



# EL COLEGIO DE MÉXICO

## CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

### **Maestría en Economía**

Trabajo de investigación para obtener el grado de  
Maestría en Economía

**CORRELACIONES CONDICIONALES DINÁMICAS  
EN LA EVALUACIÓN DEL RIESGO DE CRÉDITO:  
MODELO DE DOS FACTORES**

**Carlos Alberto Reyes Martínez**

Promoción 2007 - 2009

Asesor: Dr. José Gonzalo Rangel López

2011

*“No se puede llegar a la verdadera ciencia a menos que se haya aprendido antes a rendirle culto. Verdad es que el hombre tiene derecho a mirar de frente la luz, mas ese derecho tiene que conquistarlo” R. Steiner*

Agradezco...

... a mi Dios por esa posibilidad de Luz...

... a mis padres Pablo y Coty por su amor, dedicación y ejemplo.

... a Génesis por su amor y paciencia.

... a mis hermanos, en especial a Rodolfo.

... a ese colectivo de amigos que tan injustamente en esta ocasión no recibe un nombre, pero que ha estado conmigo en el momento preciso; en particular a mis buenos amigos de la maestría.

Un agradecimiento especial para mi asesor, el Dr. Gonzalo Rangel, por su disposición y paciencia al dar el cauce correcto al presente trabajo. Gracias por la información y los conocimientos proporcionados, que fueron la base para el desarrollo del mismo.

Por último, un agradecimiento para los profesores del Centro de Estudios Económicos de El Colegio de México por su orientación y ayuda durante el transcurso de la maestría.

## RESUMEN

El presente trabajo desarrolla un modelo para la evaluación del riesgo de crédito de un portafolio de activos financieros. En dicho modelo se considera relevante modelar no sólo la volatilidad individual de los rendimientos de los activos financieros, sino también las correlaciones entre los rendimientos de los activos como procesos que cambian en el tiempo. Siguiendo la metodología de Engle, Berd y Voronov (2007), los rendimientos de un activo se separan en una componente sistemática y una componente idiosincrática. A diferencia de lo que ellos proponen, la componente sistemática se modela no solo con un factor (S&P500), sino que para México éste se modela con dos factores: el IPC de la Bolsa Mexicana de Valores (factor local) y el S&P500 de la Bolsa de Nueva York (factor global). La dinámica de las varianzas y covarianzas asociadas al factor local y al factor global va a determinar la estructura de dependencia entre los activos del portafolio. Conocer la estructura de correlaciones nos permite simular la función de pérdidas, la cual es la herramienta fundamental para el administrador del riesgo de crédito del portafolio. Se presentan especificaciones para las varianzas condicionales de los factores con asimetrías TARCH(1,1) y sin asimetrías GARCH(1,1). Por su parte, las correlaciones condicionales se obtienen con el modelo de Correlaciones Condicionales Dinámicas (DCC) de Engle (2002). Se analiza el riesgo de crédito en un portafolio de 10 acciones de empresas grandes en México. Después de analizar los datos se considera razonable trabajar bajo el supuesto de portafolio homogéneo. El período de análisis es 1994-2009. Los resultados son consistentes con los hechos estilizados de una mayor dependencia en la cola inferior de la distribución de rendimientos y de exceso de kurtosis en períodos de crisis económicas. Las funciones de pérdida (rendimientos) y las correlaciones de *default* muestran un comportamiento empírico que describe adecuadamente los períodos económicos analizados. Los resultados son consistentes entre sí, en el sentido de que el ordenamiento de las funciones de pérdida y el ordenamiento de las correlaciones de *default* siempre es el mismo para todas las especificaciones; así sean de un factor o de dos factores, con simetría o con asimetría. Este tipo de modelos son parsimoniosos en el sentido que no presentan el problema de dimensionalidad, típico en la estimación de matrices de covarianzas de activos. También se asegura con ellos que las matrices sean positivas definidas sin la necesidad de imponer restricciones poco plausibles.

## ÍNDICE

I. RIESGO DE CRÉDITO, PRINCIPALES MODELOS EN MÉXICO.....	1
II. FUNDAMENTOS ECONÓMICOS Y ESTADÍSTICOS DE LAS CORRELACIONES.....	12
III. MODELO DE DOS FACTORES CON CORRELACIONES DINÁMICAS.....	21
IV. ESTIMACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS.....	28
V. CONCLUSIONES.....	51
VI. POSIBLES EXTENSIONES.....	53
VII. BIBLIOGRAFÍA .....	54

## I. RIESGO DE CRÉDITO: PRINCIPALES MODELOS EN MÉXICO

### RIESGO DE CRÉDITO

“... el riesgo de no recibir los pagos acordados sobre inversiones tales como préstamos o bonos, debido al *default* de la contraparte”. Embrechts et al. (2005).

“...el riesgo asociado a cualquier tipo de eventos relacionados con la actividad crediticia, tales como: cambios en la calidad crediticia (ajustes a la alza o a la baja de las calificaciones de crédito), variaciones de los *spreads* de crédito, y el evento de *default*”. Bielecki et al. (2004).

“... la pérdida potencial que se registra con motivo del incumplimiento de una parte en una transacción financiera (o en alguno de los términos y condiciones de laguna transacción). También se concibe como un deterioro de la calidad crediticia de la contraparte o en la garantía o colateral pactada originalmente” De Lara (2002).

“Se determina que existen dos tipos de riesgo de crédito: el riesgo de incumplimiento, que se refiere a la pérdida potencial derivada de que la contraparte no pueda cumplir sus obligaciones financieras en las condiciones definidas contractualmente; y el riesgo de mercado, que se define como la pérdida potencial que podría sufrir un tenedor de un portafolio de préstamos, instrumentos financieros o derivados, como consecuencia de que el valor de mercado de estos disminuya. La segunda definición plantea exposición al riesgo de crédito aún en el caso de que la contraparte no sufra quebranto alguno”. Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (1999).

La actividad de crédito es relevante para individuos, empresas y gobierno pues afecta sus respectivas restricciones presupuestarias. Debe, en consecuencia, de ser manejada con responsabilidad. Lo cual necesariamente implica contar con una valoración lo más precisa posible del riesgo involucrado en las transacciones de crédito.

Al situarnos en el contexto de una economía globalizada, es natural pensar en una alta correlación en los eventos económicos. Es cada vez más difícil pensar en eventos económicos independientes. Por esta misma razón es importante tener en cuenta que los eventos ligados a la actividad de crédito (probablemente) van a estar relacionados entre sí a nivel nacional y a nivel internacional.

Más aún, la interrelación que existe entre empresas y/o entidades económicas cambia en el tiempo. Este efecto se acentúa en épocas de inestabilidad económica, como quedó claro en la crisis actual (2008). Eventos originados en los mercados internacionales de crédito (principalmente en E.U.A.) tienen repercusiones en la economía de todos los países en el mundo en distintas dimensiones: producción, consumo, mercados laborales, comercio, el crédito mismo, etc. La interacción entre agentes económicos cambia.

El valor de las empresas cambia en el tiempo y también el valor de sus activos. Una medición adecuada del riesgo de crédito debe tomar en cuenta estos cambios. También se debe capturar el hecho de que el valor de un activo no varía en el tiempo de forma independiente, pues también se ve afectado por la variación en el valor de otros activos.

Los mismos mercados de crédito han experimentado cambios que afectan la estructura de las carteras de crédito. Por ejemplo, Altman et al. (2008) resumen los 10 cambios más importantes en este tipo de mercados como sigue:

- Desarrollo de nuevos productos. Particularmente en las áreas de derivados de créditos y de financiamiento estructurado. La estandarización de antiguas innovaciones.
- La creciente sofisticación de los agentes más grandes en los mercados de crédito en términos de técnicas y de estrategias.
- El uso cada vez mayor de modelos matemáticos y científicos (por ejemplo, modelos de *scoring* para créditos hipotecarios, modelos de correlaciones para determinar el precio de canastas de *swaps* de *defaults*).
- Los Nuevos acuerdos de Basilea, los cuales han moldeado directamente los mercados bancarios e indirectamente influenciado a los participantes del mercado en general (llamado con frecuencia el *regulatory capital arbitrage*).
- La mayor disponibilidad de información confiable sobre operaciones de crédito a nivel global a través del Internet. El enorme crecimiento en las capacidades de los sistemas de cómputo a costos accesibles, que permite una mejor capacidad para generar reportes y para modelación.
- Enormes cambios en los mercados mismos en términos de tamaño, liquidez y globalidad.
- El surgimiento de fondos de coberturas (*hedge funds*) como inversionistas mayores en los mercados.
- La creciente influencia (y posterior declive) de las empresas calificadoras.
- Menores niveles de pérdidas y mayores niveles de liquidez conducen a una reducción de los *spreads* de crédito, el cuál alcanzo mínimos históricos en

junio de 2007. Este frenesí del mercado involucró a un número grande de inversionistas en lo que resultó ser una mala selección de créditos.

Siguiendo a los mercados internacionales, el mercado crediticio en México ha crecido también en tamaño y en sofisticación durante la última década. Sin embargo, dicho crecimiento no se ha dado en los mismos niveles que se ha dado en los mercados de países más desarrollados.

A pesar de la importancia de contar con una valoración confiable del riesgo de crédito y de la existencia de modelos más adecuados para la medición del mismo, la adopción de estos nuevos modelos no ha sido tan rápida como debiera. La afirmación anterior es válida para México y para otras economías emergentes.

En México, por ejemplo, se tiene poca evidencia de la adopción de modelos de riesgo de crédito que contemplen la dinámica en el tiempo de las correlaciones entre activos de un portafolio.

## **MODELOS DE RIESGO DE CRÉDITO EN MÉXICO**

A continuación, y antes de presentar el modelo objeto de este trabajo, se hace una descripción muy general de los modelos de riesgo de crédito más conocidos en México, de acuerdo con De Lara (2002), Elizondo et al. (2003) y Márquez (2006).

El hablar de los modelos de riesgo de crédito (más) empleados en México debe estar libre de afirmaciones categóricas, pues las instituciones involucradas consideran este tipo de modelos como parte de su capital intelectual y resulta complicado conocer a cabalidad qué modelos emplea cada una de ellas.

Sin embargo, podemos obtener alguna información a partir de una encuesta realizada a seis bancos en 1999 y citada en Elizondo et al. (2003). Se puede inferir

que a pesar de que la mayoría de los bancos encuestados usan modelos internos de calificación de cartera, la manera en que realizan dicha calificación no conduce a una estimación explícita de la probabilidad ni de la severidad de las pérdidas. Como se mencionó anteriormente, para un administrador de riesgos es fundamental conocer la función de pérdidas a las que está expuesta su inversión.

El problema es que los modelos más populares como CreditRisk+ y CreditMetrics<sup>TM</sup>,<sup>1</sup> emplean como insumos las calificaciones de crédito. Estas calificaciones se determinan en muchas ocasiones usando la experiencia de otros países y con frecuencia ignoran aspectos relevantes del mercado interno. Este tipo de modelación puede clasificarse como empírica y sin un sustento teórico claro. Sin embargo estos modelos son ampliamente aceptados en el mundo.

Hasta hace algunos años, cuando las agencias calificadoras no hacían distinción entre regiones, la aplicación de estos modelos era cuestionable ya que las calificaciones no eran tan específicas para las empresas y/o activos. Hoy en día se emiten calificaciones más regionalizadas y por tanto más específicas a las empresas. Sin embargo, la credibilidad de las empresas calificadoras se ha deteriorado recientemente

Además de CreditRisk<sup>+</sup> y de CreditMetrics<sup>TM</sup> en México se han desarrollado modelos dentro de las instituciones, la mayoría de los cuales se quedan en la etapa de la calificación interna.

Una gran parte de las calificaciones de cartera se hacen con base en opiniones de expertos o en una mecanización de esta intuición experta. Como los modelos de *scoring*, que califican operaciones de crédito mediante una asignación de puntos basada en cierta experiencia de otorgamiento de créditos.

---

<sup>1</sup> Estos modelos se han utilizado para intentar llegar a la medida explícita de las probabilidades de pérdida y de su severidad o magnitud.

La forma de calificar la cartera en México queda en un plano más cualitativo que cuantitativo, en la mayoría de las ocasiones. En otras palabras, en muchos casos no se llega a la expresión explícita de la distribución de pérdidas.

En cuanto a los modelos con un sustento teórico más claro, se pueden clasificar en modelos estructurales y modelos de forma reducida (Márquez, 2006).

Los modelos estructurales se basan en Merton (1974). Este tipo de modelos presentan problemas en su aplicación a situaciones específicas de las empresas. Merton modela el incumplimiento de una firma en función de su estructura de capital y del valor de sus activos respecto a sus pasivos. En este modelo la quiebra se determina en el momento en que el valor de mercado de los activos es insuficiente para cubrir las obligaciones exigidas por sus pasivos. Un problema serio es que se basa en variables que no son observables con la frecuencia requerida. Debido a esto y a los costos que implica su implementación, su uso por lo general se va a reservar para grandes corporativos.

Los modelos de forma reducida determinan la quiebra como un proceso probabilístico que depende de los factores de entorno económico y financiero. Por ejemplo, las tasas de interés, la inflación y el tipo de cambio. En esta categoría se encuentran los modelos tipo Z-score de Altman y los modelos tipo logit y probit<sup>1</sup>. Éste tipo de modelos también son usados en México y presentan la ventaja que no dependen de una calificación exógena para calcular las probabilidades de pérdida y la severidad.

No parece existir evidencia de que la tendencia en los modelos empleados en México haya evolucionado hacia esquemas más apropiados para la evaluación del riesgo de crédito. De la investigación para este trabajo sobre los modelos empleados en las instituciones financieras en México, sólo se tuvo conocimiento

---

<sup>1</sup> Modelos probabilísticos de elección discreta, que en el caso del otorgamiento de crédito calculan una propensión al pago o al no-pago, de acuerdo a una serie de características de la operación en particular.

de una institución que ha desarrollado un modelo de correlaciones condicionales con un factor y el modelo no es del dominio público.

Hago a continuación una breve descripción de algunos de los modelos mencionados arriba.

### Modelo Z-score, Altman (1968)

Tiene como base una función discriminante, la función Z que asigna una calificación basado en el valor de  $X_i$  y su ponderación correspondiente.

$$Z = 1.2 X_1 + 1.4 X_2 + 3.3 X_3 + 0.6 X_4 + 0.99 X_5$$

Esta función discriminante ya no es un score “subjetivo” como los mencionados anteriormente porque la calificación se basa en ponderaciones estimadas con datos reales de empresas que quebraron y de empresas en buen estado financiero. Después de una cuidadosa selección de los determinantes de la salud financiera de una empresa, y partiendo de una lista de 22 razones financieras, Altman presenta una propuesta parsimoniosa donde los cocientes relevantes resultan ser:

$X_1$  = capital de trabajo/activos totales

$X_2$  = utilidades retenidas/activos totales

$X_3$  = utilidades antes de impuestos/activos totales

$X_4$  = valor de mercado de la acción/valor en libros de la deuda

$X_5$  = ventas/activos totales

La calificación Z nos va a decir la situación financiera de la empresa. Se determinan tres intervalos críticos:

- Empresas sanas, si  $Z > 2.99$ .

- Empresas en bancarrota, si  $Z < 1.81$ .
- No es posible afirmar algo sobre su situación financiera, si  $1.81 \leq Z \leq 2.99$ .

Para determinar la confiabilidad del indicador, se realizan pruebas de hipótesis estadísticas sobre el estadístico Z.

