \frac{\beta_1}{\tau_1^2} * \exp(-m/\tau_1) + \frac{\beta_2}{\tau_2^2} * \exp(-m/\tau_2)$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} & y'' + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) * y' + \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right) * y - \frac{\beta_0}{\tau_1\tau_2} = \\ & \frac{\beta_1}{\tau_1^2} * \exp(-m/\tau_1) + \frac{\beta_2}{\tau_2^2} * \exp(-m/\tau_2) + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) * \left(-\frac{\beta_1}{\tau_1} * \exp(-m/\tau_1) - \frac{\beta_2}{\tau_2} * \exp(-m/\tau_2)\right) \\ & + \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right) * (\beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau_1) + \beta_2 * \exp(-m/\tau_2)) - \frac{\beta_0}{\tau_1\tau_2} \end{aligned}$$

Desarrollando los términos

$$\begin{aligned} & = \frac{\beta_0}{\tau_1\tau_2} - \frac{\beta_0}{\tau_1\tau_2} + \left[\frac{\beta_1}{\tau_1^2} - \frac{\beta_1}{\tau_1} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{\beta_1}{\tau_1\tau_2} \right] * \exp(-m/\tau_1) + \\ & \left[\frac{\beta_2}{\tau_2^2} - \frac{\beta_2}{\tau_2} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{\beta_2}{\tau_1\tau_2} \right] * \exp(-m/\tau_2) = \text{Cero} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nelson y Siegel afirman que la experimentación en el ajuste usando este primer modelo para los rendimientos de los T-bills sugiere que está sobreparametrizado, por lo que proponen un modelo más parsimonioso que puede generar el mismo rango de formas de la curva de rendimiento, el cual es dado por la solución de la ecuación diferencial cuando las raíces son iguales:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau) + \beta_2 [(m/\tau) * \exp(-m/\tau)] \quad (3)$$

La ecuación diferencial de la cual la expresión (3) es solución, tampoco es indicada por Nelson y Siegel, pero se puede hallar como un caso particular de la ecuación (2) considerando que las tau's son iguales entre sí, esto es:

$$y'' + \left(\frac{2}{\tau}\right)y' + \left(\frac{1}{\tau^2}\right)y - \frac{\beta_0}{\tau^2} = 0 \quad (4)$$

Probaremos que efectivamente esta ecuación tiene como solución la expresión (3).

Se tiene que

$$y = r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau) + \beta_2 (m/\tau) * \exp(-m/\tau)$$

por tanto

$$y' = r'(m) = \beta_1 \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) + \beta_2 \left[(m/\tau) \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) + \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau}\right) \right]$$

$$y' = \beta_1 \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) + \beta_2 \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) [(m/\tau) - 1]$$

Así

$$y'' = r''(m) = \beta_1 \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) (-1/\tau) + \beta_2 \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) [(-1/\tau)(m/\tau - 1) + (1/\tau)]$$

$$y'' = \beta_1 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) + \beta_2 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) [m/\tau - 1 - 1]$$

$$y'' = \beta_1 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) + \beta_2 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) [(m/\tau) - 2]$$

Sustituyendo en la ecuación (4)

$$\begin{aligned} y'' + \left(\frac{2}{\tau}\right) * y' + \left(\frac{1}{\tau^2}\right) * y - \frac{\beta_0}{\tau^2} &= \beta_1 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) + \beta_2 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) [(m/\tau) - 2] \\ &+ \left(\frac{2}{\tau}\right) * \left(\beta_1 \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) + \beta_2 \exp(-m/\tau) \left(-\frac{1}{\tau}\right) [(m/\tau) - 1] \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\tau^2}\right) * (\beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau) + \beta_2 (m/\tau) * \exp(-m/\tau)) - \frac{\beta_0}{\tau^2} \end{aligned}$$

Desarrollando los términos

$$\frac{\beta_0}{\tau^2} - \frac{\beta_0}{\tau^2} + \beta_1 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) (1 - 2 + 1)$$

$$+ \beta_2 \exp(-m/\tau) \left(\frac{1}{\tau^2}\right) [(m/\tau) - 2 - 2(m/\tau) + 2 + (m/\tau)] = \text{Cero} \quad \blacksquare$$

1.3 La Ecuación Diferencial Generalizada de Nelson-Siegel.

La expresión (3) sugiere las siguientes generalizaciones:

2° Grado.

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * e^{(-m/\tau)} + \beta_2(m/\tau) * e^{(-m/\tau)} + \beta_3(m/\tau)^2 * e^{(-m/\tau)}$$

3° Grado.

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * e^{(-m/\tau)} + \beta_2(m/\tau) * e^{(-m/\tau)} + \beta_3(m/\tau)^2 * e^{(-m/\tau)} + \beta_4(m/\tau)^3 * e^{(-m/\tau)}$$

Grado n-1.

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * e^{(-m/\tau)} + \beta_2(m/\tau) * e^{(-m/\tau)} + \beta_3(m/\tau)^2 * e^{(-m/\tau)} + \dots + \beta_n(m/\tau)^{n-1} * e^{(-m/\tau)}$$

A su vez, la expresión (4) al generalizarse sugiere las ecuaciones diferenciales de mayores órdenes:

Tercer orden

$$y''' + \frac{3}{\tau} y'' + \frac{3}{\tau^2} y' + \frac{1}{\tau^3} y - \frac{\beta_0}{\tau^3} = 0$$

Cuarto orden

$$y^{(iv)} + \frac{4}{\tau} y''' + \frac{6}{\tau^2} y'' + \frac{4}{\tau^3} y' + \frac{1}{\tau^4} y - \frac{\beta_0}{\tau^4} = 0$$

Orden n

$$y^{(n)} + n \frac{1}{\tau} y^{(n-1)} + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^2} y^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{i} \frac{1}{\tau^i} y^{(n-i)} + \dots + n \frac{1}{\tau^{n-1}} y' + \frac{1}{\tau^n} y - \frac{\beta_0}{\tau^n} = 0$$

Probemos que estas generalizaciones son consistentes.

TEOREMA.

La función exponencial de grado n-1

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * e^{(-m/\tau)} + \beta_2(m/\tau) * e^{(-m/\tau)} + \beta_3(m/\tau)^2 * e^{(-m/\tau)} + \dots + \beta_n(m/\tau)^{n-1} * e^{(-m/\tau)}$$

es solución de la ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} + n \frac{1}{\tau} y^{(n-1)} + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^2} y^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{i} \frac{1}{\tau^i} y^{(n-i)} + \dots + n \frac{1}{\tau^{n-1}} y' + \frac{1}{\tau^n} y - \frac{\beta_0}{\tau^n} = 0$$

Prueba.

Se tiene que

$$y = r(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{(-m/\tau)} + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (m/\tau) + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (m/\tau)^2 + \beta_4 e^{(-m/\tau)} (m/\tau)^3 + \dots + \beta_n e^{(-m/\tau)} (m/\tau)^{n-1}$$

por tanto

$$y' = r'(m) =$$

$$\beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) + \beta_2 e^{(-m/\tau)} [(-1/\tau)(m/\tau) + (1/\tau)] + \beta_3 e^{(-m/\tau)} [(-1/\tau)(m/\tau)^2 + 2(m/\tau)(1/\tau)]$$

$$\beta_4 e^{(-m/\tau)} [(-1/\tau)(m/\tau)^3 + 3(m/\tau)^2(1/\tau)] + \dots + \beta_n e^{(-m/\tau)} [(-1/\tau)(m/\tau)^{n-1} + (n-1)(m/\tau)^{n-2}(1/\tau)]$$

$$y' = \beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) [(m/\tau) - 1] + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) [(m/\tau)^2 - 2(m/\tau)] \\ \beta_4 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) [(m/\tau)^3 - 3(m/\tau)^2] + \dots + \beta_n e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) [(m/\tau)^{n-1} - (n-1)(m/\tau)^{n-2}]$$

Así

$$y'' = r''(m) = \beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau)^2 + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau)^2 [(m/\tau) - 1 - 1] + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau)^2 [(m/\tau)^2 - 2(m/\tau) - 2(m/\tau) + 2] \\ \beta_4 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau)^2 [(m/\tau)^3 - 3(m/\tau)^2 - 3(m/\tau)^2 + 3*2(m/\tau)] + \dots \\ + \beta_n e^{(-m/\tau)} (-1/\tau)^2 [(m/\tau)^{n-1} - (n-1)(m/\tau)^{n-2} - (n-1)(m/\tau)^{n-2} + (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3}]$$

$$y'' = \beta_1 e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) [(m/\tau) - 2] + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) [(m/\tau)^2 - 2*2(m/\tau) + 2] \\ + \beta_4 e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) [(m/\tau)^3 - 3*2(m/\tau)^2 + 3*2(m/\tau)] + \dots \\ + \beta_n e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) [(m/\tau)^{n-1} - 2(n-1)(m/\tau)^{n-2} + (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3}]$$

Luego

$$y''' = r'''(m) = \beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau) - 2 - 1] + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^2 - 2*2(m/\tau) + 2 - 2(m/\tau) + 2*2] \\ + \beta_4 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^3 - 3*2(m/\tau)^2 + 3*2(m/\tau) - 3(m/\tau)^2 + 3*2*2(m/\tau) - 3*2] + \dots \\ + \beta_n e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^{n-1} - 2(n-1)(m/\tau)^{n-2} + (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} \\ - (n-1)(m/\tau)^{n-2} + 2(n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)(m/\tau)^{n-4}]$$

$y''' =$

$$\beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau) - 3] + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^2 - 3*2(m/\tau) + 3*2] \\ + \beta_4 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^3 - 3*3(m/\tau)^2 + 3*3*2(m/\tau) - 3*2] + \dots \\ + \beta_n e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^{n-1} - 3(n-1)(m/\tau)^{n-2} + 3(n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)(m/\tau)^{n-4}]$$

En general (para $k=1,2,\dots,n-1$)

$$y^{(k)} = r^{(k)}(m) = \beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) [(m/\tau) - k] \\ + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) \left[(m/\tau)^2 - k*2(m/\tau) + \binom{k}{2} * 2 \right] \\ + \beta_4 e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) \left[(m/\tau)^3 - k*3(m/\tau)^2 + \binom{k}{2} * 3*2(m/\tau) - \binom{k}{3} * 3*2 \right] \\ \dots \dots \dots \quad i=1,2,\dots,n. \\ + \beta_i e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) \left[(m/\tau)^{i-1} - k(i-1)(m/\tau)^{i-2} + \binom{k}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} + \dots \right]$$

$$\dots + (-1)^j \binom{k}{j} j! \binom{i-1}{j} (m/\tau)^{i-1-j} + \dots + (-1)^k k! \binom{i-1}{k} (m/\tau)^{i-1-k} \quad j=0,1,2,\dots,k.$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$+ \beta_n e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) \left[(m/\tau)^{n-1} - k(n-1)(m/\tau)^{n-2} + \binom{k}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^j \binom{k}{j} j! \binom{n-1}{j} (m/\tau)^{n-1-j} + \dots + (-1)^k k! \binom{n-1}{k} (m/\tau)^{n-1-k} \right] \quad j=0,1,2,\dots,k.$$

Igualmente, para $k=n$.

$$y^{(n)} = r^{(n)}(m) = \beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) [(m/\tau) - n]$$

$$+ \beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \left[(m/\tau)^2 - n * 2(m/\tau) + \binom{n}{2} * 2 \right]$$

$$+ \beta_4 e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \left[(m/\tau)^3 - n * 3(m/\tau)^2 + \binom{n}{2} * 3 * 2(m/\tau) - \binom{n}{3} * 3 * 2 \right]$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad i=1,2,\dots,n$$

$$+ \beta_i e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \left[(m/\tau)^{i-1} - n(i-1)(m/\tau)^{i-2} + \binom{n}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^j \binom{n}{j} j! \binom{i-1}{j} (m/\tau)^{i-1-j} + \dots + (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} (i-1)! \right] \quad j=0,1,2,\dots,i-1.$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$+ \beta_n e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \left[(m/\tau)^{n-1} - n(n-1)(m/\tau)^{n-2} + \binom{n}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^j \binom{n}{j} j! \binom{n-1}{j} (m/\tau)^{n-1-j} + \dots + (-1)^{n-1} n! \right] \quad j=0,1,2,\dots,n-1.$$

La Ecuación Diferencial puede expresarse como:

$$\frac{1}{\tau^n} y + n \frac{1}{\tau^{n-1}} y' + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^{n-2}} y'' + \binom{n}{3} \frac{1}{\tau^{n-3}} y''' + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{\tau^{n-k}} y^{(k)} + \dots + y^{(n)} - \frac{\beta_0}{\tau^n} = 0$$

Una serie que será útil se debe al binomio de Newton. Para cualquier entero $m > 0$ se tiene:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

en particular para $a=-1$ y $b=1$

$$0 = (-1+1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k = 1 - m + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots + (-1)^m$$

Demostraremos el Teorema considerando las sumas parciales asociadas a cada beta.

Para β_0 :

$$\frac{1}{\tau^n} \beta_0 - \frac{\beta_0}{\tau^n} = \text{Cero}$$

Para β_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau^n} (\beta_1 e^{(-m/\tau)}) + n \frac{1}{\tau^{n-1}} (\beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau)) + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^{n-2}} (\beta_1 e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2)) \\ & + \binom{n}{3} \frac{1}{\tau^{n-3}} (\beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3)) + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{\tau^{n-k}} (\beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k)) + \dots \\ & \dots + \beta_1 e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \end{aligned}$$

$$= \beta_1 * e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left(1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \right) = \text{Cero}$$

Para β_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau^n} (\beta_2 e^{(-m/\tau)} (m/\tau)) + n \frac{1}{\tau^{n-1}} (\beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) [(m/\tau) - 1]) + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^{n-2}} (\beta_2 e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) [(m/\tau) - 2]) \\ & + \binom{n}{3} \frac{1}{\tau^{n-3}} (\beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau) - 3]) + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{\tau^{n-k}} (\beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) [(m/\tau) - k]) + \dots \\ & \dots + \beta_2 e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) [(m/\tau) - n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \beta_2 e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau) - n[(m/\tau) - 1] + \binom{n}{2} [(m/\tau) - 2] - \binom{n}{3} [(m/\tau) - 3] + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + (-1)^k \binom{n}{k} [(m/\tau) - k] + \dots + (-1)^n [(m/\tau) - n] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \beta_2 e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau) \left[1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \right] \right. \\ & \quad \left. + n \left[1 - (n-1) + \binom{n-1}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + \dots + (-1)^{n-1} \right] \right) = \end{aligned}$$

$$= \beta_2 e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} ((m/\tau) * 0 + n * 0) = \text{Cero}$$

Para β_3 :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau^n} (\beta_3 e^{(-m/\tau)} (m/\tau)^2) + n \frac{1}{\tau^{n-1}} (\beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) [(m/\tau)^2 - 2(m/\tau)]) \\
& + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^{n-2}} (\beta_3 e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) [(m/\tau)^2 - 2*2(m/\tau) + 2]) \\
& + \binom{n}{3} \frac{1}{\tau^{n-3}} (\beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^2 - 3*2(m/\tau) + 3*2]) \\
& + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{\tau^{n-k}} \left(\beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) \left[(m/\tau)^2 - k*2(m/\tau) + \binom{k}{2} * 2 \right] \right) + \dots \\
& \dots + \beta_3 e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \left[(m/\tau)^2 - n*2(m/\tau) + \binom{n}{2} * 2 \right] \\
& = \beta_3 e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau)^2 - n[(m/\tau)^2 - 2(m/\tau)] + \binom{n}{2} [(m/\tau)^2 - 2*2(m/\tau) + 2] \right. \\
& \left. - \binom{n}{3} [(m/\tau)^2 - 3*2(m/\tau) + 3*2] + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} \left[(m/\tau)^2 - k*2(m/\tau) + \binom{k}{2} * 2 \right] + \dots \right. \\
& \quad \left. \dots + (-1)^n \left[(m/\tau)^2 - n*2(m/\tau) + \binom{n}{2} * 2 \right] \right) \\
& = \beta_3 e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau)^2 \left[1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \right] \right. \\
& \quad + 2n(m/\tau) \left[1 - (n-1) + \binom{n-1}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + \dots + (-1)^{n-1} \right] \\
& \quad \left. + n(n-1) \left[1 - (n-2) + \dots + (-1)^{k-2} \binom{n-2}{k-2} + \dots + (-1)^{n-2} \right] \right) \\
& = \beta_3 e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau)^2 * 0 + 2n(m/\tau) * 0 + n(n-1) * 0 \right) = \text{Cero}
\end{aligned}$$

Para β_i :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau^n} (\beta_i e^{(-m/\tau)} (m/\tau)^{i-1}) + n \frac{1}{\tau^{n-1}} (\beta_i e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) [(m/\tau)^{i-1} - (i-1)(m/\tau)^{i-2}]) \\
& + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^{n-2}} (\beta_i e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) [(m/\tau)^{i-1} - 2*(i-1)(m/\tau)^{i-2} + (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3}]) \\
& + \binom{n}{3} \frac{1}{\tau^{n-3}} (\beta_i e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) [(m/\tau)^{i-1} - 3*(i-1)(m/\tau)^{i-2} + 3*(i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} - (i-1)(i-2)(i-3)(m/\tau)^{i-4}])
\end{aligned}$$

$$+ \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{\tau^{n-k}} (\beta_i e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) \left[(m/\tau)^{i-1} - k(i-1)(m/\tau)^{i-2} + \binom{k}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^j \binom{k}{j} j! \binom{i-1}{j} (m/\tau)^{i-1-j} + \dots + (-1)^k k! \binom{i-1}{k} (m/\tau)^{i-1-k} \right] \quad j=0,1,2,\dots,k.$$

$$+ \dots + \beta_i e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \left[(m/\tau)^{i-1} - n(i-1)(m/\tau)^{i-2} + \binom{n}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^j \binom{n}{j} j! \binom{i-1}{j} (m/\tau)^{i-1-j} + \dots + (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} (i-1)! \right] \quad j=0,1,2,\dots,i-1.$$

$$= \beta_i e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left[(m/\tau)^{i-1} - n \left[(m/\tau)^{i-1} - (i-1)(m/\tau)^{i-2} \right] \right]$$

$$+ \binom{n}{2} \left[(m/\tau)^{i-1} - 2 * (i-1)(m/\tau)^{i-2} + (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} \right]$$

$$- \binom{n}{3} \left[(m/\tau)^{i-1} - 3 * (i-1)(m/\tau)^{i-2} + 3 * (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} - (i-1)(i-2)(i-3)(m/\tau)^{i-4} \right]$$

$$+ \dots + (-1)^k \binom{n}{k} \left[(m/\tau)^{i-1} - k(i-1)(m/\tau)^{i-2} + \binom{k}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^j \binom{k}{j} j! \binom{i-1}{j} (m/\tau)^{i-1-j} + \dots + (-1)^k k! \binom{i-1}{k} (m/\tau)^{i-1-k} \right] \quad j=0,1,2,\dots,k.$$

$$+ \dots (-1)^n \left[(m/\tau)^{i-1} - n(i-1)(m/\tau)^{i-2} + \binom{n}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^j \binom{n}{j} j! \binom{i-1}{j} (m/\tau)^{i-1-j} + \dots + (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} (i-1)! \right] \quad j=0,1,2,\dots,i-1.$$

$$= \beta_i e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left[(m/\tau)^{i-1} \left[1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \right] \right]$$

$$+ n(i-1)(m/\tau)^{i-2} \left[1 - (n-1) + \binom{n-1}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + \dots + (-1)^{n-1} \right]$$

$$+ \binom{n}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} \left[1 - (n-2) + \binom{n-2}{2} + \dots + (-1)^{k-2} \binom{n-2}{k-2} + \dots + (-1)^{n-2} \right]$$

$$+ \binom{n}{3} (i-1)(i-2)(i-3)(m/\tau)^{i-4} \left[1 - (n-3) + \binom{n-3}{2} + \dots + (-1)^{k-3} \binom{n-3}{k-3} + \dots + (-1)^{n-3} \right]$$

$$+ \dots + \binom{n}{i-1} (i-1)! \left[1 - (n - \{i+1\}) + \binom{n - (i-1)}{2} + \dots + (-1)^{n-(i-1)} \right]$$

$$= \beta_i e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau)^{i-1} * 0 + n(i-1)(m/\tau)^{i-2} * 0 + \binom{n}{2} (i-1)(i-2)(m/\tau)^{i-3} * 0 + \right. \\ \left. + \binom{n}{3} \binom{i-1}{3} 3! (m/\tau)^{i-4} * 0 + \dots + \binom{n}{i-1} (i-1)! * 0 \right) = \text{Cero}$$

Para β_n :

$$\frac{1}{\tau^n} \left(\beta_n e^{(-m/\tau)} (m/\tau)^{n-1} \right) + n \frac{1}{\tau^{n-1}} \left(\beta_n e^{(-m/\tau)} (-1/\tau) \left[(m/\tau)^{n-1} - (n-1)(m/\tau)^{n-2} \right] \right) \\ + \binom{n}{2} \frac{1}{\tau^{n-2}} \left(\beta_n e^{(-m/\tau)} (1/\tau^2) \left[(m/\tau)^{n-1} - 2 * (n-1)(m/\tau)^{n-2} + (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} \right] \right) \\ + \binom{n}{3} \frac{1}{\tau^{n-3}} \left(\beta_n e^{(-m/\tau)} (-1/\tau^3) \left[(m/\tau)^{n-1} - 3 * (n-1)(m/\tau)^{n-2} + 3 * (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)(m/\tau)^{n-4} \right] \right) \\ + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{\tau^{n-k}} \left(\beta_n e^{(-m/\tau)} (-1)^k (1/\tau^k) \left[(m/\tau)^{n-1} - k(n-1)(m/\tau)^{n-2} + \binom{k}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + (-1)^j \binom{k}{j} j! \binom{n-1}{j} (m/\tau)^{n-1-j} + \dots + (-1)^k k! \binom{n-1}{k} (m/\tau)^{n-1-k} \right] \right) \quad j=0,1,2,\dots,k. \\ + \dots + \beta_n e^{(-m/\tau)} (-1)^n (1/\tau^n) \left[(m/\tau)^{n-1} - n(n-1)(m/\tau)^{n-2} + \binom{n}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^j \binom{n}{j} j! \binom{n-1}{j} (m/\tau)^{n-1-j} + \dots + (-1)^{n-1} n! \right] \quad j=0,1,2,\dots,n-1. \\ = \beta_n e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau)^{n-1} - n \left[(m/\tau)^{n-1} - (n-1)(m/\tau)^{n-2} \right] \right) \\ + \binom{n}{2} \left[(m/\tau)^{n-1} - 2 * (n-1)(m/\tau)^{n-2} + (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} \right] \\ - \binom{n}{3} \left[(m/\tau)^{n-1} - 3 * (n-1)(m/\tau)^{n-2} + 3 * (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)(m/\tau)^{n-4} \right] \\ + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} \left[(m/\tau)^{n-1} - k(n-1)(m/\tau)^{n-2} + \binom{k}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^j \binom{k}{j} j! \binom{n-1}{j} (m/\tau)^{n-1-j} + \dots + (-1)^k k! \binom{n-1}{k} (m/\tau)^{n-1-k} \right] \quad j=0,1,2,\dots,k. \\ + \dots (-1)^n \left[(m/\tau)^{n-1} - n(n-1)(m/\tau)^{n-2} + \binom{n}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^j \binom{n}{j} j! \binom{n-1}{j} (m/\tau)^{n-1-j} + \dots + (-1)^{n-1} n! \right] \quad j=0,1,2,\dots,n-1.$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_n e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau)^{n-1} \left[1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots + (-1)^n \right] \right. \\
&+ n(n-1)(m/\tau)^{n-2} \left[1 - (n-1) + \binom{n-1}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + \dots + (-1)^{n-1} \right] \\
&+ \binom{n}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} \left[1 - (n-2) + \binom{n-2}{2} + \dots + (-1)^{k-2} \binom{n-2}{k-2} + \dots + (-1)^{n-2} \right] \\
&+ \binom{n}{3} (n-1)(n-2)(n-3)(m/\tau)^{n-4} \left[1 - (n-3) + \binom{n-3}{2} + \dots + (-1)^{k-3} \binom{n-3}{k-3} + \dots + (-1)^{n-3} \right] \\
&+ \dots + n(n-1)! [1 - \{n - (n-1)\}] \Big) \\
&= \beta_n e^{(-m/\tau)} \frac{1}{\tau^n} \left((m/\tau)^{n-1} * 0 + n(n-1)(m/\tau)^{n-2} * 0 + \binom{n}{2} (n-1)(n-2)(m/\tau)^{n-3} * 0 + \right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{3} (n-1)(n-2)(n-3)(m/\tau)^{n-4} * 0 + \dots + n(n-1)! * 0 \right) = \text{Cero} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.4 Funciones de Laguerre.

Regresando al artículo de Nelson y Siegel, ellos afirman que la expresión:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau) + \beta_2 [(m/\tau) * \exp(-m/\tau)] \quad (5)$$

puede verse como una constante mas una función de Laguerre que sugiere un método para la generalización de modelos de grados más altos. Y continúan indicando que las funciones de Laguerre consisten de un polinomio en el tiempo con un decaimiento exponencial y son un tipo matemático de funciones de aproximación.

Veamos cuales son las funciones de Laguerre, para ello se revisará el libro de Courant y Hilbert (1989) pp.87-88.

Sea una función ponderadora no negativa $p(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$. El problema es estudiar el sistema de funciones obtenida al ortogonalizar $\sqrt{p(x)}, x\sqrt{p(x)}, x^2\sqrt{p(x)}, \dots$ en el intervalo $[a,b]$.

Son linealmente independientes las funciones potencias: $1, x, x^2, \dots$. En el sistema ortogonal los factores de $\sqrt{p(x)}$ son polinomios $Q_0(x), Q_1(x), \dots$ de grado $0, 1, \dots$ que pueden ser únicamente determinados normalizando las condiciones y que son llamados "Polinomios Ortogonales con la función ponderadora $p(x)$ ", lo anterior significa que:

$$\int Q_n(x) * Q_m(x) * p(x) dx = 0 \quad \text{para } n \neq m$$

Por ejemplo,

a) Para $a = -1, b = 1, p(x) = 1$, obtenemos los polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

b) Para $a = -1, b = 1, p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, obtenemos los polinomios de Chebychev:

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cos^{-1} x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

c) Para $a = 0, b = 1, p(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$ ($q > 0, p-q > -1$), los polinomios de Jacobi o hipergeométrico.

d) Para $a = -\infty, b = \infty, p(x) = e^{-x^2}$, los polinomios de Hermite.

e) Para $a = 0, b = \infty, p(x) = e^{-x}$, los polinomios de Laguerre.

Presentemos los polinomios de Laguerre con más detalle (pp. 93-97 de Courant y Hilbert).

Los polinomios de Laguerre $L_n(x)$ se definen como:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \\ &= (-1)^n \left(x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{3!} x^{n-3} + \dots + (-1)^n n! \right) \end{aligned}$$

Así, en particular

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, & L_1(x) &= -x + 1, \\ L_2(x) &= x^2 - 4x + 2, & L_3(x) &= x^3 - 9x^2 - 18x + 6, \\ L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \end{aligned}$$

Algunas relaciones interesantes son:

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) = -nL_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0 \quad (n > m)$$

El polinomio de Laguerre $L_n(x)$ satisface la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden (llamada la ecuación de Laguerre):

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (6)$$

A su vez, las funciones

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-x/2} L_n(x)}{n!} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

constituyen el sistema ortonormal.

Finalmente, Courant y Hilbert afirman que toda función de la forma e^{-ax} puede ser aproximada arbitrariamente bien en la media mediante combinaciones de las funciones de Laguerre en el intervalo $0 \leq x < \infty$.

