EL COLEGIO DE MÉXICO, A.C.
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

"POLÍTICA DE IMPUESTOS, DESIGUALDAD, POLARIZACIÓN Y CRECIMIENTO ECONÓMICO"

TESIS PRESENTADA POR:

LUIS ANTONIO ANDRADE ROSAS

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTOR EN ECONOMÍA

PROMOCIÓN 2005-2008

DIRECTOR DE TESIS

JAIME SEMPERE CAMPELLO

MÉXICO D.F. AGOSTO 2012

EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

CONSTANCIA DE APROBACIÓN

Doctorante:	Luis Antonio Andrade Rosas
Tesis:	*Política de Impuestos, Desigualdad, Polarización y Crecimiento Económico.*
Director de Tesis:	Dr. Jaime Sempere Campello

Aprobada por el Jurado Examinador:

Dr. Jaime Sempere Campello	Presidente	______________________
Dr. David Cantala	Primer Vocal	______________________
Dr. Elvio Accinelli	Vocal Secretario	______________________
Dr. Horacio E. Sobarzo Fimbres	Suplente	______________________

México, D.F., 31 de agosto de 2012

“No hacen falta alas, para alzar el vuelo”
Silvio Rodríguez

A Sara Daniela y Camilo.

Agradecimientos

Esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo y la confianza de muchas personas. Por eso les agradezco y se las dedico con todo el corazón.

A mi familia, por ser la fuerza: Mi esposa y mis hijos. Gracias Yanink, por la compañía y ayuda. Sara Daniela, mi mayor motivación; y Camilito, el nuevo motor de este proyecto.

A mi madre, por sus rezos y porras. A mi padre adoptivo Luis, gracias mis viejos por creer siempre en mi. A mis sobrinos, mis chamacos.!!!

A mis hermanos: Martha, Angelina, Edhit, Hugo, Polo y Beto, mis mejores amigos; este es un logro con copia a su esfuerzo. A Reyna, Rosita, Dulce, Loreto, Lalo, David, Oscar.

A mi profesor y director de Tesis: Jaime Sempere. Por la confianza, la ayuda, la instrucción y por orientarme a este logro. Profesor, de corazón: Gracias por todo!!!

A mis lectores: David Cantala y Elvio Accinelli, gracias por sus valiosos comentarios.

Al Colegio de México: Mis profesores: Castañeda, Esquivel, Sempere, Cantala, Accinelli, Sobarzo, Gollas, Romero, Eneas, Dragan, Edwin, Yúnez, Soloaga, Oscar y Jorge Fernández, gracias por el ejemplo.

La coordinación: Raymundo Campos, Laura Valverde, Mónica, Martha y Elena, gracias por el apoyo.

La institución: **MI COLMEX QUERIDO!!!**. Por la beca, por hacerme sentir en casa, por la enseñanza, POR MUCHO!!!

A gente especial que encontre en el camino: Leobardo Plata, Adolfo García y Carlos Urzúa.

A los amigos de la UP e ITAM: Los profesores: Pepe Cruz, Nacho, Iren, Ponchito, Manuel Mendoza, Alejandro Islas, mi amiga Angelica Torres. A Mis alumnos, gracias por esas porras.

A mis amigos: Samuel, Manuel, Mi Tocs, Rubens, Pérez, mi compadre Pascualli, Angel, Paul, Jaime, Luis Carrera, Eduardo el niño, Ismael. Los amigos de biblioteca y sindicato de El Colegio. A Julio, Brenda, David y Marco. Los amigos del barrio xalapeño: los mandes siempre presentes, ayer, ahora y siempre!!!

Introducción

En esta tesis se analiza el impacto de una función de impuestos sobre la desigualdad, la polarización y el crecimiento económico. Nos centramos específicamente en el efecto sobre la desigualdad porque a partir de su estudio, podemos medir y comparar también las consecuencias de los impuestos sobre la polarización y el crecimiento.

En el capítulo 1 mostramos cuáles son las condiciones que debería cumplir una función de impuestos, asociada a una política impositiva, para mantener la desigualdad observada en una sociedad antes de la aplicación de la política. Otros autores, Levine y Singer (1970) y Latham (1988), analizan el impacto de un impuesto proporcional al ingreso, sobre la desigualdad. Nosotros extendemos su trabajo agregando transferencias en el ingreso con el objetivo de equilibrar el presupuesto; y obtenemos condiciones sobre la función de impuestos y transferencias para mantener la desigualdad. Las condiciones que encontramos son: la función de impuestos debe ser una combinación de impuestos proporcionales e impuestos de suma fija y las transferencias deben ser equitativas.

En el capítulo 2 hacemos una extensión de los resultados del capítulo anterior al concepto de polarización. Esteban y Ray (1994) y Esteban, Ray y Duclos (2004), definen la polarización como una medida que refleja la desigualdad entre grupos, de manera tal que si no existiera identificación grupal polarización y desigualdad coincidirían. Específicamente, queremos encontrar las condiciones que debe cumplir un impuesto proporcional, que mantiene la desigualdad, para conservar la polarización. Lo que obtenemos es lo siguiente: Las tasas de impuestos que mantienen la desigualdad están en todo el intervalo continuo $(0, 1)$, mientras que las tasas que mantienen la polarización se salen de este intervalo.

En el capítulo 3 mostramos la relación óptima entre crecimiento y el índice de Gini. La literatura sobre crecimiento y desigualdad[1], muestra la relación inversa entre estas variables, utilizando la diferencia entre el votante mediano y el votante medio como índice de desigualdad. Nosotros ex-

[1] Alesina y Rodrik (1994), Persson y Tabellini (1994), Perotti (1993).

tendemos dicha relación óptima a través de una función de distribución que mide la renta completa y obtenemos una forma de cuantificar el efecto del crecimiento económico sobre la desigualdad a través del coeficiente de Gini.

Índice general

Capítulo 1

Condiciones en la política de impuestos para mantener la desigualdad bajo un equilibrio presupuestario

1.1. Introducción

El impacto de un impuesto al ingreso sobre la desigualdad ha sido estudiado previamente. Por ejemplo, Levine y Singer (1970) demuestran que la desigualdad se mantiene constante, sólo si la función de impuestos es una combinación de impuestos proporcionales y de suma fija. Por su parte, Latham (1988) demuestra que el impacto en la desigualdad dependerá de la forma de la función de impuestos; en particular, concluye que ésta debe ser proporcional al ingreso para mantener constante la desigualdad.

Hay varios puntos que no son considerados en el desarrollo de los trabajos mencionados y que podrían tener un efecto importante en sus resultados. Por ejemplo, cuando el gobierno aplica un impuesto sobre el ingreso de los consumidores, su impacto debería reflejarse tanto en el ingreso familiar como en el presupuesto público, y este efecto tendría que ser considerado. En particular, ninguno de los autores menciona que ocurre con la recaudación ni discuten el desajuste causado en el equilibrio presupuestario por la aplicación de impuestos. En este capítulo intentamos resolver parcialmente las carencias observadas.

Una forma sencilla de modelar el efecto del cambio en el presupuesto es, simplemente, suponer que el gobierno se deshace de la recaudación sin incurrir en ningún costo. Otras soluciones más realistas plantean formas de gasto de la recaudación adicional. Por ejemplo, Alesina y Rodrik

(1994) utilizan la recaudación para proveer bienes públicos que se utilizan en la producción.

En este capítulo se extiende lo hecho por la literatura mencionada, considerando que se reparte la recaudación. Las condiciones que se establecen, para mantener la desigualdad, son que la función de impuestos sea una combinación lineal de impuestos proporcionales e impuestos de suma fija y que las transferencias sean equitativas.

Levine y Singer (1970) usan una función de distribución exponencial para deducir la forma de la función de impuestos que mantiene la desigualdad. En este capítulo también se usa la distribución exponencial, para ejemplificar la forma que debe tener la función de impuestos y la restricción que deben cumplir las transferencias. En el capítulo mostramos que esta misma forma funcional de los impuestos es la que mantiene la desigualdad para cualquier función de distribución del ingreso. Aunado a esta literatura, Kakwani (1977) analiza el impacto de impuestos proporcionales sobre la desigualdad, definiendo una nueva función de distribución de ingresos cuando se incorporan estos impuestos[1].

Este capítulo se estructura como sigue: empezamos deduciendo la forma parámetrica de la curva de Lorenz. Más adelante, explicamos brevemente el modelo sin equilibrio presupuestario. Después, mostramos el análisis con equilibrio presupuestario con un ejemplo, dividiéndolo en dos apartados: en el primero deducimos la forma analítica de las transferencias y en el segundo, trabajamos con una función de distribución particular para verificar los resultados. Finalmente, mostramos nuestro resultado en forma general. Se termina el capítulo haciendo una breve conclusión, en la cual mencionamos tanto las aportaciones como las limitantes del trabajo.

1.2. Definición parámetrica de la curva de Lorenz

Los conceptos básicos de la curva de Lorenz se presentan en el apéndice A al final de la tesis. En esta sección deduciremos la forma parámetrica de la curva de Lorenz, esto es, expresaremos esta curva como una función de el parámetro ingreso.

Sea $y \in [0, z]$: el ingreso antes de impuestos, con z el máximo ingreso que existe.

[1] Ver también, McGarry y Schoeni (1995) quienes estudian el comportamiento de las transferencias en la riqueza, analizando la redistribución de recursos dentro de la familia; Pak y Wai (1985) como Fei (1981), estudian diferentes funciones de recaudación y su impacto en el ingreso.

Definición 1: La curva de Lorenz mide la relación entre la fracción de la población total que gana un ingreso y, o menor a éste, y la fracción del ingreso total ganado por las personas cuyo ingreso es y, o menos.

Sea $f(y)$ la densidad del ingreso definida en $[0, z]$. De tal forma que $F(y) = P(s \leq y) = \int_0^y f(s)ds$ y por lo tanto $F(z) = 1$.

Bajo el supuesto de que las personas se distribuyen como el ingreso, entonces $F(y) = \int_0^y f(s)ds$ es la fracción de la población total que gana y, o menos.

Por otro lado, sea $h(y)$ la fracción del ingreso total ganado por las personas cuyo ingreso es y, o menos, definida por:

$$h(y) = \frac{\int_0^y sf(s)ds}{\int_0^z sf(s)ds} = \frac{\int_0^y sf(s)ds}{\mu},$$

donde $\mu = \int_0^z sf(s)ds$ es la media de la distribución de ingresos antes de impuestos.

La definición 1 nos dice que la curva de Lorenz relaciona las variables h y F. De manera directa no podemos encontrar esta expresión $h(F)$, lo que haremos es expresar la curva de Lorenz de manera general en términos de la distribución de ingresos $f(y)$, y esto es posible debido a que definimos F y h en términos de $f(y)$.