En años posteriores (1977 y 1991) Altman hace modificaciones a su modelo original incluyendo otras variables que mejoran la capacidad de predicción de las quiebras. Las probabilidades de quiebra se determinan por medio de matrices de transición de estado. Lo anterior, junto con las pérdidas promedio dado el estado de quiebra, nos permite calcular la severidad de las pérdidas.

#### Modelo CreditMetrics™, J.P. Morgan (1997)

Este modelo sirve para medir el riesgo de crédito de un portafolio. Toma en cuenta tanto el evento de incumplimiento como el deterioro (o mejora) de la calidad crediticia del emisor.

Existen dos problemas con este modelo:

- (i) El supuesto de normalidad no me permite modelar la alta kurtosis de la cola izquierda, lo cual es un hecho estilizado presente en los rendimientos financieros (Embrechts et al., 2005).
- (ii) Las correlaciones entre rendimientos de los activos que conforman el portafolio son difíciles de estimar cuando se cuenta con un número reducido de datos históricos.

En forma general los 3 pasos de la metodología de CreditMetrics™ son los siguientes:

- Definir la matriz de probabilidades de transición ( $P_{ij}$ ) del estado  $i$  al estado  $j$ . Nótese que esto implícitamente asume que se cuenta con calificaciones de los activos, lo cuál es una limitante del modelo, como se mencionó anteriormente.
- Se realiza una valuación del portafolio a valor presente contingente. Es contingente a la ocurrencia de cada uno de los estados de calidad crediticia y al evento de incumplimiento. Se toma en cuenta la posibilidad de cierta recuperación sobre las pérdidas y una tasa de interés acorde a cada uno de los posibles estados (más baja si la calidad crediticia mejora y más altas si empeora).
- Las medidas de riesgo y rendimiento del portafolio se calculan de la siguiente manera:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i \mu_i^2 - \mu_{TOTAL}^2}$$
$$\mu_{TOTAL} = \sum_{i=1}^n P_i \mu_i$$

Donde:

$P_i$  = Probabilidad de tener calificación  $i$

$\mu_i$  = Valor del portafolio en el estado  $i$

$\mu_{TOTAL}$  = Media del portafolio

Debido a la no-normalidad, la media y la varianza no nos van a ayudar a caracterizar correctamente los movimientos extremos en el portafolio.

### CreditRisk+, Credit Suisse/First Boston (1997)

A diferencia del modelo Credit Metrics<sup>TM</sup>, el enfoque de CreditRisk<sup>+</sup> no es sobre el VaR mediante la estimación de la media y la varianza. Esta metodología se enfoca en determinar las pérdidas esperadas. Se consideran únicamente dos estados de la naturaleza, a diferencia de CreditMetrics<sup>TM</sup> donde los estados son múltiples. En este modelo los estados son cumplimiento o incumplimiento. Por lo tanto se le conoce como modelo de probabilidad de no-pago<sup>1</sup>.

La probabilidad de incumplimiento va a ser aquí una variable continua que tiene una distribución Poisson. El parámetro de la media de la distribución va a ser la tasa de créditos incumplidos que en promedio se registran en cierto período de tiempo. Con esta distribución y el monto promedio de los créditos podemos obtener la pérdida esperada y la pérdida no esperada (Credit VaR).

### CyRCE, Márquez/Banxico (2002)

CreditMetrics<sup>TM</sup> y CreditRisk<sup>+</sup> son los dos modelos más usados por los bancos para medir el riesgo de crédito. Sin embargo, debido al requerimiento de calificaciones adecuadas de crédito, no es aplicable en muchas situaciones en México. Javier Márquez (2002) propone el modelo CyRCE que presenta tres ventajas importantes:

- (i) hace supuestos para que se obtengan expresiones cerradas del VaR y no incurrir así en métodos numéricos altamente demandantes de recursos.

---

<sup>1</sup> Y por su parte, los múltiples estados posibles, a CreditMetrics<sup>TM</sup> se le conoce como modelo de mark-to-market.

- (ii) Permite la segmentación de la cartera en grupos no homogéneos a diferencia de CreditMetrics<sup>TM</sup> y CreditRisk<sup>+</sup>.
- (iii) Se consideran correlaciones entre activos y entre grupos de activos.

El modelo permite descomponer el riesgo, de manera que se aprecia tanto la contribución de las probabilidades individuales, como la de la concentración – medida a través del índice de Herfindahl-Hirschman- al riesgo de crédito.

Cada uno de estos modelos incorpora por separado elementos importantes para caracterizar de forma adecuada al riesgo de crédito. Sin embargo y aunque algunos de estos modelos toman en cuenta las interrelaciones entre los activos de una cartera, todos ellos nos dan una medida no condicional (estática) del riesgo de un portafolio.

Por esta razón, los modelos anteriores no nos permiten caracterizar directamente el impacto de los cambios en el entorno económico sobre los parámetros que caracterizan la distribución conjunta de pérdidas en el tiempo.

Esta tesis toma en cuenta la dinámica en el tiempo del valor de los activos y la dinámica en el tiempo entre los activos de un portafolio. Se llega a una representación explícita de la función de pérdidas del portafolio.

## **II. FUNDAMENTOS ECONÓMICOS Y ESTADÍSTICOS DE LAS CORRELACIONES**

### **FUNDAMENTOS ECONÓMICOS**

El valor de un activo va a estar muy ligado a las expectativas futuras que se tengan sobre el proyecto o la firma que lo respaldan. Existe información que nos hace cambiar nuestros pronósticos sobre eventos futuros que tienen impacto en nuestros activos<sup>1</sup>. El impacto de las innovaciones no siempre va a ser igual debido a que las empresas y los individuos se involucran en nuevos proyectos y en nuevas interacciones que hacen que los mecanismos de transmisión de las noticias cambien.

En última instancia los rendimientos de un activo van a depender de la información con la que se actualizan su varianza y sus correlaciones, cuando estas son modeladas de forma dinámica (condicional). Más aún, la naturaleza misma de las innovaciones puede cambiar. Por ejemplo, en nuestro modelo, podemos ver a los factores como generadores de innovaciones que afectan los precios de nuestros activos. Hace años, en un entorno menos globalizado que hoy en día, las innovaciones generadas por nuestro factor global, es decir por el índice SP500, tenían un menor impacto en los precios de los activos locales que hoy en día. La innovación es la misma pero la naturaleza de dichas innovaciones ha cambiado y esto tiene repercusiones en los precios y rendimientos.

El tamaño de las innovaciones también puede cambiar, como en aquellos mercados que se mantienen sin turbulencias durante años, pero que un día se convierten en mercados fluctuantes.

---

<sup>1</sup> Engle (2009) las llama "innovaciones" (news). Cada innovación tiene un impacto en los precios de menor o mayor magnitud.

A fin de plantear un modelo formal sobre las innovaciones y su efecto en la valuación de activos, podemos pensar que las innovaciones relevantes para los precios de los activos son las innovaciones en dividendos y las innovaciones en rendimientos.

Engle parte de la ecuación de rendimientos

$$r_{t+1} = \log(P_{t+1} + D_{t+1}) - \log P_t$$

Utilizando la descomposición de Campbell y Schiller, reexpresa la ecuación de rendimientos de la siguiente manera:

$$r_{t+1} \approx k + \rho p_{t+1} + (1-\rho) d_{t+1} - p_t$$

Asumiendo que las series de precios no divergen, llega a que:

$$r_t - E_{t-1}r_t = \eta_t^d - \eta_t^r$$

Es decir, los rendimientos no esperados se descomponen en innovaciones en dividendos e innovaciones en rendimientos esperados futuros.

Después de cierta manipulación de la expresión anterior Engle (2006) llega a la siguiente expresión que es relevante en el modelo que propone el presente trabajo, en notación vectorial:

$$\text{Cov}_{t-1}(r_t) = \text{Cov}_{t-1}(\eta_t^d) + \text{Cov}_{t-1}(\eta_t^r) - \text{Cov}_{t-1}(\eta_t^d, \eta_t^r) - \text{Cov}_{t-1}(\eta_t^r, \eta_t^d)$$

Esta expresión nos dice dos cosas muy importantes. Primero, la correlación entre rendimientos va a provenir de la correlación entre las innovaciones de los dividendos y las innovaciones en los rendimientos esperados futuros (justificación de un modelo de correlaciones condicionales). Segundo, la mayoría de las noticias

que son relevantes para la futura rentabilidad de una firma también contendrán información que es relevante para otras (justificación del modelo de factores).

Algunas razones por las que cambian las correlaciones en el tiempo:

- Cambios en la línea de negocios.
- Cambios en la magnitud de las innovaciones. Crisis.
- Cambios en el tamaño del negocio.
- Cambios en primas de riesgo de crédito.
- Posiciones similares de otros portafolios. Contagios. CDO's.
- Rompimiento de fundamentales de la firma y/o economía.

El incluir un modelo de correlaciones condicionales nos permite implícitamente capturar el efecto de este tipo de eventos, claro si nuestra especificación es adecuada.

## **MEDIDAS DE DEPENDENCIA**

Existen diversas medidas que tratan de capturar el nivel de dependencia que existe en entre dos variables aleatorias. Además de la justificación económica del modelo propuesto en este trabajo es bueno hacer explícitas las ventajas técnicas que nos da el modelo. Para cumplir este propósito, se hace primero un repaso bastante superficial de las medidas y modelos más conocidos para la medición de la dependencia entre variables aleatorias.

### Cópulas

En este tipo de medidas se parte del hecho de que una función de distribución conjunta de una colección de variables aleatorias captura de forma implícita el

comportamiento marginal de cada una de las variables aleatorias y la estructura de dependencia entre ellas. Las cópulas (que también son funciones de distribución) presentan la ventaja de que no sólo contiene de manera implícita sino también explícita los comportamientos marginales y la relación de dependencia entre las variables.

Por el Teorema de Sklar<sup>1</sup>, para una función de distribución conjunta k-dimensional  $F(\cdot)$ , con funciones de distribución marginales continuas, siempre vamos a tener que existe una cópula  $C(\cdot)$  única asociada tal que:

$$F(x_1, \dots, x_k) = C(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k))$$

Si derivamos esta función de distribución para obtener las densidades llegamos a que:

$$f(y) = c(u) f_1(y_1) f_2(y_2) \dots f_k(y_k)$$

Esta expresión es muy valiosa pues nos dice que hay un camino directo para llegar a la función de distribución conjunta de  $y$  a partir de las densidades marginales. En este resultado se separa el comportamiento conjunto en el producto de las densidades marginales y en  $c(u)$  que captura la dependencia entre las variables.

Un problema importante con las cópulas es que a pesar de ser teóricamente valiosas, presentan problemas para aplicaciones dinámicas. No por esto han dejado de hacerse intentos para abordar problemas dinámicos mediante las cópulas. Las aplicaciones más populares son las cópulas Gaussianas, t de Student y Clayton. La cópula Gaussiana presenta el problema de no capturar dependencia en las colas.

---

<sup>1</sup> Véase Embrechts et al. (2005) o Engle (2009).

A pesar de la superioridad teórica de las cópulas en la medición de la dependencia existente entre una colección de variables aleatorias, en la práctica presentan un problema de dimensionalidad y de consumo de recursos.

La alternativa más usual son las medidas de dependencia bivariada, a continuación se presentan las más usadas en finanzas:

### Correlación de Pearson

Es la medida usual de asociación lineal entre dos variables aleatorias.

$$\rho(y_1, y_2) = \frac{E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)}{\sqrt{[E(Y_1^2) - E(Y_1)^2][E(Y_2^2) - E(Y_2)^2]}}$$

### Tao de Kendall

Es una medida invariante a transformaciones estrictamente crecientes de los datos.

$$\tau \equiv P[(Y_1 - Y_1')(Y_2 - Y_2') > 0] - P[(Y_1 - Y_1')(Y_2 - Y_2') < 0]$$

### Rho de Spearman

Medida invariante a transformaciones estrictamente crecientes de los datos

$$\rho_s = \frac{E(U_1 U_2) - E(U_1)E(U_2)}{\sqrt{[E(U_1^2) - E(U_1)^2][E(U_2^2) - E(U_2)^2]}} = 12E(U_1 U_2) - 3$$

Las U's son uniformes y por eso tienen media  $\frac{1}{2}$  y varianza  $1/12$  lo que explica la simplificación.

### Dependencia en la Cola Inferior

La probabilidad de tener un movimiento extremo en una variable dado que otra variable ya tuvo un movimiento extremo se conoce como dependencia en la cola y se define como

$$\lambda_{L,12}(\theta) = \lim_{u \rightarrow 0} P(U_1 < u_\theta | U_2 < u_\theta) = \lim_{u \rightarrow 0} P(U_2 < u_\theta | U_1 < u_\theta)$$

Esta medida es importante para describir movimientos extremos en activos financieros. Por esta razón sólo definimos esta medida para la cola izquierda (pérdidas) pero también existe la definición análoga para dependencia en la cola derecha.

Como se mencionó antes, la distribución normal no es buena opción para medir dependencia en las colas, de hecho esta medida vale cero para una distribución normal.

### Correlación de default

$$\rho_{1,2}(\theta) = \frac{\Pr(I_1 * I_2 = 1) - \theta^2}{\theta(1-\theta)} = \frac{\lambda_L - \theta}{(1-\theta)}$$

Es la correlación entre dos eventos de *default*. Las thetas son probabilidades de *default* para las empresas. La parte de arriba es una covarianza de funciones

indicadoras y la parte de abajo es un producto de desviaciones estándar de funciones indicadoras.

La relación entre estas dos últimas medidas de dependencia es la siguiente:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \rho_{1,2}(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\lambda_L - \theta}{1 - \theta} = \lambda_L$$

## MODELOS CONDICIONALES DE VARIANZAS Y COVARIANZAS

La dinámica en el tiempo es una característica importante que se ha tratado de incorporar a la modelación de la dependencia bivariada.

Dado que la medida del riesgo más aceptada dentro de finanzas es la varianza, se ha desarrollado gran cantidad de modelos condicionales basados en el trabajo pionero de Engle (2002) sobre el modelo GARCH. Debido a la necesidad de modelar en forma conjunta la dependencia y variabilidad de portafolios de activos, se han hecho extensiones de los modelos univariados para enfrentar el caso multivariado. A continuación se presentan algunos de los modelos más relevantes en el área.

### Modelo GARCH Multivariado Diagonal

En este modelo la matriz de varianzas-covarianzas de un portafolios de activos se puede definir como:

$$H_t = \Omega + A \circ (r_{t-1} r_{t-1}') + B \circ H_{t-1}$$

En este tipo de modelos para estimar H y que sea positiva definida (o semidefinida), se imponen condiciones sobre las matrices del lado derecho. En

este modelo por ejemplo se pide que cuando iniciemos las iteraciones para determinar  $H_t$ , la  $H_0$  inicial sea positiva definida. Las condiciones que se piden sobre  $\Omega$ , A y B son análogas al caso univariado<sup>1</sup>. Se hacen extensiones al modelo como BEKK (para asegurar una estructura positiva definida) o VEC.

#### Modelo CCC, Bollerslev (1990)

*Constant Conditional Correlations.*

$$H_t = D_t R D_t \text{ y } D_t = \text{diag}(H_t)^{1/2}$$

Este tipo de modelos estiman la matriz de varianzas y covarianzas H que va a tener una componente dinámica que sólo va a provenir de las varianzas que sí van a seguir un proceso GARCH pero el término de correlación va a permanecer constante  $\sigma_{i,j,t} = \rho_{i,j} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t}$ . Tiene la ventaja de ser un modelo parsimonioso en el sentido de que el número de parámetros a estimar ya no crece desmesuradamente.