Retomando parte de la expresión (5) y considerando $x = m / \tau$ se tiene

$$\begin{aligned} \beta_1 * \exp(-m / \tau) + \beta_2 [(m / \tau) * \exp(-m / \tau)] &= \beta_1 * \exp(-x) + \beta_2 [x * \exp(-x)] \\ &= \exp(-x) * [\beta_1(1) - \beta_2(-x)] \end{aligned}$$

por lo que la afirmación de Nelson y Siegel de que es una función de Laguerre pudiera interpretarse como tal (un poco forzado) al considerar como función ponderadora $p(x) = e^{-x}$ y el polinomio de Laguerre de primer grado: $L_1(x) = 1 - x$.

El autor considera que en general las funciones de Laguerre sólo incorpora grados al polinomio que acompaña a la exponencial.

1.5 Extensiones del Modelo.

L. Krippner (2002) hace una revisión sobre diversas extensiones del Modelo de Nelson y Siegel (denotado como NS) que se han propuesto, señala que:

a) Hunt (1995) considera la siguiente forma funcional de la curva de tasa forward:

$$f(m) = \alpha_1 + (\alpha_2 m^2 + \alpha_3 m^3 + \dots + \alpha_N m^N) * \exp(\alpha_{N+1} m)$$

Hunt lo aplicó al mercado australiano obteniendo que la versión con 4 parámetros de la función anterior (es decir, el mismo número de parámetros que el modelo NS) es empíricamente intratable, debido a la multicolinealidad que evita la convergencia del estimador de máxima verosimilitud.

b) La extensión del modelo de Nelson-Siegel más ampliamente usada fue propuesto por Svensson (1994), que es conocido como el modelo Svensson-Nelson-Siegel (denotado como SNS):

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m / \tau) + \beta_2 [(m / \tau) * \exp(-m / \tau)] + \beta_3 [(m / \tau_2) * \exp(-m / \tau_2)] \quad (7)$$

que añade al modelo NS nuevos parámetros: β_3 y $\tau_2 (\neq \tau)$.

Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones empíricas generalmente encuentran que el modelo SNS no agrega mayor beneficio que el modelo NS, sólo en casos en que la estructura sea mas compleja mejora la bondad del ajuste. En ocasiones se prefiere el modelo NS debido a la no convergencia del modelo SNS.

c) Bliss (1996) introduce otra variante, que es esencialmente el modelo SNS, ecuación (7), con $\beta_2 = 0$, en su artículo sugiere en una nota de pie de página que el modelo Bliss-NS (con 5 parámetros) proporciona un mejor ajuste que el modelo NS (con 4 parámetros).¹

Krippner finaliza su revisión expresando que los mismos Nelson y Siegel establecen la potencialidad del modelo NS mediante la generalización de su ecuación a mayores órdenes usando funciones de Laguerre. Krippner reconoce no tener conocimiento que lo anterior haya sido investigado en la Literatura.

Otras generalizaciones del modelo Nelson-Siegel pueden ser:

¹ Una observación ajena a Krippner es considerar que el modelo de Bliss está basado en la solución que propusieron inicialmente Nelson y Siegel de una ecuación diferencial de segundo orden con raíces diferentes (ver expresión 1).

$$1) r(m) = \beta_0 + \beta_1 * e^{-m/\tau_1} + \beta_2 * (m/\tau_1) e^{-m/\tau_1} + \beta_3 * (m/\tau_2) e^{-m/\tau_2} + \beta_4 * (m/\tau_3) e^{-m/\tau_3}$$

$$2) r(m) = \beta_0 + \beta_1 * e^{-m/\tau_1} + \beta_2 * (m/\tau_1) e^{-m/\tau_1} + \beta_3 * (m/\tau_2) e^{-m/\tau_2} + \dots + \beta_{k+1} * (m/\tau_k) e^{-m/\tau_k}$$

$$3) r(m) = \beta_0 + \{ \beta_1 * e^{-m/\tau_1} + \beta_2 * (m/\tau_1) e^{-m/\tau_1} \} + \{ \beta_3 * e^{-m/\tau_2} + \beta_4 * (m/\tau_2) e^{-m/\tau_2} \}$$

$$4) r(m) = \beta_0 + \{ \beta_1 + \beta_2 * (m/\tau_1) + \beta_3 * (m/\tau_1)^2 \} e^{-m/\tau_1} + \{ \beta_4 + \beta_5 * (m/\tau_2) + \beta_6 * (m/\tau_2)^2 \} e^{-m/\tau_2}$$

$$5) r(m) = \beta_0 + \{ \beta_{11} + \beta_{12} * (m/\tau_1) + \beta_{13} * (m/\tau_1)^2 + \dots + \beta_{1n} * (m/\tau_1)^{n-1} \} e^{-m/\tau_1} \\ + \{ \beta_{21} + \beta_{22} * (m/\tau_2) + \beta_{23} * (m/\tau_2)^2 + \dots + \beta_{2n} * (m/\tau_2)^{n-1} \} e^{-m/\tau_2}$$

y en general

$$6) r(m) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \{ \beta_{ij} * (m/\tau_i)^{j-1} \} e^{-m/\tau_i}, \text{ con algunos valores } \beta_{ij} = 0. \quad (8)$$

Las generalizaciones que se analizarán en el presente trabajo serán:

La que se utiliza en el Teorema demostrado anteriormente.

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau} + \beta_2 (m/\tau) e^{-m/\tau} + \beta_3 (m/\tau)^2 e^{-m/\tau} + \dots + \beta_n (m/\tau)^{n-1} e^{-m/\tau} \quad (9)$$

y la generalización del modelo SNS:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau_1} + \beta_2 (m/\tau_1) e^{-m/\tau_1} + \beta_3 (m/\tau_2) e^{-m/\tau_2} + \dots + \beta_{k+1} (m/\tau_k) e^{-m/\tau_k} \quad (10)$$

1.6 Características del Modelo.

Retomemos el modelo Nelson-Siegel.

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau) + \beta_2 [(m/\tau) * \exp(-m/\tau)] \quad (11)$$

donde:

$r(m)$ es la tasa forward instantánea como una función del plazo a vencimiento m .

β_0 , β_1 y β_2 son los coeficientes lineales del modelo.

τ es una constante que altera la “tasa de decaimiento” de las funciones exponenciales del plazo a vencimiento.

Considerando tasas de interés continuamente capitalizable de bonos cupón cero, la curva de rendimiento como función del plazo a vencimiento, $R(m)$, es obtenida como un promedio de las tasas forwards:

$$R(m) = \frac{1}{m} \int_0^m r(x) dx$$

$$R(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) * \frac{\tau}{m} (1 - \exp(-m/\tau)) - \beta_2 * \exp(-m/\tau) \quad (12)$$

Propiedades en los Límites.

El modelo tiene las siguientes propiedades en los límites:

- a) $\lim R(m) = \beta_0$ cuando $m \rightarrow \infty$
- b) $\lim R(m) = \beta_0 + \beta_1$ cuando $m \rightarrow 0$

Lo anterior implica que β_0 es la tasa de interés de largo plazo y $\beta_0 + \beta_1$ es la tasa de interés de corto plazo. Adicionalmente, $\beta_1 < 0$ si y sólo si las tasas de interés a largo plazo son mayores que las de corto plazo.

Formas de la Curva de Rendimiento.

Veremos a continuación la diversidad de formas que se pueden generar con $R(m)$ para estimar la curva de rendimiento.

Dando valores particulares a los parámetros, excepto para β_2 .

$$\tau = 1, \beta_0 = 10\%, \beta_1 = -4\%.$$

Lo anterior significa que la tasa de largo plazo es de 10% y la tasa de corto plazo es de 6%.

La expresión (12) puede reescribirse como:

$$R(m) = 0.1 + (\beta_2 - 0.04) * \frac{1}{m} [1 - \exp(-m)] - \beta_2 * \exp(-m) \quad (13)$$

Dando diversos valores a β_2 : -18%, -12%, -6%, 0, 4%, 8%, 12%; se obtienen las curvas mostradas en la Figura 1.

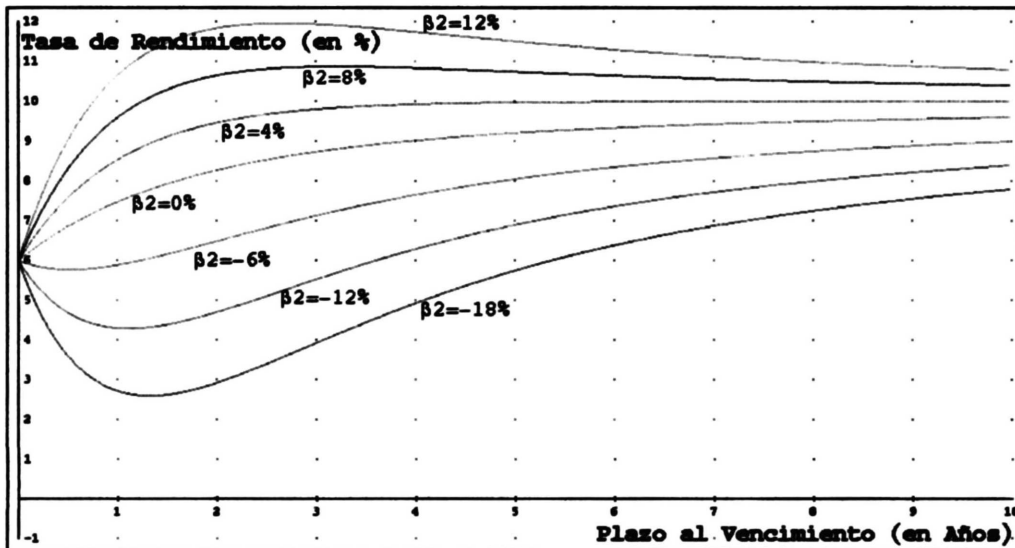


Figura 1: Familia de Curvas de Rendimiento para $\tau = 1, \beta_0 = 10\%, \beta_1 = -4\%$.

En la familia de curvas de rendimiento se observa que para $\beta_2 > 4\%$ se generan curvas encorvadas o con joroba, y para valores $\beta_2 < -4\%$ se obtienen curvas con bache (o en forma de "S" del inglés "S Shapes"). Finalmente, para $\beta_2 \in [-4\%, 4\%]$ resulta una curva monótona para el rango $m \geq 0$.

En el capítulo 4 se analizarán con más detalle los valores mínimos o máximos de estas curvas.

Interpretación de las Betas en la Función de Tasas Forward.

Consideremos cada término de la función $r(m)$ indicada en la expresión (11)

1er. Término: β_0

Puesto que: $\lim_{m \rightarrow \infty} r(m) = \beta_0$ cuando $m \rightarrow \infty$, β_0 es el componente de largo plazo del modelo.

2º Término: $\beta_1 * \exp(-m/\tau)$

Dado que: $\lim_{m \rightarrow 0} \exp(-m/\tau) = 1$ cuando $m \rightarrow 0$, β_1 es la contribución del componente de corto plazo del modelo.

3er. Término: $\beta_2 [(m/\tau) * \exp(-m/\tau)]$

Ya que: $\lim_{m \rightarrow 0} (m/\tau) * \exp(-m/\tau) = 0$ cuando $m \rightarrow 0$, $\Rightarrow \beta_2$ no es de corto plazo

Puesto que: $\lim_{m \rightarrow \infty} (m/\tau) * \exp(-m/\tau) = 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, $\Rightarrow \beta_2$ no es de largo plazo

Por otra parte, la función $(m/\tau) * \exp(-m/\tau)$ alcanza su máximo cuando $m = \tau$ teniendo como valor $1/e$.

Por tanto, β_2 puede verse como la contribución del componente de mediano plazo del modelo.

En la Fig.2 se muestran los 3 componentes del modelo Nelson-Siegel.

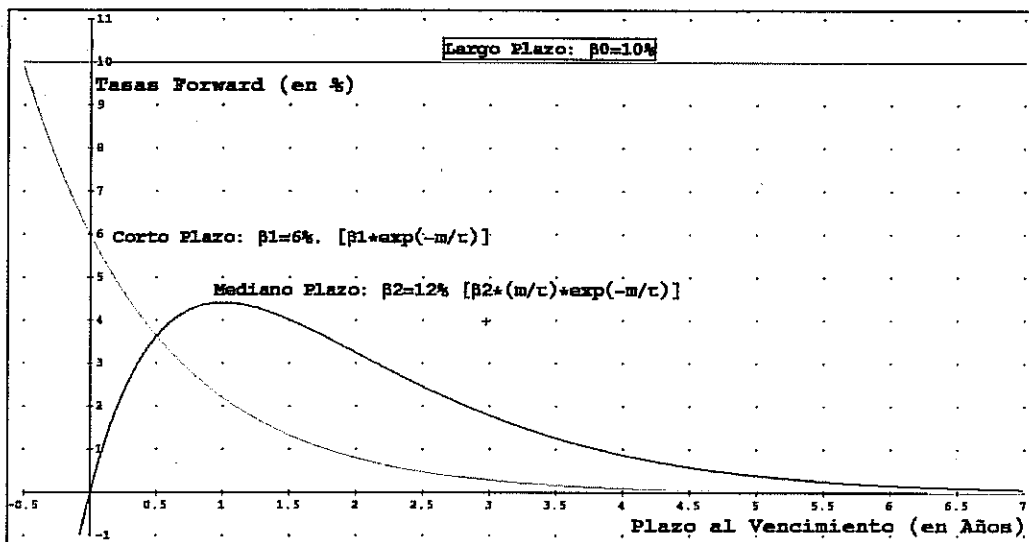


Figura 2: Componentes del Modelo Nelson-Siegel

Bondades del Modelo.

La metodología de Nelson-Siegel tiene las siguientes bondades:

- Tasas forwards monótonas y suaves.
- Sustenta curvas de tasas con formas de jorobas y de baches.

- Tasas de largo plazo que tienen propiedades asintóticas planas.
- Buena predicción de tasas a largo plazo.
- Modela las tasas forwards (ajusta rendimientos) y no los precios.

Interpretación del Parámetro Tau.

Recuerde que τ es una constante que altera la “tasa de decaimiento” de las funciones exponenciales del modelo, es decir τ define la velocidad con la que β_1 y β_2 se aproximan a cero.

El parámetro τ junto con β_2 determina un “trueque” entre ajustar la curvatura en el corto plazo contra el ajuste en la curvatura en el largo plazo (esto se analizará con detalle en el capítulo 4).

$$\begin{aligned} \text{Como } 0 < \tau_1 < \tau_2 &\Rightarrow 1/\tau_2 < 1/\tau_1 \Rightarrow -m/\tau_1 < -m/\tau_2, \text{ para } m > 0 \\ &\Rightarrow \exp(-m/\tau_1) < \exp(-m/\tau_2) \end{aligned}$$

Lo cual implica que valores pequeños de τ corresponden a un rápido decaimiento y, en consecuencia la curva se ajusta mejor en el corto plazo, y de forma similar, valores grandes de τ ajustan mejor en el largo plazo.

Lo anterior significa que para valores pequeños de τ la joroba o el bache de la curva se presenta en el corto plazo, en tanto que para valores grandes hace que la joroba o el bache se encuentre en el largo plazo.

Obtención de los Parámetros.

El parámetro τ se define de manera exógena y con él se determinan las betas mediante el método de mínimo cuadrados ordinarios. Para la determinación del parámetro exógeno se toma el valor de τ cuyo coeficiente de determinación sea mayor, dentro de un rango de valores de τ . Nelson y Siegel (1987) evaluaron τ de 10 a 200 en incrementos de 10 más los valores de 250, 300 y 365.

CARACTERÍSTICAS DEL MERCADO DE CETES

El objetivo de este capítulo es conocer mejor el mercado de Cetes, se inicia mencionando la razón para los que fueron creados y las características de los mismos; luego se presenta las fórmulas oficiales que permiten relacionar el precio con la tasa de rendimiento; posteriormente se presenta las características del Mercado de Cetes; después se menciona el tratamiento de la información para la obtención de las llamadas “tasas de mercado” y se finaliza planteando el problema a resolver: la estimación de una curva que refleje la distribución de las tasas de mercado que sugieren jorobas y baches, y que considere una buena estimación a muy corto plazo y estabilidad a largo plazo.

2.1 Características de los Cetes.

Los Cetes o Certificados de la Tesorería de la Federación son títulos de crédito al portador, en los cuales se consigna la obligación del Gobierno Federal a pagar su Valor Nominal en la fecha de su vencimiento.

Los Cetes fueron creados mediante un decreto publicado en el Diario Oficial el lunes 28 de Noviembre de 1977. Se emitieron por primera vez en Enero de 1978. El Banco de México (Banxico) es el agente exclusivo del Gobierno Federal para su colocación y redención.²

La Secretaría de Hacienda y Crédito Público, mediante Banxico, determina las condiciones de colocación de Cetes considerando los siguientes objetivos:

- a) Regulación monetaria.
- b) Financiamiento de la inversión productiva del Gobierno Federal.
- c) Influencia sobre las tasas de interés.
- d) Propiciamiento de un sano desarrollo del mercado de valores.

Las Características de los Cetes son:

Valor Nominal. \$10.

Emisor. El Gobierno Federal.

Garantía/Riesgo. Estos títulos están garantizados específicamente por el Gobierno Federal.

Mercado/Plazo. Pertenecen al mercado de dinero con plazos a lo mas de un año. Los plazos a los que más comúnmente se emiten son: 28, 91, 182 y 364 días (4,13,26 y 52 semanas).

Día de Subasta. Banxico emite cada viernes una convocatoria para subastar una nueva emisión de Cetes. La Subasta o colocación primaria se realiza los martes.³

Día de Colocación. Las emisiones se colocan al público inversionista los jueves, que es cuando la emisión inicia. La amortización se realiza también los jueves.⁴

Tipo de Título. Son colocados bajo par, es decir con descuento. Son amortizables mediante una sola exhibición.

² La información de esta sección y parte de la siguiente está basada en el libro “Invierta en la Bolsa” pp. 85-87, actualizándola.

³ En caso de días feriados la convocatoria o el día de la subasta se realiza un día antes.

⁴ En caso de días feriados el día de colocación o amortización se realiza un día antes.

Rendimiento. Se establece mediante la tasa de descuento. El rendimiento se obtiene a través de la diferencia entre el precio de compra y el de venta por lo que es propiamente una ganancia de capital.

Tipo de Operaciones. Compraventa (también llamado “de contado” o “en directo”) y Reporto.⁵

Liquidez. Inmediata; existe un importante mercado secundario.

Liquidación. Existen diversas liquidaciones:

- Mismo día. La operación se liquida, ya sea de compra o de venta, el mismo día en que se acuerda.
- 24 Horas. La operación se pacta en un momento determinado y el pago (cuando es compra) o el cobro (cuando es venta) se realiza 24 horas después.
- 48 Horas. Una vez pactada la operación, el pago o el cobro se realiza 48 horas después.
- 72 Horas. Una vez pactada la operación, el pago o el cobro se realiza 72 horas después.
- 96 Horas. Una vez pactada la operación, el pago o el cobro se realiza 96 horas después.

Régimen Fiscal. Los rendimientos que obtienen las personas físicas por compraventa de Cetes están exentos del Impuesto Sobre la Renta (sólo para las emisiones que iniciaron en el 2002), en tanto que las personas morales las deben acumular a su base gravable. Los rendimientos que se obtienen de operaciones de reporto son acumulables a la base gravable, tanto para las personas físicas como para personas morales.

2.2 Fórmulas sobre Cetes.

En la Circular 10-20 emitida el 11 de enero de 1978 por la Comisión Nacional de Valores, se determina que los precios de los Cetes y su tasa de descuento anual deben ser:

$$P = VN * \left(1 - \frac{D * T}{360} \right) \quad (14)$$

$$D = \left(\frac{VN - P}{VN} \right) \left(\frac{360}{T} \right) \quad (15)$$

donde:

P = Precio del Cete.

VN = Valor nominal del título.

D = Tasa de descuento anual, expresada en fracciones de unidad.

T = Número de días que faltan para el vencimiento del Cete.

Observe que para los cálculos oficiales se considera un año de 360 días. A su vez, la tasa de rendimiento, como ganancia de capital puede ser expresado mediante.

⁵ “El Reporto es una figura legal por medio de la cual una persona que tiene dinero llamada Reportador lo da a otra llamada Reportado la cual tiene títulos de crédito los cuales cede en garantía al Reportador, el cual se compromete a devolver de la misma especie y cantidad dentro de un plazo previamente determinado (días del reporto) a cambio de recibir el principal del dinero prestado más un premio previamente especificado también (tasa premio), pag. 44 del Material de Apoyo “Mercado de Dinero” elaborado por la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles.

$$R = \left(\frac{PV - PC}{PC} \right) \left(\frac{360}{N} \right) \quad (16)$$

donde:

R = Tasa de Rendimiento anual, expresada en fracciones de unidad.

PV = Precio de Venta del Cete.

PC = Precio de Compra del Cete.

N = Número de días entre la compra y la venta del Cete.

Relacionemos la tasa de rendimiento con la tasa de descuento. Usando las expresiones (16) y (15) y considerando $PV=VN$, $PC=P$ y $N=T$ se tiene:

$$D * VN * T = (VN - P) * 360 = R * P * T \Rightarrow D * VN = R * P = R * VN \left(\frac{360 - D * T}{360} \right)$$

$$360D = R(360 - D * T) \Rightarrow R = \frac{360D}{360 - D * T} \Rightarrow$$

$$R = \frac{D}{1 - \frac{D * T}{360}} \quad (17)$$

Además como:

$$(VN - P) * 360 = R * P * T \Rightarrow P(R * T + 360) = 360VN \Rightarrow P = \frac{360VN}{360 + R * T} \Rightarrow$$

$$P = \frac{VN}{1 + \frac{R * T}{360}} \quad (18)$$

lo cual expresa el precio del Cete en términos de la tasa de rendimiento.

2.3 El Mercado de Cetes.

Los Cetes son los títulos más representativo del Mercado de Dinero, siendo este mercado la actividad crediticia a corto plazo (a lo mas un año, y en ocasiones inferior a un mes), en donde los oferentes invierten sus fondos con la expectativa de recuperarlos con prontitud, y los demandantes los requieren para mantener equilibrados sus flujos de recursos.⁶

Entre las características del Mercado de Cetes se destacan:

1) Subasta.

Se mencionó anteriormente que las emisiones de Cetes son subastadas por Banxico, pues bien, los participantes de la subasta son: Casas de Bolsa, Bancos, Sociedades de inversión y cualquier otra persona expresamente autorizada para tal efecto por el Banco de México. Difícilmente se subastan todos los plazos, usualmente se subastan Cetes a 28 y 91 días. Las últimas tasas de rendimiento de la Subasta reflejan las condiciones de mercado.

⁶ Pag. 33 del Material de Apoyo "Inducción al Mercado de Valores" elaborado por el Instituto Mexicano del Mercado de Valores.

2) Características Operativas.

- a) Una vez recibido los Cetes, los intermediarios pueden colocarlos o realizar operaciones (en venta o en reporto) con su clientela, o bien, efectuar transacciones con otro intermediario financiero. Las operaciones que realizan los Intermediarios con su clientela sólo es reportada a la Bolsa Mexicana de Valores para su publicación, en los Medios electrónicos las transacciones son realizadas entre intermediarios.
- b) El Mercado de Cetes es tan dinámico que es común pactar operaciones de Cetes antes de tenerlos, es decir, se realizan operaciones de compraventa o de reporto con liquidaciones mayor a mismo día antes de la fecha de inicio de la emisión, de tal modo que cuando se liquida la operación la emisión esté vigente. Es usual realizar operaciones con liquidaciones futuras.
- c) A pesar de que el Cete es un título a descuento, las operaciones se realizan en Tasas de Rendimiento y no en tasas de descuento ni en precios. A los intermediarios no les interesa que emisión le van a asignar sino el rendimiento del mismo.
- d) En México la operación de títulos de deuda se realiza a plazo y a rango de plazos. Una operación a plazo es cuando la tasa de rendimiento pactada se realiza con una sola emisión vigente, en tanto que una operación de rango de plazos es cuando la tasa pactada se realiza con diversas emisiones cuyos plazos al vencimiento están dentro de un rango predeterminado.

3) Liquidez.

Los Cetes son los títulos más líquidos del mercado, considerando a la liquidez como la capacidad o facilidad de convertir un instrumento financiero en dinero en efectivo. Sin embargo, el mercado de Cetes se caracteriza por una baja liquidez que se refleja por el hecho de que no todas las emisiones vigentes son operadas.

4) Medios Para Operar.

Las operaciones son realizadas en sistemas electrónicos de negociación como el “BMV-Sentra” de SIF-Garban Intercapital⁷, la cual opera el 50% del mercado de deuda nacional. Otro medio electrónico importante para operar es “Enlaces Int”⁸. Sin embargo, por las prácticas operativas del mercado mexicano, la información sobre las operaciones en estos sistemas electrónicos son presentadas con las siguientes características:

- a) La tasa de rendimiento es ponderada por volumen (número de títulos operados), esto implica que una emisión en particular pudo haber operado a diversas tasas con sus volúmenes respectivos.
- b) Alrededor de la mitad de las operaciones se realizan en rango de plazos, es decir, la transacción se pudo haber realizado con cualquier emisión cuyo plazo al vencimiento esté comprendido en el rango de plazos.

5) Estadísticas Operativas.

- a) El mercado de Cetes es de muy corto plazo, el gran volumen de las operaciones son realizadas a 1 día, luego a 7 y después a 28 días, y en menor medida en otros plazos.

⁷ Esta empresa surgió de una fusión entre “Servicios de Integración Financiera” (SIF) subsidiaria de la Bolsa Mexicana de Valores y la correduría internacional Garban Intercapital.

⁸ Su propietaria es una empresa de corretaje con 100% de capital mexicano.

- b) Aunque las operaciones de reporto se pueden realizar hasta por un plazo de 360 días, la mayoría de las operaciones se realizan a 1 día y luego a 7 días.
- c) En cuando el tipo de liquidaciones, la mayoría de las operaciones se realizan con liquidación a mismo día y a 24 horas, pocos se realizan a 48 horas, y de vez en cuando a 72 y 96 horas.

6) Pago de Impuestos.

A partir del 2003 la Secretaría de Hacienda grava con el Impuesto Sobre la Renta (ISR) a los Cetes, y otros instrumentos de deuda del Gobierno mexicano, por otra parte redujo de 1.4% a 0.5% la tasa de retención del ISR sobre los ingresos por intereses del sistema financiero. Por lo anterior, actualmente operan en el mercado de Cetes emisiones del 2002 (que no pagan impuestos) y las emisiones del 2003 (que si pagan).

Sobre los Cetes que se emitieron en el 2002 (con Tipo de Valor "B") al momento de escribir esto, sólo existe una emisión vigente el cual vence el 27 de Noviembre del 2003.

2.4 Tratamiento de la Información para la Obtención de Tasas de Mercado.

Como todo proceso de obtención de información se presentan dificultades sobre la cantidad y calidad de la información. En cuanto a la calidad, la pregunta es ¿Qué tan representativo y confiable es la información?. En cuanto a la cantidad, la dificultad es la falta de operatividad de todas las emisiones vigentes, las operaciones se concentran en las emisiones de corto plazo.

El objetivo del tratamiento de la información es la de obtener los nodos de mercado, esto es los nodos de plazo-rendimiento que servirán de base para la estimación de la curva, para ello sólo se considerarán las emisiones que iniciaron en el 2003 (con Tipo de Valor "BI").

Criterios Generales.

Para el proceso de obtención de tasas de mercado se consideran los siguientes criterios generales:

- a) Las operaciones incorporadas son las realizadas entre las instituciones financieras y no entre un Intermediario y su clientela.
- b) Puesto que en las operaciones de reporto la tasa asociada al premio entregado es la tasa premio, las operaciones de reporto son incorporadas como operaciones con tasa de rendimiento igual a la tasa premio y como plazo los días del reporto.
- c) Las tasas de mercado deben de reflejar las condiciones de mercado más reciente, esto es, ante una gran movimiento a la alza o a la baja en el nivel de las tasas, las tasas de mercado deben reflejar esta situación.
- d) En los días que existe un gran volatilidad en las tasas es de mucha utilidad los últimos hechos; y las encuestas deben actualizarse.
- e) Al considerar últimos hechos deben considerarse el volumen operado para saber si es un nivel de mercado o tan sólo un dato aislado en cuyo caso se debería excluirlo.
- f) Ante la falta de operaciones para una emisión se pueden considerar sus posturas aunque para las emisiones poco líquidas las posturas son muy volátiles.