Además, para cada valor de y se generan valores de $F(y)$ y $h(y)$, y con las parejas $\big((F(y), h(y)\big)$ se grafica la curva de Lorenz; por lo que podemos encontrar la pendiente de la curva de Lorenz para cada ingreso y, esto es,

$$\frac{dh(y)}{dF(y)} = \frac{dh(y)/dy}{dF(y)/dy} = \frac{h'(y)}{F'(y)} = \frac{y}{\mu}, \tag{1.1}$$

la última igualdad se debe a que,

$$F'(y) = f(y) \quad \text{mientras que} \quad h'(y) = \frac{yf(y)}{\mu}.$$

Notar que,

$$\frac{dh(y)}{dF(y)} = \frac{y}{\mu} > 0,$$

esto es, la curva de Lorenz es creciente.

La curva de Lorenz $h(F)$ se encuentra integrando la ecuación (1.1), más aún, si conocemos la función de distribución en forma cerrada y es invertible, podemos obtener la curva de Lorenz

$h(F)$. De (1.1) tenemos:

$$d(h(y)) = \frac{ydF(y)}{\mu},$$

integrando de 0 a y y como $h(0) = 0$,

$$h(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y sdF(s),$$

aunado a que $dF(y) = f(y)dy$, la forma parámetrica de la curva de Lorenz se define en el siguiente Lema:

Lema 1: La relación h(y) es la curva de Lorenz en forma parámetrica y se define como:

$$h(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y sf(s)ds, \tag{1.2}$$

donde $h(y) = h(F^{-1}(q))$, con $q = \int_0^y f(s)ds$.

1.3. El modelo sin equilibrio presupuestario

En esta sección se muestra la relación entre la desigualdad de una distribución y su respectiva curva de Lorenz. Empezamos definiendo lo siguiente:

Sea $t(y)$ la función de impuestos, $0 \leq t(y) \leq y$, y
$x(y) = y - t(y)$ el ingreso disponible.
Las siguientes condiciones sobre $x(y)$ se cumplen:

- $x(y) > 0, \forall y \in [0, z]$. Esta condición indica que no existen funciones de ingresos negativas después de impuestos.

- $x'(y) = \frac{dx(y)}{dy} > 0, \forall y \in (0, z)$. La cual muestra que el ingreso disponible marginal es positivo. De manera particular, como: $\frac{dx(y)}{dy} = 1 - t'(y) > 0 \Rightarrow t'(y) = \frac{dt}{dy} < 1$ se deduce que una función de impuestos podría ser proporcional al ingreso, esto es, $t(y) = \tau y$ con $\tau \in (0, 1)$.

Sea $\eta(y)$ una función de impuestos[2] definida por:

[2]En algunos textos esta función se llama medida de progresión residual y aunque la definimos en este apartado por la relación que guarda con el ingreso disponible $x(y)$, su importancia se resalta en la sección correspondiente al modelo general. Además, las condiciones sobre $x(y)$ indican que $\eta(y) > 0, \forall y \in (0, z)$

$$\eta(y) = \frac{x'(y)y}{x(y)}, \tag{1.3}$$

Por otra parte, si dos distribuciones tienen asociadas sus respectivas curvas de Lorenz y no se intersectan, entonces ellas pueden ordenarse sin problema en términos de funciones de bienestar[3]. De lo anterior citamos las siguientes definiciones (Atkinson 1970):

Definición 2 (Dominancia de Lorenz(LD)): Una función de distribución $f_1(x)$ se dice que tiene menos desigualdad en el sentido de Lorenz que una función de distribución $f_2(x)$ si sus respectivas curvas de Lorenz $h(F_1(x))$ y $h(F_2(x))$ satisfacen la condición $h(F_1(x)) \geq h(F_2(x))$ $\forall F_1(x), F_2(x) \in (0,1)$, y la desigualdad es estricta para al menos un $F_i(\cdot) \in (0,1)$.

Definición 3 (Equivalencia de Lorenz(LE)): Si las curvas de Lorenz $h(F_1(x)$ y $h(F_2(x))$ son iguales $\forall F_1(x)$ y $F_2(x)$, se dice que existe equivalencia de Lorenz(LE) entre las distribuciones, lo que significa que la desigualdad bajo $f_1(x)$ es la misma a la desigualdad bajo $f_2(x)$.

Finalmente, la literatura (Latham 1988, Levine y Singer 1970) muestra el siguiente resultado

Definición 4: $f_1(x)$ es equivalente en el sentido de Lorenz (LE) a $f_2(x)$ si y sólo si la función de impuestos es proporcional al ingreso.

Utilizando esta definición para nuestra notación, tenemos el resultado de este apartado:

Resultado: $f(y)$ es equivalente en el sentido de Lorenz (LE) a $f(x(y))$ si y sólo si la función de impuestos es proporcional al ingreso, esto es, $t(y) = \tau y$ con $\tau \in (0,1)$.

1.4. El modelo: Análisis con equilibrio presupuestario

1.4.1. Una forma de equilibrar el presupuesto

Cuando se aplican impuestos al ingreso, hay un desequilibrio en el presupuesto. Existen varias formas para volver al equilibrio; como subsidios a través de bienes públicos o bienes privados (Alesina y Rodrik 1994), o transferencias económicas directas. Esta última es la que proponemos.

Sea $T(y)$ la función de recaudación, la cual suponemos continua y al menos una vez diferen-

[3]En este caso en términos de la desigualdad.

ciable. Bajo el supuesto de que todo lo recaudado $T(z)$ se transfiere entre el total de individuos N, la nueva función de ingresos es[4]:

$$x_T(y) = y - t(y) + \frac{T(z)}{N},$$

Donde $T(z) = \int_0^z t(y)f(y)dy$ es la recaudación total que procedemos a encontrar. La función de recaudación está dada por:

$$T(y) = \int_0^y t(s)f(s)ds = \int_0^y \left(s - x_T(s) + \frac{T(z)}{N}\right)f(s)ds, \forall y \in [0, z],$$

aplicando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene que:

$$T'(y) = \frac{dT(y)}{dy} = t(y)f(y) = \left(y - x_T(y) + \frac{T(z)}{N}\right)f(y), \forall y \in [0, z],$$

transponiendo términos en la igualdad anterior, e integrando de 0, a z obtenemos:

$$\int_0^z \left(T'(y) - \frac{1}{N}T(z)f(y)\right)dy = \int_0^z (y - x_T(y))f(y)dy, \tag{1.4}$$

el primer miembro de esta igualdad, teniendo en cuenta que $F(z) = \int_0^z f(y)dy = 1$ y $T(0) = 0$, es igual a:

$$\int_0^z \left(T'(y) - \frac{1}{N}T(z)f(y)\right)dy = T(z) - \frac{1}{N}T(z),$$

por su parte,

$$\int_0^z (y - x_T(y)f(y)dy = E(y) - E(x_T(y)),$$

donde $E(y)$ es el ingreso promedio antes de la política de impuestos y $E(x_T(y))$ es el ingreso promedio después de la política de impuestos. Ahora, sustituyendo los dos últimos resultados en (1.4) tenemos:

$$T(z) - \frac{1}{N}T(z) = E(y) - E(x_T(y)),$$

por lo tanto, la recaudación total es:

$$T(z) = \frac{N(E(y) - E(x_T(y)))}{N - 1}. \tag{1.5}$$

[4]Notar que tanto $x_T(y)$ como $x(y)$, definida en el apartado anterior, son ingresos disponibles, sólo que $x(y)$ es el ingreso después de impuestos y $x_T(y)$ es el ingreso después de impuestos y transferencias, más aún, $x(y)$ es el ingreso en desequilibrio, y $x_T(y)$ es el ingreso en el nuevo equilibrio presupuestario.

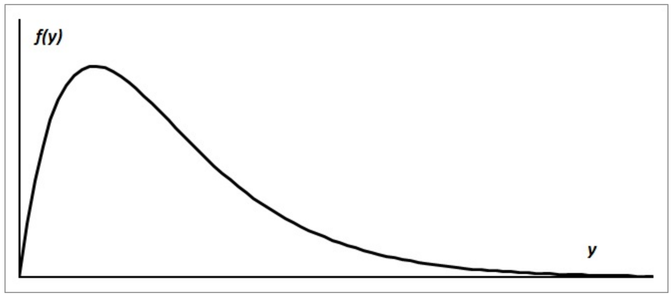

Figura 1.1: Función de densidad gamma

Las transferencias individuales se encuentran dividiendo la anterior entre el total de individuos N. Finalmente, la función de ingresos después de impuestos y transferencias es:

$$x_T(y) = y - t(y) + \frac{E(y) - E(x_T(y))}{N-1}. \tag{1.6}$$

1.4.2. Ejemplo

El objetivo del trabajo es encontrar la forma de impuestos para lo cual la desigualdad en los dos equilibrios presupuestarios sea la misma. En este apartado mostramos tal resultado cuando la distribución del ingreso toma la forma de una función de densidad en particular.

Para economías en desarrollo la distribución del ingreso puede ser representada por una distribución gamma (ver figura 1.1), debido a que tal distribución (con ciertos parámetros) tiene la característica de estar sesgada a la derecha, lo cual representa un alto porcentaje de individuos con ingresos bajos o con un ingreso menor respecto al ingreso promedio; y un porcentaje muy bajo de individuos que tienen un alto nivel de riqueza[5]. Sabemos que una distribución gamma con parámetros especiales se convierte en una distribución exponencial, tal distribución facilita la obtención de las expresiones $F(y)$ (la fracción de las personas que ganan un ingreso inferior a y) y $h(y)$ (la fracción del ingreso total ganado por las personas cuyo ingreso es y, o menos) permitiendo obtener de modo sencillo la forma parámetrica de la curva de Lorenz $h(F)$ en los dos equilibrios y compararlas.