#### Modelo DCC, Engle (2002)

*Dynamic Conditional Correlations.*

Es una generalización del modelo propuesto por Bollerslev. La principal diferencia es que ahora la matriz R de correlaciones sí va a tener una dinámica en el tiempo.

$$H_t = D_t R_t D_t \text{ y } D_t = \text{diag}(H_t)^{1/2}$$

Se realiza un de-garching<sup>2</sup> de los residuales y entonces las correlaciones quedan de esta manera:

---

<sup>1</sup>  $\Omega$ , A y B son positivas semidefinidas.

<sup>2</sup> De-garching significa eliminar el efecto de la varianza condicional de los residuales. Véase Engle (2009).

$$\rho_t = E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t}) = \frac{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}^2)E_{t-1}(\varepsilon_{2,t}^2)}} = \rho_t = \frac{E_{t-1}(r_{1,t}r_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(r_{1,t}^2)E_{t-1}(r_{2,t}^2)}}$$

pues  $h_{i,t} \equiv E_{t-1}(r_{i,t}^2)$  y  $\varepsilon_{i,t} = \frac{r_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$

Primero estimamos un modelo GARCH para las varianzas individuales y una vez que tenemos las varianzas condicionales obtenemos los residuales estandarizados. Después calculamos las correlaciones muestrales de dichos residuales como sigue:

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum \varepsilon_i \varepsilon_i'$$

Posteriormente sustituimos  $\bar{R}$  en la siguiente ecuación:

$$Q_t = \bar{R}(1 - \alpha - \beta) + \alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' + \beta Q_{t-1}$$

Para garantizar que la matriz de correlaciones esté bien definida normalizamos la matriz  $Q_t$  de la siguiente manera:

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2}$$

Con esta matriz de correlaciones condicionales ya podemos completar la matriz  $H_t$ . La estimación se realiza en dos etapas usando el Método Generalizado de Momentos (GMM). En la primera etapa se estiman los parámetros de las varianzas y en la segunda la de las correlaciones.

El proceso en dos etapas nos da estimadores consistentes, pero no completamente eficientes. Sin embargo la pérdida de eficiencia es pequeña como lo documentan Engle y Sheppard (2005).

### III. MODELO DE DOS FACTORES CON CORRELACIONES CONDICIONALES DINÁMICAS

Se presenta un modelo para evaluar el riesgo de crédito en un portafolio de activos financieros. El modelo propuesto tiene su antecedente en el modelo Factor DCC<sup>1</sup>.

Se propone un modelo de dos factores para reconocer la influencia tanto de eventos locales como de eventos globales en la determinación de los rendimientos de los activos financieros. Los factores que se consideran relevantes para los rendimientos financieros son el IPC de la Bolsa Mexicana de Valores (local) y el SP500 de la Bolsa de New York (global<sup>2</sup>). La dinámica entre estos dos factores nos permitirá conocer la estructura de correlaciones condicionales entre los activos del portafolio.

Conocer la estructura de correlaciones nos permitirá simular trayectorias de rendimientos y estimar así tanto la función de pérdidas como el coeficiente de correlación de default.

#### Rendimiento de los activos del portafolio.

Los rendimientos de los activos se componen de una parte sistemática y de una parte idiosincrática.

$$r_{i,t} = \beta_i^{M1} r_{M1,t} + \beta_i^{M2} r_{M2,t} + \varepsilon_{i,t}$$

La parte sistemática es descrita por los factores y la parte idiosincrática por los residuales.

---

<sup>1</sup> Para una explicación detallada véase Engle (2009) y Engle (2007).

<sup>2</sup> Para México el índice SP500 se considera un buen proxy del comportamiento de los mercados financieros globales.

## Factor local y factor global

Los factores siguen una dinámica condicional conjunta con las siguientes características.

Varianzas GARCH(1,1)

$$\begin{aligned}r_{M1,t} &= \sigma_{M1,t} \mathcal{E}_{M1,t} \\ \sigma_{M1,t}^2 &= w_{M1} + \alpha_{M1} r_{M1,t-1}^2 + b_{M1} \sigma_{M1,t-1}^2 \\ \\ r_{M2,t} &= \sigma_{M2,t} \mathcal{E}_{M2,t} \\ \sigma_{M2,t}^2 &= w + \alpha_{M2} r_{M2,t-1}^2 + b_{M2} \sigma_{M2,t-1}^2\end{aligned}$$

También considero modelos de volatilidades con efectos asimétricos TARCH(1,1).

$$\sigma_{Mi,t}^2 = \omega + \alpha_{Mi} (r_{i,t-1}^2) + \gamma_{Mi} r_{i,t-1}^2 I(r_{i,t-1} < 0) + \beta_{Mi} \sigma_{Mi,t-1}^2 \text{ para } i=1,2$$

Esto permite caracterizar los sesgos en la distribución de los rendimientos que permiten tener una mayor dependencia en la cola izquierda de la distribución. Este también es un hecho estilizado de los rendimientos en mercados accionarios y es la especificación que usan Engle, Berd y Voronov (2007).

Distribución Condicional Conjunta Normal Multivariada. La distribución en t con base en la información disponible en t-1.

$$\begin{pmatrix} r_{M1,t} \\ r_{M2,t} \end{pmatrix} \Big| \Omega_{t-1} \text{ se distribuye } N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11,t} & \Sigma_{12,t} \\ \Sigma_{21,t} & \Sigma_{22,t} \end{pmatrix} \right)$$

En la teoría de portafolios, gran parte del trabajo se centra en encontrar la matriz de varianzas y covarianzas  $H_t$ . En este trabajo se utiliza un modelo de Correlaciones Dinámicas Condicionales (DCC) de orden 2 para determinar la estructura de correlaciones. Las varianzas condicionales y las correlaciones condicionales nos permiten obtener las covarianzas. El modelo DCC para las correlaciones y el modelo GARCH (o TARARCH, según la especificación de la que se trate) para las varianzas condicionales nos permiten conocer nuestra matriz de varianzas y covarianzas para el período  $t$ , condicional a la información disponible en  $t-1$ :

$$H_t = \begin{pmatrix} \Sigma_{11,t} & \Sigma_{12,t} \\ \Sigma_{21,t} & \Sigma_{22,t} \end{pmatrix}$$

A continuación se describe el procedimiento de una forma más detallada.

Una vez que hemos estimado el modelo GARCH(1,1) para los factores, podemos calcular los residuales dividiendo los rendimientos por la volatilidad.

$$\varepsilon_{i,t} = \frac{r_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$$

Con estos residuales calculamos la correlación muestral:

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum \varepsilon_i \varepsilon_i'$$

Con la correlación muestral dentro de nuestra ecuación:

$$q_{1,2,t} = \bar{\rho}_{1,2} + a(\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{1,t-1} - \bar{\rho}_{1,2}) + b(q_{1,2,t-1} - \bar{\rho}_{1,2})$$

estimamos los parámetros  $a$  y  $b$ .

Se normaliza esta última matriz para construir la matriz de correlaciones condicionales de los factores:

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2}$$

Para construir  $H_t$  sólo hay que recordar que:  $h_{12t} = \sqrt{h_{1t}} \sqrt{h_{2t}} \rho_{12t}$

### CÁLCULO DE LAS CORRELACIONES CONDICIONALES ENTRE ACTIVOS

$$\text{Cov}(r_{i,t}, r_{j,t}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \beta_i^k \beta_j^l \Sigma_{kl,t} + \text{Cov}(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,t})$$

$$\rho_{i,j,t} = \frac{\text{Cov}(r_{i,t}, r_{j,t})}{\sqrt{\text{Var}(r_{i,t})} \sqrt{\text{Var}(r_{j,t})}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \beta_i^k \beta_j^l \Sigma_{kl,t} + \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}{\sqrt{(\beta_i^{M1})^2 \Sigma_{11,t} + (\beta_i^{M2})^2 \Sigma_{22,t} + 2\beta_i^{M1} \beta_i^{M2} \Sigma_{12,t} + \sigma_i^2} \sqrt{(\beta_j^{M1})^2 \Sigma_{11,t} + (\beta_j^{M2})^2 \Sigma_{22,t} + 2\beta_j^{M1} \beta_j^{M2} \Sigma_{21,t} + \sigma_j^2}}$$

### LA FUNCIÓN DE PÉRDIDAS

$M$  es el número de activos del portafolio, en nuestro caso  $M=10$ .

$l_i$  es la pérdida en la que se incurre si el evento de *default* ocurre antes del período

$T$ .

$\tau$  indica el momento en el tiempo en el que ocurre el *default*.

$L_M$  es la pérdida total del portafolio al tiempo  $T$ :

$$L_M = \sum_{i=1}^M l_i 1[\tau_i \leq T] = \sum_{i=1}^M l_i Y_i$$

La pérdida media será:

$$E(L_M) = \sum_{i=1}^M l_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^M l_i p_i \text{ con } p_i \text{ probabilidad de default antes de } T.$$

Debido a que es importante caracterizar las colas de la distribución, no nos interesa tener sólo la media sino la distribución completa de pérdidas.

$$F_L(x) = P[L_M \leq x]$$

Sea  $R$  un vector de rendimientos y  $d$  un vector de umbrales.

$$R = (R_1, \dots, R_M) \quad \text{y} \quad d = (d_1, \dots, d_M)$$

$R$  y  $d$  son tales que estaremos en *default* si los rendimientos caen por debajo de cierto umbral.

$$Y_i = 1 \Leftrightarrow R_i \leq d_i$$

La definición de este evento nos permite calcular nuestra función de pérdidas simplemente teniendo en cuenta la siguiente relación:

$$1 - F_L(d) = P[L_M \geq -d] = P[R_M \leq d] = F_R(d)$$

Existe una relación muy estrecha entre la distribución de rendimientos y la distribución de pérdidas. En realidad podemos trabajar con cualquiera de las dos para administrar el riesgo de crédito.

### Hipótesis de portafolio homogéneo.

Los pesos de cada factor se conocen como “betas”. Si las betas de los factores de mercado sean bastante parecidas entre activos, podemos trabajar con una beta general por cada factor. Este supuesto simplificador, entre otras cosas, implica un menor uso de recursos computacionales para la simulación.

El supuesto de portafolio homogéneo equivale a decir que  $\beta_i^{M1} = \beta^{M1}$  y  $\beta_i^{M2} = \beta^{M2}$  para toda  $i$  dentro del portafolio. En la siguiente sección se indica cómo se obtienen  $\beta_i^{M1}$  y  $\beta_i^{M2}$ . Los parámetros  $\beta^{M1}$ ,  $\beta^{M2}$  son el promedio de las betas de todos los activos del portafolio.

Si tenemos un portafolio homogéneo y suponiendo inversión igual en cada activo, entonces:

$$r_p = \frac{1}{10}r_{1t} + \frac{1}{10}r_{2t} + \dots + \frac{1}{10}r_{10t} = \frac{10}{10}(\beta^{M1}r_{1,t} + \beta^{M2}r_{2,t}) + \sum_{i=1}^{10} \frac{\varepsilon_{it}}{10} = \beta^{M1}r_{1,t} + \beta^{M2}r_{2,t} + E_{pt}$$

Por lo tanto podemos calcular:

$$\begin{aligned} F_{r_p}(d) &= E\left(F_{r_p|r_{M1}, r_{M2}}(d)\right) \\ &= E\left(P\left(r_p \leq d | r_{M1}, r_{M2}\right)\right) \\ &= E\left(\Phi\left(d_i - \beta^{M1}r_{M1,T} - \beta^{M2}r_{M2,T}\right)\right) \end{aligned}$$

### **SIMULACIONES**

La simulación de las funciones de pérdida se realiza a partir de los siguientes pasos:

(1) En primer lugar se escoge una fecha de inicio para la simulación y un horizonte de tiempo de T.

(2) Después, se simulan los rendimientos usando los parámetros que ya han sido estimados (para las varianzas y correlaciones condicionales) y generando números aleatorios de una distribución normal bivariada.

(3) Ya que se simularon los rendimientos diarios, se procede a agregarlos:

$$\tilde{R}_{i,T}^{(k)} = \sum_{j=1}^{100} \tilde{r}_{i,t+j}^{(k)}$$

(4) Para cada p se encuentra  $d_T(p)$  que resuelve :

$$\frac{1}{3000} \sum_{k=1}^{3000} \Phi \left( \frac{d_T - \beta_1 \tilde{r}_{1,T}^{(k)} - \beta_2 \tilde{r}_{2,T}^{(k)}}{\text{std} \left( \sum_{n=1}^{100} \varepsilon_{i,t+n}^{(k)} \right)} \right) = 10\%$$

(5) Se calcula  $\rho^d(p) = \frac{p_{12} - p^2}{p(1-p)}$  donde  $p_{1,2} = \frac{1}{3000} \sum_{i=1}^{3000} \Phi \left( \frac{d_T - \beta_1 \tilde{r}_{1,T}^{(k)} - \beta_2 \tilde{r}_{2,T}^{(k)}}{\text{std} \left( \sum_{n=1}^{100} \varepsilon_{i,t+n}^{(k)} \right)} \right)^2$

De esta forma obtenemos nuestra distribución de pérdidas y nuestras correlaciones de default.

## **IV. ESTIMACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS**

### **DATOS**

Para el análisis se pueden utilizar datos de los precios de las acciones de las empresas o de los precios de sus instrumentos de deuda. De hecho, estos últimos serían los candidatos naturales para el análisis de riesgo de crédito. Sin embargo por lo poco profundo del mercado de deuda en México, entre otras razones, se presentan dificultades para obtener series frecuentes de precios de instrumentos de este tipo.

Se trabaja por lo tanto con precios de acciones de 10 empresas grandes, la mayoría de las cuales forman parte del IPC. El trabajar con precios de acciones no representa ninguna pérdida en términos de calidad de la información. Al contrario: las series de precios de acciones tienen una calidad mejor, hay mayor disponibilidad de datos de alta frecuencia y nos permite analizar períodos de tiempo más amplios. El acceso a estas series es (relativamente) más sencillo. Más aún, tienen una ventaja de tipo económico: los precios de las acciones van a incorporar y reflejar con mayor rapidez la información disponible en el mercado que los precios de la deuda corporativa. Esta consideración resulta intuitiva teniendo en cuenta de que los mercados de acciones son más profundos y líquidos. La medición del riesgo crédito mediante umbrales de default para los rendimientos de las acciones es bastante estándar en la literatura sobre el tema.

Las 10 empresas (acciones) seleccionadas son:

Carso

Cemex

Comercial Mexicana

Elektra

Femsa

Vitro  
Banorte  
Telmex  
Televisa  
Wal Mart

Las series de datos son de frecuencia diaria. El período de estudio es julio/1994 - abril/2009. Se considera relevante este horizonte de análisis debido a que se involucra la ocurrencia de dos crisis con un impacto muy importante en México. Una crisis de origen local: la crisis de 1994-1995. Una crisis de origen global: la crisis actual de 2008.

Las series de precios se transforman en log-diferencias para obtener series de rendimientos. Se resta la tasa libre de riesgo, de tal manera que nos quedamos con excesos de rendimientos. La tasa libre de riesgo se calcula a partir de los rendimientos de los CETEs a 90 días con la siguiente fórmula de tasas equivalentes:

$(1 + r_d^f)^{360} = (1 + r_{91}^f)^{360/91}$ , donde los subíndices d y 91 indican la convertibilidad de las tasas (diaria y 91 días).