Metodología.

Sin pretender definir una metodología de recolección, tratamiento y depuración, se presenta en términos generales lo que realizan los Proveedores de Precios, de hecho cada proveedor tiene una metodología propia bastante detallada la cual no es pública.

- 1) Considerar como fuentes de información:
 - a) Las subastas semanales de Banco de México.
 - b) Las operaciones de contado y de reporto realizadas en los sistemas electrónicos de negociación como el de SIF-Garban Intercapital o el de Enlaces Int.⁹
 - c) Las posturas de compra y de venta en los sistemas electrónicos anteriores.
 - d) Encuestas realizadas a las instituciones financieras que más operan Cetes¹⁰, a los plazos de 1,28,91,182 y 364 días.
- 2) Convertir las operaciones de rango de plazos a operaciones de un solo plazo, para ello se puede considerar como plazo la media del rango o un ponderado con base en el volumen en circulación de los títulos que están en el rango.
- 3) Homologar a mismo día las operaciones concertadas a otras liquidaciones¹¹, mediante:

$$1 + TR^{MD} * \frac{DP}{360} = \left(1 + TR^{24k} * \frac{DP - m_k}{360} \right) \left(1 + TH * \frac{m_k}{360} \right)$$

donde:

TR^{MD} = Tasa de rendimiento homologada a liquidación mismo día.

TR^{24k} = Tasa de rendimiento a homologar, pudiendo liquidarse a 24, 48, 72 y 96 horas, considerando k=1,2,3 y 4 respectivamente.

TH = Tasa de rendimiento para homologar.¹²

DP = Número de días entre la fecha de vencimiento y la fecha de concertación. (para el caso de los reportos, DP=Días del reporto + m_k).

m_k = Número de días entre la fecha de liquidación y la fecha de concertación.

- 4) Se promedian las tasas por el volumen operado y se eliminan las que están fuera de ciertos parámetros.
- 5) A fin de reducir los nodos que se tienen que generar y luego ajustar, se divide en rangos el plazo de 1 a 364 días y se convierte la tasa original en otra equivalente siendo el plazo la media del rango.

$$TE = \left[\left(1 + \frac{TO * PO}{360} \right)^{\frac{PN}{PO}} - 1 \right] * \frac{360}{PN}$$

donde:

TE = Tasa de rendimiento equivalente al nuevo plazo.

TO = Tasa de rendimiento original.

PO = Plazo original.

PN = Plazo nuevo.

⁹ Estos sistemas son los principales medios para operar en el mercado de deuda nacional.

¹⁰ En el sector financiero se consideran que son Bancomer, Banamex y BBV entre otros.

¹¹ Si para una plazo de 28 días la tasa de operación fue de 5.40 y su liquidación es 24 horas, en realidad la tasa aplicable debe estar referida a 29 días ya que incluye un riesgo de cambio en el nivel de tasas durante el día que falta para su liquidación.

¹² El mercado y en particular Banxico utiliza una tasa de interés a 24 horas, aunque debería depender del plazo para la liquidación.

- 6) Las tasas resultantes se promedian, luego se validan con las encuestas y con los que aparecen en los sistemas de distribución de información sobre tasas de mercado.¹³

2.5 Existencia de Jorobas y Baches en las Tasas de Mercado.

El tratamiento de la información sobre operaciones garantizan la existencia de tasas de mercado correspondiente a los plazos más relevantes del mercado de Cetes, a saber: 1, 28, 91, 182 y 364 días. En donde el gran volumen del mercado se concentra en las tasas de fondeo, que corresponde a 1 día.

Generalmente, en los países con mercados líquidos las tasas de mercado (o nodos) presentan consistencia que se refleja en nodos crecientes, o bien sugieren curvas de rendimiento suaves o con escasa curvatura.

La forma que toma la estructura intertemporal de tasas pueden deberse a:

- a) las necesidades de flujos de efectivo a distintos plazos, por ejemplo para el pago de impuestos.
- b) La preferencia de los agentes de invertir a corto, mediano o largo plazo, o el porcentaje que pretende invertir a cada tipo de plazo.
- c) Al volumen operado, ya que usualmente a menor volumen operado las tasas son más volátiles.
- d) Las expectativas sobre el nivel futuro de tasas, incluyendo la inflación.

Por las características del mercado de Cetes las tasas sugieren curvas de rendimiento invertidas y encorvadas, es decir con jorobas o baches o una combinación de ellos. Por ejemplo, en el año 2001 eran frecuentes tasas alternadas de mercado que requerían de más curvaturas que el Modelo Svensson-Nelson-Siegel que el Proveedor de Precios Valmer usaba en ese entonces. Más aún, pueden existir hasta 4 valores extremos en los plazos relevantes (1,28,91,182 y 364 días) combinando tasas ascendentes y descendentes como se indica en la Fig. 3.

Todo lo anterior, permite plantear el problema que motivó este trabajo:

¿Como estimar una Curva de Rendimiento de Cetes cuando la distribución de tasas de mercado sugiere curvas con jorobas y baches, considerando la importancia de una buena estimación a muy corto plazo y estabilidad a largo plazo?

En el siguiente capítulo se presentan las metodologías que los Proveedores de Precios utilizan para estimar una curva de rendimiento de Cetes.

¹³ Como Bloomberg, Reuters, El Economista, etc. que presentan niveles de tasas de mercado.

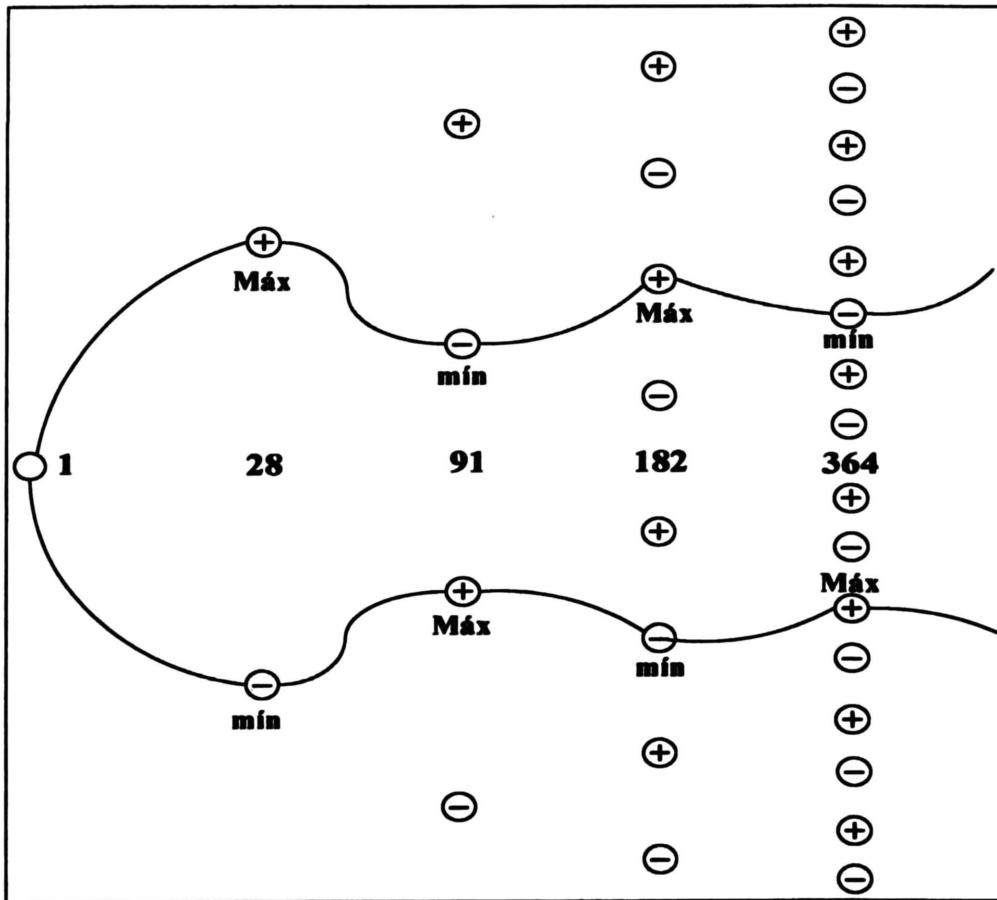


Figura 3: Tasas de rendimiento de Cetes en los plazos relevantes que pueden dar origen a 4 valores extremos, donde el signo “+” indica tasa ascendente y “-” descendente.

ESTIMACIÓN DE UNA CURVA LIBRE DE RIESGO POR LOS PROVEEDORES DE PRECIOS.

El objetivo de este capítulo es conocer las herramientas analíticas con que cuentan los proveedores de precios; si consideramos a los proveedores como agentes promotores de una cultura financiera, ellos son un reflejo del estado de desarrollo en que se encuentra el mercado mexicano con respecto a lo que se ha hecho a nivel mundial en cuanto a modelos matemático-financieros.

Se empieza con una breve historia sobre la valuación de títulos en México que inició la Bolsa Mexicana de Valores, luego se menciona el origen de los Proveedores de Precios; más que una curva de rendimiento para Cetes, los proveedores generan una curva libre de riesgo incorporando información de los Bonos de largo plazo emitidos por el Gobierno Federal mediante Banxico, por lo que es necesario describir este proceso de incorporación; posteriormente, se presentan en términos generales las metodologías que utilizan los Proveedores de Precios (Valmer, PIP y GBS Data), finalizando con un cuadro resumen de los modelos utilizados.

3.1. La Valuación de Títulos en México.

La valuación en México surgió en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) como un proyecto para valorar los instrumentos que tienen en posición las sociedades de inversión, en contraposición al precio de compra de tales instrumentos. Valorar un instrumento es asignar un precio que refleje las condiciones de su mercado, esto es, sus operaciones, sus características, su calidad crediticia, etc.

El objetivo de la valuación fue proporcionar a los participantes del Sistema Financiero Nacional un vector confiable y oportuno de precios para la valuación de sus instrumentos financieros, mediante el análisis, desarrollo, seguimiento y mantenimiento de métodos y algoritmos así como de la revisión y control tanto de la calidad de la información recibida por la BMV para dicho proceso como de la información contenida en el vector de precios generado.

En 1993 la BMV empezó a generar y proporcionar en forma gratuita un vector de precios, iniciando con la estimación de una curva de descuento para Cetes. El vector se estuvo generando con base en la regulación vigente y en los procedimientos establecidos por un Comité de Valuación, formado por: CNBV, Banxico, AMIB, ABM, CONSAR, AMAFORE, AMIS¹⁴ y las Valuadoras de Sociedades de Inversión. Los usuarios del vector fueron las Casas de Bolsa, Bancos, Afores, Valuadoras de Sociedades de Inversión, Indeval y Mexder.¹⁵

¹⁴ CNBV = Comisión Nacional Bancaria y de Valores, AMIB = Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles, ABM = Asociación de Banqueros de México, CONSAR = Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, AMAFORE = La Asociación Mexicana de Administradoras de Fondos para el Retiro, AMIS = Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros.

¹⁵ Indeval = Instituto para el Depósito de Valores, Mexder = Mercado Mexicano de Derivados .

Los resultados obtenidos fueron:

- a) Se creó un sistema integral que proporcionó en forma eficiente la estimación de precios y tasas para la valuación diaria de las posiciones propias de los intermediarios financieros.
- b) Las carteras de las sociedades de inversión fueron valuadas con el vector de la Bolsa.
- c) Se apoyó el desarrollo de los proyectos estratégicos de instituciones del Gremio Bursátil, como el Sistema de Préstamo de Valores del Indeval, el Sistema de Vigilancia de la CNBV, etc.
- d) Ordenamiento de prácticas operativas del mercado mediante el desarrollo de parámetros de fluctuación.
- e) Integración y desarrollo de bases de datos para el mercado.
- f) Desarrollo de nuevos productos de información especializados, como boletines electrónicos e impresos.

México fue el pionero en la valuación de títulos en América Latina con los siguientes hechos:

- a) Consulta en Febrero de 1996 sobre la estimación de la curva de Cetes por parte del Departamento de Investigación de la Bolsa de Guayaquil Ecuador.
- b) Visita en Octubre de 1998 de la Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores – CONASEV de Perú, similar a la CNBV en México.
- c) Visita en Octubre de 1999 de la Superintendencia de Administradoras Privadas de Fondos de Pensiones de Perú, similar a la CONSAR en México.

3.2. Los Proveedores de Precios (“Price Vendors”).

A fin de crear condiciones de competencia que mejoren la calidad de la información y las metodologías utilizadas, la CNBV que presidía el Comité de Valuación decidió crear la figura de “Proveedor de Precios”, que en los mercados internacionales es conocida como “Price Vendor”. Adicional a ello, la BMV no tenía como función primaria la generación de información para la valuación de los títulos.

Así el 9 de Agosto de 1999 fue emitida la Circular “Disposiciones Aplicables a Proveedores de Precios” la cual establece la obligación de registrar a valor razonable los títulos, documentos e instrumentos financieros que formen parte de carteras y portafolios de inversión que tengan las Casas de Bolsa, los Bancos, las Sociedades de Inversión, las Sociedades financieras de objeto limitado (Sofoles), las Sociedades de ahorro y préstamo y demás organizaciones auxiliares de crédito.

Esta Circular define al Proveedor de Precios como aquella persona moral cuyo objeto social es exclusivamente la prestación habitual y profesional del servicio de cálculo, determinación y proveeduría o suministro de precios actualizados para Valuación de valores, documentos e instrumentos financieros. Así mismo, están obligados a estimar una curva de tasas de interés libre de riesgo.

Iniciaron en Agosto de 2000 cuatro proveedores de precios: Valmer¹⁶, PIP¹⁷, GBS Data¹⁸ y Valuadora y Provedora de Precios; esta última desapareció poco después. Los proveedores

¹⁶ También conocido como “Valor de Mercado”, siendo su nombre oficial “Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S.A. de C.V.”

de precios ofrecieron oficialmente sus servicios en Octubre de 2000. Sólo Valmer y PIP tienen como socios empresas con sistemas electrónicos de negociación. Actualmente, PIP tiene aproximadamente el 50% del mercado de usuarios, en tanto que Valmer y GBS Data tienen alrededor del 25% cada uno.

Para los Proveedores de Precios es de suma importancia estimar la estructura intertemporal de tasas de Cetes, mas aún, generar una curva nominal de tasas libre de riesgo ya que prácticamente toda la valuación de los diversos instrumentos hace referencia directa o indirectamente a estas tasas. Puesto que la finalidad de los Proveedores es la valuación de los instrumentos, la estimación de la curva debe reflejar la condiciones de mercado del día.

Cada uno de los proveedores ha desarrollado una metodología propia para la obtención de los nodos de tasas de mercado y para la estimación de una estructura intertemporal de tasas de rendimiento, dichas metodologías las manejan muy confidencial por el temor de que sus competidores la conozcan, entregando una versión simplificada a la autoridad regulatoria (CNVB) y a los clientes que la soliciten¹⁹, lo cual implica las siguientes limitaciones:

- 1) Es imposible que alguien fuera de estas empresas reproduzca las tasas de mercado que ellas reportan.
- 2) Cada proveedor obtiene tasas diferentes de mercado, aunque se encuentran en niveles similares.
- 3) Por no tener los mismos insumos, sus curvas estimadas de rendimiento no son comparables.
- 4) Aún reproduciendo el modelo general que utilizan para la obtención de la curva de rendimiento, es difícil obtener con exactitud las mismas tasas.

Por lo anterior, sólo se hará una descripción general de sus metodologías y se presentarán sus resultados, sin la intención de replicar sus procesos.

Pero antes, describiremos el proceso para incorporar información de los bonos de largo plazo que subasta Banxico.

3.3. Incorporación de Información de los Bonos de Largo Plazo de Banxico.

Entre la diversa información que deben generar los Proveedores para sus clientes está la estimación de una curva de tasas de rendimiento libre de riesgo, puesto que los Cetes son títulos garantizados por el Gobierno Federal son considerados libre de riesgo por lo que la estructura intertemporal de tasas de rendimiento de Cetes es parte de esta curva libre de riesgo en el rango de 0 a 1 año. Para la generación completa de esta curva, a las tasas de mercado de Cetes se les incorporan nodos asociadas a las emisiones vigentes de los Bonos de largo plazo emitidos por el Gobierno Federal y subastados por Banxico.

¹⁷ Que significa "Proveedor Integral de Precios S.A. de C.V.", cuyos socios son la empresa de corretaje interbancario "Enlaces Int", la valuadora COVAF y la empresa "BARRA" que elabora sistemas de análisis de inversión y riesgo financiero.

¹⁸ O bien, "Grupo Proveedor de Precios Bursátiles, S.A. de C.V." tiene como socios la Valuadora GAF, la consultora Bursamétrica y la calificadora Standard and Poor's.

¹⁹ Es más, entre ellos no tienen las claves de acceso para consultar los resultados de sus competidores.

Los títulos referidos anteriormente son bonos con cupones semestrales (182 días) que pagan una misma tasa fija y son emitidos a 3, 5, 7 y 10 años por el Gobierno Federal a través de Banxico. Al igual que los Cetes son subastados semanalmente aunque en términos de precios, Banxico usualmente subasta uno o dos emisiones, y puede volver a subastar emisiones ya vigentes.

El nombre oficial de estos instrumentos son “Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija”, el mercado los conoce como “Bonos Tasa Fija”, Bonos M o simplemente Bonos. La clave para su tipo de valor de valor está formado por la letra M y un dígito indicando el plazo de la emisión.²⁰

Los Bonos M tienen como valor nominal \$100 y operan en precios, el cual incluye los intereses del cupón vigente. Sus operaciones son sólo de compraventa, ya que no está permitido hacer reportos con ellos, con liquidaciones: mismo día, 24, 48, 72 y 96 horas.

Las fuentes de información para estos bonos son:

- a) La subasta semanal de Banxico.
- b) Las operaciones de contado realizadas en los sistemas electrónicos de negociación.
- c) Las posturas de compra y de venta en estos sistemas.

Las diversas liquidaciones se homologan a mismo día, se promedian los precios por el volumen operado y se eliminan los que están fuera de ciertos parámetros.

En general el precio de un bono es el valor descontado de sus flujos futuros, para el caso de un Bono M estos flujos son conocidos por pagar una tasa fija por lo que se puede relacionar las tasas para descontar cada flujo con el precio del bono, esta idea es lo que hace la técnica conocida como Bootstrapping. Los pasos del bootstrapping son:

- 1) Definir el precio teórico.

$$\text{Precio} = \sum_{\# \text{ de Flujos}} \frac{\text{Flujos de efectivo}}{\left(1 + \text{Tasa} * \frac{\text{Días por vencer del flujo}}{360}\right)}$$

- 2) Calcular los días por vencer de los bonos y ordenarlos de manera creciente.
- 3) Calcular los cortes de cupón.
- 4) Calcular los flujos futuros.
- 5) Calcular la tasa efectiva para descontar cada flujo.
- 6) Se estima el precio teórico.
- 7) Minimizar la diferencia entre el precio teórico y el de mercado.

El cálculo de la tasa para descontar cada flujo es la parte fina de este proceso ya que en este momento sólo se puede estimar las tasas de rendimiento de Cetes hasta un año y además se requiere extrapolar estas tasas para plazos mayores.²¹

Las tasas utilizadas para descontar los flujos deben ser consistentes, para ello es importante el ordenamiento de los bonos y establecer un proceso iterativo, el cual empieza con el primer bono que vence y se halla la tasa que corresponda a sus días por vencer, con este

²⁰ Así, el título M3 se refiere a un Bono M emitido a un plazo de 3 años, el M5 a 5 años, M7 a 7 años y el M0 a 10 años. En enero de 2000 se emitió el primer bono, el M3 con serie 030123.

²¹ Para la estimación inicial de la curva de rendimiento de Cetes se requiere usar un método que permita extrapolar: Nelson-Siegel, Svensson-Nelson-Siegel, polinomios ortogonales, polinomios con mínimos cuadrados, etc.

nuevo nodo se vuelve a calcular las tasas extrapoladas para hallar la tasa que corresponda a los días por vencer del siguiente bono, y así sucesivamente.

Mediante este proceso de bootstrapping se obtendrá tanto nodos extras como emisiones vigentes existan de los bonos M con plazos al vencimiento mayor a 1 año. Por lo que para la generación de una curva nominal libre de riesgo se consideran los nodos de Cetes y los nodos asociados a los bonos M.

Iniciaremos la presentación de los Proveedores de Precios con Valmer por ser la heredera de la experiencia de la BMV; luego presentaremos a PIP, por ser el líder en cuanto al número de clientes; y finalmente, a GBS Data.

3.4. Método Utilizado por Valmer (“Valor de Mercado”).

“Valor de Mercado” es una empresa fundada por la Bolsa Mexicana de Valores y Algorithmics Incorporated, empresa canadiense dedicada al desarrollo de sistemas y metodologías de valuación de portafolios y cálculo para la administración del riesgo financiero.

Valmer utiliza un modelo de Spline Suavizado (“smoothing spline”) por ofrecer una buena bondad de ajuste en los nodos de Cetes, una trayectoria lo más suave posible entre los nodos utilizados y consistencia en las tasas forward. Veamos que son los splines y el modelo particular que utiliza Valmer.

El Método de los Splines.

Es un modelo de interpolación entre las diversas tasas de referencia (nodos), que se basa en suponer que no existe una sola función que describa toda la curva, sino que puede ser descrita mediante funciones individuales definidas en una partición del rango a estimar. Estas funciones individuales son polinomios²² que deben cumplir lo siguiente:

- 1) Que inicien y finalicen en los nodos.
- 2) La primera derivada del polinomio que finaliza y del que inicia sean iguales en los nodos (lo anterior se expresa diciendo que “las primeras derivadas sean iguales en los nodos”).
- 3) Las segundas derivadas sean iguales en los nodos.
- 4) Y así sucesivamente hasta que la derivada del orden anterior al grado del polinomio sean iguales en los nodos.
- 5) Condiciones adicionales en las derivadas al inicio o al final de la curva para completar y poder resolver el sistema de ecuaciones generado.

Ejemplos de splines son la interpolación lineal, la interpolación cúbica, etc. En el Anexo 1 se presenta el modelo de los Splines con polinomios de cuarto grado.

Definamos a continuación la suavidad de una función. Sea f una función en el rango $[0, T]$, se define la suavidad Z como:

$$Z = \int_0^T [f''(s)]^2 ds$$

Si Z fuera cero la función sería perfectamente suave.

²² Aunque podría generalizarse a otro tipo de funciones.

Se puede probar que la función más suave que se ajusta a un conjunto de datos y que sea continua y dos veces diferenciable es un spline cúbico, esto es, un spline cúbico para las tasas de rendimiento o para los precios produce la curva más suave.

Consideremos tasas continuamente capitalizables, entonces el precio puede expresarse como:

$$P(t) = e^{-R(t)}$$

donde

t = plazo al vencimiento.

$R(t)$ = tasa de rendimiento al vencimiento continuamente capitalizable.

Definiendo a la tasa forward continua $f(t)$ como:

$$f(t) = -\frac{\partial P(t)/\partial t}{P(t)}$$

se obtiene las siguientes relaciones:

$$f(t) = R(t) + tR'(t)$$

$$f'(t) = 2R'(t) + tR''(t)$$

$$f''(t) = 3R''(t) + tR'''(t)$$

Lo anterior implica que para un spline cúbico en las tasas $R(t)$, $f'(t)$ no será igual en los nodos ya que no hemos restringido $R'''(t)$. A pesar de que el spline cúbico es el más suave, la curva de tasas forward presenta las siguientes dificultades:

- a) No es suave, por no ser dos veces diferenciable ya que $f'(t)$ tiene picos en sus puntos de mercado.
- b) Tienden a ser volátiles en los puntos de mercado.

Los problemas anteriores son resueltos mediante el teorema de Máximo Suavizamiento de la Curva de Tasas Forward que demostraron Adams y Van Deventer en 1994 que señala que la estructura intertemporal de tasas forward que satisface el criterio de máxima suavidad y al mismo tiempo se ajuste a los precios observados es un spline de cuarto grado. Este modelo consiste en expresar la tasa forward como un polinomio de cuarto grado en cada sección que cumpla las condiciones requeridas y relacionando el precio $P(t)$ con la tasa forward $f(t)$ mediante:

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right)$$

El Modelo de Valmer.

No obstante que los splines son las funciones más suaves entre dos puntos, puede ser que al moverse los puntos se generen curvas aún más suaves, como se muestra en la figura 4.

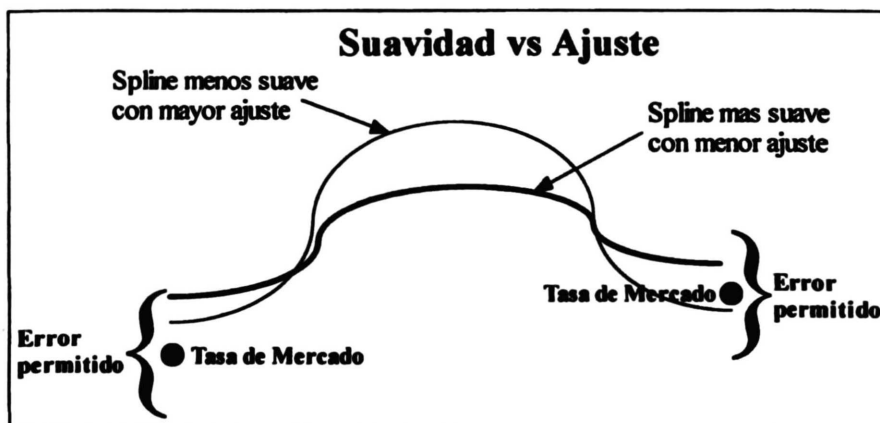


Figura 4: La suavidad puede mejorar al permitir un error mayor en el ajuste.

Tomando como base lo anterior, Valmer propone el siguiente modelo:

$$\min_f p \sum_{i=1}^n w_i (r_i - f(t_i))^2 + (1-p) \int_{t_1}^{t_n} \lambda(s) [f''(s)]^2 ds \quad (19)$$

El cual pretende minimizar tanto el error como la suavidad, siendo el ponderador entre ellos el valor de p que se encuentra en el rango $[0,1]$, de tal modo que si $p=0$ la función objetivo se reduce al cálculo de los splines visto anteriormente y cuando $p=1$ el problema se reduce al de mínimos cuadrados. Analicemos cada parte de la expresión 17.

a) *Error o ajuste de nodos.*

En la primera parte, la sumatoria mide la diferencia que existe entre las tasas de rendimiento de mercado y los rendimientos del modelo, estas diferencias están ponderadas por las w_i 's que se pueden definir como:

$$w_i = \frac{1/\text{plazo}_i}{\sum_{i=1}^n (1/\text{plazo}_i)}$$

donde plazo_i significa el plazo del nodo i .

La característica que deben cumplir estos ponderados es que sean parte de una función decreciente, para tener un mejor ajuste en los nodos de corto plazo.

b) *Suavidad de la curva.*

En la segunda parte, la integral tomada del nodo inicial al nodo final mide la suavidad de la función resultante, siendo $\lambda(t)$ el parámetro de suavizamiento que podría tomar el valor de 1. De hecho, si este ponderador fuera una función creciente se le daría mas peso al suavizamiento de largo plazo. El Spline utilizado es el de cuarto grado en las tasas forward.

Para resolver este modelo se requiere de un procedimiento iterativo y considerar un error máximo permitido, por ejemplo de 3 puntos base.

