EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ECONOMÍA

MÉTODO ECONOMÉTRICO DE VALUACIÓN DE ACTIVOS

LUIS ALEJANDRO AGUILAR LUNA

PROMOCIÓN 2014-2016

ASESOR:

DR. ENEAS ARTURO CALDIÑO GARCÍA

JUNIO 2016

Dedicado a todas las personas que me apoyaron
en esta etapa de mi vida, en particular a mi familia

Índice

Resumen

Este trabajo evalúa un modelo de valuación de activos que utiliza un nuevo tipo de preferencias planteadas por Dreyer et al. (2013) en donde el agente no solo deriva utilidad del consumo sino también del acto de ahorrar, representada en las preferencias mediante la acumulación de la riqueza. A partir de estas preferencias se derivan las ecuaciones de Euler y se estiman los parámetros de la función de utilidad mediante GMM e IGMM para el caso de México en el periodo 2000-2015. Los resultados de las estimaciones sugieren que para los mexicanos la inclusión del gusto por ahorrar en la función de utilidad no es significativo.

Introducción

El presente trabajo es una implementación empírica para México del modelo propuesto por Dreyer et al. (2013), en el que se propone un método de valuación de activos en el cual las preferencias del agente no solo dependen del consumo sino también del gusto por ahorrar. Dreyer et al. (2013) implementan su modelo para datos de Estados Unidos, teniendo como conclusión que el gusto por ahorrar incluido en la función de utilidad es significativo.

El *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* propuesto por Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) establece que el rendimiento en exceso esperado entre cualquier activo y el activo libre de riesgo es proporcional al rendimiento en exceso entre el portafolio de mercado y el activo libre de riesgo. Las principales críticas a este modelo provienen de su supuesto de expectativas del mercado homogéneas entre los inversionistas además de que también se supone que solo existe un periodo en la naturaleza. Modificando el supuesto de un solo periodo, Merton (1973) desarrolló el CAPM intertemporal donde las oportunidades de inversión son estocásticas, los inversionistas maximizan su utilidad esperada del consumo a lo largo de toda su vida. Haciendo algunos supuestos extras al modelo se puede regresar al CAPM original. Breeden (1979) basado en Merton (1973) propone el llamado *Consumption-Based Capital Asset Pricing Model (CCAPM)* que explica la variación en los rendimientos de los activos a partir de un problema de optimización intertemporal asumiendo que los agentes tienen una función de utilidad aditiva separable y cuadrática.

Mehra y Prescott (1985) introducen el concepto de *equity premium puzzle*: el rendimiento en exceso observado entre el portafolio de mercado y el portafolio libre de riesgo es mucho mayor que lo estimado con CCAPM para niveles convencionales de aversión al riesgo, por lo que se necesitaría un coeficiente de aversión al riesgo muy alto para poder explicar este rendimiento en exceso, lo cual sería difícil de justificar.

El CCAPM supone que un agente representativo deriva utilidad solo del consumo. El agente escoge que proporción de su riqueza invertir en activos riesgosos con el fin de poder consumir más en el futuro. Dado que los agentes pueden derivar utilidad no solo del consumo sino también de alguna otra variable, con el propósito de mejorar el desempeño empírico del CCAPM algunos autores incluyen la riqueza dentro de la función de utilidad con la idea de modelar el *status* socio-económico del consumidor, es decir, entre mayor sea su riqueza mayor será su *status* socio-económico lo que le generará un mayor nivel de utilidad. Este tipo de modelos suelen ser conocidos como modelos del “espíritu”del capitalismo ya que la acumulación de riqueza es un objetivo en una economía capitalista. Dreyer et al. (2013) propone la inclusión del gusto por ahorrar en la función de utilidad del agente basado en un argumento de Marshall (2009) que menciona que las personas no solo ahorran para poder consumir en el futuro sino que también el acto de ahorrar por si mismo les genera cierta felicidad. El ahorro consiste en la acumulación de riqueza, por lo que Dreyer et al. (2013) propone incluir la riqueza en la función de utilidad pero no de manera directa sino como el crecimiento en esta, de tal manera que se pueda medir el gusto por ahorrar como el crecimiento en la riqueza $\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)$, y llama a estas preferencias, basadas tanto en consumo como en el crecimiento de la riqueza, *saving based preferences*. La teoría de prospectos introducida por Kahneman y Triversky (1979) postula que las fluctuaciones en la riqueza, y no la riqueza directamente afectan las decisiones de los agentes. Menciona también que los agentes son aversos al riesgo ante ganancias y amantes al riesgo ante las pérdidas. Barberis et al. (2001) proponen que la función de utilidad dependa no solo del consumo sino también de la riqueza en el siguiente periodo. Además propone un coeficiente de aversión al riesgo dependiente de las ganancias o pérdidas reflejadas. Dreyer et al. (2013) coinciden con la teoría de prospectos de manera parcial en que las fluctuaciones en la riqueza afectan las decisiones de los agentes.