## **ESTIMACIÓN DE LAS BETAS**

Los pesos asociados a cada factor se conocen como “betas” y se estiman a partir de las siguientes regresiones:

$$r_{i,t} = \beta_i^{M1} r_{M1,t} + \beta_i^{M2} r_{M2,t} + \varepsilon_{i,t} \quad \text{para } i = 1, \dots, 10$$

Donde M1 es el IPC (factor local) y M2 el SP500 (factor global).

Para cada regresión se obtienen las betas de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) y se utiliza el método de Newey-West para tomar en cuenta la heteroscedasticidad en el nivel de significancia de estos estimadores.

Uno de los supuestos de un modelo de valuación de factores (APT, Ross (1976)) es la ortogonalidad. La alta correlación entre factores puede dificultar la interpretación de los pesos (betas). Por lo anterior es conveniente tomar factores ortogonales.

En este caso, debido a que las regresiones con las series originales de IPC y SP500 resultaban poco significativas para SP500 (probablemente debido a problemas de colinealidad) se hizo necesaria una ortogonalización.

La ortogonalización se realiza de la siguiente forma:

$$r_{M1,t} = c + \gamma r_{M2,t} + \varepsilon_t$$

Tomamos a los residuales como la nueva serie de los rendimientos del IPC, puesto que hemos extraído la información sobre el IPC que no está explicada por el SP500.

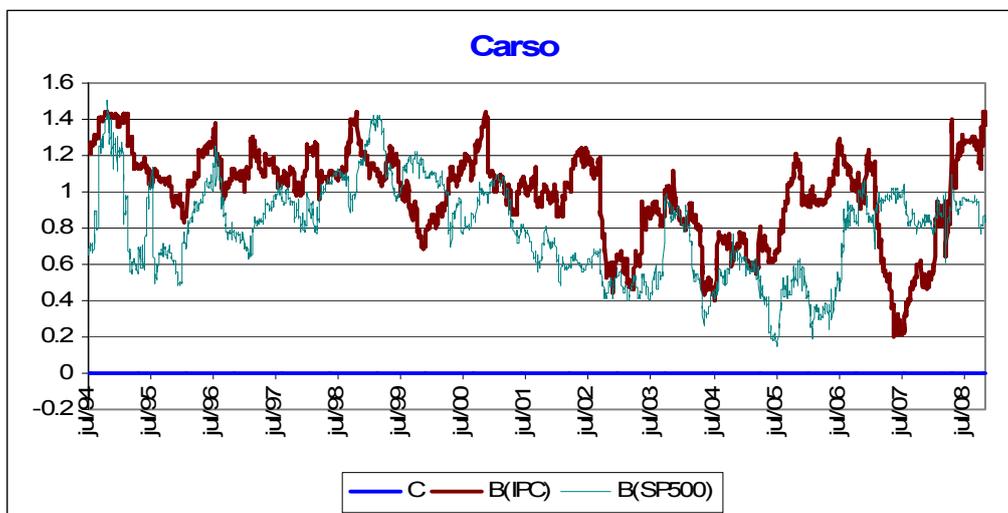
Se hacen nuevamente las regresiones ahora con la nueva serie ortogonal del IPC y todas las betas resultan (altamente) significativas. Consistente con la forma que construimos nuestros rendimientos (excesos sobre la tasa libre de riesgo), los interceptos resultan o significativamente cercanos a cero (p-value cercano a cero y coeficiente pequeño) o no se puede rechazar que sean cero (p-value grande).

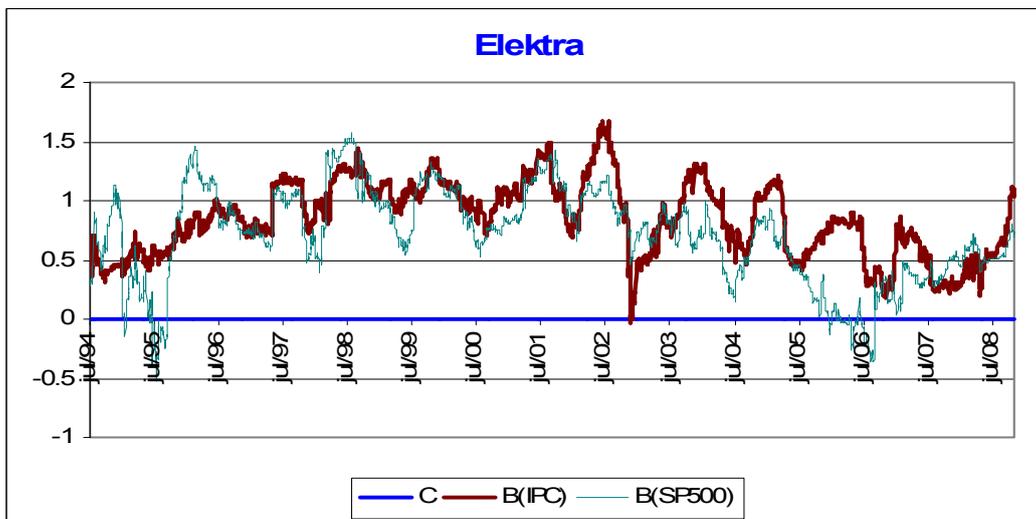
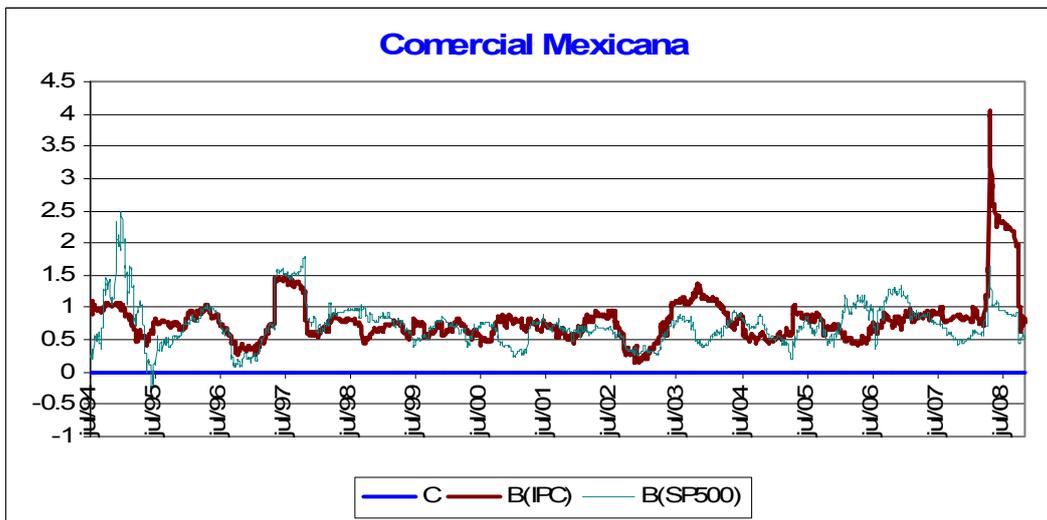
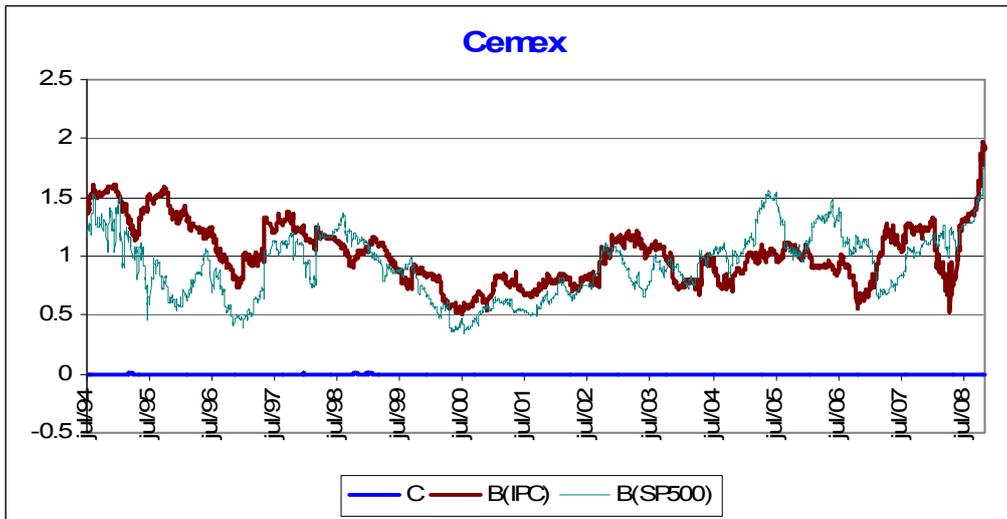
	Beta IPC	p-value	Beta SP500	p-value
CARSO	1.090621804	0	0.76359486	0
CEMEX	1.118531194	0	0.95072294	0
COMER	0.894231639	0	0.68951646	0
ELEKTRA	0.865941214	0	0.71535911	0
FEMSA	1.146923714	0	0.75874356	0
GVITRO	0.806997068	0	0.48899457	0
NORTE	0.860603662	0	0.81871002	0
TELMEX	0.899782077	0	0.63595741	0
TLEVISA	1.055886087	0	0.85582911	0
WALMEX	1.064894093	0	0.5843027	0

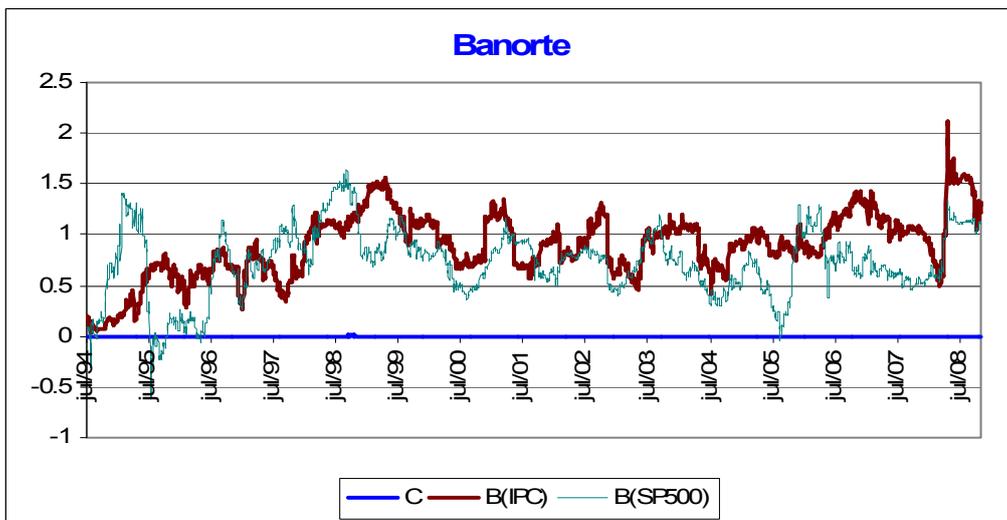
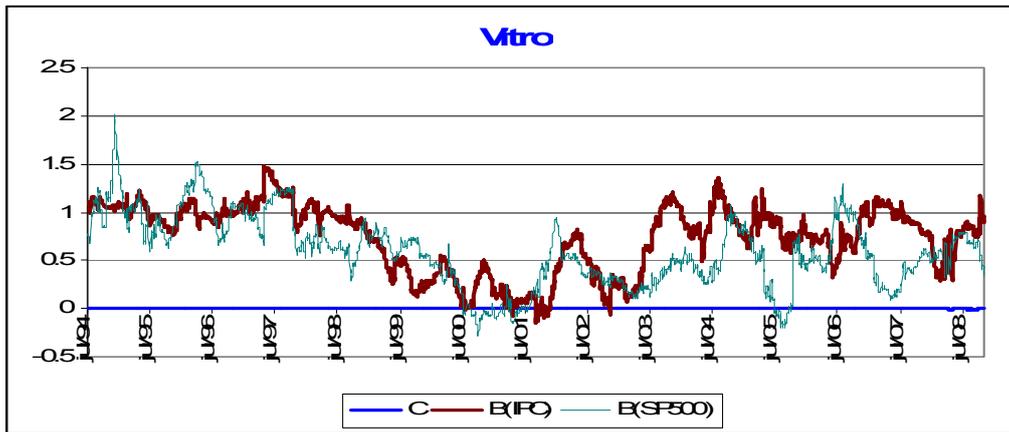
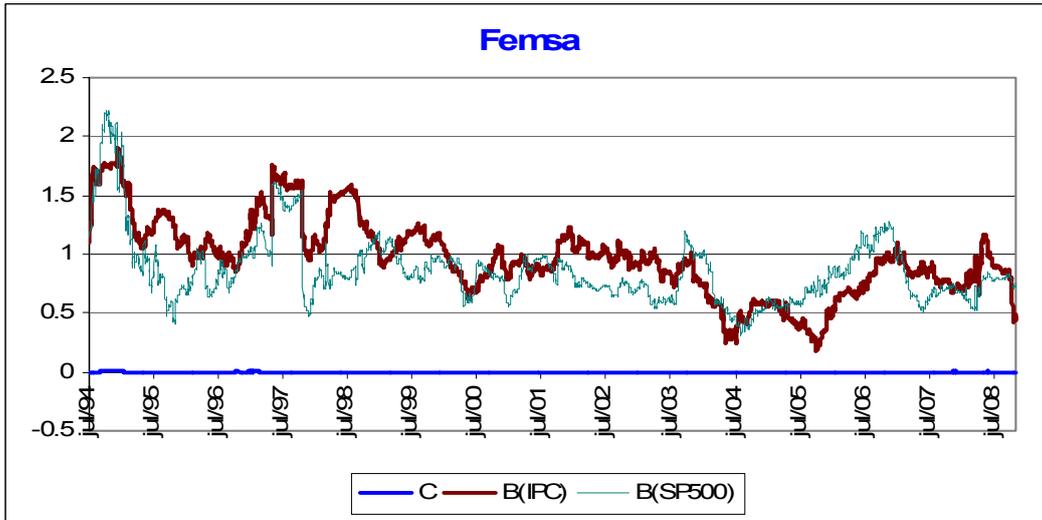
En general se observa que el peso del factor IPC es mayor que el del factor SP500, pero este último es bastante significativo.