Puesto que los splines son polinomios segmentados pueden presentar en ocasiones extrapolaciones explosivas, esto implicaría inestabilidad en las tasas de largo plazo.

Resultados.

En la Tabla 1 se presenta los nodos que se utilizaron para estimar la curva nominal libre de riesgo, observe el error entre la tasa de mercado y la tasa estimada. Las tasas son de rendimiento y las estimadas se expresan a 6 decimales por disposición de la autoridad, y corresponden al jueves 25 de septiembre de 2003.

Plazo	Tasa de Mercado	Tasa Estimada	Error de Estimación
1	4.200000	4.199998	-0.000002
28	4.560000	4.560381	0.000381
73	5.000000	4.988599	-0.011401
80	5.000000	5.001088	0.001088
86	5.000000	5.000659	0.000659
91	5.000000	5.003240	0.003240
128	5.180000	5.175588	-0.004412
171	5.550000	5.530034	-0.019966
182	5.550000	5.561831	0.011831
339	5.850000	5.849113	-0.000887
364	5.850000	5.850650	0.000650
826	7.120873	7.120836	-0.000037
1554	8.339406	8.339424	0.000018
2282	10.240135	10.240141	0.000006
3374	12.645622	12.645644	0.000022
5460	16.683920	16.683916	-0.000004
6370	18.533047	18.533050	0.000003
7280	20.527367	20.527366	-0.000001
8190	22.724743	22.724743	0.000000
9100	25.178441	25.178440	-0.000001
10010	27.941227	27.941232	0.000005
10920	31.068358	31.068354	-0.000004

Tabla 1: Nodos utilizados por Valmer para la generación de la curva nominal libre de riesgo, correspondiente al 25 de septiembre de 2003.

En la Figura 5 se muestra la curva que generó Valmer y que publicó en su página en Internet (www.valmer.com), correspondiente al 25 de septiembre de 2003.

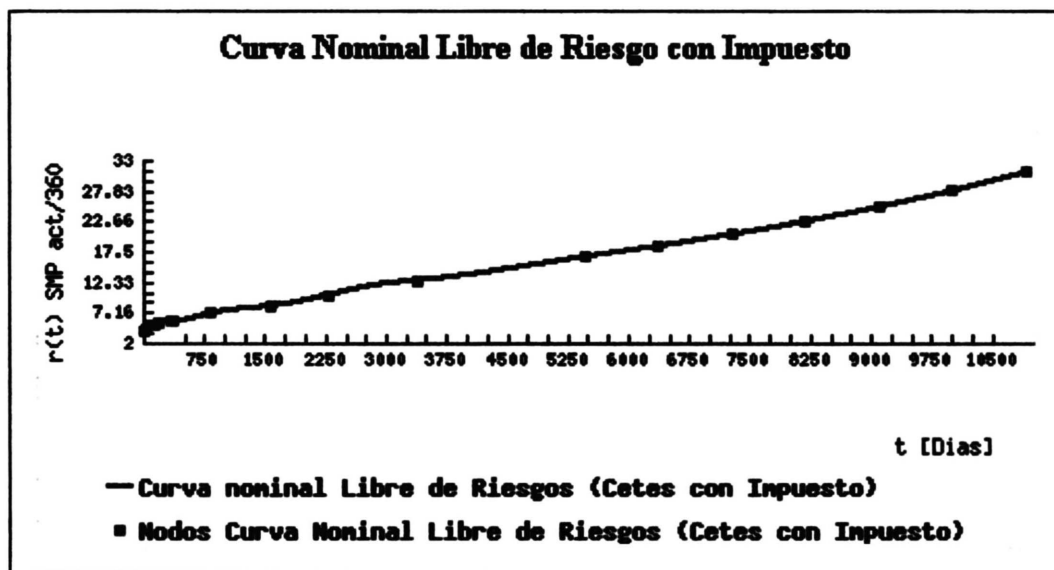


Figura 5: Curva nominal libre de riesgo generada por Valmer correspondiente al 25 de septiembre de 2003 y presentada en su página en Internet.

3.5. Método Utilizado por PIP (“Proveedor Integral de Precios”).

Los socios de “Proveedor Integral de Precios S.A. de C.V.”, mejor conocido como PIP, son: la empresa “Enlaces Int”, distribuidora de información que posee un sistema de negociación de títulos; la valuadora de sociedades de inversión COVAF; y la empresa “BARRA” dedicada a la investigación financiera, desarrollo de tecnología de riesgo e inversión y consultoría. PIP menciona en su página en Internet que más del 50 % de las instituciones financieras que operan en México son clientes suyos, al 31 de marzo de 2002.²³

PIP utiliza dos modelos para estimar la curva nominal libre de riesgo, dependiendo del número de nodos (u observaciones) con que cuente. Cuando existen muchos nodos utiliza los Polinomios Ortogonales de Chebychev, en tanto que si sólo cuenta con pocos nodos emplea el modelo de Vasicek;²⁴ PIP indica que lo anterior se debe a que si se aplicaran polinomios ortogonales a un conjunto reducido de observaciones se obtendría una curva altamente inestable y con posibilidades de arbitraje.

El Modelo de los Polinomios Ortogonales de Chebychev.

Cuando se estiman curvas de estructuras de tasas a través de polinomios se presenta una dificultad conocida como multicolinealidad, que significa que las variables utilizadas están altamente correlacionadas entre sí o, de manera geométrica, describen vectores en la misma dirección, lo que ocasiona que las estimaciones sean altamente inestables. Para reducir este problema se utilizan transformaciones ortogonales del plazo.

En la sección 1.4 de este trabajo se presentó la definición de “Polinomios Ortogonales con la función ponderadora $p(x)$ ”, siendo esta función una función no negativa definida en un intervalo $[a,b]$.

Así, los polinomios $Q_0(x), Q_1(x), \dots$ de grado $0, 1, \dots$ como factores de $\sqrt{p(x)}$ son ortogonales si:

$$\int Q_n(x) * Q_m(x) * p(x) dx = 0 \quad \text{para } n \neq m$$

Para el caso de la familia de Polinomios de Chebychev se tiene que: $a = -1$, $b = 1$,

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, y los polinomios son:

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cos^{-1} x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Un análisis completo de los Polinomios de Chebychev se encuentra en el libro de Kreyszig (1978) pp.336-352, el cual presenta la fórmula recursiva:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

la cual permite hallar de manera práctica los demás polinomios, siendo los primeros:

²³ Porcentaje que se ha mantenido, de hecho pocos clientes cambian de Proveedor de Precios ya que sus sistemas han sido diseñados para recibir información bajo cierto formato y en caso de tener títulos exóticos éstos ya están siendo valuados; desde luego, los proveedores siempre están a la caza de los grandes corporativos financieros.

²⁴ PIP no especifica en su documento sobre metodologías cual es el valor exacto para su decisión.

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1, & T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

Veamos en términos generales el proceso que sigue PIP.

Considerando que el precio $P(t)$ es :

$$P(t) = e^{-iR(t)}$$

donde:

t = plazo al vencimiento.

$R(t)$ = tasa de rendimiento al vencimiento continuamente capitalizable.

La tasa de rendimiento puede expresarse como un polinomio del plazo al vencimiento.²⁵

$$R(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \dots + \alpha_k t^k$$

Sea T el mayor plazo a estimar, entonces $t \in [0, T]$, consideremos una transformación del plazo:

$$x(t) = \frac{2t}{T} - 1 \tag{20}$$

de tal modo que $x(t) \in [-1, 1]$, de esta manera la tasa de rendimiento puede expresarse en términos de los polinomios de Chebychev.

$$R(t) = \lambda_0 + \lambda_1 T_1(x(t)) + \lambda_2 T_2(x(t)) \dots + \lambda_k T_k(x(t))$$

de la expresión (20) se obtiene

$$t = \frac{[1 + x(t)] * T}{2}$$

Así el precio puede expresarse como

$$P(t) = \exp\left(-\left[\frac{[1 + x(t)] * T}{2}\right] \left[\lambda_0 + \lambda_1 T_1(x(t)) + \lambda_2 T_2(x(t)) \dots + \lambda_k T_k(x(t))\right]\right)$$

donde las λ 's son tales que minimizan los errores de estimación, dado por

$$\min_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k} \sum_{i=1}^n |P_i - P(t_i)|, \quad \text{donde } P_i = \text{Precio de mercado correspondiente al plazo } i.$$

Lo cual se logra mediante un proceso iterativo y definiendo un máximo error permitido.

Finalmente, PIP señala en su página en Internet que “La ventaja de estos polinomios (ortogonales de Chebychev) radica en que la forma de un segmento de la curva no contamina al resto, permitiendo obtener una curva suave sin oportunidades de arbitraje”

El Modelo de Vasicek.

Este modelo es considerado de equilibrio general debido al uso de condiciones de arbitraje, tiene como principal ventaja el de poder construir una curva precisamente libre de oportunidades de arbitraje. Así, aún con pocas observaciones se construye una curva consistente.

²⁵ Al parecer, PIP utiliza un polinomio de grado 4, el grado dependerá del número de datos, la dispersión de éstos y el grado de exactitud necesario en la expresión polinomial.

Vasicek (1997) propuso un modelo en el cual se asume que la tasa de interés de corto plazo (o tasa spot) instantánea libre de riesgo presenta reversión de la media hacia un valor constante, que puede ser descrita por el siguiente proceso:

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma * dZ(t) \quad (21)$$

donde $r(t)$ es la tasa spot al plazo t , k y θ son constantes positivas y conocidas, σ es la volatilidad constante de las tasas spot, y $Z(t)$ es un movimiento browniano estándar²⁶, el cual representa la única fuente de incertidumbre. Puesto que:

Si $r(t) > \theta \Rightarrow dr(t)$ tenderá a ser negativo, por tanto $r(t)$ disminuye.

Si $r(t) < \theta \Rightarrow dr(t)$ tenderá a ser positivo, por tanto $r(t)$ aumenta.

Por lo que θ es el nivel de largo plazo al cual converge, en promedio, la tasa corta, siendo k la velocidad de convergencia.

Para estimar los parámetros k , θ y σ se considera la siguiente expresión:

$$r(t+1) = k\theta + (1-k)r(t) + \varepsilon(t) \quad , \quad \text{donde } \varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

y se realiza la regresión lineal:

$$r(t+1) = \beta_0 + \beta_1 r(t) + \varepsilon(t)$$

siendo los estimadores de los parámetros:

$$\hat{k} = 1 - \hat{\beta}_1 \quad ,$$

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\beta}_0}{1 - \hat{\beta}_1} \quad ,$$

$\hat{\sigma}$ = desviación estándar de las tasas spot.

El modelo supone que el precio del bono cupón cero tiene la forma funcional:

$$P(t) = e^{A(t) - r(t)D(t)}$$

donde

$$D(t) = \frac{1 - e^{-kt}}{k} \quad ,$$

$$A(t) = \frac{1}{k^2} \left[D(t) - t \left(k^2 \theta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - \frac{\sigma^2 D(t)^2}{4k} \right]$$

$$\text{Puesto que } P(t) = e^{-R(t)} \Rightarrow R(t) = -\frac{1}{t} \ln P(t) = \frac{r(t)D(t) - A(t)}{t}$$

Lo cual expresa la estructura de plazos de las tasas de interés como función de $D(t)$ y $A(t)$.

Una limitación del modelo es que se pueden generar tasas de rendimiento negativas para algunos valores de los parámetros.

Resultados.

En la Figura 6 se muestra la curva que generó PIP y que presenta para todo público en su página en Internet (www.precios.com.mx), correspondiente al 25 de septiembre de 2003.²⁷

²⁶ Un movimiento browniano estándar $\{Z(t), t \geq 0\}$ donde $Z(t) \sim N(0, t)$ es aquel que cumple las siguientes propiedades: i) $Z(0) = 0$, ii) Si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entonces $Z(t_2) - Z(t_1)$, $Z(t_3) - Z(t_2)$, ..., $Z(t_n) - Z(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes, iii) Si $0 \leq s < t$ entonces $Z(t) - Z(s) \sim N(0, t-s)$, iv) $Z(t)$ es continua en t .

²⁷ Para acceder a los valores de los nodos y a la curva completa se requiere de una contraseña de usuario.

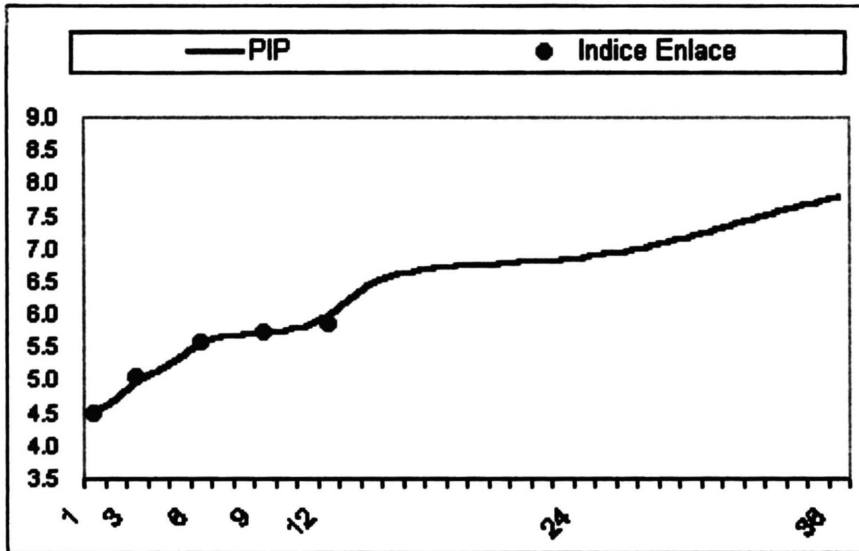


Figura 6: Curva nominal libre de riesgo generada por PIP correspondiente al 25 de septiembre de 2003, en donde el plazo se expresa en meses. Presentada en su página en Internet.

3.6. Método Utilizado por GBS Data (“Grupo Proveedor de Precios Bursátiles”).

Los socios fundadores de este proveedor fueron la valuadora de sociedades de inversión “GAF” (Grupo Asesores Financieros) y la consultora de análisis y pronósticos macroeconómicos “Bursamétrica”. Luego la Calificadora de Valores Standard & Poor’s²⁸ inició en diciembre de 2000 una alianza estratégica con GBS Data.

El método utilizado por GBS Data para estimar una curva nominal libre de riesgo consta de 2 partes: una estimación de corto plazo (propriadamente el rango de Cetes) mediante el Modelo de los Splines y otra de largo plazo basado en el modelo de Hull & White. Presentaremos a continuación ambos modelos.

El Modelo de los splines (Para el Corto Plazo).

Este modelo se basa en el teorema de Máximo Suavizamiento de la Curva de Tasas Forward que demostraron Adams y Van Deventer en 1994. Específicamente se tiene lo siguiente:

Teorema: La estructura intertemporal de tasas forward $f(t)$, $0 \leq t \leq T$ que satisface el criterio de máxima suavidad:

$$\min \int_0^T [f''(s)]^2 ds$$

y al mismo tiempo se ajuste a los precios observados de los bonos cupón cero: P_1, P_2, \dots, P_m con vencimientos t_1, t_2, \dots, t_m es un spline de cuarto grado dado por:

$$f(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3 + e_i t^4, \text{ para } t_{i-1} \leq t \leq t_i; i = 1, 2, \dots, m+1$$

$$\text{donde } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

²⁸ Standard & Poor’s es una división de las empresas McGraw-Hill.

Adicional a que los polinomios inicien y finalicen en los nodos, a que la primera, segunda y tercera derivada sean iguales en los nodos, los coeficientes deben cumplir las siguientes condiciones para completar el sistema de 5m ecuaciones.

a) Que las tasas forward sean consistentes con los precios observados, esto es

$$a_i(t_i - t_{i-1}) + \frac{b_i}{2}(t_i^2 - t_{i-1}^2) + \frac{c_i}{3}(t_i^3 - t_{i-1}^3) + \frac{d_i}{4}(t_i^4 - t_{i-1}^4) + \frac{e_i}{5}(t_i^5 - t_{i-1}^5) = -\ln \left[\frac{P(t_i)}{P(t_{i-1})} \right]$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

b) Que la curva de tasas forward sea consistente con un rendimiento instantáneo observable $R(0)$, es decir: $a_1 = R(0) = f(0)$.²⁹

c) Que la pendiente de la curva de tasas forward en el último nodo sea cero:

$$f'(t_m) = b_m + 2c_m t_m + 3d_m t_m^2 + 4e_m t_m^3 = 0$$

d) Que la segunda derivada de la tasa forward sea cero en el primer nodo:

$$f''(t_1) = 2c_1 + 6d_1 t_1 + 12e_1 t_1^2 = 0$$

e) Que la segunda derivada de la tasa forward sea cero en el último nodo:

$$f''(t_m) = 2c_m + 6d_m t_m + 12e_m t_m^2 = 0$$

Una vez, resuelto el sistema de ecuaciones, se convierten las tasas forward a tasas de rendimiento.

$$\text{Como } P(t) = e^{-tR(t)} \Rightarrow R(t) = -\frac{1}{t} \ln P(t)$$

y como $t \in [t_{i-1}, t_i]$ para alguna i , entonces

$$P(t) = P(t_{i-1}) \exp \left(- \left[a_i(t - t_{i-1}) + \frac{b_i}{2}(t^2 - t_{i-1}^2) + \frac{c_i}{3}(t^3 - t_{i-1}^3) + \frac{d_i}{4}(t^4 - t_{i-1}^4) + \frac{e_i}{5}(t^5 - t_{i-1}^5) \right] \right)$$

por lo que la tasa de rendimiento continuo expresada en términos de las tasas forwards quedaría así:

$$R(t) = -\frac{1}{t} \left(\ln P(t_{i-1}) - \left[a_i(t - t_{i-1}) + \frac{b_i}{2}(t^2 - t_{i-1}^2) + \frac{c_i}{3}(t^3 - t_{i-1}^3) + \frac{d_i}{4}(t^4 - t_{i-1}^4) + \frac{e_i}{5}(t^5 - t_{i-1}^5) \right] \right)$$

El Modelo de Hull & White (Para el Largo Plazo).

Este modelo (1990) es considerado una extensión al de Vasicek, al hacer que la reversión a la media dependa del tiempo. El proceso estocástico que define el comportamiento de la tasa de corto plazo es:

$$dr(t) = k[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma * dZ(t) \quad (22)$$

donde σ es la volatilidad constante de las tasas de corto plazo, $Z(t)$ es un movimiento browniano estándar, $\theta(t)$ es el promedio de largo plazo de la tasa corta y k es la velocidad de convergencia.

Los parámetros k y σ se estiman con la base de datos histórica de la tasa corta, y $\theta(t)$ se ajusta a la información de los precios de mercado.

Sea t el día de hoy y T la fecha futura de vencimiento de un bono cupón cero, así $T-t$ es el plazo a vencimiento del bono.

²⁹ Recuerde que $f(t) = R(t) + tR'(t)$, pudiendo ser $R(0)$ la tasa de fondeo a 1 día.

El modelo supone que el precio del bono cupón cero tiene la forma funcional:

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - r(t)D(t, T)}$$

siendo

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k},$$

$$A(t, T) = \ln\left(\frac{P_m(0, T)}{P_m(0, t)}\right) - D(t, T) \frac{\partial \ln P_m(0, t)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{4k^3} (e^{-kt} - e^{-kT})^2 (e^{2kt} - 1)$$

donde P_m indica precio de mercado.

$$\text{Como } P(t, T) = e^{-R(t, T) \cdot (T-t)} \Rightarrow R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) = \frac{r(t)D(t, T) - A(t, T)}{T-t}$$

Una limitación del modelo, al igual que el de Vasicek, es que puede generar tasas de rendimiento negativas para algunos valores de los parámetros.

Resultados.

En la Tabla 2 se presenta los nodos que obtuvo GBS Data para estimar la curva nominal libre de riesgo correspondiente al 25 de septiembre de 2003, dicho archivo puede ser bajado en su página en Internet (www.gbsdata.com.mx).³⁰

Plazo	Tasa de Mercado
1	4.16
7	4.22
28	4.47
90	5.01
180	5.57
360	5.81

Tabla 2: Nodos obtenidos por GBS-Data para la generación de la curva nominal libre de riesgo, correspondiente al 25 de septiembre de 2003.

Un resumen de las metodologías analizadas se presenta en el Cuadro 2.

Proveedor	Metodología	Observación
Valmer	Modelo basado en los Splines Suavizados	La función objetivo balancea ajuste y suavidad de la curva, le da más importancia al ajuste de corto plazo mediante el uso de ponderadores.
PIP	- Polinomios Ortogonales de Chebychev - Vasicek	La elección depende del número de observaciones con que se cuente (PIP no especifica este número crítico).
GBS Data	- Spline Suavizados (para el corto plazo) - Hull & White (para el largo plazo)	Los Splines son de cuarto grado en las tasas forward que se ajustan a los precios de mercado de Cetes. Hull & White es una extensión del modelo de Vasicek.

Cuadro 2: Resumen de de las metodologías utilizadas por los Proveedores de Precios.

³⁰ Para acceder a los valores de la curva se requiere de una contraseña de usuario.

MODELOS PROPUESTOS PARA EL MERCADO MEXICANO DE CETES

El objetivo de este capítulo es presentar modelos alternativos, basados en el modelo de Nelson-Siegel, que permitan generar una curva de rendimiento de Cetes acorde a las características de su mercado.

Primeramente se establece para el modelo Nelson-Siegel como localizar el punto en que la curva presenta un valor mínimo o máximo y en consecuencia la amplitud del bache o de la joroba para un valor particular del parámetro externo. Luego se presentan las ventajas y limitaciones de este modelo básico, destacando que no pueden generar curvas que combinen jorobas y baches. Al considerar que los plazos relevantes de Cetes (1, 28, 92, 182 y 364 días) pueden dar origen a un máximo de 4 valores extremos, se presentan 2 extensiones para la función de tasas forward instantáneas mediante un polinomio de grado 4 en el factor de la exponencial o bien, usando 4 parámetros externos.

Puesto que para el mercado mexicano de Cetes es importante la estimación de muy corto plazo (a un día) y la estabilidad a largo plazo, se incorporan estas restricciones a los modelos propuestos. Posteriormente se analiza la relación entre los parámetros externos y los valores extremos de los modelos extendidos. Los modelos generalizados se integran en metodologías para estimar la curva de rendimiento cuando las tasas de mercado sugieren jorobas y baches, y cuando las tasas sean crecientes o decrecientes. A continuación se aplican las metodologías propuestas obteniendo buenas estimaciones de las tasas de mercado, siendo el modelo polinomial el mejor.

El capítulo finaliza indicando como ampliar los modelos para incorporar plazos mayores a los de los Cetes con el propósito de generar un curva nominal libre de riesgo.

4.1 Análisis del Parámetro Tau.

La ecuación del modelo Nelson-Siegel para la tasa forward instantánea es:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp(-m/\tau) + \beta_2 [(m/\tau) * \exp(-m/\tau)] \quad (23)$$

donde:

$r(m)$ es la tasa forward instantánea como una función del plazo a vencimiento m .

β_0 , β_1 y β_2 son los coeficientes lineales del modelo.

τ es una constante que altera la "tasa de decaimiento" de las funciones exponenciales del plazo a vencimiento.

Y la función de tasas de rendimiento continuamente capitalizables es:

$$R(m, \tau) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) * \frac{\tau}{m} [1 - \exp(-m/\tau)] - \beta_2 * \exp(-m/\tau) \quad (24)$$

En la sección 1.6 se mencionó que para valores pequeños de τ la joroba o bache de la curva se presenta en el corto plazo, en tanto que para valores grandes hace que la joroba o

bache se encuentre en el largo plazo, esto es, el parámetro exógeno τ junto con β_2 controla la localización y la amplitud de la joroba o bache, en esta sección analizaremos de que forma.

Veamos primero el efecto de β_2 para una τ fija, para ello daremos valores particulares a los parámetros de (24), excepto para β_2 .

Caso 1.

$$\tau = 1, \beta_0 = 10\%, \beta_1 = -4\% .$$

Así la tasa de largo plazo es de 10% y la tasa de corto plazo es de 6%.³¹

La expresión (24) puede describirse como:

$$R(m,1) = 0.1 + (\beta_2 - 0.04) * \frac{1}{m} [1 - \exp(-m)] - \beta_2 * \exp(-m) \quad (25)$$

Dando diversos valores a β_2 : -18%, -12%, -6%, 0, 4%, 8%, 12% ; se obtienen las curvas mostradas en la Figura 7.³²

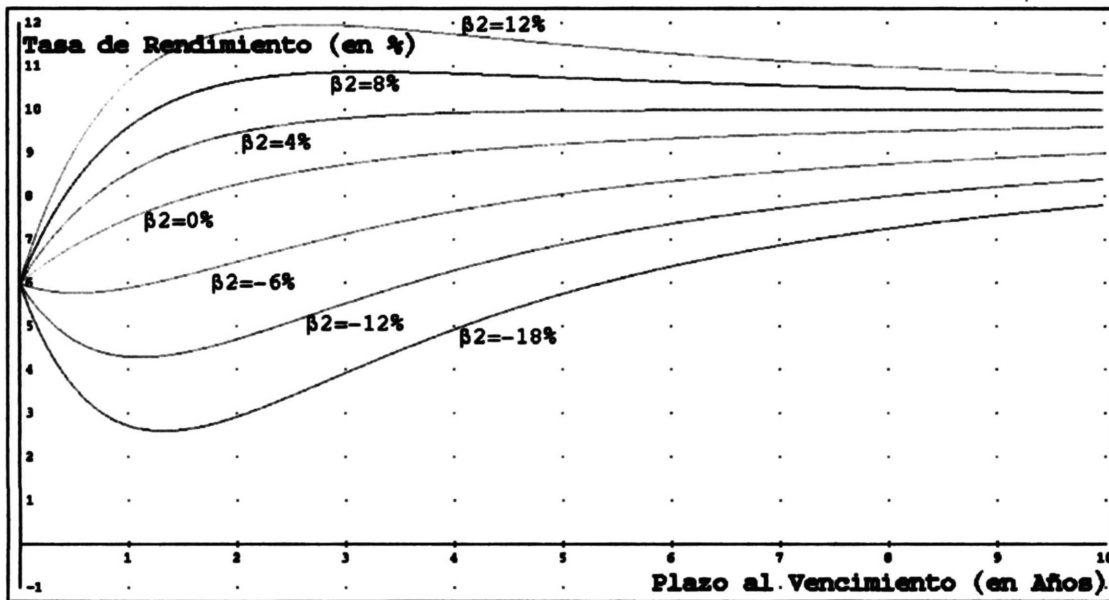


Figura 7: Familia de Curvas de Rendimiento para $\tau = 1, \beta_0 = 10\%, \beta_1 = -4\%$.

En este caso la tasa de corto plazo es menor que la de largo plazo, en la familia de curvas se observa que para partir de ciertos valores de β_2 aparecen valores máximos o mínimos. Consideremos $\beta_2 = +12\%$, el mínimo aparece en un plazo al vencimiento menor que el máximo. Fíjese que en el caso de los mínimos, cuando más disminuye los valores de β_2 mayor es el “bache”, esto es, mayor es el valor del plazo a vencimiento y menor la tasa de rendimiento. Por otra parte, para valores positivos de β_2 se tiene que a mayor valor de este parámetro la joroba es más pronunciada.

³¹ Recuerde que la tasa de corto plazo es β_0 y la tasa de largo plazo es $\beta_0 + \beta_1$.Ver sección 1.6 .

³² Este primer caso es el mismo que se presentó en la sección 1.6 .

Caso 2.

$$\tau = 2, \beta_0 = 10\%, \beta_1 = -4\% .$$

La tasa de largo plazo sigue siendo de 10% y la tasa de corto plazo de 6%.

La expresión (24) puede reescribirse como:

$$R(m,2) = 0.1 + (\beta_2 - 0.04) * \frac{2}{m} [1 - \exp(-m/2)] - \beta_2 * \exp(-m/2) \quad (26)$$

Dando diversos valores a β_2 : -18%, -12%, -6%, 0, 4%, 8%, 12% ; se obtienen las curvas mostradas en la Figura 8.