Dada la inclusión de un argumento extra en la función de utilidad (crecimiento en la riqueza), la derivación de la ecuación de Euler ya no es tan sencilla como era en el caso donde la función de utilidad solo dependía de un argumento (consumo), ya que ahora una disminución marginal en el consumo hoy no solo afecta al consumo futuro sino que también al crecimiento en la riqueza. Las ecuaciones de Euler obtenidas serán la base para la implementación empírica de este modelo, así como el coeficiente de aversión al riesgo que por estar ahora en un contexto multivariado tiene una expresión más complicada. Para la implementación se especifica una forma funcional de la función de utilidad, de la cual se calculan las ecuaciones de Euler.

Hansen y Singleton (1982) proponen el Método Generalizado de Momentos conocido por sus siglas en inglés GMM con la idea de poder estimar modelos no lineales directamente de las ecuaciones de Euler, con lo cual se puede estimar un modelo como el CCAPM expresando la ecuación de Euler asociada como una condición de momentos. Los autores describen las propiedades asintóticas de los estimadores obtenidos, si bien estas propiedades son muy relevantes poco se sabe si la muestra es relativamente pequeña. Hansen et al. (1996) proponen algunas alternativas al GMM. En este trabajo se utilizan como método de estimación el método original y una de las alternativas propuestas, que serán discutidas más adelante.

En este trabajo se utiliza el modelo propuesto por Dreyer et al. (2013) y la metodología propuesta por Hansen y Singleton (1982) implementada mediante R-Proyect basado en Chaussé et al. (2010) para tratar de mejorar el desempeño empírico del CCAPM así como para explicar de mejor manera el *equity premium puzzle* para el caso de México en el periodo 2000-2015.

Una de las preguntas de este trabajo es si realmente los mexicanos presentan el comportamiento planteado por Marshall (2009) respecto al gusto por ahorrar y si es el caso, observar si este modelo ayuda a explicar el enigma planteado por Mehra y Prescott (1985) . Las estimaciones realizadas muestran que para el caso de México el gusto por ahorrar no tiene efecto alguno sobre las decisiones de los consumidores.

La estructura del trabajo es la siguiente. La Sección 1 describe a detalle el modelo propuesto por Dreyer et al. (2013). La Sección 2 describe los métodos de estimación a utilizar. En la Sección 3 se da una descripción de los datos que se utilizan para la implementación del modelo. En la Sección 4 se presentan los resultados de la implementación del modelo mediante los métodos descritos en la Sección 2. Por último en la Sección 5 se presentan las conclusiones.

Modelo

Siguiendo el modelo de Dreyer et al. (2013), existe un consumidor representativo que deriva utilidad no solo del consumo sino que también del acto de ahorrar, modelando este acto como el crecimiento en la riqueza.