Para una economía con un ingreso medio μ la distribución exponencial es:

$$f(y) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}}.$$

Encontremos $F(y)$ y $h(y)$ y finalmente la relación mostrada en el lema 1. Sabemos que $F(y)$

[5]El caso de México es un buen ejemplo (Cortés, 2000).

no es más que la distribución acumulativa del ingreso, esto es,

$$F(y) = \int_0^y f(s)ds = 1 - e^{-\frac{y}{\mu}},$$

ahora,

$$h(y) = \frac{1}{\mu^2}\int_0^y sf(s)ds = \frac{1}{\mu^2}\int_0^y se^{-\frac{s}{\mu}}ds,$$

aplicando la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{\mu^2}\left[-s\mu e^{-\frac{s}{\mu}}\Big|_0^y + \mu \int_0^y e^{-\frac{s}{\mu}}ds \right] \\ &= \frac{1}{\mu}\left[-ye^{-\frac{y}{\mu}} - \mu e^{-\frac{s}{\mu}}\Big|_0^y \right] \\ &= -\frac{1}{\mu}ye^{-\frac{y}{\mu}} - e^{-\frac{y}{\mu}} + 1. \end{aligned}$$

Como la función de densidad exponencial es invertible, podemos encontrar la curva de Lorenz $h(F)$. Así, despejando el valor de y en términos de $F(y)$, tenemos:

$$\begin{aligned} F(y) &= 1 - e^{-\frac{y}{\mu}} \\ \Rightarrow -\frac{y}{\mu} &= ln(1 - F(y)) \\ \therefore y &= -\mu ln(1 - F(y)), \end{aligned}$$

sustituyendo la anterior en $h(y)$ tenemos,

$$\begin{aligned} h(F(y)) &= 1 - e^{-\frac{1}{\mu}(-\mu ln(1-F(y)))} + \frac{1}{\mu}\mu ln(1 - F(y))e^{-\frac{1}{\mu}(-\mu ln(1-F(y)))} \\ &= 1 - (1 - F(y)) + ln(1 - F(y))(1 - F(y)). \end{aligned}$$

Finalmente la curva de Lorenz antes de la política de impuestos es:

$$h(F(y)) = F(y) + (1 - F(y))ln(1 - F(y)). \tag{1.7}$$

Deduzcamos ahora la curva de Lorenz después de la política de impuestos. Primero encontremos la distribución de ingresos de $x_T(y)$ bajo las condiciones del siguiente lema:

Lema 2: Si la política de impuestos es de la forma $t(y) = (1-\lambda)y + a$, con a constante, entonces la función de distribución después de la política de impuestos es:

$$f_{x_T}(x_T(y)) = \frac{1}{\lambda} f_Y\left(\frac{u}{\lambda}\right).$$

Demostración. Sea $f_Y(y)$ la densidad del ingreso y $U = x_T(Y)$ una función de Y, queremos hallar la densidad de la variable aleatoria U.

$$P(U \leq u) = P(x_T(Y) \leq u) = P\big(Y \leq X_T^{-1}(u)\big) =$$
$$= \int_0^{X_T^{-1}(u)} f_Y(y)dy = \int_0^y f_Y\big(x_T^{-1}(u)\big)\frac{1}{x'_T\big(x_T^{-1}(u)\big)}du.$$

Luego

$$f_U(u) = f_{x_T}(x_T(y)) = f_Y\big(x_T^{-1}(u)\big)\frac{1}{x'_T\big(x_T^{-1}(u)\big)}.$$

Del supuesto sobre la función de impuestos, $t(y) = (1-\lambda)y+a$, tenemos $x_T(y) = \lambda y - a + \frac{T(z)}{N}$, por lo tanto,

$$y = x_T^{-1}(u) = \frac{1}{\lambda}\left(u - \frac{T(z)}{N} + a\right),$$

sustituyendo esta expresión en $f(x_T(y))$, tenemos:

$$f(x_T(y)) = \frac{1}{\lambda} f_Y\left(\frac{u - \frac{T(z)}{N} + a}{\lambda}\right),$$

considerando la constante $a = \frac{T(z)}{N}$, resulta que:

$$f(x_T(y)) = \frac{1}{\lambda} f_Y\left(\frac{u}{\lambda}\right).$$

□

Por otra parte, si el ingreso se distribuye exponencialmente tenemos del resultado anterior que:

$$f(x_T(y)) = \frac{1}{\lambda\mu} e^{-\frac{u}{\lambda\mu}}. \tag{1.8}$$

Es importante notar que para tener la forma cerrada de la distribución de ingresos $f(x_T(y))$, se estableció la condición $a = \frac{T(z)}{N}$.

Con esta distribución de ingresos después de impuestos y transferencias, encontremos $F(x_T(y))$, $h(x_T(y))$ y finalmente la curva de Lorenz $h(F(x_T(y)))$.

La expresión (1.8) es una función de densidad exponencial con parámetro $\lambda\mu$. Consecuentemente $F(x_T(y)) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda\mu}x_T(y)}$.

Por otra parte,

$$h(x_T(y)) = \frac{1}{E(x_T(y))}\int_0^{x_T(y)} x_T(s)f(x_T(s))ds,$$

Sabiendo que $E(x_T(y)) = \lambda\mu$

$$\begin{aligned}
\lambda\mu h(x_T(y)) &= \int_0^{x_T(y)} s\frac{1}{\lambda\mu}e^{-\frac{1}{\lambda\mu}s}ds \\
&= -se^{-\frac{1}{\lambda\mu}s}\Big|_0^{x_T(y)} - \lambda\mu e^{-\frac{1}{\lambda\mu}s}\Big|_0^{x_T(y)} \\
&= -x_T(y)e^{-\frac{1}{\lambda\mu}x_T(y)} - \lambda\mu e^{-\frac{1}{\lambda\mu}x_T(y)} + \lambda\mu.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$h(x_T(y)) = 1 - \left(\frac{x_T(y)}{\lambda\mu} + 1\right)e^{-\frac{1}{\lambda\mu}x_T(y)}.$$

Ahora, de la expresión $F(x_T(y))$, tenemos:

$$e^{-\frac{1}{\lambda\mu}x_T(y)} = 1 - F(x_T(y))$$

y,

$$\frac{x_T(y)}{\lambda\mu} = -ln(1 - F(x_T(y)))$$

Sustituyendo en $h(x_T(y))$ se tiene:

$$\begin{aligned}
h(F(x_T(y))) &= 1 - (-ln(1 - F(x_T(y))) + 1)(1 - F(x_T(y))) \\
&= F(x_T(y)) + (1 - F(x_T(y)))ln(1 - F(x_T(y)))
\end{aligned}$$

Por último, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} F(x_T(y)) &= 1 - e^{-\frac{1}{\lambda\mu}x_T(y)} \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{\lambda\mu}\lambda y} \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{\mu}y} = F(y), \end{aligned}$$

la segunda igualdad es debido a que $x_T(y) = \lambda y$ y esto por el hecho que $x_T(y) = \lambda y - a + \frac{T(z)}{N}$ y que consideramos $a = \frac{T(z)}{N}$. Por lo tanto:

$$h(F(x_T(y))) = F(y) + (1 - F(y))(ln(1 - F(y)),$$

que coincide con la curva de Lorenz antes de la política de impuestos, expresión (1.7). Lo anterior queda reflejado en el siguiente teorema:

Teorema 1: Si el ingreso se distribuye exponencialmente, la desigualdad en el ingreso antes y después de la política de impuestos es la misma, si y sólo si la política consiste en la aplicación de una función de impuestos que es una combinación lineal de impuestos de suma fija y proporcionales, donde el impuesto de suma fija coincide con las transferencias equitativas.

1.5. Modelo General

1.5.1. Forma de la función de impuestos que mantiene la desigualdad

En este apartado se establecen las condiciones que debe cumplir la función de impuestos, de manera general, para que la desigualdad en el nuevo equilibrio sea la misma bajo el equilibrio antes de la política de impuestos.

Sean $f(y)$ y $f(x_T(y)$ las distribuciones de ingresos antes y después de la función de impuestos respectivamente, definidas anteriormente. Además sea,

$$J(y) = \int_0^y t(s)f(s)ds, \tag{1.9}$$

la recaudación hasta el ingreso y[6]. Con base en (1.9) definimos y demostramos el siguiente lema:

[6]Esta función de recaudación es la misma que se trabajó en la subsección 1.4.1, vale la pena resaltar que $J(y)$ es menor a $T(Z) = \int_0^z t(s)f(s)ds$.

Lema 3: Si $f(x_T(y)$ es equivalente en el sentido de Lorenz a $f(y)$ entonces

$$J(y) = \frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}\Big[(N-1)h_T(x(y)) + F(y)\Big], \forall y \in (0, z)$$

Demostración. De (1.5) tenemos que la relación de medias es:

$$E(y) = E(x_T(y)) + \frac{N-1}{N}T(z). \tag{1.10}$$

Ahora, por el supuesto que $f(x_T(y)$ y $f(y)$ son equivalentes en el sentido de Lorenz, la definición 3 nos dice que sus curvas de Lorenz son iguales, esto es,

$$\frac{1}{E(x_T(y))}\int_0^y x_T(s)f(s)ds = \frac{1}{E(y)}\int_0^y sf(s)ds,$$

transponiendo,

$$E(y)\int_0^y x_T(s)f(s)ds = E(x_T(y))\int_0^y sf(s)ds,$$

de (1.10) se tiene,

$$\left(E(x_T(y)) + \frac{N-1}{N}T(z)\right)\int_0^y x_T(s)f(s)ds = E(x_T(y))\int_0^y sf(s)ds,$$

reacomodando términos:

$$\frac{N-1}{N}T(z)\int_0^y x_T(s)f(s)ds = E(x_T(y))\int_0^y (s - x_T(s))f(s)ds,$$

despejando $E(x_T(y))$ y dado que $y - x_T((y)) = t(y) - \frac{T(z)}{N}$:

$$\frac{N-1}{N}T(z)\frac{1}{E(x_T(y))}\int_0^y x_T(s)f(s)ds$$

$$= \int_0^y t(s)f(s)ds - \frac{T(z)}{N}\int_0^y f(s)ds,$$

notemos lo siguiente: la integral en el primer miembro es $h(x_T(y))$, la primera integral en el segundo miembro es $J(y))$ y $\int_0^y f(s)ds = F(y)$, por lo tanto:

$$\frac{N-1}{N}T(z)h(x_T(y)) = J(y) - \frac{T(z)}{N}F(y).$$

Por último, al despejar $J(y)$ de la anterior tenemos el resultado de nuestro Lema,

$$J(y) = \frac{T(z)}{N}\Big[(N-1)h(x_T(y)) + F(y)\Big].$$

□

El siguiente teorema es fundamental para encontrar las condiciones de la política de impuestos que mantienen la desigualdad.

Teorema 2: $f(x_T(y))$ es equivalente en el sentido de Lorenz a $f(y)$ ($f(x_T(y))$ LE $f(y)$) si y sólo si $\eta(y) = 1, \forall y \in (0, z)$ y con $\eta(y)$ dada por (1.3).