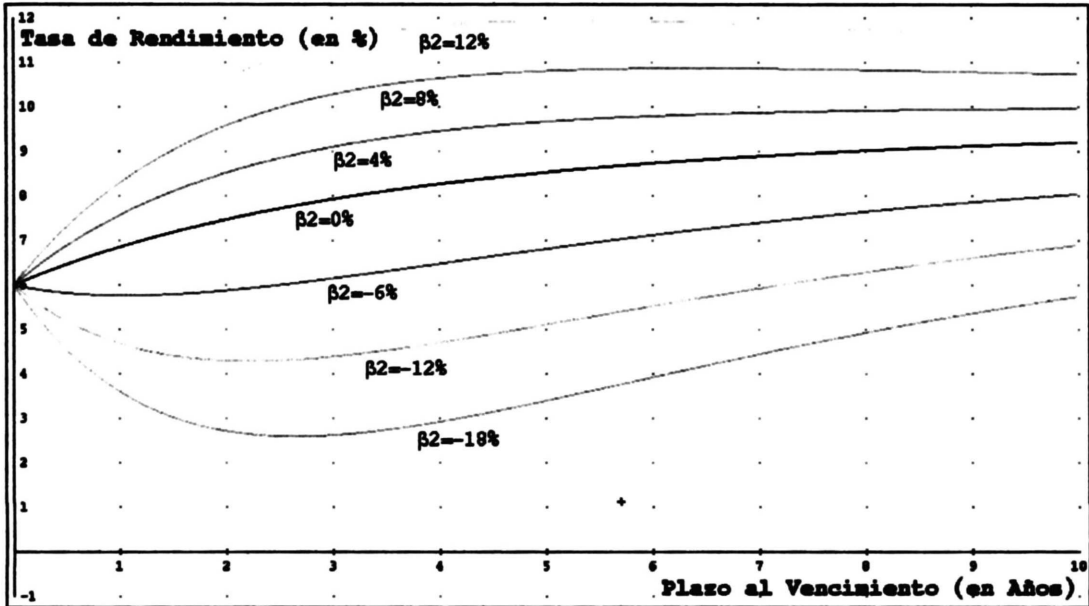


Figura 8: Familia de Curvas de Rendimiento para $\tau = 2, \beta_0 = 10\%, \beta_1 = -4\% .$

Al comparar las figuras 7 y 8 se observa que los valores máximos y mínimos en la figura 8 (cuando $\tau=2$) se alcanzan a mayores plazos al vencimiento y en consecuencia tienen mayor amplitud, de hecho se obtienen duplicando el plazo que los indicados en la figura 7 (cuando $\tau=1$); es como si se hiciera un cambio de escala en el eje horizontal al multiplicar por 2 los valores horizontales de la figura 7. Esto se demostrará a continuación, es decir analizaremos la relación entre τ y m (plazo al vencimiento) en el punto en que la curva presenta un valor mínimo o máximo.

Derivando la función (24) se obtiene:

$$R'(m, \tau) = (\beta_1 + \beta_2) * \left\{ \frac{\tau}{m} \left(-e^{-m/\tau} \left[-\frac{1}{\tau} \right] \right) + \left(1 - e^{-m/\tau} \right) \left(-\frac{\tau}{m^2} \right) \right\} - \beta_2 * e^{-m/\tau} \left[-\frac{1}{\tau} \right]$$

$$R'(m, \tau) = (\beta_1 + \beta_2) * \left\{ \frac{1}{m} e^{-m/\tau} - \frac{\tau}{m^2} + \frac{\tau}{m^2} e^{-m/\tau} \right\} + \frac{\beta_2}{\tau} * e^{-m/\tau}$$

Considerando $R'(m, \tau) = 0$ se tiene:

$$e^{-m/\tau} \left\{ (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau}{m^2} \right) + \frac{\beta_2}{\tau} \right\} = \frac{\tau}{m^2} (\beta_1 + \beta_2)$$

Despejando

$$\frac{m^2}{\tau(\beta_1 + \beta_2)} \left\{ (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau}{m^2} \right) + \frac{\beta_2}{\tau} \right\} = e^{m/\tau}$$

Multiplicando

$$\frac{m}{\tau} + 1 + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right) \frac{m^2}{\tau^2} = e^{m/\tau}$$

Así, para cualquier τ , el valor extremo se alcanza cuando m cumple:

$$e^{m/\tau} = \alpha \left(\frac{m}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{m}{\tau} \right) + 1, \quad \text{donde } \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (27)$$

Si $\tau=1$ la expresión (27) se reduce a

$$e^m = \alpha * m^2 + m + 1, \quad \text{donde } \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (28)$$

Sea m_1 el valor de m que satisface (28), es decir

$$e^{m_1} = \alpha * m_1^2 + m_1 + 1, \quad \text{donde } \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (29)$$

Luego

$$e^{\frac{\tau * m_1}{\tau}} = \alpha \left(\frac{\tau * m_1}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{\tau * m_1}{\tau} \right) + 1$$

Haciendo

$$m_\tau = \tau * m_1 \quad (30)$$

Se tiene

$$e^{\frac{m_\tau}{\tau}} = \alpha \left(\frac{m_\tau}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{m_\tau}{\tau} \right) + 1$$

Esto es $m_\tau = \tau * m_1$ cumple la condición (27).

En los casos 1 y 2 anteriores $\beta_1 = -4\%$ y consideremos $\beta_2 = -18\%$, por tanto

$$\alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{-0.18}{-0.04 - 0.18} = \frac{18}{22} = 0.818182$$

Por métodos numéricos se encuentra que el valor de m_1 es 1.323709, es decir para $\tau=1$ el mínimo se alcanza en 1.323709 años al vencimiento y cuando $\tau=2$ el mínimo se halla en el doble de plazo, esto es, en 2.647418 años al vencimiento como se señala en la expresión (30). Ver Figura 9.

De este modo, para $\tau=1$ el mínimo es $(m_1, R(m_1,1)) = (1.323709, 2.594010)$ y para $\tau=2$ el mínimo es $(2m_1, R(2m_1,2)) = (2.647418, 2.594010)$.

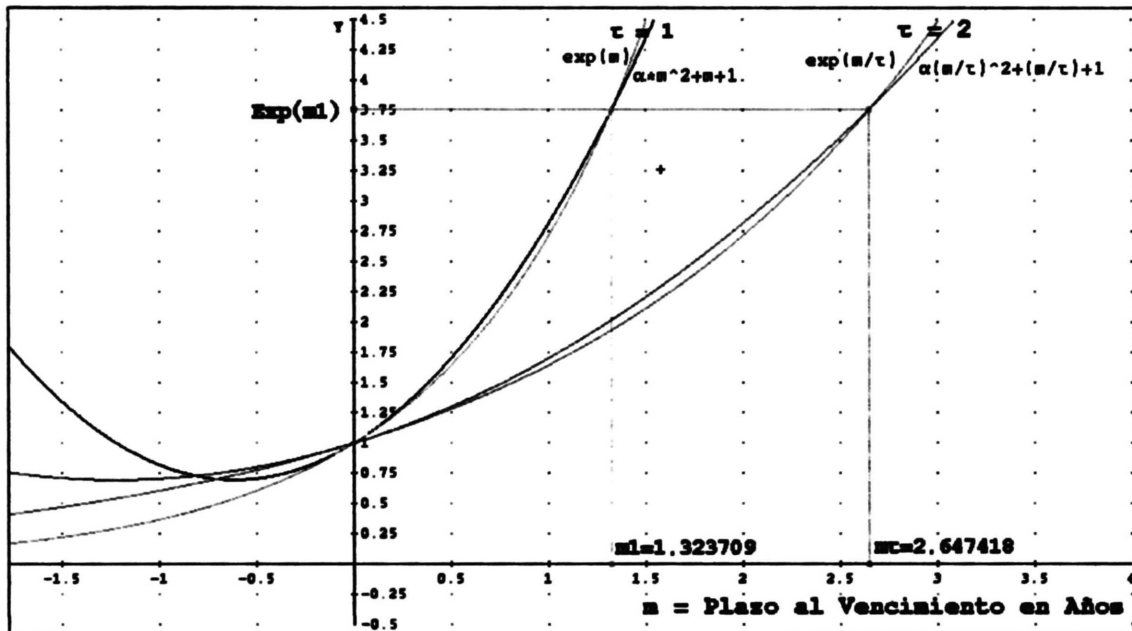


Figura 9: Soluciones gráficas a la ecuación: $e^{m/\tau} = \alpha \left(\frac{m}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{m}{\tau}\right) + 1$, donde $\alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}$

Analizando las expresiones (27), (29) y (30) se observa lo siguiente:

- 1) $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$
- 2) Considerando $\beta_2 > 0$.
 - $\beta_1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ y
 - $\beta_1 < 0$ con $\beta_1 + \beta_2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$
- 3) Considerando $\beta_2 < 0$.
 - $\beta_1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ y
 - $\beta_1 > 0$ con $\beta_1 + \beta_2 < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$
- 4) Para localizar el valor mínimo o máximo de una curva para una τ dada, se calcula primeramente el valor de m_1 y luego se multiplica por el valor de τ . El valor mínimo o máximo se encuentra en $(m_\tau = \tau * m_1, R(m_\tau))$.
- 5) La amplitud del bache o de la joroba es directamente proporcional al valor de τ , siendo la constante de proporcionalidad m_1 .

4.2 Ventajas y Limitaciones del Modelo Nelson-Siegel.

Las curvas generadas por el modelo Nelson-Siegel han sido bastante exitosas en capturar las formas generales de la curva de rendimiento mientras éstas no sean muy complejas o bien no sea necesario un buen ajuste.

Con sólo 4 parámetros el modelo Nelson-Siegel tiene limitada flexibilidad. Aunque puede generar estructuras intertemporales con una joroba o un bache no puede modelar curvas que combinen jorobas y baches. Tiene como objetivo el análisis del movimiento general de las tasas, por lo que usualmente se considera que sacrifica bondad de ajuste a cambio de simplicidad, por lo que no es posible estimar estructuras intertemporales arbitrarias con suficiente precisión.

Estas curvas tienen la ventaja que son fáciles de implementar, y la variedad de formas que ellas generan es suficiente para tener un esbozo de la curva de rendimiento en un 90% de las veces. Ver Cuadro 3.

Ventajas del Modelo Nelson-Siegel	Limitaciones
Pocos parámetros, son fáciles de implementar.	Limitada flexibilidad.
Modela curvas con joroba o bache.	No puede modelar curvas que combinen jorobas y baches.
Pretenden modelar el movimiento general de las tasas y dan un buen esbozo de la curva de rendimiento en un 90% de las veces.	No es posible estimar estructuras intertemporales arbitrarias con suficiente precisión.

Cuadro 3: Ventajas y limitaciones del modelo Nelson-Siegel.

4.3 Extensiones Propuestas.

Las generalizaciones que se analizarán son:

1) La del Teorema demostrado en capítulo 1, es decir, la extensión con potencias.

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau} + \beta_2 (m/\tau) e^{-m/\tau} + \beta_3 (m/\tau)^2 e^{-m/\tau} + \dots + \beta_n (m/\tau)^{n-1} e^{-m/\tau} \quad (31)$$

2) La generalización del modelo Svensson-Nelson-Siegel, esto es, con varios parámetros externos.

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau_1} + \beta_2 (m/\tau_1) e^{-m/\tau_1} + \beta_3 (m/\tau_2) e^{-m/\tau_2} + \dots + \beta_{k+1} (m/\tau_k) e^{-m/\tau_k} \quad (32)$$

Considerando que puede existir un máximo de 4 curvaturas, combinando tasas ascendentes y descendentes en los plazos relevantes de Cetes (1, 28, 91, 182 y 364 días) como se analizó en la sección 2.5; las generalizaciones anteriores se expresan como:

1) Extensión con un polinomio de grado 4.

$$r(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau} + \beta_2 (m/\tau) e^{-m/\tau} + \beta_3 (m/\tau)^2 e^{-m/\tau} + \beta_4 (m/\tau)^3 e^{-m/\tau} + \beta_5 (m/\tau)^4 e^{-m/\tau} \quad (33)$$

2) Extensión con 4 parámetros externos.

$$r(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\tau_1} + \beta_2 (m/\tau_1) e^{-m/\tau_1} + \beta_3 (m/\tau_2) e^{-m/\tau_2} + \beta_4 (m/\tau_3) e^{-m/\tau_3} + \beta_5 (m/\tau_4) e^{-m/\tau_4} \quad (34)$$

donde $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$

Calcularemos a continuación las curvas de rendimiento continuamente capitalizables de estas extensiones mediante:

$$R(m, \tau) = \frac{1}{m} \int_0^m r(x, \tau) dx$$

Para la extensión del Polinomio de grado 4

$$R_1(m, \tau) = \frac{1}{m} \int_0^m \beta_0 dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_1 e^{-x/\tau} dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_2 (x/\tau) e^{-x/\tau} dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_3 (x/\tau)^2 e^{-x/\tau} dx \\ + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_4 (x/\tau)^3 e^{-x/\tau} dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_5 (x/\tau)^4 e^{-x/\tau} dx$$

Calculando las integrales de manera individual

$$\frac{1}{m} \int_0^m \beta_1 e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_1}{m} \int_0^m e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_1}{m} (-\tau) \int_0^m e^{-x/\tau} d(-x/\tau) = \frac{\beta_1}{m} (-\tau) \left(e^{-x/\tau} \Big|_0^m \right) = \frac{\beta_1}{m} (-\tau) (e^{-m/\tau} - 1) \\ = \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau})$$

$$\frac{1}{m} \int_0^m \beta_2 (x/\tau) e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_2}{m} \int_0^m (x/\tau) e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_2}{m} \left(-x e^{-x/\tau} + \int e^{-x/\tau} dx \Big|_0^m \right)$$

$$\text{Sea } u = x/\tau \quad dv = e^{-x/\tau} dx \\ du = dx/\tau \quad v = -\tau * e^{-x/\tau}$$

$$= \frac{\beta_2}{m} \left(-x e^{-x/\tau} - \tau * e^{-x/\tau} \Big|_0^m \right) = \frac{\beta_2}{m} \left(-m e^{-m/\tau} - \tau * e^{-m/\tau} + \tau \right) \\ = \frac{\beta_2}{m} \left(\tau (1 - e^{-m/\tau}) - m e^{-m/\tau} \right) = \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \beta_2 e^{-m/\tau}$$

$$\frac{1}{m} \int_0^m \beta_3 (x/\tau)^2 e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_3}{m} \int_0^m (x/\tau)^2 e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_3}{m} \left(-\tau (x/\tau)^2 e^{-x/\tau} + 2 \int (x/\tau) e^{-x/\tau} dx \Big|_0^m \right)$$

$$\text{Sea } u = (x/\tau)^2 \quad dv = e^{-x/\tau} dx \\ du = 2x dx / \tau^2 \quad v = -\tau * e^{-x/\tau}$$

$$= \frac{\beta_3}{m} \left(-\frac{x^2}{\tau} e^{-x/\tau} + 2(-x e^{-x/\tau} - \tau * e^{-x/\tau}) \Big|_0^m \right) = \frac{\beta_3}{m} \left(-\frac{x^2}{\tau} e^{-x/\tau} - 2x e^{-x/\tau} - 2\tau * e^{-x/\tau} \Big|_0^m \right) \\ = \frac{\beta_3}{m} \left(-\frac{m^2}{\tau} e^{-m/\tau} - 2m e^{-m/\tau} - 2\tau * e^{-m/\tau} + 2\tau \right) = \beta_3 \left(-\frac{m}{\tau} e^{-m/\tau} - 2e^{-m/\tau} \right) + \frac{\beta_3}{m} (2\tau - 2\tau * e^{-m/\tau}) \\ = -\beta_3 \frac{1}{\tau} e^{-m/\tau} (m + 2\tau) + 2\beta_3 \frac{\tau}{m} (1 - e^{-m/\tau}) = 2\beta_3 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \beta_3 \left(\frac{1}{\tau} \right) (m + 2\tau) e^{-m/\tau}$$

$$\frac{1}{m} \int_0^m \beta_4(x/\tau)^3 e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_4}{m} \int_0^m (x/\tau)^3 e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_4}{m} \left(-\tau(x/\tau)^3 e^{-x/\tau} + 3 \int (x/\tau)^2 e^{-x/\tau} dx \Big|_0^m \right)$$

$$\text{Sea } u = (x/\tau)^3 \quad dv = e^{-x/\tau} dx$$

$$du = 3x^2 dx/\tau^3 \quad v = -\tau * e^{-x/\tau}$$

$$= \frac{\beta_4}{m} \left(-\tau(x/\tau)^3 e^{-x/\tau} + 3 \left\{ -\frac{x^2}{\tau} e^{-x/\tau} - 2xe^{-x/\tau} - 2\tau * e^{-x/\tau} \right\} \Big|_0^m \right)$$

$$= \frac{\beta_4}{m} \left(-\frac{x^3}{\tau^2} e^{-x/\tau} - 3\frac{x^2}{\tau} e^{-x/\tau} - 6xe^{-x/\tau} - 6\tau * e^{-x/\tau} \Big|_0^m \right)$$

$$= \frac{\beta_4}{m} \left(-\frac{m^3}{\tau^2} e^{-m/\tau} - 3\frac{m^2}{\tau} e^{-m/\tau} - 6me^{-m/\tau} - 6\tau * e^{-m/\tau} + 6\tau \right)$$

$$= \beta_4 \left(-\frac{m^2}{\tau^2} e^{-m/\tau} - 3\frac{m}{\tau} e^{-m/\tau} - 6e^{-m/\tau} \right) + \frac{\beta_4}{m} (6\tau - 6\tau * e^{-m/\tau})$$

$$= -\beta_4 \frac{1}{\tau^2} e^{-m/\tau} (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) + 6\beta_4 \frac{\tau}{m} (1 - e^{-m/\tau})$$

$$= 6\beta_4 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \beta_4 \left(\frac{1}{\tau^2} \right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau}$$

$$\frac{1}{m} \int_0^m \beta_5(x/\tau)^4 e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_5}{m} \int_0^m (x/\tau)^4 e^{-x/\tau} dx = \frac{\beta_5}{m} \left(-\tau(x/\tau)^4 e^{-x/\tau} + 4 \int (x/\tau)^3 e^{-x/\tau} dx \Big|_0^m \right)$$

$$\text{Sea } u = (x/\tau)^4 \quad dv = e^{-x/\tau} dx$$

$$du = 4x^3 dx/\tau^4 \quad v = -\tau * e^{-x/\tau}$$

$$= \frac{\beta_5}{m} \left(-\tau(x/\tau)^4 e^{-x/\tau} + 4 \left\{ -\frac{x^3}{\tau^2} e^{-x/\tau} - 3\frac{x^2}{\tau} e^{-x/\tau} - 6xe^{-x/\tau} - 6\tau * e^{-x/\tau} \right\} \Big|_0^m \right)$$

$$= \frac{\beta_5}{m} \left(-\frac{x^4}{\tau^3} e^{-x/\tau} - 4\frac{x^3}{\tau^2} e^{-x/\tau} - 12\frac{x^2}{\tau} e^{-x/\tau} - 24xe^{-x/\tau} - 24\tau * e^{-x/\tau} \Big|_0^m \right)$$

$$= \frac{\beta_5}{m} \left(-\frac{m^4}{\tau^3} e^{-m/\tau} - 4\frac{m^3}{\tau^2} e^{-m/\tau} - 12\frac{m^2}{\tau} e^{-m/\tau} - 24me^{-m/\tau} - 24\tau * e^{-m/\tau} + 24\tau \right)$$

$$= \beta_5 \left(-\frac{m^3}{\tau^3} e^{-m/\tau} - 4\frac{m^2}{\tau^2} e^{-m/\tau} - 12\frac{m}{\tau} e^{-m/\tau} - 24e^{-m/\tau} \right) + \frac{\beta_5}{m} (24\tau - 24\tau * e^{-m/\tau})$$

$$= -\beta_5 \frac{1}{\tau^3} e^{-m/\tau} (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) + 24\beta_5 \frac{\tau}{m} (1 - e^{-m/\tau})$$

$$= 24\beta_5 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \beta_5 \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau}$$

Por tanto, la curva de rendimiento continuamente capitalizable para la extensión del Polinomio de grado 4 es

$$\begin{aligned}
 R_1(m, \tau) = & \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) * \left(\frac{\tau}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau}) - \beta_2 * e^{-m/\tau} \\
 & - \beta_3 \left(\frac{1}{\tau}\right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} - \beta_4 \left(\frac{1}{\tau^2}\right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \\
 & - \beta_5 \left(\frac{1}{\tau^3}\right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau}
 \end{aligned} \tag{35}$$

o bien

$$\begin{aligned}
 R_1(m, \tau) = & \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau}) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau}) - e^{-m/\tau} \right\} \\
 & + \beta_3 \left\{ 2 \left(\frac{\tau}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau}\right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} \right\} \\
 & + \beta_4 \left\{ 6 \left(\frac{\tau}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^2}\right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \right\} \\
 & + \beta_5 \left\{ 24 \left(\frac{\tau}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^3}\right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau} \right\}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Por otra parte, para el caso de la extensión con 4 parámetros externos la curva es

$$\begin{aligned}
 R_2(m, \tau) = & \frac{1}{m} \int_0^m \beta_0 dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_1 e^{-x/\tau_1} dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_2 (x/\tau_1) e^{-x/\tau_1} dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_3 (x/\tau_2) e^{-x/\tau_2} dx \\
 & + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_4 (x/\tau_3) e^{-x/\tau_3} dx + \frac{1}{m} \int_0^m \beta_5 (x/\tau_4) e^{-x/\tau_4} dx
 \end{aligned}$$

Calculando las integrales de manera individual y usando los resultados del caso anterior

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m} \int_0^m \beta_1 e^{-x/\tau_1} dx &= \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau_1}) \\
 \frac{1}{m} \int_0^m \beta_2 (x/\tau_1) e^{-x/\tau_1} dx &= \beta_2 \left(\frac{\tau_1}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau_1}) - \beta_2 e^{-m/\tau_1} = \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau_1}{m}\right) (1 - e^{-m/\tau_1}) - e^{-m/\tau_1} \right\}
 \end{aligned}$$

De este modo, la curva de rendimiento continuamente capitalizable para la extensión con 4 parámetros externos es

$$R_2(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_1}) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau_1}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_1}) - e^{-m/\tau_1} \right\} + \beta_3 \left\{ \left(\frac{\tau_2}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_2}) - e^{-m/\tau_2} \right\} \\ + \beta_4 \left\{ \left(\frac{\tau_3}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_3}) - e^{-m/\tau_3} \right\} + \beta_5 \left\{ \left(\frac{\tau_4}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_4}) - e^{-m/\tau_4} \right\} \quad (37)$$

Antes de finalizar esta sección haremos un cambio de escala en las variables de tiempo; se ha considerado que m y τ están expresados en años, sin embargo las expresiones (35 ó 36) y (37) se siguen cumpliendo si estas variables se expresan en días.

Para ello tomemos como año un período de $b = 365.25$ días (de hecho para cualquier base se cumpliría).

Así $m = m'/b$ y $\tau = \tau'/b$; donde m y τ están expresados en años, y m' y τ' en días.

Sustituyendo m y τ en el modelo Polinomial de grado 4, usando la expresión (35).

$$R_1(m, \tau) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) * \left(\frac{\tau'/b}{m'/b} \right) \left(1 - e^{-\frac{m'/\tau'}{b/b}} \right) - \beta_2 * e^{-\frac{m'/\tau'}{b/b}} \\ - \beta_3 \left(\frac{1}{\tau'/b} \right) \left(\frac{m'}{b} + 2 \frac{\tau'}{b} \right) * e^{-\frac{m'/\tau'}{b/b}} - \beta_4 \left(\frac{1}{(\tau'/b)^2} \right) \left(\left[\frac{m'}{b} \right]^2 + 3 \frac{m'}{b} * \frac{\tau'}{b} + 6 \left[\frac{\tau'}{b} \right]^2 \right) * e^{-\frac{m'/\tau'}{b/b}} \\ - \beta_5 \left(\frac{1}{(\tau'/b)^3} \right) \left(\left[\frac{m'}{b} \right]^3 + 4 \left[\frac{m'}{b} \right]^2 * \frac{\tau'}{b} + 12 \frac{m'}{b} \left[\frac{\tau'}{b} \right]^2 + 24 \left[\frac{\tau'}{b} \right]^3 \right) * e^{-\frac{m'/\tau'}{b/b}} \\ R_1(m, \tau) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) * \left(\frac{\tau'}{m'} \right) (1 - e^{-m'/\tau'}) - \beta_2 * e^{-m'/\tau'} \\ - \beta_3 \left(\frac{1}{\tau'} \right) (m' + 2\tau') * e^{-m'/\tau'} - \beta_4 \left(\frac{1}{\tau'^2} \right) (m'^2 + 3m'\tau' + 6\tau'^2) * e^{-m'/\tau'} \\ - \beta_5 \left(\frac{1}{\tau'^3} \right) (m'^3 + 4m'^2 * \tau' + 12m'\tau'^2 + 24\tau'^3) * e^{-m'/\tau'} \\ = R_1(m', \tau')$$

Igualmente sustituyendo m y τ , ($i = 1, 2, 3, 4$) en el modelo de 4 parámetros externos

$$R_2(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1'/b}{m'/b} \right) \left(1 - e^{-\frac{m'/\tau_1'}{b/b}} \right) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau_1'/b}{m'/b} \right) \left(1 - e^{-\frac{m'/\tau_1'}{b/b}} \right) - e^{-\frac{m'/\tau_1'}{b/b}} \right\} \\ + \beta_3 \left\{ \left(\frac{\tau_2'/b}{m'/b} \right) \left(1 - e^{-\frac{m'/\tau_2'}{b/b}} \right) - e^{-\frac{m'/\tau_2'}{b/b}} \right\} + \beta_4 \left\{ \left(\frac{\tau_3'/b}{m'/b} \right) \left(1 - e^{-\frac{m'/\tau_3'}{b/b}} \right) - e^{-\frac{m'/\tau_3'}{b/b}} \right\} \\ + \beta_5 \left\{ \left(\frac{\tau_4'/b}{m'/b} \right) \left(1 - e^{-\frac{m'/\tau_4'}{b/b}} \right) - e^{-\frac{m'/\tau_4'}{b/b}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
R_2(m, \tau) &= \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1'}{m'} \right) \left(1 - e^{-m'/\tau_1'} \right) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau_1'}{m'} \right) \left(1 - e^{-m'/\tau_1'} \right) - e^{-m'/\tau_1'} \right\} \\
&+ \beta_3 \left\{ \left(\frac{\tau_2'}{m'} \right) \left(1 - e^{-m'/\tau_2'} \right) - e^{-m'/\tau_2'} \right\} + \beta_4 \left\{ \left(\frac{\tau_3'}{m'} \right) \left(1 - e^{-m'/\tau_3'} \right) - e^{-m'/\tau_3'} \right\} \\
&+ \beta_5 \left\{ \left(\frac{\tau_4'}{m'} \right) \left(1 - e^{-m'/\tau_4'} \right) - e^{-m'/\tau_4'} \right\} \\
&= R_2(m', \tau')
\end{aligned}$$

Por tanto los modelos (35 ó 36) y (37) se cumplen cuando las variables m y τ se expresan en días. En las secciones siguientes estas variables estarán referidas a días.

4.4 Incorporando Restricciones a los Modelos.

En la sección 2.5 se indicó que para el mercado mexicano de Cetes es importante el muy corto plazo (Cete a 1 día) y por otra parte se requiere estabilidad en el largo plazo, por tanto incorporaremos estas restricciones a los modelos propuestos. Para ello, aplicaremos límites a $R(m)$ cuando la variable m tiende a cero y a infinito.