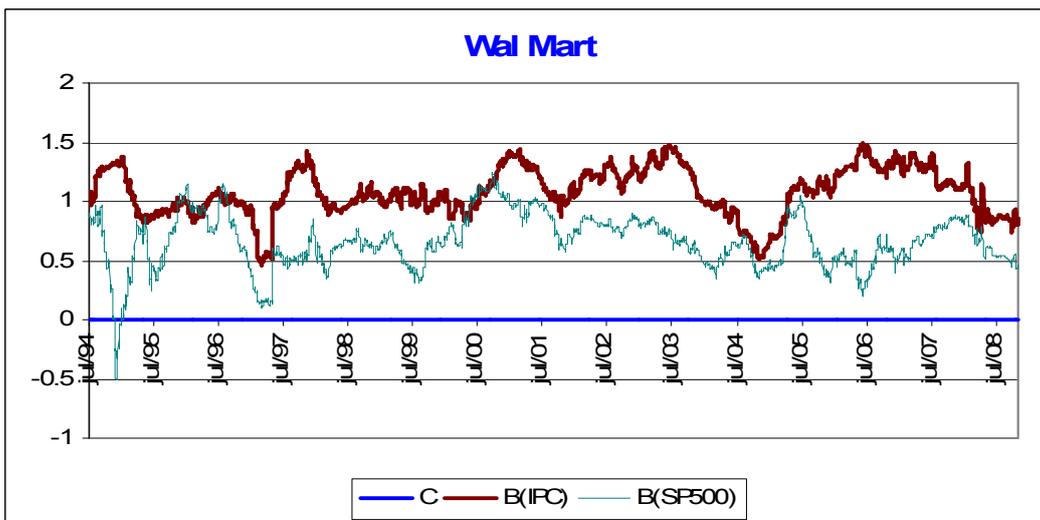
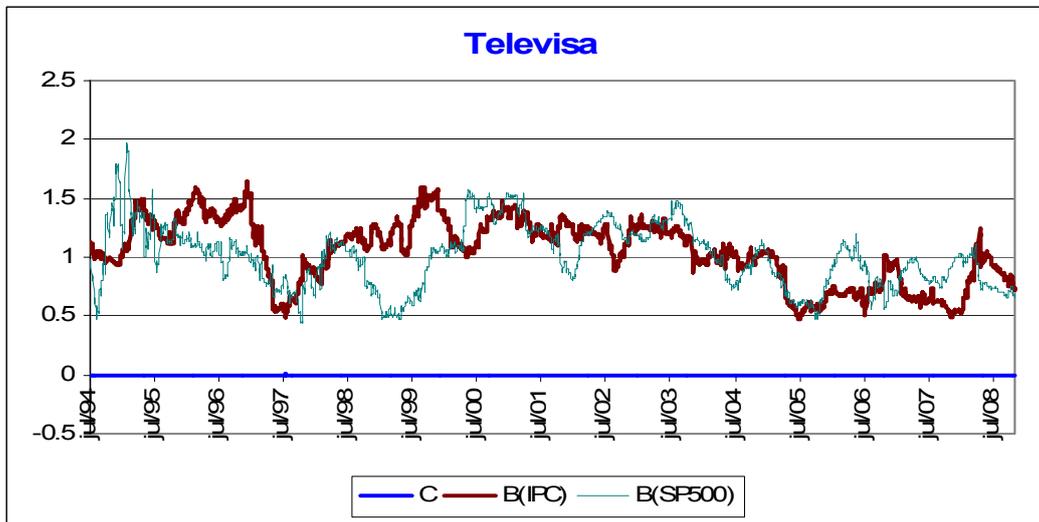
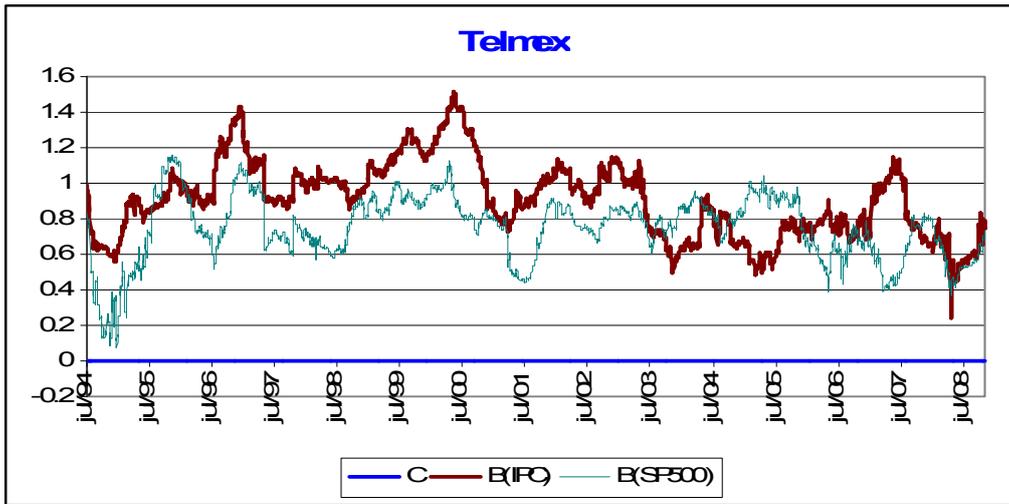
### Rolling betas.

En el modelo teórico planteado anteriormente se hace el supuesto de que las betas no varían en el tiempo. Una forma de verificar la solidez de dicho supuesto es haciendo regresiones con una ventana de tiempo fija para cada uno de los días de la muestra. Es decir, se estima una beta para cada día con la información de los 120 días adyacentes. De esta forma nos podemos dar cuenta de cómo varían las betas en el tiempo. Podemos ver qué tan estables son. Se realizan las rolling betas para cada uno de los activos del portafolio.









Al hacer una inspección visual a las gráficas presentadas, el supuesto de estabilidad de los parámetros en el tiempo parece bastante razonable para Carso, Comercial Mexicana, Televisa, Telmex y Wal Mart. Para Femsa, Vitro y Elektra el supuesto. En el caso de Banorte el supuesto parece muy razonable, salvo al principio, entre 1994 y 1997.

### Portafolio homogéneo.

Otro supuesto importante que se hace es el de portafolio homogéneo, bajo el cual los factores afectan de forma muy similar a los distintos activos. En el cuadro de las betas presentado anteriormente podemos ver que el supuesto es bastante razonable para las betas del IPC pues todas son muy similares. En el caso de las betas del SP500, sin ser tan parecidas, aún parecen soportar el supuesto mencionado. Se toman los promedios de las betas como las betas del portafolio homogéneo. Este supuesto simplificador únicamente se usa al momento de realizar las simulaciones para encontrar la distribución de las pérdidas mediante algoritmos computacionales menos complejos. Las correlaciones dinámicas sí se calculan con los valores específicos de las betas de los factores. La dinámica que queremos capturar entre activos (la estructura de correlaciones condicionales) no se ve afectada en este sentido.

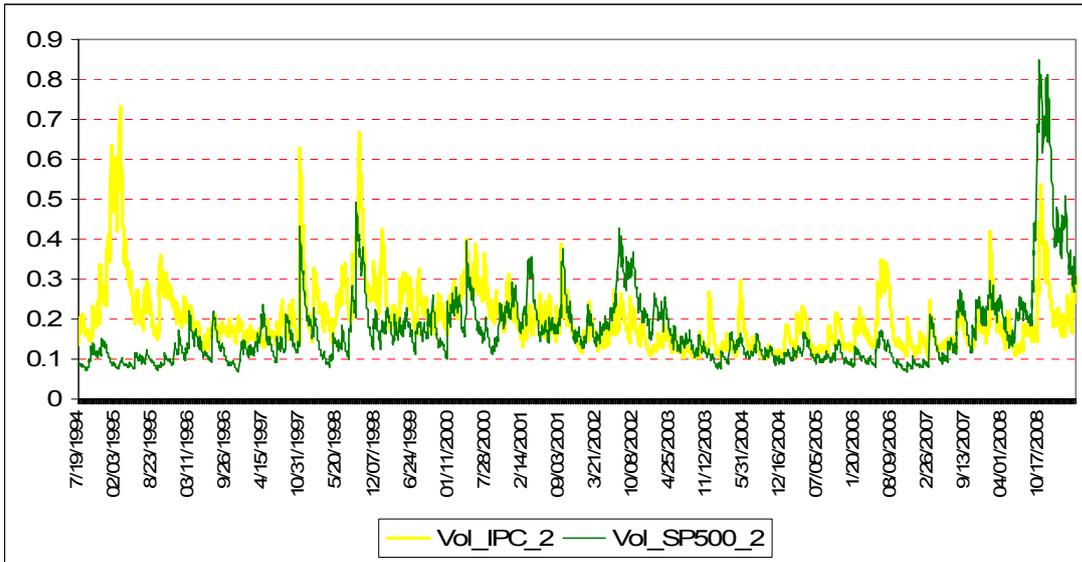
Las betas del Portafolio Homogéneo son las siguientes:  $\beta^{M1} = 0.980441255$  y

$$\beta^{M2} = 0.726173075$$

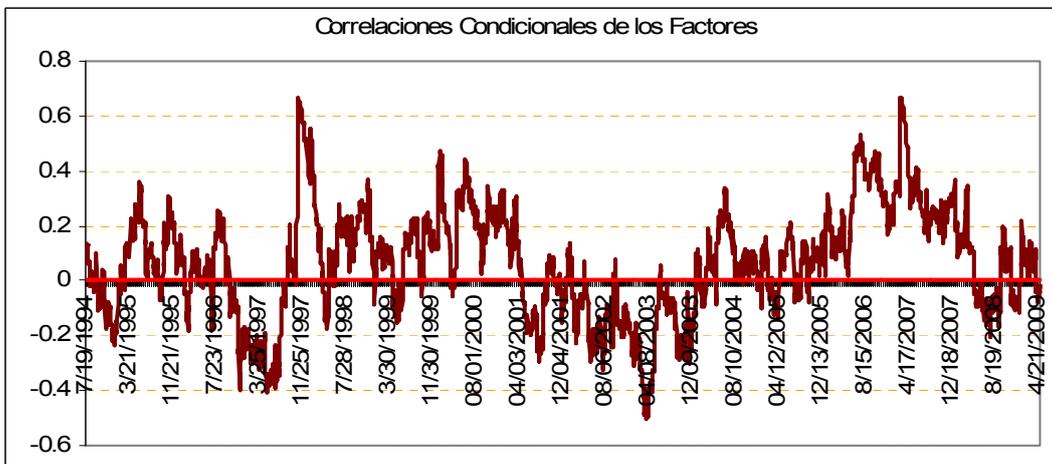
### **SEGUNDOS MOMENTOS CONDICIONALES**

Primero se hacen las estimaciones para las volatilidades las cuales se modelan con procesos TAR(1,1) para las varianzas.

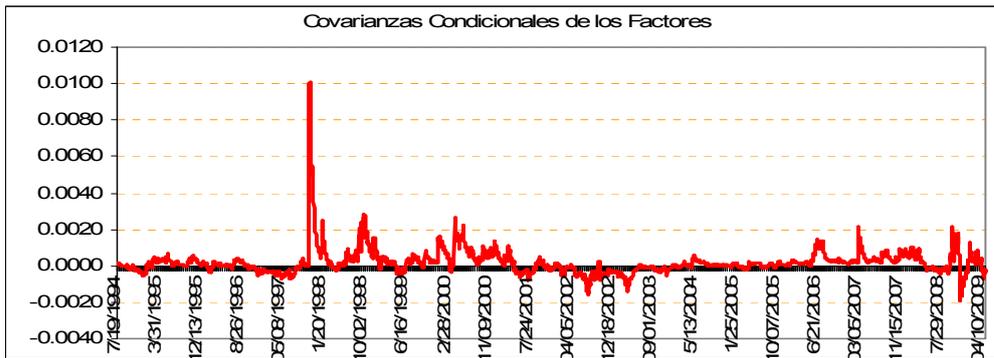
Las volatilidades presentadas a continuación son las anualizadas, que se obtienen al multiplicar la serie original por el factor de  $\sqrt{252}$ .



La siguiente etapa consiste en estimar las correlaciones condicionales de los factores. Esto se realiza de acuerdo al modelo DCC descrito en la sección anterior.

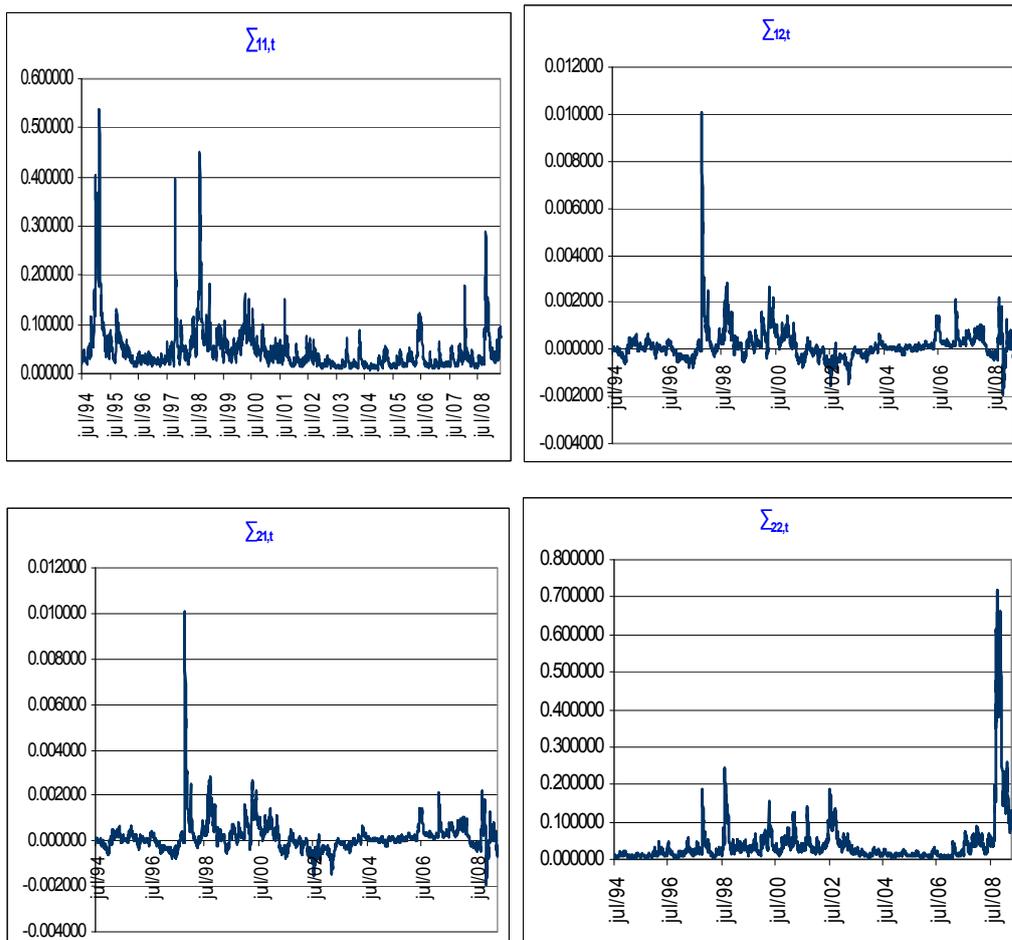


Una vez que tenemos las correlaciones condicionales y las volatilidades también podemos obtener las covarianzas condicionales (anualizadas) de los factores.



Con las volatilidades y correlaciones condicionales ya tenemos completa nuestra matriz de varianzas y covarianzas, y por lo tanto ya tenemos una caracterización completa de la distribución condicional conjunta de los factores.

Representación gráfica de la matriz  $H_t$  para todo el período de estudio:



De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, en este punto del estudio ya contamos con los insumos necesarios para realizar las simulaciones y con estas podemos obtener tanto la función de distribución de las pérdidas como las correlaciones de *default*.

## **SIMULACIONES**

Se realizaron 4 simulaciones de las funciones de pérdida y del coeficiente de correlación de default para las siguientes fechas:

Enero-1995

Enero-2007

Enero-2008

Noviembre-2008.

En los gráficos se pueden ubicar los resultados de noviembre de 2008 con la etiqueta "09". Se etiqueta de esta forma pues a pesar de que el período de inicio en noviembre de 2008, el mismo termina en febrero de 2009. También se etiqueta así a esta simulación para diferenciarla de la simulación de enero de 2008.

El horizonte de simulación es de 100 días.

El número de iteraciones es de 3,000 para cada simulación.

También se estimó y simuló el modelo de un factor para el IPC con fines comparativos para las mismas fechas mencionadas arriba.