Demostración. Supongamos que $f(x_T(y))$ es equivalente en el sentido de Lorenz a $f(y)$, por el lema 3 se sigue que:

$$J(y) = \frac{T(z)}{N}\Big[(N-1)h(x_T(y)) + F(y)\Big].$$

derivando respecto a $F(y)$ la anterior,

$$\frac{dJ(y)}{dF(y)} = \frac{T(z)}{N}\Big[(N-1)\frac{dh(x_T(y))}{d(F(y))} + 1\Big]. \tag{1.11}$$

Como

$$J(y) = \int_0^y t(s)f(s)ds = \int_0^y \big(s - x(s) + \frac{T(z)}{N}\big)dF(s),$$

entonces:

$$\frac{dJ(y)}{dF(y)} = y - x_T(y) + \frac{T(z)}{N}, \tag{1.12}$$

ahora, del hecho que:

$$h(x_T(y)) = \frac{1}{E(x_T(y))}\int_0^y x_T(y)dF(s),$$

tenemos,

$$\frac{dh(x_T(y))}{d(F(y))} = \frac{x_T(y)}{E(x_T(y))}, \tag{1.13}$$

sustituyendo (1.12) y (1.13) en (1.11),

$$y - x_T(y) + \frac{T(z)}{N} = \frac{T(z)}{N}\left[(N-1)\frac{x_T(y)}{E(x_T(y))} + 1\right],$$

con un poco de algebra,

$$Ny - Nx_T(y) + T(z) = T(z)(N-1)\frac{x_T(y)}{E(x_T(y))} + T(z),$$

reacomodando términos tenemos,

$$\left[-N - \frac{T(z)(N-1)}{E(x_T(y))}\right]x_T(y) = T(z) - T(z) - Ny,$$

si definimos,

$$A = -N - \frac{T(z)(N-1)}{E(x_T(y))},$$

tenemos la siguiente expresión,

$$Ax_T(y) = -Ny. \tag{1.14}$$

Por otra parte, al volver a derivar (1.11) respecto a $F(y)$,

$$\frac{d^2J(y)}{dg^2(y)} = \frac{T(z)}{N}(N-1)\frac{d^2h(x_T(y))}{d(g^2(y))}. \tag{1.15}$$

encontremos las segundas derivadas por separado, esto es, derivando (1.12) respecto a $F(y)$,

$$\frac{d^2J(y)}{dF^2(y)} = \frac{dy}{dF(y)} - \frac{dx_T(y)}{dF(y)},$$

sabemos que $dF(y) = f(y)dy$, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dF(y)} = \frac{1}{f(y)},$$

ahora, para encontrar $dx_T(y)/dF(y)$ hacemos,

$$\frac{dx_T(y)}{dF(y)} = \frac{dx_T(y)}{dy}\frac{dy}{dF(y)} = \frac{x_T'(y)}{f(y)}$$

sustituyendo estos resultados, se tiene:

$$\frac{d^2J(y)}{dF^2(y)} = \frac{1}{f(y)} - \frac{x'_T(y)}{f(y)} = \frac{1}{f(y)}\Big[1 - x'_T(y)\Big]. \tag{1.16}$$

Ahora, derivamos (1.13) respecto a $F(y)$,

$$\frac{d^2h(x_T(y))}{dF^2(y)} = \frac{1}{E(x_T(y))}\frac{x'_T(y)}{f(y)}, \tag{1.17}$$

sustituyendo (1.16) y (1.17) en (1.15), tenemos,

$$\frac{1}{f(y)}\Big[1 - x'_T(y)\Big] = \frac{T(z)(N-1)}{N}\frac{x'_T(y)}{E(x_T(y))f(y)},$$

reduciendo la anterior,

$$[N - Nx'_T(y)] = \frac{T(z)}{E(x_T(y))}(N-1)x'_T(y)$$

reacomodando términos,

$$\Big[-N - \frac{(N-1)T(z)}{E(x_T(y))}\Big]x'_T(y) = -N.$$

Nótese que el término entre corchetes es el valor de A, que se definió anteriormente, por lo tanto:

$$Ax'_T(y) = -N \tag{1.18}$$

pero de (1.14) sabemos que $A = \frac{-Ny}{x_T(y)}$, sustituyendo en (1.18),

$$\frac{-Ny}{x_T(y)}x'_T(y) = -N$$

por lo tanto,

$$\frac{yx'_T(y)}{x_T(y)} = 1$$

esto es,

$$\eta(y) = 1.$$

Demostremos el regreso. Supongamos que $\eta(y) = 1$, así,

$$\frac{dx_T(y)}{dy}\frac{y}{x_T(y)} = 1$$

separando variables,

$$\frac{dx_T(y)}{x_T(y)} = \frac{dy}{y}$$

resolviendo esta ecuación diferencial,

$$ln(x_T(y)) = ln(y) + c$$

por lo tanto

$$x_T(y) = \lambda y.$$

Donde $\lambda = e^c > 0$. Como $E(x_T(y))$ y $E(y)$ son ambas positivas, sin pérdida de generalidad podemos definir,

$$\lambda = \frac{E(x_T(y))}{E(y)},$$

así,

$$x_T(y) = \frac{E(x_T(y))}{E(y)}y,$$

despejando, las respectivas medias,

$$\frac{x_T(y)}{E(x_T(y))} = \frac{y}{E(y)},$$

multiplicando ambos miembros por $d(F(y))$ e integrando de 0 a y, tenemos,

$$\frac{1}{E(x_T(y))}\int_0^y x_T(s)dF(s) = \frac{1}{E(y)}\int_0^y sdF(s),$$

por lo tanto

$$h(y) = h(x_T(y)),$$

de la definición de equivalencia de Lorenz finalmente tenemos,

$$f(x_T(y)) \quad LE \quad f(y)$$

□

El siguiente corolario muestra nuestro resultado final.

Corolario: La desigualdad en el ingreso en un equilibrio presupuestario, antes de la política de impuestos, se mantiene en el nuevo equilibrio si y sólo si la función de impuestos es una combinación entre impuestos proporcionales y de suma fija.

Demostración. Al mantenerse la desigualdad tenemos que $f(x_T(y)) \quad LE \quad f(y)$. Por el teorema 2 se sigue que $\eta(y) = 1$, lo cual implica que,

$$\frac{dx_T(y)}{dy}\frac{y}{x_T(y)} = 1$$

separando variables,

$$\frac{dx_T(y)}{x_T(y)} = \frac{dy}{y}$$

resolviendo la ecuación diferencial,

$$ln(x_T(y)) = ln(y) + c,$$

despejando,

$$x_T(y) = \lambda y,$$

donde $\lambda = e^c$, sin pérdida de generalidad podemos escoger un $c < 0$ de tal forma que $\lambda < 1$.

Ahora, sustituyendo $x_T(y) = y - t(y) + \frac{T(z)}{N}$ en la última ecuación,

$$y - t(y) + \frac{T(z)}{N} = \lambda y,$$

finalmente

$$t(y) = (1 - \lambda)y + \frac{T(z)}{N}.$$

$\square$

1.6. Conclusión

En este trabajo mostramos condiciones sobre la función de impuestos para que la desigualdad sea la misma antes y después de la política fiscal. Este resultado extiende la literatura previa al considerar una forma funcional mas general de la función de impuestos y al forzar un equilibrio en el presupuesto público. La forma de la función de impuestos, bajo equilibrio, es una combinación de impuestos proporcionales e impuestos de suma fija.

Trabajamos con funciones de densidad de distribución porque representan la renta total de una economía. En particular, si tenemos la forma específica de la función de distribuión y es invertible, como es el caso de la distribución exponencial, podemos encontrar la expresión de la curva de Lorenz en forma cerrada.

Una posible limitante del capítulo es que el ingreso disponible se supone exógeno. Eso quiere decir que la oferta de trabajo se considera rígida y que se hace abstracción de problemas como la evasión fiscal. Sin embargo, esta limitación también existe en los trabajos previos sobre el tema.

Capítulo 2

Diferencia en las condiciones de la política de impuestos para mantener la polarización y la desigualdad

2.1. Introducción

Esteban y Ray (1994) crean una medida de polarización, que es el resultado de la combinación de alienación con identificación grupal. Con alienación se refieren a la distancia o diferencia de un grupo con otros individuos de otros grupos y por identificación se refieren al sentimiento grupal que tienen los individuos hacia otros individuos del mismo grupo. De acuerdo a estos conceptos, la polarización es agrupar a la sociedad en términos de un atributo. Este atributo puede ser ingreso, gusto político, religión, etc. Esteban y Ray utilizan el ingreso como atributo.

Esteban y Ray basan su medida sobre un conjunto finito y discreto de grupos de ingreso. Sin embargo, debido a que la política fiscal a estudiar hace que se recorra todo el dominio, existirán problemas de continuidad al considerar dicha medida. Para evitar estos problemas Esteban, Ray y Duclos (2004) crean una extensión de la medida de Esteban-Ray para el caso continuo, cuyo dominio es un espacio de densidades.

Nuestro modelo agrupa la sociedad de acuerdo a su nivel de ingreso y consideraremos que el gobierno aplica un impuesto proporcional al ingreso. Lattam (1988) muestra que la aplicación de este tipo de impuesto mantiene la desigualdad inalterada. En este capítulo veremos qué condiciones debe cumplir la función de impuestos para mantener la polarización constante. En consecuencia, la utilidad de este trabajo es mostrar una diferencia más entre desigualdad y de polarización.

Este capítulo se estructura de la siguiente forma: analizamos brevemente la relación entre desigualdad y la política de impuestos. Después, mostramos la teoría de polarización (Esteban y Ray; 1994) en forma discreta y su forma continua (Esteban, Ray y Duclos; 2004). Más adelante, presentamos nuestro modelo, el cual compara el impacto de la política de impuestos en la desigualdad y la polarización. Finalmente, hacemos una breve conclusión.

2.2. Desigualdad y política fiscal

El objetivo del capítulo es diferenciar el impacto que tiene una política fiscal en la desigualdad y la polarización. Para este propósito, mencionamos la relación que guarda la desigualdad y la política fiscal, esto es, Latham (1988) muestra que la desigualdad en el ingreso, para cualquier función de distribución, se mantiene inalterada cuando se aplica una función de impuestos que es proporcional al ingreso.

2.3. Política fiscal y polarización

2.3.1. La medida de polarización

La polarización toma en cuenta tanto la identificación entre los individuos de un mismo grupo, como la distancia a través de los grupos, respecto a un atributo. La forma discreta de la medida de Polarización de Esteban y Ray es la siguiente:

$$P^*(\pi, y) = K \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \pi_i^{1+\alpha} \pi_j |(y_i - y_j)|,$$

para algunas constantes $K > 0$, $\alpha \in (0, \alpha^*]$, con α^* =1.6,

donde π_i es la probabilidad o frecuencia del grupo i, $|(y_i - y_j)|$ es la distancia de los ingresos entre los grupos i y j; y α es el coeficiente de identificación grupal.

Dado que se medirá el impacto de la política de impuestos en la desigualdad y la polarización a través de una distribución de ingresos, el atributo que tomamos es el ingreso disponible. Debido a que se va tasar con un número entre (0,1), el ingreso disponible recorrerá todo el dominio del ingreso, por lo que la definición discreta de Esteban-Ray será insuficiente para nuestro modelo.

Esteban, Ray y Duclos (2004) desarrollan la medida de polarización para el caso en que las distribuciones relevantes puedan ser descritas por funciones de densidad. La forma intuitiva en que

Esteban, Ray y Duclos deducen la medida de polarización es la siguiente:

El sentimiento de alienación de un individuo, localizado en el ingreso x, hacia otro localizado en ingreso y se llama función de alienación, y es la diferencia de un individuo hacia el otro denotada por $|x-y|$. Para que la alienación sea trasladada en voz efectiva, acciones o protestas, los individuos deben identificarse con otros en la sociedad. A esta voz efectiva Esteban, Ray y Duclos le llaman alienación grupal, que es la relación conjunta de los dos sentidos, también llamada : marco alienación-identificación.