Para el corto plazo, esto es, cuando $m \rightarrow 0^+$ se tiene

$$e^{-m/\tau} \rightarrow 1, \quad \left(\frac{\tau}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau} \right) \rightarrow 1, \quad \left(\frac{1}{\tau} \right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} \rightarrow 2,$$

$$\left(\frac{1}{\tau^2} \right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \rightarrow 6, \quad \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau} \rightarrow 24$$

Aplicando límites al modelo Polinomial de grado 4, usando la expresión (35)

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow 0^+} R_1(m, \tau) &= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tau}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau} \right) - \beta_2 \lim_{m \rightarrow 0^+} e^{-m/\tau} \\
&- \beta_3 \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\tau} \right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} - \beta_4 \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\tau^2} \right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \\
&- \beta_5 \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau} \\
&= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) - \beta_2 - 2\beta_3 - 6\beta_4 - 24\beta_5 = \beta_0 + \beta_1 \\
\lim_{m \rightarrow 0^+} R_1(m, \tau) &= \beta_0 + \beta_1
\end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando límites al modelo de 4 parámetros externos

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} R_2(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau_1} \right) + \beta_2 \left\{ \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau_1} \right) - \lim_{m \rightarrow 0^+} e^{-m/\tau_1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_3 \left\{ \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tau_2}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_2}) - \lim_{m \rightarrow 0^+} e^{-m/\tau_2} \right\} + \beta_4 \left\{ \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tau_3}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_3}) - \lim_{m \rightarrow 0^+} e^{-m/\tau_3} \right\} \\
& + \beta_5 \left\{ \lim_{m \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tau_4}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_4}) - \lim_{m \rightarrow 0^+} e^{-m/\tau_4} \right\} \\
& = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \{1-1\} + \beta_3 \{1-1\} + \beta_4 \{1-1\} + \beta_5 \{1-1\} = \beta_0 + \beta_1
\end{aligned}$$

Así

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} R_2(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1$$

Para el largo plazo, es decir, cuando $m \rightarrow \infty$ se tiene

$$e^{-m/\tau} \rightarrow 0, \quad \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) \rightarrow 0, \quad \left(\frac{1}{\tau} \right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} \rightarrow 0,$$

$$\left(\frac{1}{\tau^2} \right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \rightarrow 0, \quad \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau} \rightarrow 0$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} R_1(m, \tau) & = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \beta_2 \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m/\tau} \\
& - \beta_3 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau} \right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} - \beta_4 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau^2} \right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \\
& - \beta_5 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau} \\
& = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) * 0 - \beta_2 * 0 - \beta_3 * 0 - \beta_4 * 0 - \beta_5 * 0 \\
& = \beta_0
\end{aligned}$$

Igualmente

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} R_2(m, \tau) & = \beta_0 + \beta_1 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau_1}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_1}) + \beta_2 \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau_1}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_1}) - \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m/\tau_1} \right\} \\
& + \beta_3 \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau_2}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_2}) - \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m/\tau_2} \right\} + \beta_4 \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau_3}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_3}) - \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m/\tau_3} \right\} \\
& + \beta_5 \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau_4}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_4}) - \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m/\tau_4} \right\} \\
& = \beta_0
\end{aligned}$$

En resumen, para ambos modelos se cumple

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} R(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} R(m, \tau) = \beta_0$$

En consecuencia, las restricciones que se incorporan a los modelos serán:

$$R(1) = \beta_0 + \beta_1, \quad R(10,920) = \beta_0 \Rightarrow \beta_1 = R(1) - R(10,920)$$

donde $R(1)$ y $R(10,920)$ significan la tasa de rendimiento de mercado continuamente capitalizable al plazo de 1 día y al plazo de 10,920 días, respectivamente. El plazo de 10,920 se tomó porque este plazo es el último que maneja Valmer (Ver Tabla 1 de la sección 3.4).

Con estas restricciones sobre β_0 y β_1 el modelo Polinomial de grado 4 se reduce a 5 parámetros (4 endógenos y 1 exógeno) y el modelo con 4 parámetros externos se reduce a 8 (con 4 endógenos y 4 exógenos).

4.5 Análisis de los Valores Extremos de los Modelos.

Al igual que se hizo en la sección 4.1 se analizará la relación entre los parámetros externos y los valores extremos de los modelos.

Derivando la función del modelo Polinomial de grado 4 con respecto a m , usando la expresión (35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1(m, \tau)}{\partial m} = & (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \left\{ \left(\frac{\tau}{m} \right) \left(-e^{-m/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \right) + \left(1 - e^{-m/\tau} \right) \left(-\frac{\tau}{m^2} \right) \right) \right\} \\ & - \beta_2 e^{-m/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \right) - \beta_3 \left(\frac{1}{\tau} \right) \left\{ (m + 2\tau) e^{-m/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \right) + e^{-m/\tau} \right\} \\ & - \beta_4 \left(\frac{1}{\tau^2} \right) \left\{ (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) e^{-m/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \right) + e^{-m/\tau} (2m + 3\tau) \right\} \\ & - \beta_5 \left(\frac{1}{\tau^3} \right) \left\{ (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) e^{-m/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \right) + e^{-m/\tau} (3m^2 + 8m\tau + 12\tau^2) \right\} \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1(m, \tau)}{\partial m} = & (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \left\{ \frac{1}{m} e^{-m/\tau} - \frac{\tau}{m^2} + \frac{\tau}{m^2} e^{-m/\tau} \right\} + \beta_2 \frac{1}{\tau} e^{-m/\tau} \\ & + \beta_3 \left(\frac{1}{\tau} \right) e^{-m/\tau} \left\{ \frac{m}{\tau} + 2 - 1 \right\} + \beta_4 \left(\frac{1}{\tau^2} \right) e^{-m/\tau} \left\{ \frac{m^2}{\tau} + 3m + 6\tau - 2m - 3\tau \right\} \\ & + \beta_5 \left(\frac{1}{\tau^3} \right) e^{-m/\tau} \left\{ \frac{m^3}{\tau} + 4m^2 + 12m\tau + 24\tau^2 - 3m^2 - 8m\tau - 12\tau^2 \right\} \end{aligned}$$

Factorizando y simplificando

$$\frac{\partial R_1(m, \tau)}{\partial m} = (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \left\{ e^{-m/\tau} \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau}{m^2} \right) - \frac{\tau}{m^2} \right\} + \beta_2 e^{-m/\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_3 e^{-m/\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right) \left\{ \frac{m}{\tau} + 1 \right\} + \beta_4 e^{-m/\tau} \left(\frac{1}{\tau^2} \right) \left\{ \frac{m^2}{\tau} + m + 3\tau \right\} \\
& + \beta_5 e^{-m/\tau} \left(\frac{1}{\tau^3} \right) \left\{ \frac{m^3}{\tau} + m^2 + 4m\tau + 12\tau^2 \right\}
\end{aligned}$$

Factorizando y multiplicando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1(m, \tau)}{\partial m} &= e^{-m/\tau} \left\{ (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau}{m^2} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} \right) \right. \\
& \quad \left. + \beta_4 \left(\frac{m^2}{\tau^3} + \frac{m}{\tau^2} + \frac{3}{\tau} \right) + \beta_5 \left(\frac{m^3}{\tau^4} + \frac{m^2}{\tau^3} + \frac{4m}{\tau^2} + \frac{12}{\tau} \right) \right\} \\
& - \frac{\tau}{m^2} (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5)
\end{aligned}$$

Igualando a cero

$$\begin{aligned}
e^{-m/\tau} & \left\{ (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau}{m^2} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} \right) \right. \\
& \quad \left. + \beta_4 \left(\frac{m^2}{\tau^3} + \frac{m}{\tau^2} + \frac{3}{\tau} \right) + \beta_5 \left(\frac{m^3}{\tau^4} + \frac{m^2}{\tau^3} + \frac{4m}{\tau^2} + \frac{12}{\tau} \right) \right\} \\
& = \frac{\tau}{m^2} (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5)
\end{aligned}$$

Despejando y ordenando

$$\begin{aligned}
\frac{m^2}{\tau(\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5)} & \left\{ (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau}{m^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\tau} (\beta_2 + \beta_3 + 3\beta_4 + 12\beta_5) + \frac{m}{\tau^2} (\beta_3 + \beta_4 + 4\beta_5) + \frac{m^2}{\tau^3} (\beta_4 + \beta_5) + \frac{m^3}{\tau^4} \beta_5 \right\} = e^{m/\tau}
\end{aligned}$$

Multiplicando

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m}{\tau} + 1 \right) & + \left(\frac{m^2}{\tau^2} \right) \frac{\beta_2 + \beta_3 + 3\beta_4 + 12\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} + \left(\frac{m^3}{\tau^3} \right) \frac{\beta_3 + \beta_4 + 4\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} \\
& + \left(\frac{m^4}{\tau^4} \right) \frac{\beta_4 + \beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} + \left(\frac{m^5}{\tau^5} \right) \frac{\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} = e^{m/\tau}
\end{aligned}$$

Ordenando

$$e^{m/\tau} = \left(\frac{\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} \right) \left(\frac{m}{\tau} \right)^5 + \left(\frac{\beta_4 + \beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} \right) \left(\frac{m}{\tau} \right)^4 \\ + \left(\frac{\beta_3 + \beta_4 + 4\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} \right) \left(\frac{m}{\tau} \right)^3 + \left(\frac{\beta_2 + \beta_3 + 3\beta_4 + 12\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} \right) \left(\frac{m}{\tau} \right)^2 + \frac{m}{\tau} + 1$$

De este modo, para cualquier valor de τ , el valor extremo se alcanza cuando m cumple:

$$e^{m/\tau} = \alpha_1 \left(\frac{m}{\tau} \right)^5 + \alpha_2 \left(\frac{m}{\tau} \right)^4 + \alpha_3 \left(\frac{m}{\tau} \right)^3 + \alpha_4 \left(\frac{m}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{m}{\tau} \right) + 1 \quad (38)$$

$$\text{donde } \alpha_1 = \frac{\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_4 + \beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5} \\ \alpha_3 = \frac{\beta_3 + \beta_4 + 4\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5}, \quad \alpha_4 = \frac{\beta_2 + \beta_3 + 3\beta_4 + 12\beta_5}{\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 6\beta_4 + 24\beta_5}$$

Si $\tau=1$ la expresión (38) se reduce a

$$e^m = \alpha_1 m^5 + \alpha_2 m^4 + \alpha_3 m^3 + \alpha_4 m^2 + m + 1 \quad (39)$$

Sea $m_1 > 0$ un valor de m que satisface (39)³³, esto es

$$e^{m_1} = \alpha_1 m_1^5 + \alpha_2 m_1^4 + \alpha_3 m_1^3 + \alpha_4 m_1^2 + m_1 + 1 \quad (40)$$

Definiendo $m_\tau \equiv \tau^* m_1$, se tiene que m_τ cumple la condición (38).

En consecuencia, para $\tau=1$ un valor extremo es $(m_1, R_1(m_1, 1))$ y en general para cualquier τ un valor extremo es $(\tau^* m_1, R_1(\tau^* m_1, \tau)) = (\tau^* m_1, R_1(m_1, 1))$.

Pasemos al modelo de 4 parámetros externos, derivando su función con respecto a m

$$\frac{\partial R_2(m, \tau)}{\partial m} = \beta_1 \left\{ \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(-e^{-m/\tau_1} \right) \left(-\frac{1}{\tau_1} \right) + \left(1 - e^{-m/\tau_1} \right) \left(-\frac{\tau_1}{m^2} \right) \right\} \\ + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(-e^{-m/\tau_1} \right) \left(-\frac{1}{\tau_1} \right) + \left(1 - e^{-m/\tau_1} \right) \left(-\frac{\tau_1}{m^2} \right) - e^{-m/\tau_1} \left(-\frac{1}{\tau_1} \right) \right\} \\ + \beta_3 \left\{ \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left(-e^{-m/\tau_2} \right) \left(-\frac{1}{\tau_2} \right) + \left(1 - e^{-m/\tau_2} \right) \left(-\frac{\tau_2}{m^2} \right) - e^{-m/\tau_2} \left(-\frac{1}{\tau_2} \right) \right\}$$

³³ Puesto que se tiene un polinomio de grado 5 hay la posibilidad de que exista varias soluciones para ciertos valores de las α 's.

$$\begin{aligned}
& +\beta_4 \left\{ \binom{\tau_3}{m} \left(-e^{-m/\tau_3} \left(-\frac{1}{\tau_3} \right) + \left(1 - e^{-m/\tau_3} \right) \left(-\frac{\tau_3}{m^2} \right) - e^{-m/\tau_3} \left(-\frac{1}{\tau_3} \right) \right) \right\} \\
& +\beta_5 \left\{ \binom{\tau_4}{m} \left(-e^{-m/\tau_4} \left(-\frac{1}{\tau_4} \right) + \left(1 - e^{-m/\tau_4} \right) \left(-\frac{\tau_4}{m^2} \right) - e^{-m/\tau_4} \left(-\frac{1}{\tau_4} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_2(m, \tau)}{\partial m} &= \beta_1 \left\{ \frac{1}{m} e^{-m/\tau_1} - \frac{\tau_1}{m^2} + \frac{\tau_1}{m^2} e^{-m/\tau_1} \right\} + \beta_2 \left\{ \frac{1}{m} e^{-m/\tau_1} - \frac{\tau_1}{m^2} + \frac{\tau_1}{m^2} e^{-m/\tau_1} + \frac{1}{\tau_1} e^{-m/\tau_1} \right\} \\
& + \beta_3 \left\{ \frac{1}{m} e^{-m/\tau_2} - \frac{\tau_2}{m^2} + \frac{\tau_2}{m^2} e^{-m/\tau_2} + \frac{1}{\tau_2} e^{-m/\tau_2} \right\} + \beta_4 \left\{ \frac{1}{m} e^{-m/\tau_3} - \frac{\tau_3}{m^2} + \frac{\tau_3}{m^2} e^{-m/\tau_3} + \frac{1}{\tau_3} e^{-m/\tau_3} \right\} \\
& + \beta_5 \left\{ \frac{1}{m} e^{-m/\tau_4} - \frac{\tau_4}{m^2} + \frac{\tau_4}{m^2} e^{-m/\tau_4} + \frac{1}{\tau_4} e^{-m/\tau_4} \right\}
\end{aligned}$$

Factorizando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_2(m, \tau)}{\partial m} &= e^{-m/\tau_1} \left\{ \beta_1 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_1}{m^2} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_1}{m^2} + \frac{1}{\tau_1} \right) \right\} - \beta_1 \frac{\tau_1}{m^2} - \beta_2 \frac{\tau_1}{m^2} \\
& + e^{-m/\tau_2} \beta_3 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_2}{m^2} + \frac{1}{\tau_2} \right) - \beta_3 \frac{\tau_2}{m^2} + e^{-m/\tau_3} \beta_4 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_3}{m^2} + \frac{1}{\tau_3} \right) - \beta_4 \frac{\tau_3}{m^2} \\
& + e^{-m/\tau_4} \beta_5 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_4}{m^2} + \frac{1}{\tau_4} \right) - \beta_5 \frac{\tau_4}{m^2}
\end{aligned}$$

Ordenando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_2(m, \tau)}{\partial m} &= e^{-m/\tau_1} \left\{ (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_1}{m^2} \right) + \beta_2 \frac{1}{\tau_1} \right\} + e^{-m/\tau_2} \beta_3 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_2}{m^2} + \frac{1}{\tau_2} \right) \\
& + e^{-m/\tau_3} \beta_4 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_3}{m^2} + \frac{1}{\tau_3} \right) + e^{-m/\tau_4} \beta_5 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_4}{m^2} + \frac{1}{\tau_4} \right) \\
& - (\beta_1 + \beta_2) \frac{\tau_1}{m^2} - \beta_3 \frac{\tau_2}{m^2} - \beta_4 \frac{\tau_3}{m^2} - \beta_5 \frac{\tau_4}{m^2}
\end{aligned}$$

Igualando a cero

$$e^{-m/\tau_1} \left\{ (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_1}{m^2} \right) + \beta_2 \frac{1}{\tau_1} \right\} + e^{-m/\tau_2} \beta_3 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_2}{m^2} + \frac{1}{\tau_2} \right) + e^{-m/\tau_3} \beta_4 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_3}{m^2} + \frac{1}{\tau_3} \right) + e^{-m/\tau_4} \beta_5 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_4}{m^2} + \frac{1}{\tau_4} \right) = (\beta_1 + \beta_2) \frac{\tau_1}{m^2} + \beta_3 \frac{\tau_2}{m^2} + \beta_4 \frac{\tau_3}{m^2} + \beta_5 \frac{\tau_4}{m^2}$$

Para que se cumpla lo anterior es suficiente que se satisfaga el siguiente sistema de ecuaciones:

$$e^{-m/\tau_1} \left\{ (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_1}{m^2} \right) + \beta_2 \frac{1}{\tau_1} \right\} = (\beta_1 + \beta_2) \frac{\tau_1}{m^2}$$

$$e^{-m/\tau_2} \beta_3 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_2}{m^2} + \frac{1}{\tau_2} \right) = \beta_3 \frac{\tau_2}{m^2}$$

$$e^{-m/\tau_3} \beta_4 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_3}{m^2} + \frac{1}{\tau_3} \right) = \beta_4 \frac{\tau_3}{m^2}$$

$$e^{-m/\tau_4} \beta_5 \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_4}{m^2} + \frac{1}{\tau_4} \right) = \beta_5 \frac{\tau_4}{m^2}$$

Despejando y eliminando términos

$$\frac{m^2}{\tau_1(\beta_1 + \beta_2)} \left\{ (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_1}{m^2} \right) + \beta_2 \frac{1}{\tau_1} \right\} = e^{m/\tau_1}$$

$$\frac{m^2}{\tau_i} \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau_i}{m^2} + \frac{1}{\tau_i} \right) = e^{m/\tau_i} ; \quad i = 2, 3, 4.$$

Multiplicando

$$\frac{m}{\tau_1} + 1 + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right) \frac{m^2}{\tau_1^2} = e^{m/\tau_1}$$

$$\frac{m}{\tau_i} + 1 + \frac{m^2}{\tau_i^2} = e^{m/\tau_i} ; \quad i = 2, 3, 4.$$

Ordenando

$$e^{m/\tau_1} = \alpha \left(\frac{m}{\tau_1} \right)^2 + \left(\frac{m}{\tau_1} \right) + 1, \quad \text{donde } \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (41)$$

$$e^{m/\tau_i} = \binom{m}{\tau_i}^2 + \binom{m}{\tau_i} + 1 ; \quad i = 2,3,4. \quad (42)$$

Si $\tau_1 = 1$ y $\tau_i = 1$ ($i = 2,3,4$) las expresiones anteriores se reducen a

$$e^m = \alpha * m^2 + m + 1 , \quad \text{donde } \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (43)$$

$$e^m = m^2 + m + 1 ; \quad i = 2,3,4. \quad (44)$$

Sean $m_1 > 0$ el valor de m que satisface (43) y $m_2 > 0$ el valor de m que satisface (44), es decir

$$e^{m_1} = \alpha * m_1^2 + m_1 + 1 , \quad \text{donde } \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (45)$$

$$e^{m_2} = m_2^2 + m_2 + 1 \quad (46)$$

Definiendo $m_i \equiv \tau_i * m_1$, se tiene que m_i cumple la condición (41).

Igualmente definiendo $m_i \equiv \tau_i * m_2$, este valor cumple la condición (42).

4.6 Las Metodologías Propuestas.

Las metodologías propuestas comprenden dos casos: cuando las tasas de mercado sugieren jorobas y baches, y cuando las tasas son crecientes o decrecientes. Para el primer caso se propone un proceso exhaustivo-iterativo y para el segundo caso la metodología se simplifica.

Considerando que las tasas de Cetes que se operan en el mercado están expresadas como tasas simples, se requiere convertirlas a tasas continuamente capitalizables, para luego ejecutar el modelo y finalmente regresar a las tasas simples. Esto es:

I) Convertir las tasas simples de mercado a continuamente capitalizable, utilizando la siguiente fórmula³⁴:

$$R(m) = \frac{360}{m} \ln \left(1 + \frac{y * m}{360} \right)$$

donde

$R(m)$ = Tasa de rendimiento continuamente capitalizable al plazo m .

m = Plazo a vencimiento, en días.

y = Tasa de rendimiento simple.

³⁴ La cual proviene de la conversión estándar, usando la expansión de Taylor: $e^{\frac{R(m)*m}{360}} = 1 + \frac{y * m}{360}$

II) Ejecutar el modelo.

III) Convertir las tasas continuamente capitalizables a tasas simples, mediante

$$y = \frac{360}{m} \left(e^{\frac{R(m) \cdot m}{360}} - 1 \right)$$

donde

y = Tasa de rendimiento simple.

m = Plazo a vencimiento, en días.

$R(m)$ = Tasa de rendimiento continuamente capitalizable al plazo m .

Caso 1: Las Tasas de Mercado sugieren jorobas y baches.

A) Modelo Polinomial.

- 1) Identificar los plazos relevantes y contar el número de jorobas y baches en estos plazos para determinar el grado del polinomio. Para los Cetes se consideran 4 plazos relevantes (28,91,182 y 364 días) y supongamos que en estos plazos se presenta el esquema de joroba-bache-joroba-bache o bien el de bache-joroba-bache-joroba, por lo que se usará la función Polinomial de grado 4.
- 2) Considerar un valor entero de τ , recorriendo el rango de 1 a 364 con un incremento de 1.
- 3) Considerar la tasa de rendimiento continuamente capitalizable de muy corto plazo $R(1)$ y la de largo plazo $R(10,920)$ para definir:

$$\beta_0 \equiv R(10,920) \text{ y } \beta_1 \equiv R(1) - R(10,920)$$

- 4) Con los valores de τ , β_0 y β_1 calcular las demás betas mediante mínimos cuadrados ordinarios (mco).

$$\begin{aligned} R_1(m, \tau) = & \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - e^{-m/\tau} \right\} \\ & + \beta_3 \left\{ 2 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau} \right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} \right\} \\ & + \beta_4 \left\{ 6 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^2} \right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \right\} \\ & + \beta_5 \left\{ 24 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau} \right\} \end{aligned}$$

- 5) Evaluar $R_1(m, \tau)$ cuando $m=1$, y suponer que $R_1(1, \tau) = R(1)$.

6) Hallar un nuevo valor de β_1 mediante

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{F1} \right) (R(1) - \beta_0 - \beta_2 F2 - \beta_3 F3 - \beta_4 F4 - \beta_5 F5)$$

donde

$$F1 = \tau * (1 - e^{-1/\tau}) , F2 = \tau * (1 - e^{-1/\tau}) - e^{-1/\tau}$$

$$F3 = 2\tau * (1 - e^{-1/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau} \right) (1 + 2\tau) * e^{-1/\tau} ,$$

$$F4 = 6\tau * (1 - e^{-1/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^2} \right) (1 + 3\tau + 6\tau^2) * e^{-1/\tau} ,$$

$$F5 = 24\tau * (1 - e^{-1/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (1 + 4\tau + 12\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-1/\tau}$$

- 7) Con el nuevo valor de β_1 junto con los de τ y β_0 calcular nuevamente las demás betas mediante mco, con ellas calcular una nueva β_1 .
- 8) Detener el proceso iterativo cuando β_1 converja con un error de 10^{-8} .
- 9) Con la β_1 final y los valores de τ y β_0 calcular las demás betas definitivas mediante mco.
- 10) Calcular el coeficiente de determinación para este valor de τ .
- 11) Pasar al siguiente valor de τ , repitiendo el proceso iterativo descrito anteriormente.
- 12) Terminado el recorrido de las τ 's, tomar la τ^* que maximice el coeficiente de determinación.
- 13) Tomar para esta τ^* la β_1 que le corresponde junto con β_0 y las demás betas.

B) Modelo de Parámetros Externos.

- 1) Identificar los plazos relevantes y contar el número de jorobas y baches en estos plazos para determinar el número de parámetros externos. Supongamos que en los 4 plazos relevantes de Cetes (28,91,182 y 364 días) se presenta el esquema de joroba-bache-joroba-bache o bien el de bache-joroba-bache-joroba, por lo que se usará la función de 4 parámetros externos.
- 2) Considerar valores para τ_1, τ_2, τ_3 y τ_4 con $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ del siguiente modo:³⁵
 - τ_1 recorriendo el rango de 1 a 28 con un incremento de 2.
 - τ_2 recorriendo el rango de 29 a 91 con un incremento de 6.5.³⁶
 - τ_3 recorriendo el rango de 92 a 182 con un incremento de 13.
 - τ_4 recorriendo el rango de 183 a 364 con un incremento de 26.

Nota: Cuando τ_1 sea 29 tomar $\tau_1 = 28$. Cuando τ_2 sea 94 tomar $\tau_2 = 91$.

Cuando τ_3 sea 183 tomar $\tau_3 = 182$. Cuando τ_4 sea 365 tomar $\tau_4 = 364$.

³⁵ Un proceso exhaustivo pudiera comprender 30'170,112 (=28x64x92x183) combinaciones de las τ 's.

³⁶ Los incrementos se derivan del hecho de que $2*[1,91/28,182/28,364/28]=2*[1,3.25,6.5,13]=[2,6.5,13,26]$. Lo anterior implica $10,560=15*11*8*8$ combinaciones.

- 3) Considerar la tasa de rendimiento continuamente capitalizable de muy corto plazo $R(1)$ y la de largo plazo $R(10,920)$ para definir:

$$\beta_0 \equiv R(10,920) \text{ y } \beta_1 \equiv R(1) - R(10,920)$$

- 4) Con los valores de $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$, β_0 y β_1 calcular las demás betas mediante mínimos cuadrados ordinarios (mco).

$$R_2(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau_1} \right) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau_1} \right) - e^{-m/\tau_1} \right\} \\ + \beta_3 \left\{ \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau_2} \right) - e^{-m/\tau_2} \right\} + \beta_4 \left\{ \left(\frac{\tau_3}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau_3} \right) - e^{-m/\tau_3} \right\} \\ + \beta_5 \left\{ \left(\frac{\tau_4}{m} \right) \left(1 - e^{-m/\tau_4} \right) - e^{-m/\tau_4} \right\}$$

- 5) Evaluar $R_2(m, \tau)$ cuando $m=1$, y suponer que $R_2(1, \tau) = R(1)$.

- 6) Hallar un nuevo valor de β_1 mediante

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{F1} \right) \left(R(1) - \beta_0 - \beta_2 F2 - \beta_3 F3 - \beta_4 F4 - \beta_5 F5 \right)$$

donde

$$F1 = \tau_1 * \left(1 - e^{-1/\tau_1} \right) \quad , \quad F2 = \tau_1 * \left(1 - e^{-1/\tau_1} \right) - e^{-1/\tau_1} \\ F3 = \tau_2 * \left(1 - e^{-1/\tau_2} \right) - e^{-1/\tau_2} \quad , \quad F4 = \tau_3 * \left(1 - e^{-1/\tau_3} \right) - e^{-1/\tau_3} \\ F5 = \tau_4 * \left(1 - e^{-1/\tau_4} \right) - e^{-1/\tau_4}$$

- 7) Con el nuevo valor de β_1 junto con los de $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$ y β_0 calcular nuevamente las demás betas mediante mco, con ellas calcular una nueva β_1 .
- 8) Detener el proceso iterativo cuando β_1 converja con un error de 10^{-8} .
- 9) Con la β_1 final y los valores de $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$ y β_0 calcular las demás betas definitivas mediante mco.
- 10) Calcular el coeficiente de determinación para este valor de $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$.
- 11) Pasar al siguiente valor de τ , repitiendo el proceso iterativo descrito anteriormente.
- 12) Terminado el recorrido de las τ 's, tomar la τ^* que maximice el coeficiente de determinación.
- 13) Tomar para esta τ^* la β_1 que le corresponde junto con β_0 y las demás betas.

Caso 2: Las Tasas de Mercado son crecientes (o decrecientes).

A) Para el Modelo Polinomial.