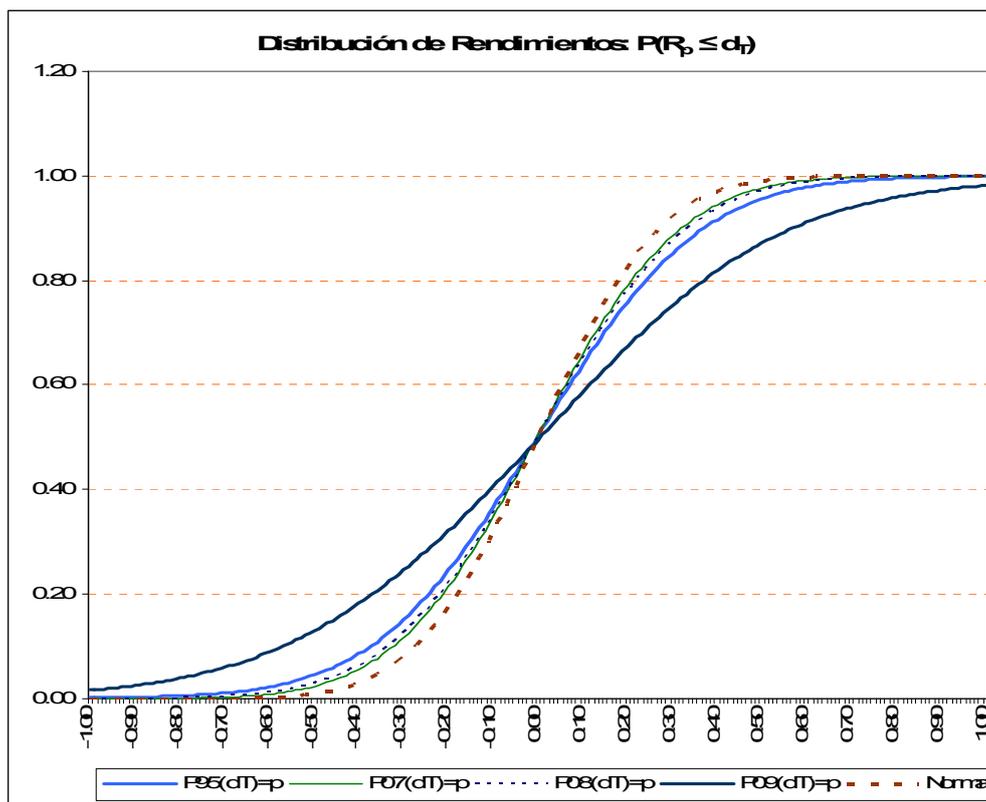
Primero se simula la función de distribución de pérdidas (rendimientos) y enseguida se simulan las correlaciones de *default*.

## LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA

### Modelo GARCH.

Aquí se presentan las funciones de pérdida y las correlaciones de *default* para el modelo de dos factores y se comparan con el de un factor. En ambos la varianza de los factores sigue un modelo GARCH.

En realidad no se presenta la función de pérdidas como tal pero, como se indicó anteriormente, su cálculo es inmediato. Recordemos la siguiente igualdad  $1 - F_L(d) = P[L_M \geq -d] = P[R_M \leq d] = F_R(d)$ . Se presenta la distribución de los rendimientos.



Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical caracteriza la distribución de pérdidas. Se presentan las funciones de distribución resultantes de cada uno de los 4 períodos de simulación: ene-95, ene-07, ene-08 y nov-08.

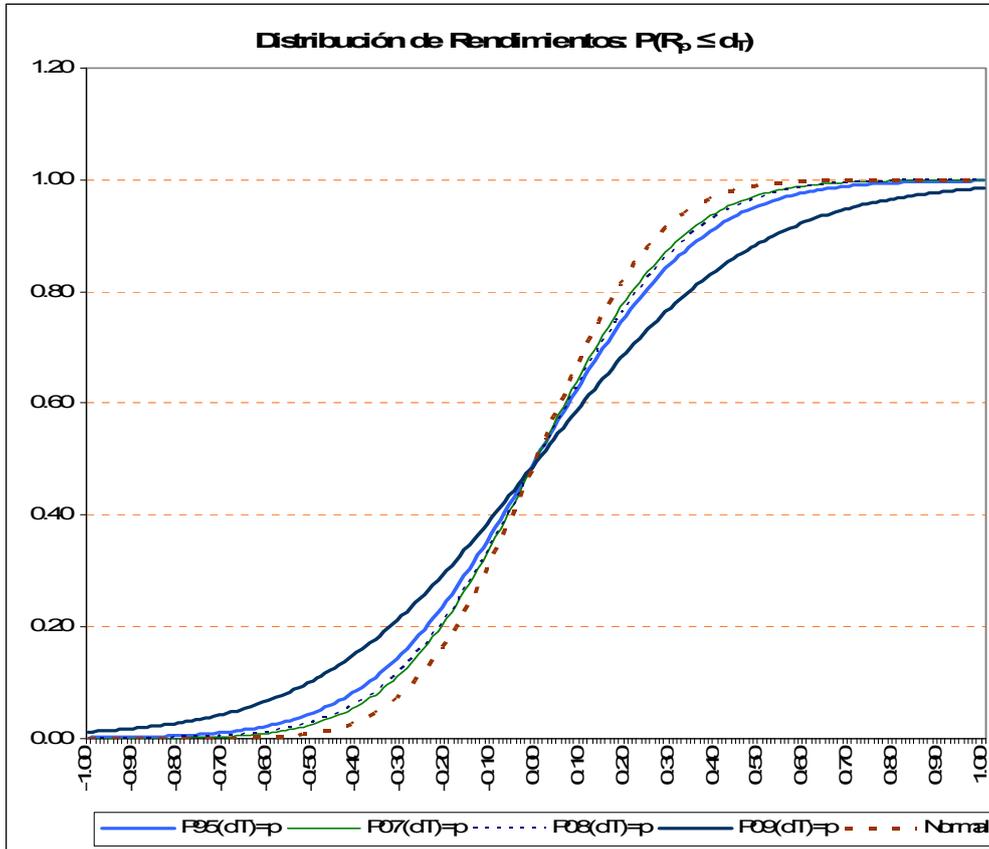
Se incluye también la función de distribución normal para tener en cuenta que la función normalizada es aquella que resulta de dividir el umbral entre la desviación estándar de los rendimientos idiosincrásicos, tal como se hizo en las simulaciones.

Podemos ver que para la cola izquierda, la función de enero de 2007 es la más cercana a la distribución normal. La función de enero de 2008 se empieza a despegar un poco más de la distribución normal pero sigue siendo muy parecida a la de 2007. La f.d.p de 1995 presenta claramente colas más anchas que la distribución normal. La f.d.p. de finales de 2008 (y principios de 2009) es la que más se desvía del supuesto de normalidad.

Los resultados anteriores están de acuerdo a lo que se esperaría intuitivamente:

- Los períodos que presentan colas más anchas son los períodos de mayor turbulencia financiera.
- A principios de 2007 las expectativas generales sobre el desempeño de la economía continuaban siendo un tanto optimistas.
- Para inicios de 2008 en que empezaron a hacerse del conocimiento general las malas prácticas crediticias y de inversión que desencadenaron la actual crisis, las expectativas empezaron a moverse y este hecho es capturado tanto por el modelo de dos factores como para el modelo de un factor. Aunque el modelo de dos factores es más claro en mostrarlo.
- A finales de 2008 e inicio de 2009, con la crisis declarada las expectativas negativas sobre la economía provocan caídas históricas en los mercados accionarios

Presento aquí el mismo tipo de comparativo para el modelo de un factor (sólo el IPC).



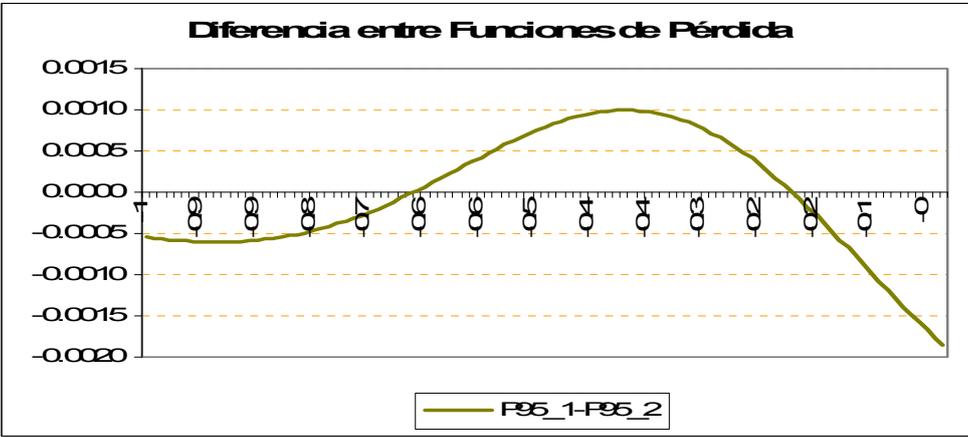
Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical caracteriza la distribución de pérdidas. Se presentan las funciones de distribución resultantes de cada uno de los 4 períodos de simulación: ene-95, ene-07, ene-08 y nov-08.

El resultado es muy similar y, como se indicó arriba, las funciones inducidas por el modelo de dos factores capturan colas más anchas que las de un factor. Para verificar esta afirmación se presentan enseguida las diferencias entre funciones de distribución. Para un determinado umbral de pérdidas, al valor de la f.d.p. de un factor se le resta el valor de la f.d.p. de dos factores.

Lo que se presenta a continuación son las diferencias de ambas funciones de distribución para cada uno de los períodos de estudio. A la f.d.p. de un factor se le resta la f.d.p de dos factores.

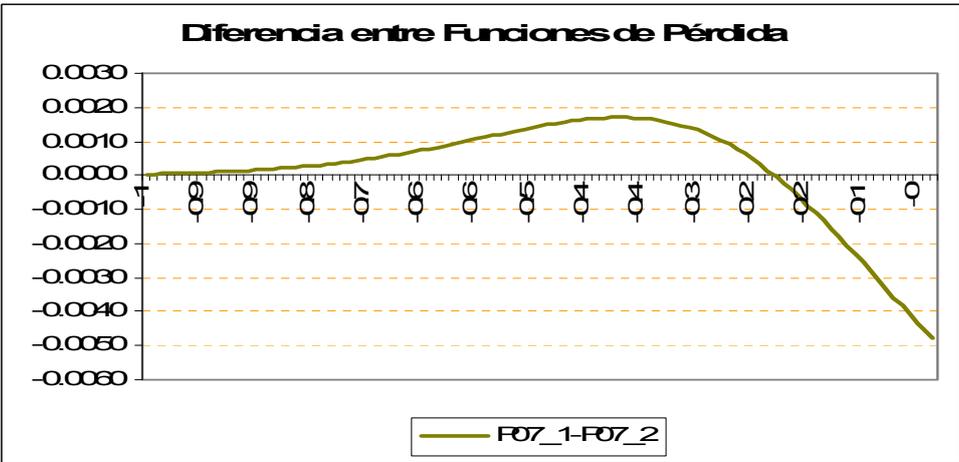
Nos interesa principalmente la parte donde el umbral es negativo. La forma de interpretar los siguientes gráficos es la siguiente: cuando esta diferencia muestra valores negativos entonces el modelo de dos factores muestra colas más anchas. Mientras más nos movemos a la izquierda tenemos umbrales de pérdida más altos

Ene-95:



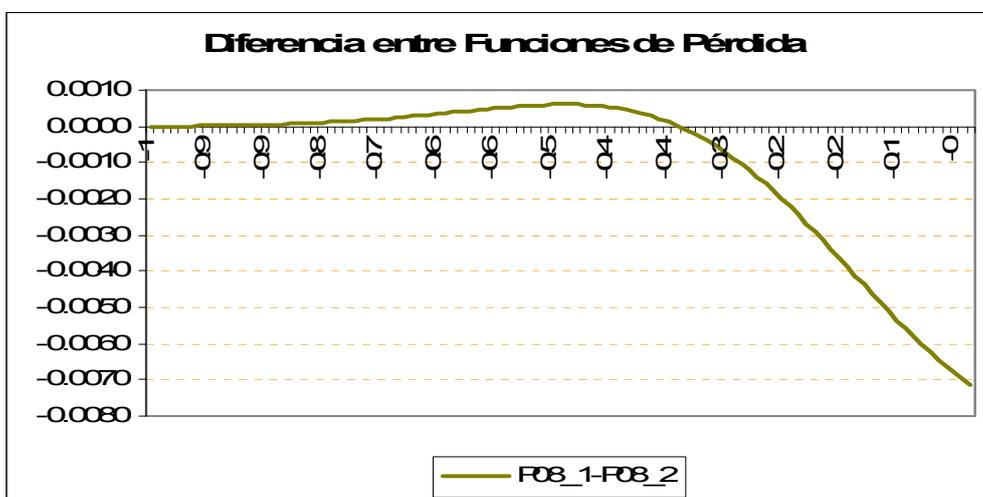
Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical las diferencias entre f.d.p.

Ene-07



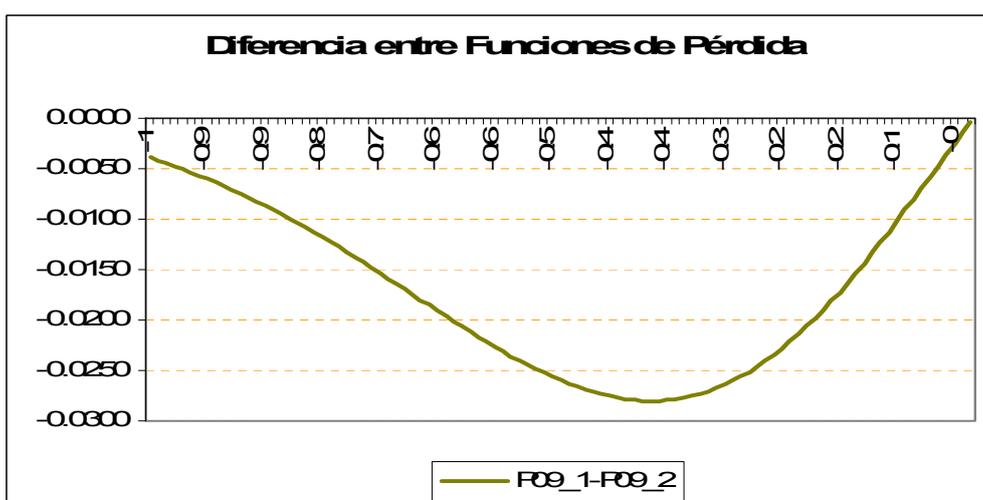
Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical las diferencias entre f.d.p.

Ene-08



Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical las diferencias entre f.d.p.