Para el caso de identificación: se dice que el sentimiento de identificación que un individuo, localizado en el grupo con ingreso x, experimenta hacia otros individuos del mismo grupo, dependerá del peso grupal, es decir, de la densidad $f(x)$. Lo que interesa aquí es el antagonismo efectivo, que no es más que la alienación grupal: el antagonismo de x hacia y bajo f. Lo anterior se representa como una función no negativa $T(i,a)$, donde $i = f(x)$ y $a = |x-y|$. Al igual que la medida discreta de Esteban-Ray, la polarización será proporcional a la suma de todos los antagonismos efectivos, esto es,

$$P(f) = \int\int T\big(f(x), |x-y|\big) f(x) f(y) dx dy \tag{2.1}$$

Esteban, Ray y Duclos demuestran[1] que la familia de medidas descrita por (2.1) se reduce.:

$$P_\alpha(f) = \int\int f(x)^{1+\alpha} f(y) |y-x| dy dx. \tag{2.2}$$

con $\alpha \in [0{,}25, 1]$

2.4. El modelo

Con el objeto de utilizar una medida más detallada, notemos que,

$$|x-y| = x + y - 2min(x,y),$$

introduciendo ésta en (2.2),

$$P_\alpha(f) = \int_x \int_y f(y)^{1+\alpha} f(x)(x + y - 2min(x,y)) dy dx.$$

[1]Ver detalles en Polarization: Concepts, Measurement, Estimation, Duclos, Esteban and Ray, 2004

Descomponiendo e integrando por partes, se obtiene finalmente [2]

$$P_\alpha(F) = \int_0^\infty f(y)^\alpha g(y) dF(y), \tag{2.3}$$

donde, $g(y) \equiv E(y) + y(2F(y) - 1) - 2\mu^*(y)$ y $\mu^*(y) = \int_{-\infty}^{y} x dF(x)$.

Aplicando (2.3) al ingreso disponible se tiene el siguiente resultado:

Teorema: Si la polarización está definida como en (2.3) y el ingreso disponible es $x(y) = (1-t)y$, para $t \in (0,1)$ entonces la polarización se mantiene antes y después de la política de impuestos si la tasa t satisface:

$$(1-t)^{1+\alpha}(f(y(1-t)))^{(1+\alpha)} g(y(1-t)) = 1. \tag{2.4}$$

Demostración. :

Del lema 2 del capítulo[3] 1, sabemos que:

$$f(x(y)) = f((1-t)y) = \frac{1}{1-t} f(y),$$

por lo que $f(y) = (1-t)f(y(1-t))$, sustituyendo en (2.3) se tiene[4]:

$$P_\alpha(F,t) = \int_0^z (1-t)^{1+\alpha}(f(y(1-t)))^{1+\alpha} g(y(1-t)) dy,$$

derivando $P_\alpha(F,t)$[5] respecto a t obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{dP_\alpha(F,t)}{dt} = \int_y \Bigg[\Bigg(& -(1+\alpha)(1-t)^\alpha (f(y(1-t)))^{1+\alpha} + \\ & (1+\alpha) f(y(1-t))^\alpha f'(y(1-t))(-y)(1-t)^{1+\alpha} \Bigg) g(y(1-t)) + \\ & g'(y(1-t))(1-t)^{1+\alpha} f(y(1-t))^{1+\alpha}(-y) \Bigg] dy, \end{aligned}$$

Si la polarización es la misma antes y después de la política de impuestos entonces :

$$\frac{dP_\alpha(F,t)}{dt} = 0,$$

[2]Para la deducción de(2.6) ver Esteban, Ray y Duclos; 2004

[3]Es una aplicación de dicho lema.

[4]Notar que $P_\alpha(F) = \int_0^\infty f(y)^\alpha g(y) dF(y) = \int_0^\infty f(y)^{1+\alpha} g(y) f(y) dy$.

[5]La derivada de $P_\alpha(F,t)$ respecto a t es para encontrar el cambio en la polarización respecto a la tasa de impuestos.

por lo tanto,

$$\int_y (1+\alpha)\big[-g(y(1-t))(1-t)^{\alpha}(f(y(1-t)))^{1+\alpha}+ \\ f(y(1-t))^{\alpha}f'(y(1-t))(-y)(1-t)^{1+\alpha}\big]dy = \\ \int_y -g'(y(1-t))(1-t)^{1+\alpha}f(y(1-t))^{1+\alpha}(-y)dy,$$

podemos quitar la integral y hacer la igualdad sólo para los integrandos[6]. Reduciendo y acomodando términos tenemos:

$$(1+\alpha)g(y(1-t))\big(-f(y(1-t))+f'(y(1-t))(-y)(1-t)\big) \\ = -g'(y(1-t))(1-t)f(y(1-t))(-y),$$

transponiendo términos:

$$\frac{1+\alpha}{(1-t)f(y(1-t))}\big(-f(y(1-t))+f'(y(1-t))(-y)(1-t)\big) \\ = -\frac{1}{g(y(1-t))}g'(y(1-t))(-y),$$

haciendo la multiplicación del primer miembro:

$$-\frac{1+\alpha}{(1-t)}+(1+\alpha)\frac{f'(y(1-t))}{f(y(1-t))}(-y) \\ = -\frac{1}{g(y(1-t))}g'(y(1-t))(-y),$$

lo anterior implica que:

$$-\frac{1+\alpha}{(1-t)}+(1+\alpha)\frac{dLnf(y(1-t))}{dt} = -\frac{dLng(y(1-t))}{dt},$$

integrando respecto a t,

[6]La igualdad se cumple casi seguramente o con probabilidad 1, lo anterior significa que si $\int f(x)dx = 0$ entonces $f(x) = 0$ con probabilidad 1 y donde no es cero es un conjunto con medida (probabilidad) cero.

$$(1+\alpha)\Big[Ln(1-t)+Lnf(y(1-t))\Big]=-Lng(y(1-t)),$$

por las leyes de logaritmos tenemos:

$$Ln\big[(1-t)^{1+\alpha}f(y(1-t))^{1+\alpha}\big]=Ln(g(y(1-t)))^{-1},$$

por último, aplicando la función exponencial y transponiendo se tiene el resultado buscado:

$$(1-t)^{1+\alpha}(f(y(1-t)))^{(1+\alpha)}g(y(1-t))=1.$$

□

Ahora, para el caso en que la distribución es exponencial tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1: Dada la medida de polarización, si la política fiscal consiste en aplicar un impuesto proporcional y el ingreso se distribuye exponencialmente, entonces la tasa de impuesto que mantiene la polarización satisface:

$$1=-(1+t)\bigg(\frac{1}{\mu}\bigg)^{\alpha}e^{-\frac{1+\alpha}{\mu}y}+y(1-t)\bigg(\frac{1}{\mu}\bigg)^{1+\alpha}e^{-\frac{1+\alpha}{\mu}y}+2\bigg(\frac{1}{\mu}\bigg)^{\alpha}e^{-\frac{2+\alpha-t}{\mu}y}. \tag{2.5}$$

Demostración. Dada la distribución exponencial:

$$f(y)=\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}},$$

encontremos $g(y(1-t))$ y $f(y(1-t))$ para aplicar el resultado del teorema 2. Sabemos que

$$g(y(1-t))\equiv E(y(1-t))+y(1-t)(2F(y(1-t))-1)-2\mu^*(y(1-t)),$$

donde

$$\mu^*(y(1-t))=\int_0^{y(1-t)}xdF(x)$$

y

$$F(y(1-t))=\int_0^{y(1-t)}f(x)dx.$$

Por otro lado, dado que el operador esperanza es lineal, tenemos:

$$E(y(1-t))=(1-t)E(y)=(1-t)\mu,$$

ahora, la función de distribución acumulativa es:

$$F(y(1-t)) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}y(1-t)},$$

y la media truncada es:

$$\begin{aligned}\mu^*(y(1-t)) &= \int_0^{y(1-t)} x\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}x}dx \\ &= -y(1-t)e^{-\frac{1}{\mu}y(1-t)} - \mu e^{-\frac{1}{\mu}y(1-t)} + \mu.\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en $g(y(1-t))$:

$$\begin{aligned}g(y(1-t)) = (1-t)\mu + y(1-t)\Big(2 - 2e^{-\frac{1}{\mu}y(1-t)} - 1\Big) \\ - 2\Big(\mu - \mu e^{-\frac{1}{\mu}y(1-t)} - y(1-t)e^{-\frac{1}{\mu}y(1-t)}\Big),\end{aligned}$$

reduciendo términos,

$$g(y(1-t)) = (1-t)\mu - 2\mu + y(1-t) + 2\mu e^{-\mu y(1-t)}.$$

Por otro lado, sabemos que

$$f(y) = (1-t)f(y(1-t)),$$

por lo que:

$$(1-t)^{1+\alpha}f(y(1-t)))^{(1+\alpha)} = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{1+\alpha} e^{-\frac{1+\alpha}{\mu}y}.$$

Así, sustituyendo $g(y(1-t))$ y $(1-t)^{1+\alpha}f(y(1-t)))^{(1+\alpha)}$ en (2.4):

$$1 = -\left(\frac{1}{\mu}\right)^{1+\alpha} e^{-\frac{1+\alpha}{\mu}y}\big[-(1+t)\mu + y(1-t) + 2\mu e^{-\mu y(1-t)}\big].$$

haciendo operaciones y reduciendo términos, tenemos:

$$1 = -(1+t)\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1+\alpha}{\mu}y} + y(1-t)\left(\frac{1}{\mu}\right)^{1+\alpha} e^{-\frac{1+\alpha}{\mu}y} + 2\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\alpha} e^{-\frac{2+\alpha-t}{\mu}y}.$$

□

Finalmente, una conclusión importante es que las funciones de impuestos que mantienen constante la polarización no son las mismas que las que mantienen constante la desigualdad. Para ilustrar este hecho presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Dados los resultados en las proposiciones 1 y 2, si la renta promedio de los individuos[7] es $\mu = 1$ y $z = 50$ y para valores[8] $\alpha =.25$, $\alpha =.5$ y $\alpha = 1$, entonces el valor de t que mantiene la polarización está fuera del conjunto $(0, 1)$ y el valor de t que mantiene la desigualdad se encuentra en un conjunto abierto, $t \in (0, 1)$.