- 1) Identificar el número de plazos relevantes para determinar el grado del polinomio. Puesto que los Cetes tienen 4 plazos relevantes (28,91,182 y 364 días) se usará la función Polinomial de grado 4.

- 2) Considerar un valor de τ , recorriendo los valores de 28, 91, 182 y 364.
- 3) Considerar la tasa de rendimiento continuamente capitalizable de muy corto plazo $R(1)$ y la de largo plazo $R(10,920)$ para definir:

$$\beta_0 \equiv R(10,920) \text{ y } \beta_1 \equiv R(1) - R(10,920)$$

- 4) Con los valores de τ , β_0 y β_1 calcular las demás betas mediante mínimos cuadrados ordinarios (mco).

$$R_1(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - e^{-m/\tau} \right\} \\ + \beta_3 \left\{ 2 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau} \right) (m + 2\tau) * e^{-m/\tau} \right\} \\ + \beta_4 \left\{ 6 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^2} \right) (m^2 + 3m\tau + 6\tau^2) * e^{-m/\tau} \right\} \\ + \beta_5 \left\{ 24 \left(\frac{\tau}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (m^3 + 4m^2\tau + 12m\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-m/\tau} \right\}$$

- 5) Evaluar $R_1(m, \tau)$ cuando $m=1$, y suponer que $R_1(1, \tau) = R(1)$.

- 6) Hallar un nuevo valor de β_1 mediante

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{F_1} \right) (R(1) - \beta_0 - \beta_2 F_2 - \beta_3 F_3 - \beta_4 F_4 - \beta_5 F_5)$$

donde

$$F_1 = \tau * (1 - e^{-1/\tau}), \quad F_2 = \tau * (1 - e^{-1/\tau}) - e^{-1/\tau}$$

$$F_3 = 2\tau * (1 - e^{-1/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau} \right) (1 + 2\tau) * e^{-1/\tau},$$

$$F_4 = 6\tau * (1 - e^{-1/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^2} \right) (1 + 3\tau + 6\tau^2) * e^{-1/\tau},$$

$$F_5 = 24\tau * (1 - e^{-1/\tau}) - \left(\frac{1}{\tau^3} \right) (1 + 4\tau + 12\tau^2 + 24\tau^3) * e^{-1/\tau}$$

- 7) Con el nuevo valor de β_1 junto con los de τ y β_0 calcular nuevamente las demás betas mediante mco, con ellas calcular una nueva β_1 .
- 8) Detener el proceso iterativo cuando β_1 converja con un error de 10^{-8} .
- 9) Con la β_1 final y los valores de τ y β_0 calcular las demás betas definitivas mediante mco.
- 10) Calcular el coeficiente de determinación para este valor de τ .
- 11) Pasar al siguiente valor de τ , repitiendo el proceso iterativo descrito anteriormente.
- 12) Terminado el recorrido de las τ 's, tomar la τ que maximice el coeficiente de determinación.
- 13) Tomar para esta τ la β_1 que le corresponde junto con β_0 y las demás betas.

B) Modelo de Parámetros Externos.

- 1) Identificar el número de plazos relevantes para determinar el número de parámetros externos. Para los Cetes se usará la función de 4 parámetros externos.
- 2) Tomar $\tau_1 = 28$, $\tau_2 = 91$, $\tau_3 = 182$ y $\tau_4 = 364$.
- 3) Considerar la tasa de rendimiento continuamente capitalizable de muy corto plazo $R(1)$ y la de largo plazo $R(10,920)$ para definir:

$$\beta_0 \equiv R(10,920) \text{ y } \beta_1 \equiv R(1) - R(10,920)$$

- 4) Con los valores de $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$, β_0 y β_1 calcular las demás betas mediante mínimos cuadrados ordinarios (mco).

$$R_2(m, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_1}) + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\tau_1}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_1}) - e^{-m/\tau_1} \right\} \\ + \beta_3 \left\{ \left(\frac{\tau_2}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_2}) - e^{-m/\tau_2} \right\} + \beta_4 \left\{ \left(\frac{\tau_3}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_3}) - e^{-m/\tau_3} \right\} \\ + \beta_5 \left\{ \left(\frac{\tau_4}{m} \right) (1 - e^{-m/\tau_4}) - e^{-m/\tau_4} \right\}$$

- 5) Evaluar $R_2(m, \tau)$ cuando $m=1$, y suponer que $R_2(1, \tau) = R(1)$.
- 6) Hallar un nuevo valor de β_1 mediante

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{F1} \right) (R(1) - \beta_0 - \beta_2 F2 - \beta_3 F3 - \beta_4 F4 - \beta_5 F5)$$

donde

$$F1 = \tau_1 * (1 - e^{-1/\tau_1}) \quad , \quad F2 = \tau_1 * (1 - e^{-1/\tau_1}) - e^{-1/\tau_1} \\ F3 = \tau_2 * (1 - e^{-1/\tau_2}) - e^{-1/\tau_2} \quad , \quad F4 = \tau_3 * (1 - e^{-1/\tau_3}) - e^{-1/\tau_3} \\ F5 = \tau_4 * (1 - e^{-1/\tau_4}) - e^{-1/\tau_4}$$

- 7) Con el nuevo valor de β_1 junto con los de $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$ y β_0 calcular nuevamente las demás betas mediante mco, con ellas calcular una nueva β_1 .
- 8) Detener el proceso iterativo cuando β_1 converja con un error de 10^{-8} .
- 9) Con la β_1 final y los valores de $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$ y β_0 calcular las demás betas definitivas mediante mco.

4.7 Resultados de los Modelos.

En esta sección se aplicarán las metodologías que se han propuesto. Actualmente la tasas de mercado son crecientes por lo que para ejecutar los modelos del caso 1 que es cuando la distribución de las tasas de mercado sugiere curvas con jorobas y baches se utilizarán tasas definidas por el autor que presentan en los nodos relevantes de 28, 91, 182 y 364 días el esquema de joroba-bache-joroba-bache.

Cuando las tasas de mercado son crecientes (o decrecientes) se aplicará la metodología descrita en el caso 2, para ello se utilizará las tasas de mercado que calculó el Proveedor de Precios Valmer para el jueves 25 de septiembre de 2003.

En ambos casos, para la restricción de muy corto plazo y la de largo plazo se utilizarán la tasa de 1 día y la de 10,920 días, respectivamente, del 25 de septiembre que presentó Valmer.

Para cada caso se presentará la información utilizada, las restricciones empleadas, la gráfica del resultado para cada modelo, un cuadro resumen con los resultados de los modelos e interpretación de los mismos.

La programación de las metodologías fue escrita en el lenguaje matricial Gauss 3.2 de Aptech Systems (www.aptech.com) y es presentada en el Anexo 2.

Caso 1: Las Tasas de Mercado sugieren jorobas y baches.

La Información utilizada es :

Plazo	Tasa de Mercado
1	4.40
28	5.20
53	5.12
80	5.04
86	5.02
91	5.00
128	5.18
156	5.40
182	5.55
330	5.52
364	5.50

Tabla 3: Tasas de Mercado que presentan en los plazos relevantes 28,91,182 y 364 días el esquema de joroba-bache-joroba-bache.

Las restricciones son:

Plazo	Tasa Simple	Tasa Continua
1	4.400000	0.043997
10,920	31.789574	0.077963

Tabla 4: Tasas continuamente capitalizables que se usarán como restricciones iniciales en los modelos.

La curva de rendimiento de Cetes obtenida por el Modelo Polinomial de grado 4 se presenta en la Figura 10.

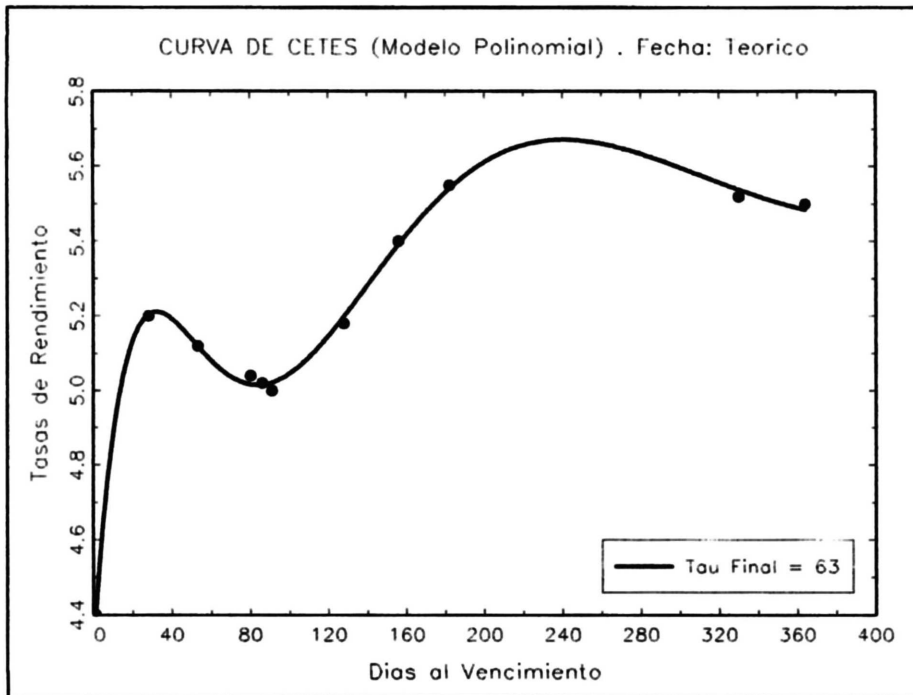


Figura 10: Curva de Rendimiento de Cetes generada por el Modelo Polinomial de grado 4.

La curva de rendimiento de Cetes obtenida por el Modelo de 4 Parámetros Externos se presenta en la Figura 11.

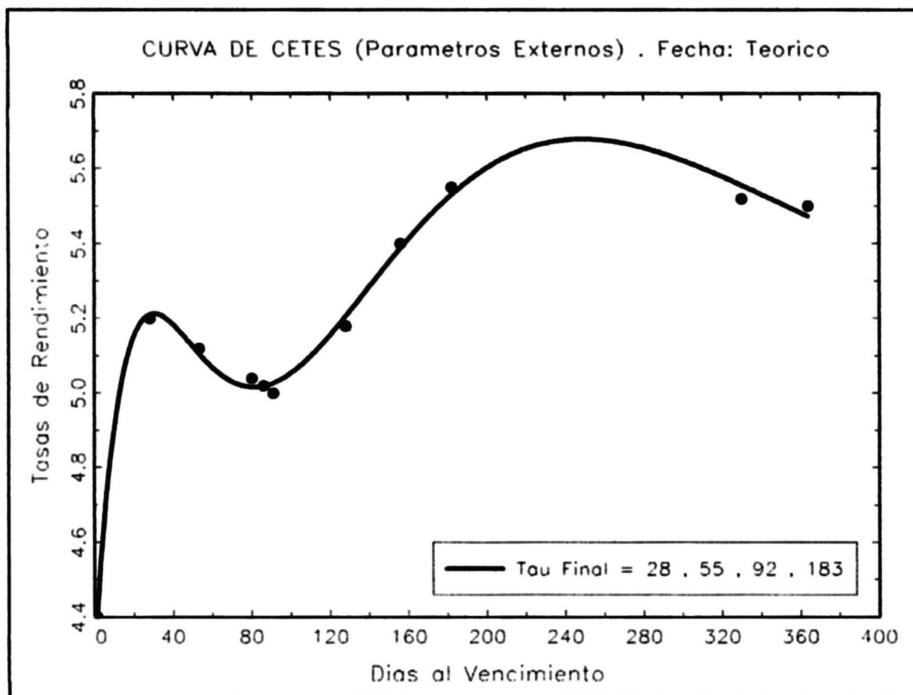


Figura 11: Curva de Rendimiento de Cetes generada por el Modelo de 4 Parámetros Externos.

A continuación un cuadro resumen con los parámetros resultantes de los modelos (con una precisión de 7 decimales).

Modelo	Polinomial	Parámetros Externos
Beta-0	0.0779633	0.0779633
Beta-1	-0.0347086	-0.0347768
Beta-2	0.0619183	0.1235234
Beta-3	-0.2140140	-0.4056361
Beta-4	0.1281113	0.4301555
Beta-5	-0.0248149	-0.2331078
Tau	63	28,55,92,183
Coefficiente de Determinación	0.9995233	0.9990867
Suma de Errores al cuadrado	0.0000002	0.0000005

Cuadro 4: Parámetros resultantes de los modelos para tasas con jorobas y baches.

Finalmente, se presentan las tasas de mercado y las tasas generadas con los modelos.

Plazo	Tasa Mdo.	M. Polinomial Tasa Estimada	Error	M. Parám. Ext. Tasa Estimada	Error
1	4.40	4.400000	0.000000	4.400000	0.000000
28	5.20	5.204156	0.004156	5.210831	0.010831
53	5.12	5.119985	-0.000015	5.106396	-0.013604
80	5.04	5.016137	-0.023863	5.015880	-0.024120
86	5.02	5.015346	-0.004654	5.018657	-0.001343
91	5.00	5.021175	0.021175	5.027029	0.027029
128	5.18	5.198348	0.018348	5.205998	0.025998
156	5.40	5.391048	-0.008952	5.387816	-0.012184
182	5.55	5.540361	-0.009639	5.530155	-0.019845
330	5.52	5.538847	0.018847	5.555797	0.035797
364	5.50	5.485340	-0.014660	5.472999	-0.027001
		Suma de Abs(Errores):	0.124309	Suma de Abs(Errores):	0.197752

Tabla 5: Tasas de Mercado y Tasas Estimadas con los modelos propuestos.

Observe en la Tabla 5 que la restricción de muy corto plazo impuesta a β_1 en un proceso iterativo hace que la tasa estimada de 1 día sea la de mercado. La bondad del ajuste para ambos modelos es buena (alto coeficiente de determinación y baja suma de errores al cuadrado), destacando el modelo polinomial como el mejor, siendo menor la suma de los valores absolutos de sus errores. Es interesante recordar que el modelo polinomial tiene un solo parámetro exógeno en tanto que el modelo de parámetros externos cuenta con 4.

Caso 2: Las Tasas de Mercado son crecientes (o decrecientes).

La Información utilizada es :

Plazo	Tasa de Mercado (Valmer)
1	4.20
28	4.56
73	5.00
80	5.00
86	5.00
91	5.00
128	5.18
171	5.55
182	5.55
339	5.85
364	5.85

Tabla 6: Tasas de Mercado que calculó Valmer el 25 de septiembre de 2003. Observe que son tasas crecientes.

Las restricciones son:

Plazo	Tasa Simple	Tasa Continua
1	4.200000	0.041998
10,920	31.068358	0.077279

Tabla 7: Tasas empleadas por Valmer el 25 de septiembre de 2003, cuyas tasas continuamente capitalizables se usarán como restricciones en los modelos.

La curva de rendimiento de Cetes obtenida por el Modelo Polinomial de grado 4 se presenta en la Figura 12.

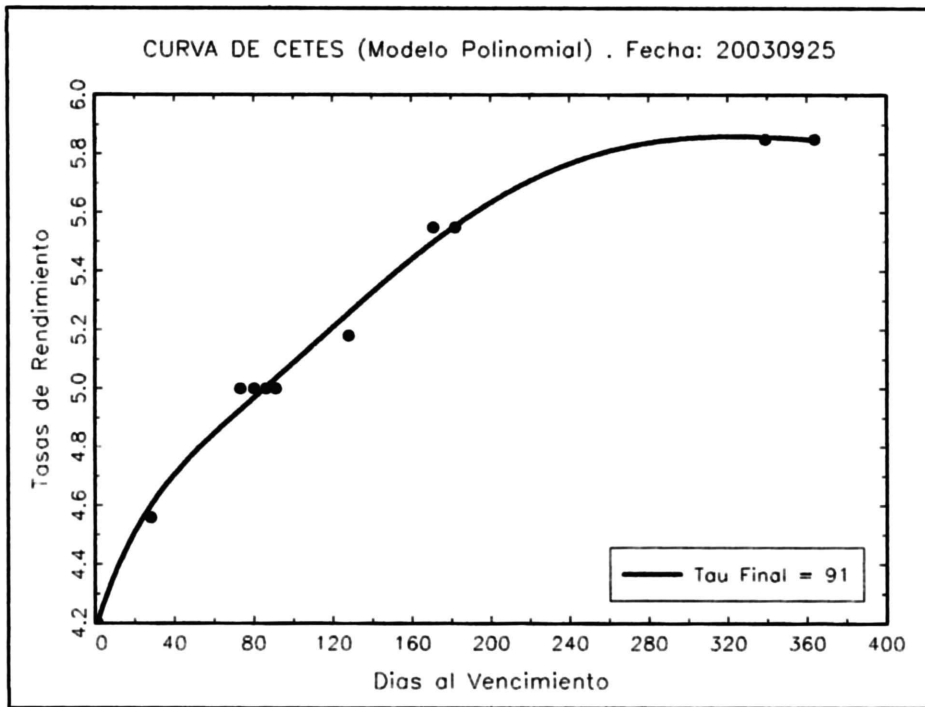


Figura 12: Curva de Rendimiento de Cetes generada por el Modelo Polinomial.

La curva de rendimiento de Cetes obtenida por el Modelo de 4 Parámetros Externos se presenta en la Figura 13.

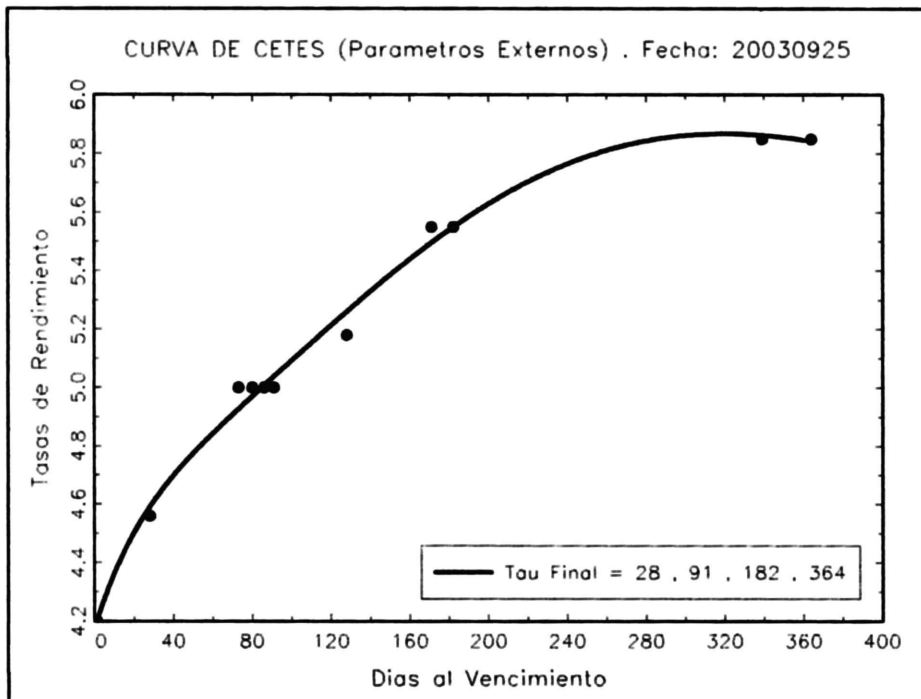


Figura 13. Curva de Rendimiento de Cetes generada por el Modelo de 4 Parámetros Externos.

En la Figura 14 se muestra las tasas estimadas de Cetes que obtuvo Valmer.

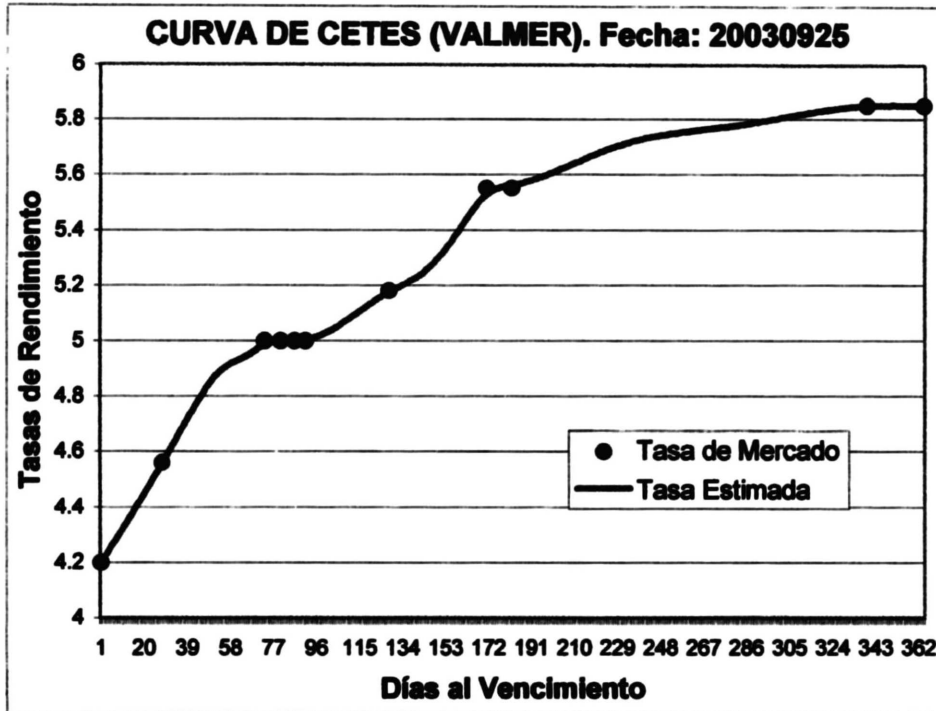


Figura 14: Curva de Rendimiento de Cetes obtenida por Valmer el 25 de Septiembre de 2003.

Sólo como referencia se presentan las gráficas resultantes aplicando el modelo Nelson-Siegel, así como incorporándole las restricciones sobre β_0 y β_1 .

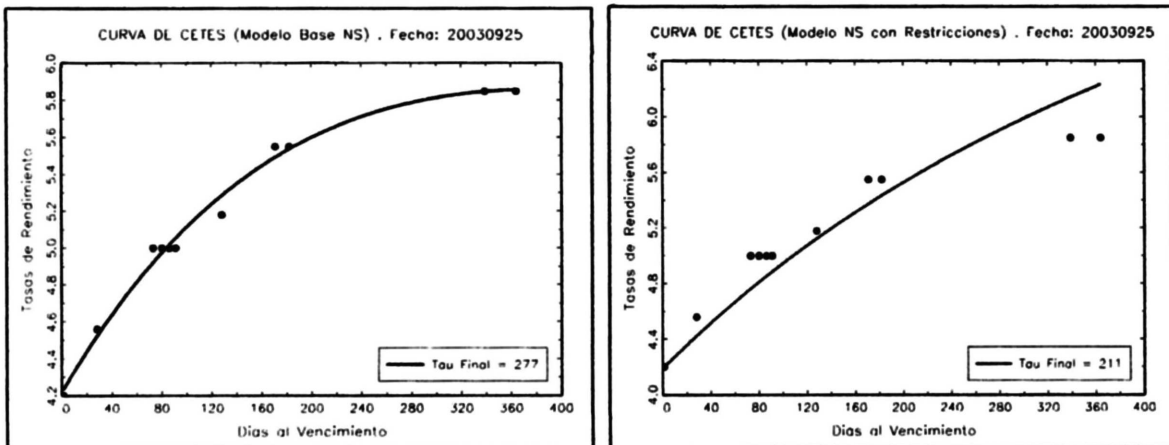


Figura 15: Curvas de Rendimiento de Cetes. La gráfica de la izquierda es aplicando el modelo Nelson-Siegel y la gráfica de la derecha es incorporando a este modelo las restricciones.

En el cuadro 5 se muestra un resumen con los parámetros resultantes de los modelos (con una precisión de 7 decimales).

Finalmente, en la Tabla 8 se presentan las tasas de mercado y las tasas generadas con los modelos propuestos, el modelo Nelson-Siegel (NS), NS con restricciones, así como las tasas estimadas que obtuvo Valmer

Modelo	Polinomial	Parámetros Externos	Modelo NS	NS con Restricciones
Beta-0	0.0772786	0.0772786	0.0197659	0.077279
Beta-1	-0.0354961	-0.0354910	0.0224336	-0.035365
Beta-2	0.0042509	-0.0005964	0.0856469	0.000078
Beta-3	-0.0631616	-0.1444955		
Beta-4	0.0468197	0.2540958		
Beta-5	-0.0127756	-0.2285367		
Tau	91	28,91,182,364	277	211
Coficiente de Determinación	0.9871448	0.9937491	0.9877783	-0.0698740
Suma de Errores al cuadrado	0.0000017	0.0000018	0.0000026	0.0000395

Cuadro 5: Parámetros resultantes de los modelos para tasas crecientes.

Plazo	Tasa Mdo	Polinomial Tasa Estimada	Error	Parámetros Externos T. Estimada	Error	VALMER Tasa Estimada	Error	Modelo NS	Error	NS con Restricciones	Error
1	4.20	4.200000	0.000000	4.200000	0.000000	4.199998	-0.000002	4.231582	0.031582	4.200000	0.000000
28	4.56	4.600399	0.040399	4.591290	0.031290	4.560381	0.000381	4.523013	-0.036987	4.424042	-0.135958
73	5.00	4.927634	-0.072366	4.927134	-0.072866	4.988599	-0.011401	4.921662	-0.078338	4.762205	-0.237795
80	5.00	4.969495	-0.030505	4.970679	-0.029321	5.001088	0.001088	4.974930	-0.025070	4.811213	-0.188787
86	5.00	5.005209	0.005209	5.007602	0.007602	5.000659	0.000659	5.018863	0.018863	4.852502	-0.147498
91	5.00	5.034981	0.034981	5.038186	0.038186	5.003240	0.003240	5.054288	0.054288	4.886414	-0.113586
128	5.18	5.256910	0.076910	5.260416	0.080416	5.175588	-0.004412	5.285099	0.105099	5.124130	-0.055870
171	5.55	5.499024	-0.050976	5.496501	-0.053499	5.530034	-0.019966	5.491720	-0.058280	5.373852	-0.176148
182	5.55	5.553487	0.003487	5.549822	-0.000178	5.561831	0.011831	5.535236	-0.014764	5.433615	-0.116385
339	5.85	5.857021	0.007021	5.862755	0.012755	5.849113	-0.000887	5.847021	-0.002979	6.141493	0.291493
364	5.85	5.847042	-0.002958	5.842446	-0.007554	5.850650	0.000650	5.856547	0.006547	6.233984	0.383984
		Suma de Abs(Errores)	0.324813	Suma de Abs(Errores)	0.333666	Suma de Abs(Errores)	0.054517	Suma de Abs(Errores)	0.432798	Suma de Abs(Errores)	1.847505

Tabla 8: Tasas de Mercado y Tasas Estimadas con los modelos propuestos, los modelos NS y NS con restricciones, y las tasas que estimó Valmer.

Se observa en la tabla 8 que la mejor estimación es la de Valmer, y entre los modelos propuestos es ligeramente mejor el del Polinomio de grado 4. Es importante mencionar que el Modelo Polinomial de grado 4 utiliza un solo parámetro externo y 6 parámetros endógenos en tanto que el Modelo de Valmer emplea 10 polinomios de cuarto grado asociados a las 11 tasas de mercado lo cual implica calcular $10 \times 5 = 50$ parámetros.

Observando las gráficas generadas (Figuras 12, 13 y 14), cualquiera de los modelos propuestos es mucho más suave que la de Valmer y siguen la orientación de las tasas de mercado,

Igualmente, cualquiera de los modelos presentados es mejor que el modelo Nelson-Siegel (Figura 15) y mucho mejor cuando a éste se le incorporan restricciones, este resultado era esperado puesto que los modelos expuestos consideran ya sea un polinomio de mayor grado o bien mas parámetros externos. Se requiere aplicar los modelos en más días para un mejor seguimiento.