Para nov-08

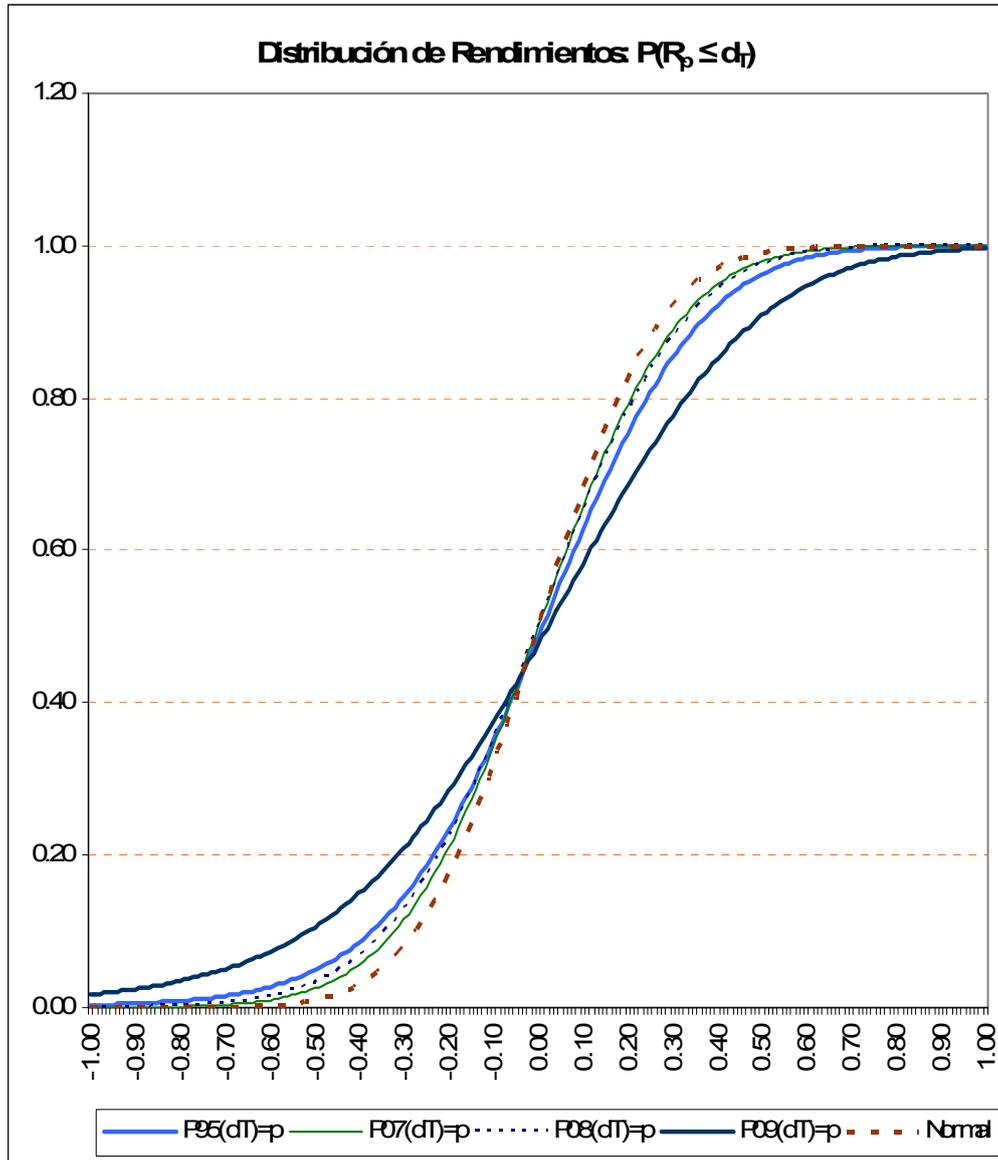


Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical las diferencias entre f.d.p.

La historia que puede observarse es que el modelo de dos factores tiende a capturar mejor los sesgos de la cola izquierda con el paso del tiempo. Este resultado también es intuitivo debido a que el grado cada vez mayor de globalización de la economía hace que haya diferencias con el panorama de de 1995. Ya en el período de finales de 2008 vemos que el modelo de dos factores explica mejor el hecho estilizado de colas izquierdas más anchas.

## Modelo TARCH.

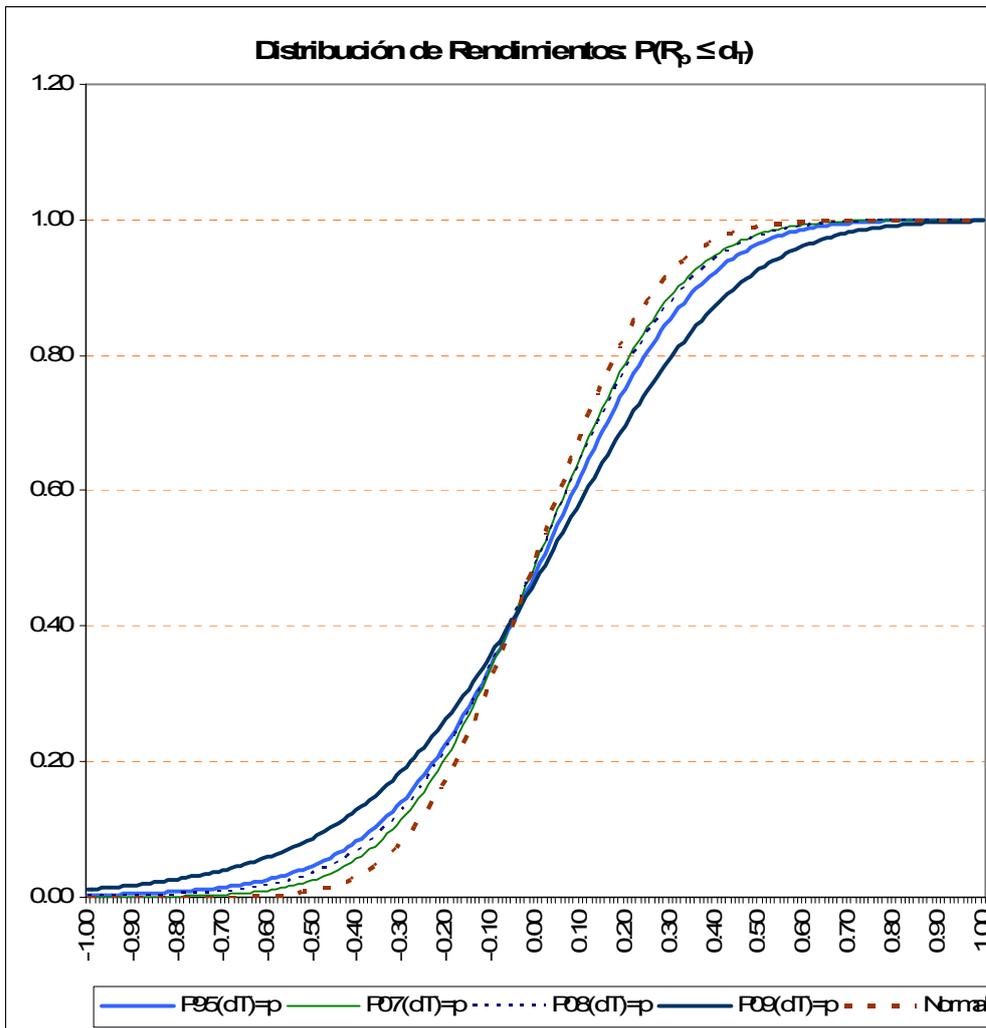
Primero se presenta la distribución de pérdidas para el caso de dos factores.



Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical caracteriza la distribución de pérdidas. Se presentan las funciones de distribución resultantes de cada uno de los 4 períodos de simulación: ene-95, ene-07, ene-08 y nov-08.

Nuevamente las funciones de distribución de pérdidas conservan el mismo orden que en el modelo GARCH. La función con colas izquierdas más anchas nuevamente es la correspondiente al período de mayor volatilidad, es decir el período de nov-08.

La función de distribución de pérdidas para el modelo unifactorial se presenta en el siguiente gráfico.



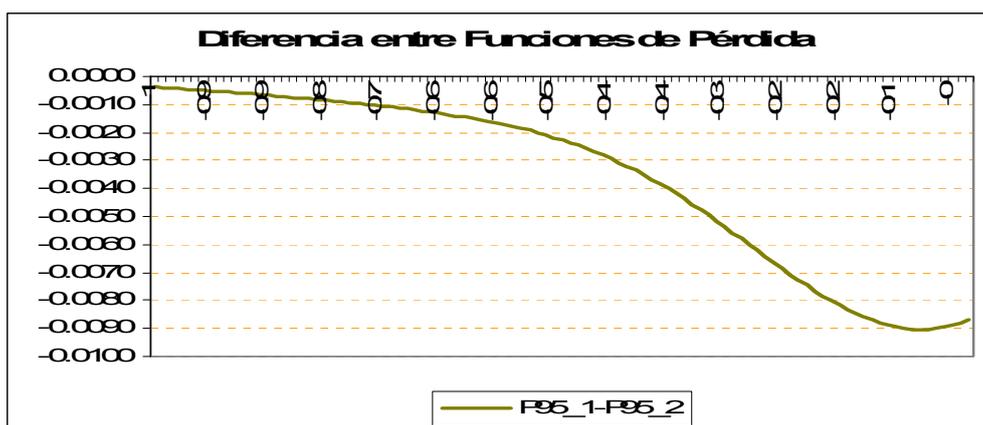
Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical caracteriza la distribución de pérdidas. Se presentan las funciones de distribución resultantes de cada uno de los 4 períodos de simulación: ene-95, ene-07, ene-08 y nov-08.

Hasta aquí vemos que las funciones de pérdidas capturan la misma intuición económica que se mencionó en los modelos GARCH. El introducir asimetrías en la

modelación de los segundos momentos condicionales nos lleva a resultados similares en el orden de las funciones de distribución. Pero es valioso observar la diferencia en los sesgos capturados por las funciones del modelo de un factor vs. Las del modelo de dos factores. Se sigue la misma metodología que en los gráficos empleados para los modelos GARCH.

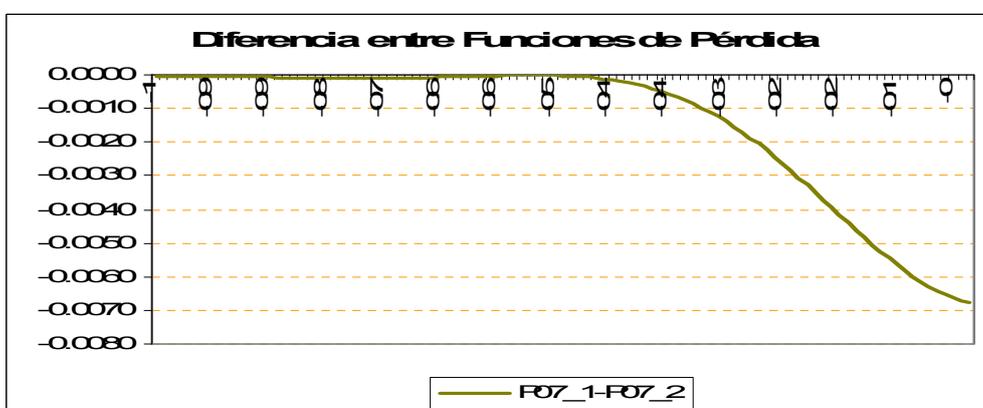
Hay que tener presente que las diferencias negativas nos indican que el modelo de dos factores captura colas izquierdas más anchas. De la misma manera, valores positivos nos indican que el modelo de un factor captura colas izquierdas más anchas.

Ene-95

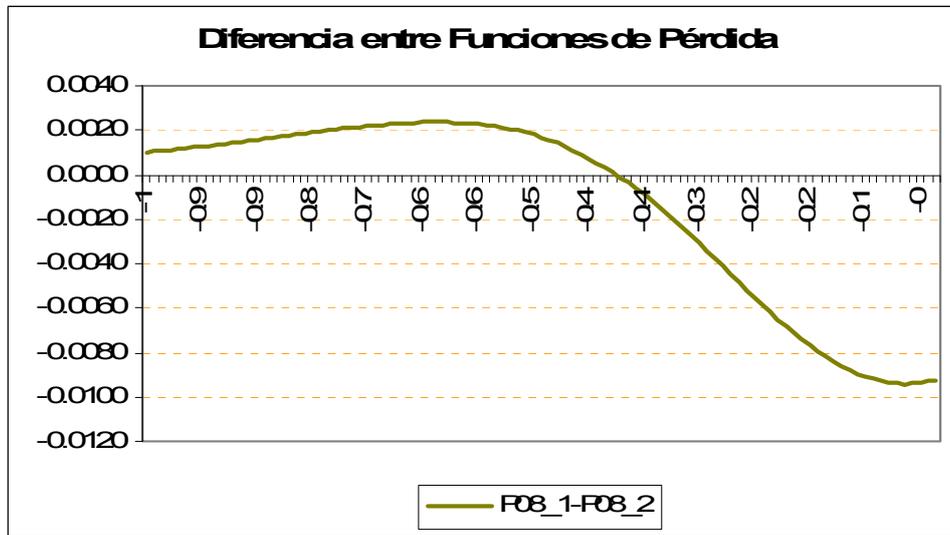


Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical las diferencias entre f.d.p.

Ene-07

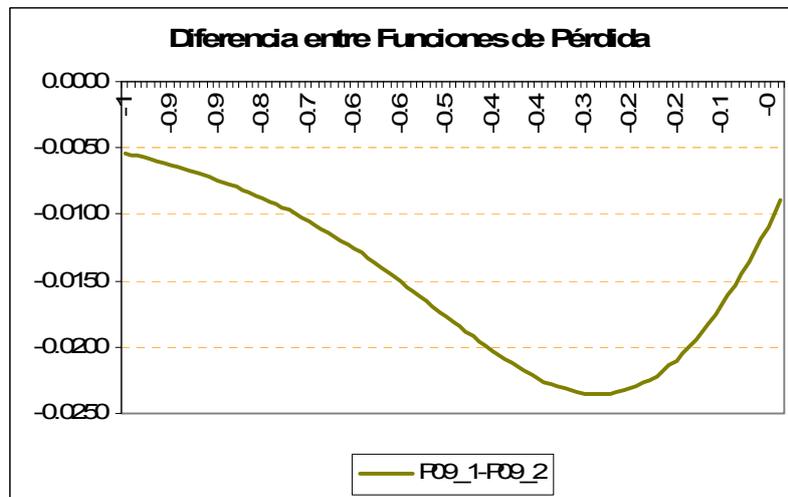


Ene-08



Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical las diferencias entre f.d.p.

Nov-08



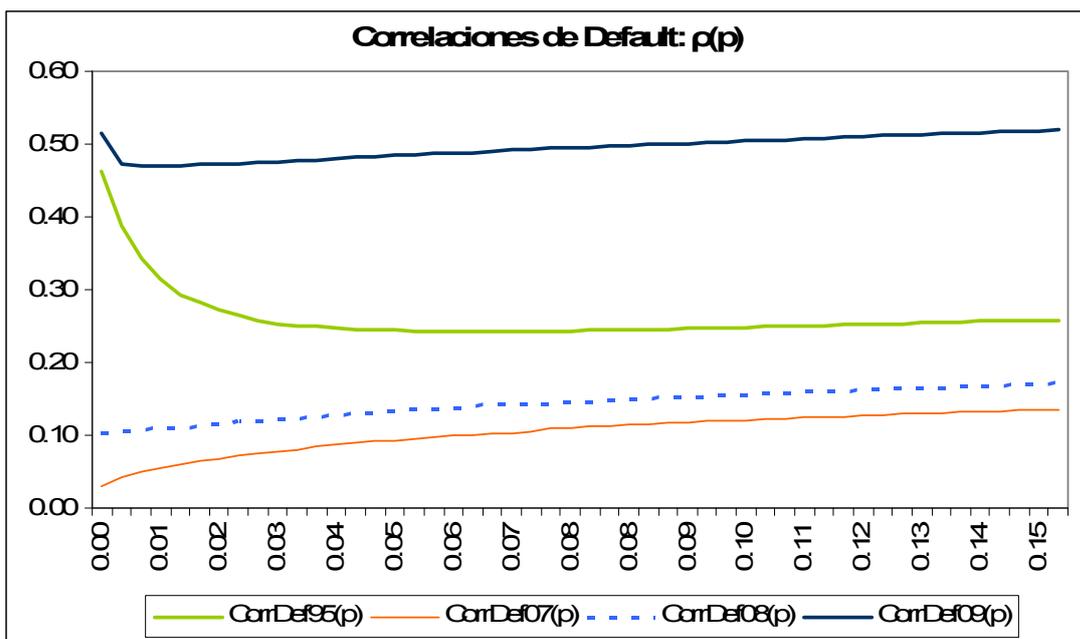
Nota: el eje horizontal describe los umbrales de pérdida y el eje vertical las diferencias entre f.d.p.