En efecto, sustituyendo los valores $\alpha =.25$ y $\mu = 1$ en (2.5) tenemos:

$$-(1-t)e^{-\frac{5}{4}y} + y(1-t)e^{-\frac{5}{4}y} + 2e^{-y(\frac{9}{4}-t)} = 1,$$

integrando sobre todo el dominio de y, esto es, de 0 a z, tenemos:

$$\frac{4}{5}(1+t)e^{-\frac{5}{4}y}\Big|_0^z + (1-t)\bigg(-\frac{4}{5}ye^{-\frac{5}{4}y}\Big|_0^z + \frac{4}{5}\int_0^z e^{-\frac{5}{4}y}dy\bigg) - \frac{2}{\frac{9}{4}-t}e^{-y(\frac{9}{4}-t)}\Big|_0^z = \int_0^z 1dy,$$

evaluando las integrales,

$$-\frac{4}{5}(1+t) + \frac{16}{25}(1-t) + \frac{8}{\frac{9}{4}-t} = z,$$

luego de un poco de algebra,

$$-100(-4t^2 + 5t + 9) + 16(4t^2 - 13t + 9) + 200 = 225z - 100zt,$$

sustituyendo $z = 50$ y transponiendo, tenemos:

$$464t^2 + 4292t - 11806 = 0,$$

resolviendo la anterior: t =2.21 y t =-11.46.

Ahora, para $\alpha =.5$ y $\mu = 1$ tenemos de (2.5):

[7] El hecho que la renta máxima sea 50 veces el ingreso promedio, es un supuesto razonable acorde a distribuciones de ingresos sesgadas, como es nuestro caso. Por ejemplo, si $y =.5$ estamos pensando en un ingreso 100 veces más bajo que el ingreso máximo, que podría ocurrir.

[8] Estos valores son adecuados debido a que son los valores mínimo, medio y máximo de α, el parámetro de identificación.

$$-(1-t)e^{-\frac{3}{2}y} + y(1-t)e^{-\frac{3}{2}y} + 2e^{-y(\frac{5}{2}-t)} = 1,$$

integrando de 0 a z, resolviendo las integrales, con un poco de algebra y evaluando $z = 50$, tenemos:

$$20t^2 + 854t - 2224 = 0,$$

resolviendo la anterior: t =2.46 y t =-45.11.

Análogamente para $\alpha = 1$ y $m = 1$, tenemos:

$$-(1-t)e^{-2y} + y(1-t)e^{-2y} + 2e^{-y(3-t)} = 1,$$

integrando de 0 a z, resolviendo ésta y evaluando $z = 50$, tenemos:

$$3t^2 + 192t - 595 = 0,$$

resolviendo, t =2.96 y t =-66.96.

El ejemplo nos muestra que para un valor fijo del ingreso z y su respectivo ingreso promedio μ, los valores de t que mantienen la polarización están fuera del dominio de t, a diferencia de los valores $t \in (0, 1)$ que mantienen la desigualdad, esto es, las funciones de impuestos no coinciden.

2.5. Conclusión

La diferencia entre desigualdad y polarización es el agente económico a estudiar; en la desigualdad el agente es el individuo y en la polarización el agente es un grupo de individuos. De hecho, se podría definir la polarización como la desigualdad entre grupos. Más aún, para un valor específico del parámetro de identificación, la expresión de polarización se reduce al índice de Gini, que no es más que la polarización sin fuerza grupal.

En este capítulo se mostraron las diferencias entre las condiciones para que una función de impuestos mantenga la desigualdad y las condiciones para que una función de impuestos mantenga la polarización. El resultado resalta la importancia que tiene el peso grupal en la medida de polarización.

Capítulo 3

Crecimiento y desigualdad: Una forma alternativa de medición a través de la distribución de ingresos ex-post

3.1. Introducción

Existe una amplia y creciente literatura relacionando crecimiento y desigualdad. En dicha literatura se analizan los efectos en el crecimiento económico debido a una redistribución del ingreso, generada por un resultado político. Algunos trabajos relevantes en el tema son: Alesina y Rodrik (1994), Persson y Tabellini(1994), Perotti (1993), entre otros. Los trabajos citados coinciden en la presencia de un sector gobierno que provee la inversión pública: Alesina y Rodrik en servicios de producción, Persson y Tabellini en la redistribución a través de transferencias, como también lo hace Perotti. En esta literatura se crea una relación entre el nivel de gasto de gobierno (a través de impuestos) y la tasa de crecimiento. La diferencia entre los modelos es la estructura económica. En Alesina y Rodrik el crecimiento ocurre a través de inversiones públicas y privadas en capital físico, mientras que en Persson y Tabellini el canal es la acumulación de conocimientos para el progreso.

Este trabajo toma la relación óptima entre crecimiento y desigualdad del modelo de Alesina y Rodrik[1]. A diferencia de la literatura sobre el votante mediano y en particular del modelo de Alesina y Rodrik, la idea de este artículo se centra en dos puntos: 1) relacionar el crecimiento con la distribución completa de la renta y 2) encontrar una relación entre crecimiento y el índice de Gini.

[1]Estos autores presentan una forma alternativa de medir la relación inversa entre crecimiento y desigualdad a través de la dotación del factor relativo trabajo-capital. Resuelven el problema del gobierno cuyo interés es el votante mediano, la solución de dicho problema la utilizan para tomar como medida de desigualdad la diferencia entre la dotación del votante mediano y el votante promedio.

Dado que el índice de Gini es usado en forma general como medida de desigualdad, esta relación puede ser útil para evaluar y analizar empíricamente los modelos de crecimiento.

Respecto al primer punto, nos apoyamos en la relación explícita entre crecimiento y desigualdad del modelo de Alesina y Rodrik, en el cual se obtiene una tasa óptima de impuestos al capital que maximiza el crecimiento y proporciona una distribución de ingresos adecuada. Dada esta tasa óptima, mostramos la relación crecimiento-desigualdad para el caso particular de la distribución exponencial. Para este propósito nos apoyamos en la literatura de desigualdad[2], que nos proporciona los instrumentos matemáticos a través de la curva de Lorenz. El resultado anterior se establece en dos hechos fundamentales de este capítulo: I) Una relación lineal entre los ingresos antes y después de la política fiscal, con la tasa de crecimiento óptima como parámetro y II) La distribución de ingresos ex-post como función de la tasa de crecimiento.

Sobre el segundo punto, la principal aportación del artículo es cuantificar el efecto del crecimiento sobre la desigualdad a través del coeficiente de Gini. Así, para cada tasa de crecimiento existe un índice de desigualdad.

Este trabajo se divide en cuatro secciones. La primera corresponde a la introducción, en la segunda citamos la primera parte del modelo de Alesina y Rodrik, cuyos supuestos, variables y conclusiones forman parte de nuestro modelo. En la tercera sección empezamos a construir nuestro modelo, el cual separamos en tres subsecciones: en la primera se construye una relación lineal entre el ingreso después de impuestos y el ingreso antes de impuestos, en función de la tasa de crecimiento. En la segunda subsección construimos la distribución de ingresos después de impuestos. En la tercera subsección nos apoyamos en un resultado de Levine y Singer (1970), que muestra el área de la curva de Lorenz la cual aplicamos para la distribución exponencial, y a través de ésta construimos la relación entre crecimiento y desigualdad. La cuarta sección corresponde a la conclusión.

3.2. El trade-Off entre crecimiento y desigualdad, (Alesina y Rodrik; 1994)

En esta sección mostramos la primera parte del modelo de Alesina y Rodrik, debido a que utilizamos parte del desarrollo y las conclusiones como supuestos en nuestro modelo. El principal supuesto es que el gobierno aplica un impuesto proporcional al capital (k) a una tasa constante

[2] Atkinson (1970), Levine y Singer (1970).

$\tau \in (0,1)$. Parte de la recaudación se destina a la creación de bienes productivos $g = \tau k$ que a su vez entran como insumos en la producción privada (y) definida por:

$$y = Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}l^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1. \tag{3.1}$$

Bajo competencia perfecta la renta de capital (r) y el salario (w) están dados por:

$$r = \frac{\delta y}{\delta k} = \alpha A(\tau)^{1-\alpha} \equiv r(\tau) \tag{3.2}$$

$$w = \frac{\delta y}{\delta l} = (1-\alpha)A(\tau)^{1-\alpha}k \equiv w(\tau)k \tag{3.3}$$

En el modelo suponen que el trabajo (l) se vende inelásticamente, es decir, ante cualquier cambio en el salario la oferta de trabajo es constante y para mayor comodidad toman $l = 1$. El individuo tiene dos tipos de ingreso: el ingreso debido a la renta de capital y el ingreso por el préstamo de su trabajo, $y^k = r(\tau)k - \tau k$ y $y^l = w(\tau)k$ respectivamente. Así, el ingreso total es:

$$y^i = w(\tau)kl^i + (r(\tau) - \tau)k^i = w(\tau)k^i\sigma^i + (r(\tau) - \tau)k^i.$$

donde σ^i es la dotación inicial de la proporción trabajo-capital, definida por:

$$\sigma^i = \frac{l^i}{k^i/k}.$$

Por otro lado, la restricción del individuo se define como la acumulación del capital, que es el ingreso total menos el costo, por lo que el problema de maximización del individuo común es:

$$maxU^i = \int logc^i e^{-\rho t}dt$$

s.a.

$$(\dot{k})^i = w(\tau)k^i\sigma^i + (r(\tau) - \tau)k^i - c^i$$

y a la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-\rho t}}{c(t)}k(t)\right) = 0,$$

con ρ la tasa de descuento.

Resolviendo el hamiltoniano[3], se tiene:

[3]Estos resultados son del modelo de Alesina-Rodrik.

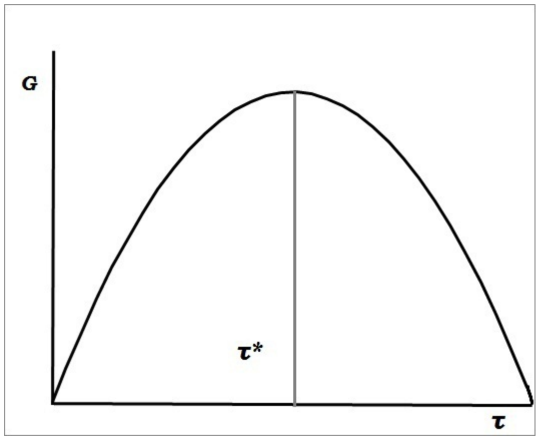

Figura 3.1: Relación U Inversa

$$\frac{\dot{c}^i}{c^i} = r(\tau) - \tau - \rho.$$

Aplicando la condición de tranversalidad[4], el individuo acumula a lo largo de la fase del estado estacionario de la siguiente forma:

$$\gamma(\tau) \equiv \frac{\dot{k}^i}{k^i} = \frac{\dot{c}^i}{c^i} = r(\tau) - \tau - \rho, \tag{3.4}$$

siendo $\gamma(\tau)$ la tasa de crecimiento. Notar que:

$$\gamma_\tau = \frac{\delta\gamma}{\delta\tau} = \frac{\delta r}{\delta\tau} - 1 \gtreqless 0,$$

si

$$\tau \lesseqgtr (\alpha(1-\alpha)A)^{1/\alpha} = \tau^\star \tag{3.5}$$

La ecuación anterior dice lo siguiente: Para tasas peque$\tilde{n}$as ($\tau < \tau^\star$) el efecto de los bienes que son financiados domina y el retorno de capital después de impuestos aumenta conforme τ crece. Para tasas grandes ($\tau > \tau^\star$) el retorno de capital después de impuestos disminuye conforme τ crece, es decir, pesa más la disminución en capital por el impuesto que los bienes financiados por éste. Así, la relación entre $\gamma(\tau)$ y τ tiene la forma de U inversa (ver figura 3.1).