Por lo anterior se puede concluir que en general la curva generada por los modelos propuestos es una buena estimación de las tasas de mercado, teniendo ambos modelos la virtud de generar una curva suave con pocos parámetros mediante una metodología simple y fácil de implementar; destacando el modelo polinomial como el mejor.

4.8 Cómo Ampliar los Modelos para Incorporar Plazos Mayores.

Para ampliar la curva de rendimiento de Cetes a una curva nominal libre de riesgo, a las tasas de mercado de Cetes se les puede incorporar las tasas asociados a los precios de operación de las emisiones vigentes de los Bonos M, mediante el proceso de Bootstrapping descrito en la sección 3.3. Si alguna emisión de los Bonos M no operara se tomaría el último precio de operación y se actualizaría el precio con los intereses generados, considerando el resultado como el “precio operado”. Así mismo se pueden definir nuevos plazos relevantes para los Bonos M que se agregarían a los de los Cetes de tal modo que se ajustaría el grado del polinomio en el Modelo Polinomial, o bien nuevos parámetros exógenos en el Modelo de Parámetros Externos.³⁷

Para determinar el plazo y la tasa de largo plazo se puede realizar una encuesta a expertos quienes podrían estar en un Comité de Valuación, dicho comité daría soporte a las metodologías del Proveedor de Precios. También se podría definir un rango de fluctuación para esta tasa de largo plazo de tal modo que sólo se cambiaría esta tasa si el nivel de la tasa estimada estuviera fuera de este rango.

Con las consideraciones anteriores se ejecutarían los nuevos modelos.

³⁷ Recuerde que para el caso en que las tasas de mercado sugieren jorobas y baches, más que el número de plazos relevantes lo importante es el número de jorobas y baches en estos plazos.

CONCLUSIONES

Las conclusiones derivadas de lo presentado en este trabajo son:

1. Puesto que el modelo de Nelson-Siegel se basa en una función de tasas forward instantánea la cual es solución de una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales iguales, esto se puede generalizar en un Teorema que es demostrado y que expresa que la función de tasas forward de grado $n-1$ es solución de una ecuación diferencial de orden n .
2. Para el Mercado mexicano de Cetes, la existencia de nodos relevantes que sugieren curvas de rendimiento con muchas jorobas y baches hace que el modelo de Nelson-Siegel no sea suficiente.
3. Los Proveedores de Precios generan una curva de tasas de rendimiento libre de riesgo que comprende a la estructura intertemporal de tasas de rendimiento de Cetes en el rango de 0 a 1 año, mediante la incorporación de los Bonos de largo plazo emitidos por el Gobierno Federal.
4. Actualmente, coexisten diversas metodologías (Splines, Polinomios de Chebychev, Hull & White, Vasicek) para la estimación de una curva de rendimiento de Cetes. La existencia de Proveedores de Precios ha permitido su evolución.
5. Las metodologías propuestas comprende en general los siguientes pasos:
 - a) Definir plazos relevantes.
 - b) Contar el número de jorobas y baches en estos plazos para determinar el grado del polinomio o el número de parámetros externos.
 - c) Fijar el coeficiente de largo plazo.
 - d) Evaluar el modelo para diversos parámetros externos.
 - e) Fijar el coeficiente de corto plazo mediante un proceso exhaustivo.
 - f) Elegir el parámetro externo que maximice el coeficiente de determinación.
6. Los modelos son flexibles, ya que permiten distinguir plazos relevantes en las tasas, así mismo el número de jorobas y baches que se presentan en estos plazos determinan el grado del polinomio o bien, el número de parámetros externos; en contraste con el número fijo de parámetros que se utilizan en los modelos Nelson-Siegel y la extensión de Svensson. Las restricciones impuestas garantizan que la tasa estimada de 1 día sea la de mercado para ese plazo así como estabilidad a largo plazo.
7. La curva generada por los modelos propuestos es una buena estimación de las tasas de mercado, teniendo ambos modelos la virtud de generar una curva suave con pocos parámetros mediante una metodología simple y fácil de implementar; destacando el modelo polinomial como el mejor ya que a pesar de tener un solo parámetro externo es adecuado para estimar tasas con baches y jorobas así como tasas crecientes.
8. Lo expuesto puede servir de base para generar una curva de rendimiento nominal libre de riesgo que comprenda a la Curva de Cetes, incorporando información de los Bonos Gubernamentales conocidos como M3, M5, M0 con plazos de 3, 5 y 10 años respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA

Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles. "Mercado de Dinero. Material de Apoyo". AMIB. México.

Bliss, R. (1996). "Testing term structure estimation methods". Working Paper 96-12a, November 1996. Federal Reserve Bank of Atlanta.

Courant, R., and D. Hilbert (1989). "Methods of Mathematical Physics". Vol. 1. Wiley Classics Library. Wiley-Interscience Publication. New York.

Díaz, A. (1994). "Invierta en la Bolsa. Guía para Inversiones Seguras y Productivas". 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Filipovic', D. (1998). "Exponential-Polynomial Families and the Term Structure Of Interest Rates". Working paper, Department of Mathematics, Zürich, Switzerland.

Grupo Proveedor de Precios Bursátiles (2003). "Metodología para la Valuación de Certificados de la Tesorería de la Federación 'Cetes TV:B'". Documento Confidencial. GBS Data. México.

Hunt, B. (1995). "Fitting parsimonious yield curve models to Australian coupon bond data". Working Paper No. 51 . School of Finance and Economics, University of Technology Sydney.

Instituto Mexicano del Mercado de Capitales (1992). "Inducción al Mercado de Valores. Material de Apoyo". IMMEC. México.

Kreyszig, E. (1978). "Introductory Functional Analysis with Applications". University of Windsor. Wiley Classics Library. New York.

Krippner, L. (2002). "The OLP Model of the Yield Curve: A New Consistent Cross-sectional and Inter-temporal Approach". Working paper. Victoria University of Wellington.

Nelson, C., and A. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves". Journal of Business, Vol.60, No. 4, pp. 473-489.

Proveedor Integral de Precios (2002). "Manual de Valuación de Valores, Documentos e Instrumentos Financieros". Documento Confidencial. PIP. México.

Svensson, L. (1994). "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994". Working Paper No. 4871. National Bureau of Economic Research.

Valor de Mercado (2002). "La Estimación de la Estructura Temporal de Tasas". Documento Confidencial. Valmer. México.

Valor de Mercado. “Metodologías Alternas”. Documento Interno. Valmer. México.

Venegas, F. (2002). “Notas de Clase de Modelos de Tasas de Interés I”. ITESM. México.

ANEXO 1

EL MODELO DE LOS SPLINES CON POLINOMIOS DE CUARTO GRADO

Sea $\tau = T-t$ el plazo al vencimiento (donde T indica la fecha de vencimiento y t la fecha de hoy). Supongamos que existen $n+1$ plazos de mercado: $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$.

Siendo R_0, R_1, \dots, R_n sus tasas de rendimiento correspondientes.

Para cada intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ se desea estimar la tasa de rendimiento mediante

$R_i(\tau) = a_i + b_i\tau + c_i\tau^2 + d_i\tau^3 + e_i\tau^4$, donde $\tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$; $i=1,2,\dots,n$.

Para la determinación de los parámetros se piden las siguientes condiciones:

1) Que pase por los puntos de mercado

a) Que inicie en los nodos. Sea $i=1,2,\dots,n$ y el intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

$$R_{i-1} = a_i + b_i\tau_{i-1} + c_i\tau_{i-1}^2 + d_i\tau_{i-1}^3 + e_i\tau_{i-1}^4 \quad (1)$$

b) Que finalicen en los nodos. Sea $i=1,2,\dots,n$ y el intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

$$R_i = a_i + b_i\tau_i + c_i\tau_i^2 + d_i\tau_i^3 + e_i\tau_i^4 \quad (2)$$

2) La primera derivada del polinomio que finaliza y del que inicia sean iguales en los nodos.

Se tiene: $R_i'(\tau) = b_i + 2c_i\tau + 3d_i\tau^2 + 4e_i\tau^3$

Para el punto final del intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$; $i=1,2,\dots,n-1$; la derivada es:

$$b_i + 2c_i\tau_i + 3d_i\tau_i^2 + 4e_i\tau_i^3$$

Para el punto inicial del intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$; $i=1,2,\dots,n-1$; la derivada es:

$$b_{i+1} + 2c_{i+1}\tau_i + 3d_{i+1}\tau_i^2 + 4e_{i+1}\tau_i^3$$

Por tanto: $b_i + 2c_i\tau_i + 3d_i\tau_i^2 + 4e_i\tau_i^3 = b_{i+1} + 2c_{i+1}\tau_i + 3d_{i+1}\tau_i^2 + 4e_{i+1}\tau_i^3$

Así la condición es:

$$b_i + 2c_i\tau_i + 3d_i\tau_i^2 + 4e_i\tau_i^3 - b_{i+1} - 2c_{i+1}\tau_i - 3d_{i+1}\tau_i^2 - 4e_{i+1}\tau_i^3 = 0 \quad (3)$$

3) La segunda derivada del polinomio que finaliza y del que inicia sean iguales en los nodos

Se tiene: $R_i''(\tau) = 2c_i + 6d_i\tau + 12e_i\tau^2$

Para el punto final del intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$; $i=1,2,\dots,n-1$; la derivada es:

$$2c_i + 6d_i\tau_i + 12e_i\tau_i^2$$

Para el punto inicial del intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$; $i=1,2,\dots,n-1$; la derivada es:

$$2c_{i+1} + 6d_{i+1}\tau_i + 12e_{i+1}\tau_i^2$$

Por tanto: $2c_i + 6d_i\tau_i + 12e_i\tau_i^2 = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}\tau_i + 12e_{i+1}\tau_i^2$

Así la condición es:

$$2c_i + 6d_i\tau_i + 12e_i\tau_i^2 - 2c_{i+1} - 6d_{i+1}\tau_i - 12e_{i+1}\tau_i^2 = 0 \quad (4)$$

4) La tercera derivada del polinomio que finaliza y del que inicia sean iguales en los nodos.

Se tiene: $R_i'''(\tau) = 6d_i + 24e_i\tau$

Para el punto final del intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$; $i=1,2,\dots,n-1$; la derivada es:

$$6d_i + 24e_i\tau_i$$

Para el punto inicial del intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$; $i=1,2,\dots,n-1$; la derivada es:

$$6d_{i+1} + 24e_{i+1}\tau_i$$

Por tanto: $6d_i + 24e_i\tau_i = 6d_{i+1} + 24e_{i+1}\tau_i$

Así la condición es:

$$6d_i + 24e_i\tau_i - 6d_{i+1} - 24e_{i+1}\tau_i = 0 \tag{5}$$

Observe que se tienen 5n parámetros: a_i, b_i, c_i, d_i, e_i ; $i=1,2,\dots,n$

y por las condiciones anteriores se tienen: $n+n+(n-1)+(n-1)+(n-1)=5n-3$ ecuaciones.

Para tener el mismo número de ecuaciones que de parámetros se pueden imponer condiciones adicionales, ya sea en el lado derecho o izquierdo de la curva de rendimiento, en particular se considerarán las siguientes condiciones:

$$R_n'(\tau_n) = b_n + 2c_n\tau_n + 3d_n\tau_n^2 + 4e_n\tau_n^3 = 0$$

$$R_1''(\tau_0) = 2c_1 + 6d_1\tau_0 + 12e_1\tau_0^2 = 0$$

$$R_n'''(\tau_n) = 6d_n + 24e_n\tau_n = 0$$

Por tanto, se tiene un sistema de 5n ecuaciones con 5n incógnitas, que puede ya ser resuelto.

La condición (1) puede expresarse como:

$$a_1 + b_1\tau_0 + c_1\tau_0^2 + d_1\tau_0^3 + e_1\tau_0^4 = R_0$$

$$a_2 + b_2\tau_1 + c_2\tau_1^2 + d_2\tau_1^3 + e_2\tau_1^4 = R_1$$

... ..

$$a_n + b_n\tau_{n-1} + c_n\tau_{n-1}^2 + d_n\tau_{n-1}^3 + e_n\tau_{n-1}^4 = R_{n-1}$$

La condición (2) a su vez como:

$$a_1 + b_1\tau_1 + c_1\tau_1^2 + d_1\tau_1^3 + e_1\tau_1^4 = R_1$$

$$a_2 + b_2\tau_2 + c_2\tau_2^2 + d_2\tau_2^3 + e_2\tau_2^4 = R_2$$

... ..

$$a_n + b_n\tau_n + c_n\tau_n^2 + d_n\tau_n^3 + e_n\tau_n^4 = R_n$$

La condición (3) como:

$$b_1 + 2c_1\tau_1 + 3d_1\tau_1^2 + 4e_1\tau_1^3 - b_2 - 2c_2\tau_1 - 3d_2\tau_1^2 - 4e_2\tau_1^3 = 0$$

$$b_2 + 2c_2\tau_2 + 3d_2\tau_2^2 + 4e_2\tau_2^3 - b_3 - 2c_3\tau_2 - 3d_3\tau_2^2 - 4e_3\tau_2^3 = 0$$

... ..

$$b_{n-1} + 2c_{n-1}\tau_{n-1} + 3d_{n-1}\tau_{n-1}^2 + 4e_{n-1}\tau_{n-1}^3 - b_n - 2c_n\tau_{n-1} - 3d_n\tau_{n-1}^2 - 4e_n\tau_{n-1}^3 = 0$$


```

MIter=15*11*8*8;
H2=zeros(12,MIter);
i1=1; i=0;
do while i1<=28;
    i2=29;
    do while i2<=91;
        i3=92;
        do while i3<=182;
            i4=183;
            do while i4<=364;
                i=i+1; Tau=i1 | i2 | i3 | i4; H2[.,i]=mca(Tau);
                i4=i4+26; if i4==365; i4=364; endif;
            endo;
            i3=i3+13; if i3==183; i3=182; endif;
        endo;
        i2=i2+6.5; if i2==94; i2=91; endif;
    endo;
    i1=i1+2; if i1==29; i1=28; endif;
endo;

```

```

Sigue2:
c=maxindc(H2[11,.']); @ El Máx. R2 @
HF=H2[.,c]; TauF=HF[7:10]; B1=HF[2];
" Parámetros_Finales:"; HF; Res=Grafí(Modelo,m~RM,TauF); @ --- GRÁFICA --- @
RMC=RMT2(TauF); Goto FIN;

```

```

MODEL3:
@ ---- MODELO BASE NS ---- @
B00=B0; B10=B1;
H=zeros(6,364); i=1;
do while i<=364;
    if Modelo==3; H[.,i]=mcNS(i); c=maxindc(H[5,.']); @ El Máx. R2 @
    else; H[.,i]=mca(i); c=minindc(H[6,.']); @ El mín. e'e @ endif; i=i+1;
endo;
HF=H[.,c]; TauF=HF[4]; B0=HF[1]; B1=HF[2];
" Parámetros_Finales:"; HF; Res=Grafí(Modelo,m~RM,TauF); @ --- GRÁFICA --- @
RMC=RMTNS(TauF);

```

```

FIN:
PL=seqa(1,1,MaxEst); YE=100*(360/PL).*(EXP(RMC.*PL/360)-1);
Res=GrafíF(Modelo,m~YI,YE); @ --- GRÁFICA: TASA SIMPLE --- @
" Plazo Tasa_Mdo Tasa_Estimada Error"; m~yi~ye[m]~ye[m]-yi;
" Suma de Abs(Errores)"; sumc(abs(ye[m]-yi));
END;

```

```

@ ***** RUTINAS ***** @
PROC mca(t); @ --- Mínimos Cuadrados con B1 iterativo --- @
    local Aux1;
    B1=B10;
    if Modelo==1; B1=bet1(t); Aux1=mc(t);
    elseif Modelo==2; B1=bet2(t); Aux1=mc2(t);
    elseif Modelo==4; B1=betNS(t); Aux1=mcNS(t);
    endif;
    RETP (Aux1);
ENDP;

```

```

PROC bet1(t); @ ----- Cálculo de BETA-1. MODELO POLINOMIAL ----- @
  local em, F1,F2,F3,F4,F5;
  local X,YE,k,B,Aux;
  k=1;
  do while k<=30;
    X=mc(t); em=exp(-1/t);
    F1=t*(1-em);
    F2=t*(1-em)-em;
    F3=(2*t)*(1-em)-(1/t)*(1+2*t).*em;
    F4=(6*t)*(1-em)-(1/t^2)*(1+3*t+6*t^2).*em;
    F5=(24*t)*(1-em)-(1/t^3)*(1+4*t+12*t^2+24*t^3).*em;
    B=X[3:6]; YE=B[1]*F2+B[2]*F3+B[3]*F4+B[4]*F5;
    Aux=B1; B1=(1/F1)*(RM[1]-B0-YE);
    if Abs(B1-Aux)<10^(-8); break; endif;
    k=k+1;
  endo;
  RETP (B1);
ENDP;

```

```

PROC bet2(t); @ ----- Cálculo de BETA-1. MODELO PARAM.EXT. ----- @
  local t1,t2,t3,t4, F1,F2,F3,F4,F5;
  local X,YE,k,B,Aux;
  t1=t[1]; t2=t[2]; t3=t[3]; t4=t[4]; k=1;
  do while k<=30;
    X=mc2(t);
    F1=t1*(1-exp(-1/t1));
    F2=t1*(1-exp(-1/t1))-exp(-1/t1);
    F3=t2*(1-exp(-1/t2))-exp(-1/t2);
    F4=t3*(1-exp(-1/t3))-exp(-1/t3);
    F5=t4*(1-exp(-1/t4))-exp(-1/t4);
    B=X[3:6]; YE=B[1]*F2+B[2]*F3+B[3]*F4+B[4]*F5;
    Aux=B1; B1=(1/F1)*(RM[1]-B0-YE);
    if Abs(B1-Aux)<10^(-8); break; endif;
    k=k+1;
  endo;
  RETP (B1);
ENDP;

```

```

PROC betNS(t); @ ----- Cálculo de BETA-1. MODELO NS ----- @
  local em, F1,F2,F3,F4,F5;
  local X,YE,k,B,Aux;
  k=1;
  do while k<=30;
    X=mcNS(t); em=exp(-1/t);
    F1=t*(1-em);
    F2=t*(1-em)-em;
    B=X[3]; YE=B[1]*F2;
    Aux=B1; B1=(1/F1)*(RM[1]-B0-YE);
    if Abs(B1-Aux)<10^(-8); break; endif;
    k=k+1;
  endo;
  RETP (B1);
ENDP;

```

```

PROC mc(t); @ --- --- Mínimos Cuadrados. MODELO POLINOMIAL ----- @
  local em, F1,F2,F3,F4,F5;
  local X,B, YE,RE, Aux;
  em=exp(-m/t);
  F1=(t/m).*(1-em);
  F2=(t/m).*(1-em)-em;
  F3=(2*t/m).*(1-em)-(1/t)*(m+2*t).*em;
  F4=(6*t/m).*(1-em)-(1/t^2)*(m^2+3*m*t+6*t^2).*em;
  F5=(24*t/m).*(1-em)-(1/t^3)*(m^3+4*m^2*t+12*m*t^2+24*t^3).*em;
  Y=RM-B0-B1*F1;
  X=F2~F3~F4~F5;
  B=inv(X'X)*(X'Y);
  YE=B[1]*F2+B[2]*F3+B[3]*F4+B[4]*F5;
  E=Y-YE;
  Aux=(Y-meanc(Y))'(Y-meanc(Y));
  R2=1-E'E/aux;
  RETP (B0|B1|B|t|R2|e'e);
ENDP;

```

```

PROC mc2(t); @ ----- MIn.Cuad. MODELO de PARAMETROS EXT. ----- @
  local t1,t2,t3,t4,F1,F2,F3,F4,F5;
  local X,B, YE,RE, Aux;
  t1=t[1]; t2=t[2]; t3=t[3]; t4=t[4];
  F1=(t1/m).*(1-exp(-m/t1));
  F2=(t1/m).*(1-exp(-m/t1))-exp(-m/t1);
  F3=(t2/m).*(1-exp(-m/t2))-exp(-m/t2);
  F4=(t3/m).*(1-exp(-m/t3))-exp(-m/t3);
  F5=(t4/m).*(1-exp(-m/t4))-exp(-m/t4);
  Y=RM-B0-B1*F1;
  X=F2~F3~F4~F5;
  B=inv(X'X)*(X'Y);
  YE=B[1]*F2+B[2]*F3+B[3]*F4+B[4]*F5;
  E=Y-YE;
  Aux=(Y-meanc(Y))'(Y-meanc(Y));
  R2=1-E'E/aux;
  RETP (B0|B1|B|t|R2|e'e);
ENDP;

```

```

PROC mcNS(t); @ --- --- Mínimos Cuadrados. MODELO NS ----- @
  local em, F1,F2,F3,F4,F5;
  local X,B, YE,RE, Aux;
  em=exp(-m/t);
  F1=(t/m).*(1-em);
  F2=(t/m).*(1-em)-em;
  if Modelo==3;
    Y=RM;
    X=ones(rows(m),1)~F1~F2;
    B=inv(X'X)*(X'Y);
    YE=B[1]+B[2]*F1+B[3]*F2;
  else;
    Y=RM-B0-B1*F1;
    X=F2;
    B=inv(X'X)*(X'Y);
    YE=B[1]*F2;
  endif;
  E=Y-YE;

```

```

Aux=(Y-meanc(Y))'(Y-meanc(Y));
R2=1-E'E/aux;
if Modelo==3; RETP (B|t|R2|e'e); else; RETP (B0|B1|B|t|R2|e'e); endif;
ENDP;

```

```

PROC Rmt(t); @ ----- Curva Estimada. MODELO POLINOMIAL ----- @
local PL, em, G1,G2,G3,G4,G5;
local Bet, YE1;
PL=seqa(1,1,MaxEst);
em=exp(-PL/t);
G1=(t/PL).*(1-em);
G2=(t/PL).*(1-em)-em;
G3=(2*t/PL).*(1-em)-(1/t)*(PL+2*t).*em;
G4=(6*t/PL).*(1-em)-(1/t^2)*(PL^2+3*PL*t+6*t^2).*em;
G5=(24*t/PL).*(1-em)-(1/t^3)*(PL^3+4*PL^2*t+12*PL*t^2+24*t^3).*em;
Bet=mc(t); Bet=Bet[1:6];
YE1=Bet[1]+Bet[2]*G1+Bet[3]*G2+Bet[4]*G3+Bet[5]*G4+Bet[6]*G5;
RETP (YE1);
ENDP;

```

```

PROC Rmt2(t); @ ----- Curva Estimada: MODELO de PARÁMETROS EXT. ----- @
local t1,t2,t3,t4,PL, G1,G2,G3,G4,G5;
local Bet, YE1;
t1=t[1]; t2=t[2]; t3=t[3]; t4=t[4];
PL=seqa(1,1,MaxEst);
G1=(t1/PL).*(1-exp(-PL/t1));
G2=(t1/PL).*(1-exp(-PL/t1))-exp(-PL/t1);
G3=(t2/PL).*(1-exp(-PL/t2))-exp(-PL/t2);
G4=(t3/PL).*(1-exp(-PL/t3))-exp(-PL/t3);
G5=(t4/PL).*(1-exp(-PL/t4))-exp(-PL/t4);
Bet=mc2(t); Bet=Bet[1:6];
YE1=Bet[1]+Bet[2]*G1+Bet[3]*G2+Bet[4]*G3+Bet[5]*G4+Bet[6]*G5;
RETP (YE1);
ENDP;

```

```

PROC RmtNS(t); @ ----- Curva Estimada. MODELO NS ----- @
local PL, em, G1,G2,G3,G4,G5;
local Bet, YE1;
PL=seqa(1,1,MaxEst);
em=exp(-PL/t);
G1=(t/PL).*(1-em);
G2=(t/PL).*(1-em)-em;
Bet=mcNS(t); Bet=Bet[1:3];
YE1=Bet[1]+Bet[2]*G1+Bet[3]*G2;
RETP (YE1);
ENDP;

```

```

PROC GRAFI(Aux1,Aux2,t); @ ----- GRÁFICA de TASA CONTINUA ----- @
@ Identifica la Curva:Aux1=Modelo, Nodos:Aux2, Estimada:Rmt(t), t=TAU @
local x,y,k,Auxi;
@ Nombre del archivo gráfico (*.tek) @
_ptek =
RUTAS$+"Curva"$+"C"$+ftos(Caso,"If",1,0)$+"M"$+ftos(aux1,"If",1,0)$+"C.tkf";
Auxi="CURVA DE CETES "; @ Título @
if Aux1==1; Auxi=auxi$+"(Modelo Polinomial)";
elseif Aux1==2; Auxi=auxi$+"(Parametros Externos)";

```



```

        elseif Aux1==3; Auxi=auxi$+"(Modelo Base NS)";
        else; Auxi=auxi$+"(Modelo NS con Restricciones)";
    endif;
    Auxi=Auxi$+" . Fecha: "$+AF; title(Auxi);
    xlabel("Dias al Vencimiento");
    ylabel("Tasas Continuanamente Capitalizables");@Etiquetas de los Ejes X e Y@
    x=seqa(1,1,MaxEst);
    if Aux1==1;y=Rmt(t); elseif Aux1==2;y=Rmt2(t); else;y=RmtNS(t); endif; @ Genera Curva Estimada@
    _psym = Aux2[.,1]~Aux2[.,2]~ones(rows(Aux2),1).*(8~3~4~1~0); @ Pone Nodos @
    _plegcti={1,5}; @ Coordenadas y Tamaño de la Leyenda @
    _plegstr="Tau = "$+ftos(t[1],"lf",1,0); /* Leyenda para la Serie */
    k=2; do while k<=rows(t);
    _plegstr = _plegstr$+" , "$+ftos(t[k],"lf",1,0); k=k+1; endo;
    _pdate=""; _plwidth=30; @ Quita Fecha, Tamaño de línea @
    _pcolor=8; _pmcolor = {0,0,0,0,0,0,0,15}; @Color de Línea,Fondo Blanco @
    xy(x,y) ;
    RETP ("");
ENDP;

```

```

PROC GRAFIF(Aux1,Aux2,Aux3); @ ----- GRÁFICA de TASA SIMPLE ----- @
@ Identificador de la Curva:Aux1=Modelo, Nodos:Aux2, Estimada:Aux3 @
local x,y,k,Auxi;
@ Nombre del archivo gráfico (*.tek) @
_ptek =
RUTA$+"Curva"$+"C"$+ftos(Caso,"lf",1,0)$+"M"$+ftos(aux1,"lf",1,0)$+"S.tkf";
Auxi="CURVA DE CETES "; @ Título @
if Aux1==1; Auxi=auxi$+"(Modelo Polinomial)";
elseif Aux1==2; Auxi=auxi$+"(Parametros Externos)";
elseif Aux1==3; Auxi=auxi$+"(Modelo Base NS)";
else; Auxi=auxi$+"(Modelo NS con Restricciones)";
endif;
Auxi=Auxi$+" . Fecha: "$+AF; title(Auxi);
xlabel("Dias al Vencimiento");
ylabel("Tasas de Rendimiento"); @ Etiquetas de los Ejes X e Y @
x=seqa(1,1,MaxEst);
y=Aux3; @ Curva Estimada @
_psym = Aux2[.,1]~Aux2[.,2]~ones(rows(Aux2),1).*(8~3~4~1~0); @Pone Nodos@
_plegcti={1,5}; @ Coordenadas y Tamaño de la Leyenda @
_plegstr="Tau Final = "$+ftos(TauF[1],"lf",1,0); @ Leyenda para la Serie @
k=2; do while k<=rows(TauF);
_plegstr = _plegstr$+" , "$+ftos(TauF[k],"lf",1,0); k=k+1; endo;
_pdate=""; _plwidth=30; @ Quita Fecha, Tamaño de línea @
_pcolor=1; _pmcolor={0,0,0,0,0,0,0,15}; @ Color de Línea, Fondo Blanco @
xy(x,y) ;
    RETP ("");
ENDP;

```