Podemos notar que es más marcado que el modelo de dos factores domina al modelo de un factor cuando se incluyen asimetrías de los rendimientos en los procesos de las volatilidades y correlaciones

## CORRELACIONES DE DEFAULT

### Modelo GARCH.

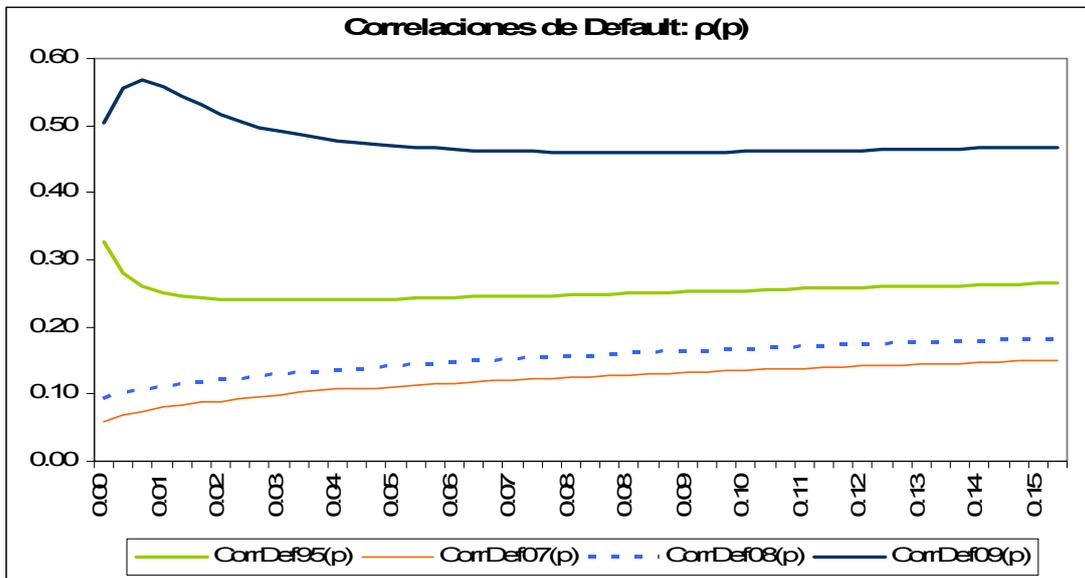
Las correlaciones de *default* para el modelo de dos factores son las siguientes:



Nota: en el eje horizontal están representadas las probabilidades de default y en el eje vertical las correlaciones de default.

Nuevamente podemos observar que los resultados se refuerzan. Las menores correlaciones de default se encuentran en el período ene-07, aumentan en el período ene-08, las de nov-08 son las más altas. La historia descrita por las funciones de probabilidad se mantienen. Los períodos de mayor turbulencia financiera, es decir, 1995 y finales de 2008 se separan considerablemente de las correlaciones de *default* en períodos de mayor tranquilidad.

Las correlaciones para el modelo de un factor se describen en el siguiente gráfico:

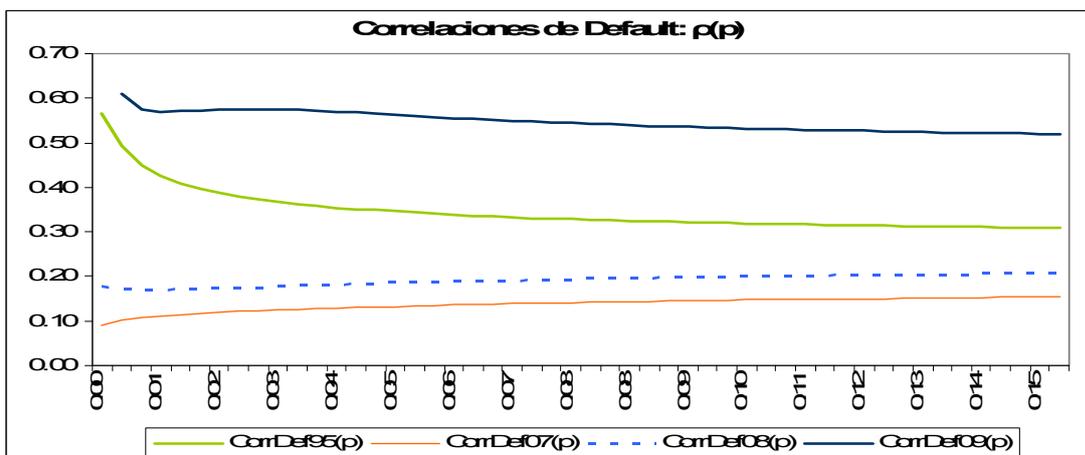


Nota: en el eje horizontal están representadas las probabilidades de default y en el eje vertical las correlaciones de default.

Podemos ver que el orden de las correlaciones se mantiene. Las correlaciones de *default* para el período de nov-08 son considerablemente mayores que, incluso, las de ene-95.

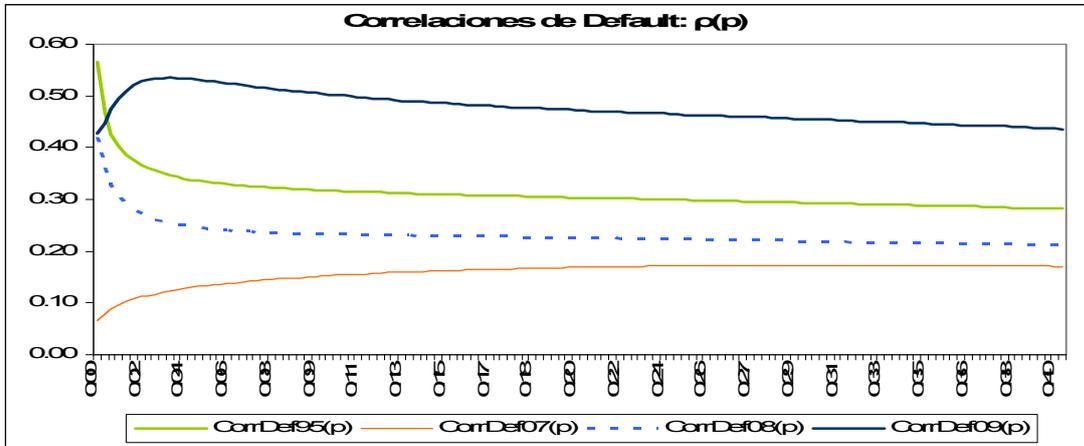
### Modelo TARCh.

Correlaciones de default bajo el modelo asimétrico de dos factores.



Nota: en el eje horizontal están representadas las probabilidades de default y en el eje vertical las correlaciones de default.

Para el modelo de un factor con asimetrías en los segundos momentos condicionales, las correlaciones de *default* son:

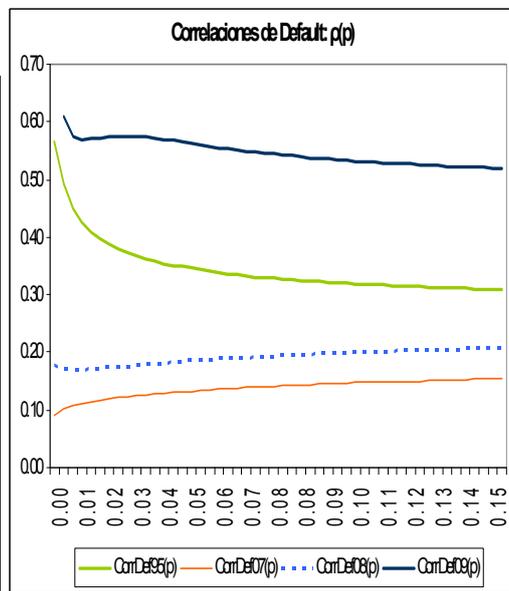
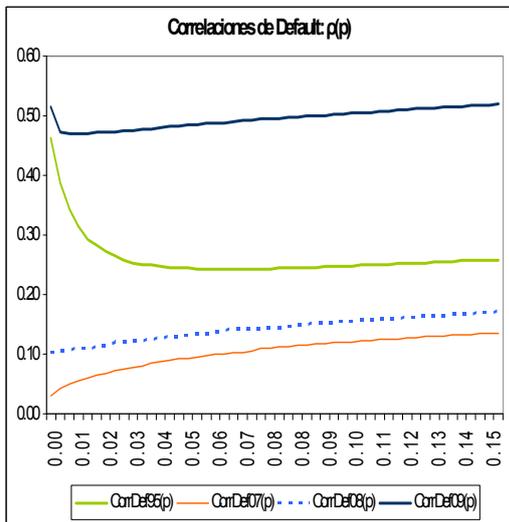


Nota: en el eje horizontal están representadas las probabilidades de default y en el eje vertical las correlaciones de default.

Los resultados nuevamente mantienen el orden de las correlaciones para cada período. Es interesante comparar también el modelo de dos factores GARCH contra el de dos factores TARCH.

GARCH(1,1) 2 Factores

TARCH(1,1) 2 Factores



Como podemos observar, en el modelo TARCH con 2 factores se captura correlaciones de *default* mayores que en el modelo GARCH de 2 factores en todos los escenarios de simulación.

## V. CONCLUSIONES

El modelo de correlaciones dinámicas propuesto logra capturar colas más anchas en la cola inferior de la distribución de rendimientos, respecto a la distribución normal. Este efecto se captura tanto con el modelo simétrico como con el asimétrico.

El modelo asimétrico de dos factores describe colas más anchas que el modelo asimétrico de un factor.

El modelo simétrico de dos factores describe colas más anchas que el modelo simétrico de un factor.

A pesar de que en el modelo GARCH no se incluye asimetría en las covarianzas (como en un modelo DCC asimétrico), el modelo es capaz de capturar el efecto de noticias relevantes que conducen a una mayor acumulación de masa de probabilidad en las colas.

El modelo asimétrico de dos factores captura mayores correlaciones de *default* que el modelo simétrico de dos factores en todos los períodos de análisis.

Los resultados son consistentes entre sí, en el sentido de que el ordenamiento de las funciones de pérdida y el ordenamiento de las correlaciones de *default* siempre es el mismo para todas las especificaciones; así sean de un factor o de dos factores, con simetría o asimetría. El orden, de menor a mayor (en el ancho de las colas y en las correlaciones de default) es el siguiente: enero de 2007, enero de 2008, enero de 1995 y noviembre de 2008.

Los modelos más empleados en México toman en cuenta elementos importantes como índices de concentración, y correlaciones entre individuos y grupos de individuos. Sin embargo hay poca evidencia del empleo de modelos de correlaciones dinámicas en la evaluación del riesgo de crédito.

Las implicaciones en términos de regulación financiera han quedado en evidencia con la actual crisis financiera con origen en Estados Unidos, ya que las evaluaciones de riesgo crédito no dinámicas pueden subestimar el riesgo e ignorar los efectos que surgen en períodos de tiempo como los cambios sustanciales que observamos en las colas inferiores de los rendimientos y en las correlaciones de default.

## VI. POSIBLES EXTENSIONES

El análisis fue hecho dentro de la muestra (*in-sample*). Sería conveniente hacer simulaciones tomando en cuenta parámetros que correspondan únicamente a períodos previos a la simulación y pronosticar funciones de pérdida fuera de la muestra (*out-of-sample*). De esta forma podría verse la capacidad predictiva de este modelo.

Sería conveniente también contar con otro(s) punto(s) de referencia que no sean modelos del mismo tipo. Un buen candidato es un modelo de cópulas y hacer un balance entre eficiencia y parsimonia, si es que fuera necesario.

Un supuesto importante que podría analizarse con más profundidad es el supuesto de portafolio homogéneo. Analizar cómo se comporta el modelo ante un portafolio que se desvía de esta hipótesis.

Por último, sería importante analizar la viabilidad de las medidas de riesgo provenientes de este tipo de modelo para aplicaciones en regulación de entidades con actividad crediticia.

## VII. BIBLIOGRAFÍA

Altman, E. I. "Financial Ratios, Discriminant Analysis and Prediction of Corporate Banruptcy". *Journal of Finance*, 1968.

Bielecki, Tomasz y Marek Rutkowski. "Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging". Springer, 2002.

Bollerslev, T. "Modeling the coherence in short-run nominal Exchange rates: a multivariate generalizad ARCH model". *Review of Economics and Statics* 72: 498-505. 1990.

Bollerslev, T., R. F. Engle and J. M. Wooldridge. "A capital-asset pricing model with time varying covariances". *Journal of Political Economy* 96: 116-131. 1988.

Caouette, John B, Edward I. Altman, Paul Narayanan y Robert W. J. Nimmo. "Managing Credit Risk: The Great Challenge fon Global Financial Markets". 2nda ed. Wiley Finance, 2008.

Credit Suisse / First Boston CreditRisk: A Credit Risk Management Framework, 1997.

De Lara Haro, Alfonso. "Medición y control de riesgos financieros" 2nda ed. Limusa, 2002.

Elizondo, Alan (Coordinador). "Medición integral del riesgo de crédito". Limusa, 2003.

Enders, Walter. "Applied Econometric Time Series" 2nda ed. Wiley, 2004.

Engle, Robert. "Anticipating Correlations: A New Paradigm for Risk Management". Princeton University Press, 2009.

Engle, Robert. "Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalised autoregressive conditional heteroskedasticity models". *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002, 20:339-350.

Engle, Robert, Arthur Berd y Artem Voronov. "The Underlying Dynamics of Credit Correlations". Working Papers Series, Social Science Research Network, 2007.

Engle, Robert y K. F. Kroner. "Multivariate simultaneous generalized ARCH". *Econometric Theory* 11: 122-150, 1995.

Engle, R., and K. Sheppard. "Evaluating the Specifications of Covariance Models for Large Portfolios". Working Paper, University of Oxford, 2005.

Hamilton, James D. "Time Series Analysis". Princeton University Press, 1994.

J.P. Morgan. RiskMetrics-Technical Document. Releases 1-3, 1994.

J. P. Morgan. Creditmetrics-Technical Document. 1997.

Markowitz, Harry M. "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, pp 77-91, 1952.

Márquez Diez-Canedo, Javier. "Suficiencia de capital y riesgo de crédito en carteras de préstamos bancarios". Serie Documentos de Investigación, documento Número 2002-4, Banco de México, 2002.

Márquez Diez-Canedo, Javier. "Suficiencia de capital y riesgo de crédito", capítulo 7 en *Medición integral de riesgo de crédito*, Limusa, 2003.

Márquez Diez-Canedo, Javier. "Una nueva visión del riesgo de crédito". Limusa, 2006.

McNeil, Alexander, Rüdiger Frey y Paul Embrechts. "Quantitative Risk Management". Princeton Series in Finance, Princeton University Press, 2005.

Merton, R. C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". Journal of Finance, 1974.

Rangel, Gonzalo. Notas de clase, Curso de Econometría Financiera. El Colegio de México, 2009.

Ross, Stephen. "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", 1976, JET

Sharpe, William F. "Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk". Journal of Finance XIX (3), 425-42, 1964.