[4]Ver Alesina y Rodrik.

3.3. El modelo: Una forma alternativa de medir la relación crecimiento-desigualdad.

Medimos la relación crecimiento-desigualdad a través de la distribución completa del ingreso. Consideramos el caso particular de la densidad exponencial[5].

3.3.1. Relación entre ingreso después de impuestos e ingreso antes de impuestos.

Sean:

$y_0 = wl^i + rk^i$: el ingreso ex-ante, donde w y r son el salario y la renta de capital respectivamente[6], y $y_0 \in (0, z)$ con z el máximo ingreso que existe.

$f(y_0) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}y_0}$: la distribución de ingresos antes de la política fiscal (impuesto al capital)

El ingreso después de la política fiscal es:

$$y_1 = w(\tau)kl^i + (r(\tau) - \tau)k^i,$$

donde $r(\tau)$ y $w(\tau)$ están definidas por (3.2) y (3.3) respectivamente, esto es, después de la política de impuestos tomamos en cuenta su impacto en las variables salario y renta de capital. De lo anterior, enunciamos el siguiente Lema:

Lema 1: Dada la tasa de crecimiento del modelo de Alesina-Rodrik, entonces el ingreso después de la política es una función del ingreso inicial y la tasa de crecimiento óptima.

Demostración. De la solución óptima del modelo de Alesina y Rodrik, ecuación (3.4), tenemos:

$$r(\tau) - \tau = \gamma(\tau) + \rho,$$

despejando k^i del ingreso inicial,

$$k^i = \frac{y_0 - wl^i}{r},$$

[5]El uso de dicha función de distribución ya fue justificada en el capítulo 1, resaltar de nuevo la facilidad en el análisis matemático.

[6]Notar que la renta y el salario son independientes de la tasa impositiva.

sustituyendo las dos expresiones anteriores en el ingreso y_1,

$$y_1 = w(\tau)kl^i + (\gamma(\tau) + \rho)\frac{y_0 - wl^i}{r},$$

esto es,

$$y_1 = w(\tau)kl^i - \frac{(\gamma(\tau) + \rho)wl^i}{r} + \frac{(\gamma(\tau) + \rho)}{r}y_0 \tag{3.6}$$

□

Por otro lado, si definimos:

$$A(\gamma(\tau)) = w(\tau)kl^i - \frac{(\gamma(\tau) + \rho)wl^i}{r},$$

(3.6) nos queda:

$$y_1 = A(\gamma(\tau)) + \frac{(\gamma(\tau) + \rho)}{r}y_0. \tag{3.7}$$

3.3.2. La distribución de ingresos después de impuestos.

La distribución de ingresos y_1 en términos del ingreso y_0 la mostramos en el siguiente lema:

Lema 2: Dada la expresión entre los ingresos ex-post y ex-ante (3.7) y la función de densidad del ingreso $f(y_0)$, entonces la función de distribución de ingresos después de la política de impuestos es:

$$f(y_1) = \frac{r}{\gamma(\tau) + \rho}f(y_0).$$

Demostración. Sea $f(y_0)$ la densidad del ingreso antes de impuestos y definamos $y_1 = \phi(y_0)$. Del teorema de cambio de variable[7]

$$f(y_1) = f(\phi^{-1}(y_1))\left|\frac{d\phi^{-1}(y_1)}{dy_1}\right|.$$

de (3.7) tenemos:

$$y_0 = \frac{r}{\gamma(\tau) + \rho}\Big[y_1 - A(\gamma(\tau))\Big],$$

[7] Ver Casella-Berguer. Dicho teorema es análogo al lema 2 del capítulo 1.

por lo tanto,

$$\frac{d\phi^{-1}(y_1)}{dy_1} = \frac{dy_0}{dy_1} = \frac{r}{\gamma(\tau)+\rho},$$

como $y_0 = \phi^{-1}(y_1)$, sustituyendo estas últimas expresiones en el teorema del cambio de variable, se tiene finalmente:

$$f(y_1) = \frac{r}{\gamma(\tau)+\rho} f(y_0).$$

□

Para el caso en que el ingreso se distribuye exponencialmente tenemos del resultado anterior que:

$$f(y_1) = \frac{r}{\mu(\gamma(\tau)+\rho)} e^{-\frac{y_0}{\mu}}. \tag{3.8}$$

La distribución del ingreso ex-post en términos de la variable crecimiento es de gran utilidad porque facilita la construcción de la relación crecimiento-desigualdad. Para llegar a dicha relación tenemos que proponer un índice de desigualdad en términos de la tasa de crecimiento.

3.3.3. Relación entre crecimiento y desigualdad, a través de la distribución de ingresos en función del crecimiento.

Encontremos el índice de desigualdad para la distribución (3.8). Dada su amplia aplicación y disponibilidad, el candidato natural es el índice de Gini (G).

Definición.- Sea C el área entre la curva de Lorenz y la recta de 45 grados (figura 3.2), llamada índice de concentración. El índice de Gini es la proporción entre C y el área del triángulo por debajo de la recta de 45 grados. Por lo tanto, si llamamos a A el área por debajo de la Curva de Lorenz, entonces G se calcula de la siguiente forma:

$$G = \frac{C}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}-A}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{A}{\frac{1}{2}} = 1-2A. \tag{3.9}$$

La tarea es encontrar A. Para ello citamos a Levine y Singer(1970) los cuales mostraron que el área bajo la curva de Lorenz, entre dos ingresos cualesquiera (ν_1, ν_2), dada una distribución de ingresos $f(y)$ es:

$$A_y(\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{E(y)} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left[f(y) \int_0^y s f(s) ds \right] dy.$$

Encontremos el área de la distribución del ingreso antes de impuestos para el caso de la función de distribución exponencial $f(y_0) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y_0}{\mu}}$.

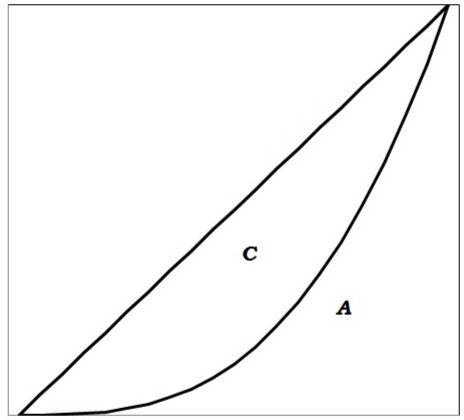

Figura 3.2: El coeficiente de Gini: cuando el área A disminuye, C aumenta y el índice G aumenta, por lo tanto la desigualdad aumenta.

$$\begin{aligned} A_{y_0}(\nu_1,\nu_2) &= \frac{1}{\mu}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\left[\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y_0}{\mu}}\int_0^{y_0} s\frac{1}{\mu}e^{-\frac{s}{\mu}}ds\right]dy_0 \\ &= \int_{\nu_1}^{\nu_2}\left[\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y_0}{\mu}}\left(\frac{1}{\mu}\int_0^{y_0} s\frac{1}{\mu}e^{-\frac{s}{\mu}}ds\right)\right]dy_0, \end{aligned}$$

incluimos el factor $\frac{1}{\mu}$ en la segunda integral para mostrar que el término entre paréntesis es la expresión $h(y_0)$ (la proporción de la población que gana un ingreso y_0, o menos) que ya se encontró para la distribución exponencial en el capítulo 1 y es:

$$h(y_0) = -\frac{1}{\mu}y_0e^{-\frac{y_0}{\mu}} - e^{-\frac{y_0}{\mu}} + 1,$$

sustituyendo ésta en $A_{y_0}(\nu_1,\nu_2)$, tenemos:

$$\begin{aligned} A_{y_0}(\nu_1,\nu_2) &= \int_{\nu_1}^{\nu_2}\left[\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y_0}{\mu}}\left(-\frac{1}{\mu}y_0e^{-\frac{y_0}{\mu}} - e^{-\frac{y_0}{\mu}} + 1\right)\right]dy, \\ &= \int_{\nu_1}^{\nu_2}\left[-\frac{1}{\mu^2}y_0e^{-\frac{2y_0}{\mu}} - \frac{1}{\mu}e^{-\frac{2y_0}{\mu}} + \frac{1}{\mu}e^{-\frac{y_0}{\mu}}\right]. \end{aligned}$$

integrando y agrupando términos nos queda:

$$A_{y_0}(\nu_1,\nu_2) = \left(e^{-\frac{\nu_1}{\mu}} - e^{-\frac{\nu_2}{\mu}}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-2\frac{\nu_1}{\mu}} - e^{-2\frac{\nu_2}{\mu}}\right)$$
$$- \frac{1}{4}\left[e^{-2\frac{\nu_1}{\mu}}\left(1+\frac{2}{\mu}\nu_1\right) - e^{-2\frac{\nu_2}{\mu}}\left(1+\frac{2}{\mu}\nu_2\right)\right].$$

ahora, si $\nu_1 = 0$ y $\nu_2 = z$[8], esto es, integrando sobre todo $y_0 \in [0, z]$,

$$A_{y_0}(0,z) = 1 - 0 - \frac{1}{2}\left(1-0\right) - \frac{1}{4}\left(1-0\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \tag{3.10}$$

De lo anterior y la definición del coeficiente de Gini, citamos nuestro principal resultado en el siguiente teorema:

Teorema 1: Dada la expresión A_{y_0} y el lema 2 aplicado para la distribución exponencial, la relación explícita entre crecimiento y el índice de Gini es:

$$\frac{dG}{d\gamma} = \frac{1}{2}\frac{r}{(\gamma(\tau)+\rho)^2} > 0$$

Demostración. Del resultado en el lema 2:

$$f(y_1) = \frac{r}{\gamma(\tau)+\rho} f(y_0),$$

se tiene que la distribución del ingreso después de impuestos es una función de la distribución del ingreso antes de impuestos, donde $\frac{r}{\gamma(\tau)+\rho}$ es una constante independiente del ingreso. De lo anterior aunado al área obtenida para $f(y_0)$, A_{y_0}, tenemos:

$$A_{y_1}(0,z) = \frac{r}{(\gamma(\tau)+\rho)} A_{y_0}(0,z),$$

ahora, de (3.10) se tiene:

$$A_{y_1}(0,z) = \frac{r}{(\gamma(\tau)+\rho)}\frac{1}{4}$$

sustituyendo esta área reducida en (3.9), tenemos:

$$G = 1 - \frac{1}{2}\frac{r}{\gamma(\tau)+\rho}, \tag{3.11}$$

derivando esta última en términos de la tasa de crecimiento, finalmente tenemos:

[8]Con z el máximo ingreso existente.

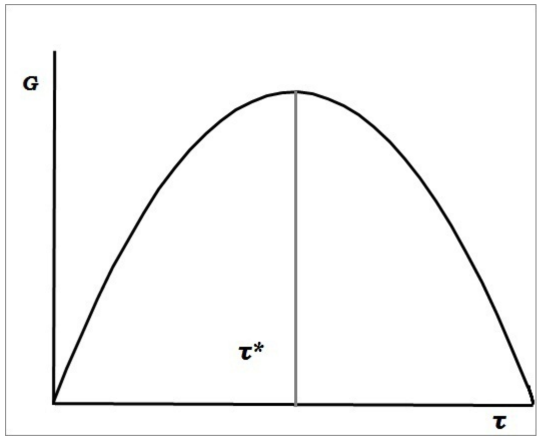

Figura 3.3: La Forma U inversa en la relación Crecimiento-Desigualdad

$$\frac{dG}{d\gamma} = \frac{1}{2}\frac{r}{(\gamma(\tau)+\rho)^2} > 0 \tag{3.12}$$

□

Intuitivamente el resultado anterior dice lo siguiente: supongamos que la tasa de crecimiento $\gamma(\tau)$ aumenta, de la política implementada sabemos que esto se debe a que $\tau \leq \tau^{\star}$ (ver figura 3.1), lo cual implica que no hay recursos suficientes para una mejor distribución. De hecho, parte de los pocos recursos recaudados se distribuirán en la producción (ecuación (3.1)) y por lo tanto los ricos, dueños del capital, son más ricos y los pobres, que sólo disponían del trabajo quedan relativamente igual, esto es, la desigualdad aumenta. Este aumento de la desigualdad se ve reflejado en un coeficiente de Gini (G) mayor (ver figura 3.3), que es lo que nos muestra (3.12).

Por otro lado, la ecuación (3.11) nos muestra una relación inversa entre desigualdad y política fiscal, a través de la tasa de crecimiento, la cual formalizamos en la siguiente proposición:

Proposición 1 Dadas las desigualdades y la política óptima $\tau^{\star}$, hay una relación inversa entre la tasa de impuestos y el índice de Gini.

Demostración. Derivando

$$G = 1 - \frac{1}{2}\frac{r}{\gamma(\tau)+\rho}$$

respecto a τ tenemos,

$$\frac{dG}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{r}{(\gamma(\tau)+\rho)^2}\gamma'(\tau) = \frac{1}{2}\frac{r\gamma'(\tau)}{(\gamma(\tau)+\rho)^2}. \tag{3.13}$$

Ahora, si $\tau < \tau^{\star}$, se deduce de la figura 3.1 y las desigualdades mostradas en (3.5) que la tasa de crecimiento es positiva, esto es, $\gamma'(\tau) > 0$. Así, de (3.13) tenemos que $G > 0$ para $\tau < \tau^{\star}$ (primera parte de la figura 3.3).

Análogamente, para $\tau > \tau^{\star}$, de los supuestos tenemos que la tasa de crecimiento es negativa y por lo tanto $\gamma'(\tau) < 0$. Por lo tanto de (3.13) deducimos que $G < 0$ para $\tau > \tau^{\star}$ (segunda parte de la figura 3.3). $\square$

3.4. Conclusión

La relación que encontramos, entre desigualdad y crecimiento, es una forma más directa de las que se han analizado en los artículos citados. Encontramos el ingreso ex-post como función del crecimiento.

Lo más relevante del trabajo es haber encontrado una relación directa entre crecimiento e índice de Gini. La utilidad de esta relación es que gracias a la amplia disponibilidad del índice de Gini, podríamos involucrar la literatura econométrica y efectuar la aplicación empírica del modelo.

Nuestro trabajo abre posibilidades de estudio muy interesantes: la extensión del modelo a otras funciones de distribución y diferentes políticas fiscales. Respecto a la distribución del ingreso empleada, dado que la mayoría de las distribuciones son de la familia exponencial, se puede extender el trabajo al considerar distribuciones normales, log-normales, gammas, entre otras. Respecto a la política utilizada (impuesto al capital), se podría haber utilizado la política de impuesto al salario (ISR) e incorporar la recaudación en bienes y servicios para la producción.

3.5. Bibliografía

[1] Alesina, A. and D. Rodrik (1994) “Distributive Politics and Economics Growth”The Quartely Journal of Economics, 109, 465-490.
[2] Atkinson, A. B (1970). “On the Measurement of Inequality”Journal of Economic Theory, 2, 244-263.
[3] Cortés, F. (2000) “La distribución del ingreso en México en épocas de Estabilización y reforma económica”, Edición de CIESAS y Porrua, México.
[4] Esteban, J. and D. Ray (1994) “On the Measurement of Polarization”, Econometrica, 62, 819-851.
[5] Esteban, J., D. Ray and J-Y. Duclos (2004), “Polarization: Concepts, measurement, estimation”, Econometrica, 72, 1737-1772.
[6] Fei, CH J. (1981)“Equity Oriented Fiscal Programs”, Econometrica, 49, 869-881.
[7] Kakwani, N.C.(1977) “Applications of Lorenz Curves in Economic analysis”, Econometrica, 45, 719-772.
[8] Latham, R. (1988) “Lorenz-Dominating Income Tax Functions”, International Economic Review, 29, 185-198.
[9] Levine, D. B. and Singer, N. M. (1970) “The Mathematic Relation Between the Income Density Function and the Measurement of Income Inequality”, Econometrica, 38, 324-330.
[10] Liu, P-W (1985) “Lorenz Domination and Global Tax Progressivity”, The Canadian Jolurnal of Economics, 18, 395-399.
[11] McGarrry, K. and R.F. Schoeni (1995) “Transfer Behavior in the Health and Retirement Study: Measurement and the Redistribution of Resources within the Family”, The Journal of Human Resources, 30, 184-s226.
[12] Perotti, R. (1993)“Political Equilibrium Income Distribution and Growth”, Review of Economics Studies, 60, 755-776.
[13] Persson, T. and G. Tabellini (1994) “Is Inequality Harmful for Growth? Theory and Evidence”, American Economic Review, 84, 600-621.
[14] Rocha, A. G. (1986) “La Desigualdad Económica”, CEE, El Colegio de México.

Apéndice A

En este apéndice mostramos algunos conceptos relacionados con la Curva de Lorenz[1]. Gráficamente en una curva de Lorenz (figura A.1), el eje de las abscisas mide la fracción de la población total que gana un ingreso y, o menor a éste, y el eje de las ordenadas mide la fracción del ingreso total ganado por las personas cuyo ingreso es y, o menor. De la curva se desprende lo siguiente:

- La diagonal es una curva de Lorenz, en donde no existe desigualdad, ya que a cada proporción de la población le corresponde la misma proporción del ingreso.
- La distribución del ingreso será desigual a medida que su curva de Lorenz se aleje de la diagonal.
- Si los ingresos están ordenados de menor a mayor (como es el caso de la figura A.1) la curva de Lorenz de esta distribución estará por debajo de la diagonal, y por encima en caso de un orden de ingresos de mayor a menor.

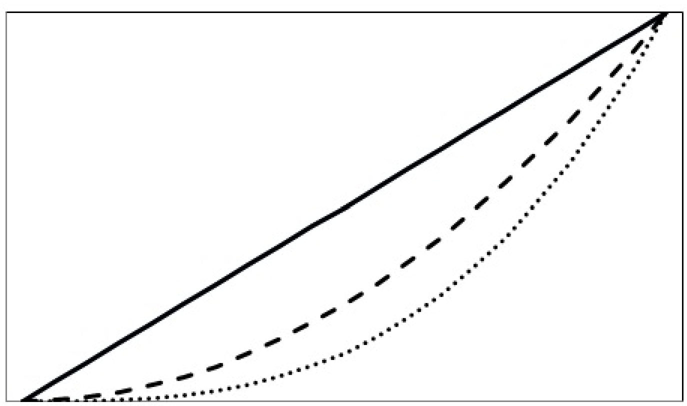

Figura A.1: Curva de Lorenz y Dominancia de Lorenz (La curva más cercana a la diagonal domina a la más lejana)

Dadas estas características podemos encontrar condiciones necesarias y suficientes para definir una curva de Lorenz.

[1] Ver Rocha (1986).

Definición (Propiedades de la Curva de Lorenz): Una distribución de ingresos se representa por una curva de Lorenz si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

- A1: En el nivel inferior de ordenación de ingresos de la población, la distribución de ingresos es cero.
- A2: En el nivel superior de ordenación de ingresos de la población, la distribución de ingresos es uno.
- A3: Si la ordenación de ingresos de la población es de menor a mayor la distribución de ingresos siempre será creciente, esto es, la derivada de la distribución de ingresos con respecto al nivel de ordenación de ingresos de la población es positiva.
- A4: Si la ordenación de ingresos de la población es de menor a mayor la distribución de ingresos siempre será convexa, es decir, la segunda derivada de la distribución del ingreso con respecto al nivel de ordenación de ingresos de la población es positiva.

Por otra parte, para medir el impacto de la política fiscal utilizaremos la siguiente definición.

Definición: Una distribución de ingresos, representada por una curva de Lorenz, se dice que domina en sentido de Lorenz (es equivalente en el sentido de Lorenz) a otra distribución si su curva de Lorenz está más cerca de la diagonal (es la misma) y éstas no se cortan. (Figura A.1).

Apéndice B

En este apartado demostramos que la forma parámetrica de la curva de Lorenz, deducida en el capítulo 1, cumple con las propiedades A1-A4 del apéndice anterior.

A1: $h(0) = \frac{1}{\mu}\int_0^0 sdF(s) = 0,$

La última igualdad debido a que estamos integrando en un conjunto de medida cero.

A2: $h(z) = \frac{1}{\mu}\int_0^z sdF(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^z sf(s)ds = \frac{\mu}{\mu} = 1.$

A3: Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la expresión de la curva de Lorenz, tenemos:

$$\frac{dh}{dF} = \frac{1}{\mu}y,$$

de hecho sólo es cero cuando el ingreso toma el valor de cero, en los demás puntos se cumple la desigualdad estricta, esto es, lo anterior se cumple para $y \in [o, z]$ y $\mu > 0$.

A4: Para ver la convexidad, derivemos (3.1) respecto a $g(y)$, esto es:

$$\frac{d^2h(y)}{d^2F(y)} = \frac{1}{\mu}\frac{dy}{dF(y)},$$

y dado que:

$$\frac{dy}{dF(y)} = \frac{1}{f(y)},$$

$$\frac{d^2h(y)}{d^2F(y)} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{f(y)} > 0.$$