La riqueza sigue el siguiente proceso

$$w_{t+1} = (w_t - c_t)R^w_{t+1}, \tag{1}$$

donde w_t es la riqueza al tiempo t, c_t es el consumo al tiempo t y R^w_{t+1} es el rendimiento obtenido por $(w_t - c_t)$ el cual es un promedio ponderado del rendimiento libre de riesgo y de los activos con riesgo como se muestra en (2), donde λ_t denota la proporción de la riqueza invertida en los activos riesgosos.

$$R^w_{t+1} = (1 - \lambda_t)\, R^f_{t+1} + \lambda_t R_{t+1}. \tag{2}$$

Para implementar el modelo empíricamente se supone una función de utilidad que depende no solo del consumo sino también del crecimiento en la riqueza. La función de utilidad utilizada por Dreyer et al. (2013) y que se utilizará en este trabajo es la siguiente:

$$u\left(c_t, \frac{w_{t+1}}{w_t}\right) = \begin{cases} \dfrac{\left[c_t\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta}\right]^{1-\eta}}{1-\eta}, & \text{Cuando} \quad \eta > 0, \eta \neq 1 \\ \ln\left(c_t\right) + \theta \ln\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right), & \text{Cuando} \quad \eta = 1, \end{cases} \tag{3}$$

donde $\theta > 0$ mide el gusto por ahorrar, entre más grande sea su valor, mayor es el gusto por ahorrar.

Para explicar el *"equity premium puzzle"* es necesario un coeficiente de aversión relativa al riesgo. En un modelo multivariado como este y para la función de utilidad descrita en (3), se define el coeficiente de la siguiente manera:

$$\Gamma = 1 - (1-\eta)(1+\theta). \tag{4}$$

Este coeficiente proviene de los argumentos de Kihlstrom y Mirman (1974) . Ellos mencionan que una representación menos cóncava de la función de utilidad sería una medida natural de las preferencias ordinales sobre dos bienes, mientras que la transformación cóncava de esta función de utilidad puede ser interpretada como una medida de aversión al riesgo.

La función de utilidad (cuando $\eta > 0$ y $\eta \neq 1$) se puede reescribir como;

$$\frac{\left[c_t\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta}\right]^{1-\eta}}{1-\eta} = \frac{\left[c_t^{\frac{1}{1+\theta}}\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\frac{\theta}{1+\theta}}\right]^{(1-\eta)(1+\theta)}}{1-\eta}, \tag{5}$$

La función dentro de los paréntesis rectangulares en el lado derecho de la ecuación, es la función de utilidad menos cóncava. La transformación cóncava $(\cdot)^{(1-\eta)(1+\theta)}$ es la encargada de medir la aversión al riesgo, por lo tanto la medida de aversión relativa al riesgo se define como en (4)[1].

Ahora se puede describir el problema de optimización del consumidor. Asumiendo que existe un factor de descuento constante β y un horizonte de tiempo infinito, el consumidor

[1] Ver Apéndice C

escoge el nivel de consumo c_t así como la proporción de su riqueza invertida en los activos riesgosos λ_t para maximizar el valor presente de la utilidad esperada a lo largo de su vida sujeto al proceso que sigue la riqueza descrito en (1). El consumidor cuenta con un nivel de riqueza inicial w_0 y no tiene ningún otro tipo de ingreso distinto al generado por el proceso de riqueza. El problema de optimización queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t,\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t, \frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right] \\ \text{s.a} \quad w_{t+1} &= (w_t - c_t)R_{t+1}^{w} \\ w_0 &= \bar{w}. \end{aligned} \tag{6}$$

Resolviendo este problema de optimización[2] se obtienen las siguientes ecuaciones de Euler, a partir de las cuales se construyen los momentos no condicionales que son las condiciones de momentos para hacer la estimación de los parámetros mediante GMM.

$$\frac{E_t\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\left[\theta\frac{c_t}{w_t}\frac{w_t}{w_{t+1}} + \beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\eta}\left(\frac{\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}}{\frac{w_{t+1}}{w_t}}\right)\left(1-\theta\frac{c_{t+1}}{w_{t+1}}\right)\right]R_{t+1}\right]}{E_t\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\right]} = 1, \tag{7}$$

$$\frac{E_t\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\left[\theta\frac{c_t}{w_t}\frac{w_t}{w_{t+1}} + \beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\eta}\left(\frac{\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}}{\frac{w_{t+1}}{w_t}}\right)\left(1-\theta\frac{c_{t+1}}{w_{t+1}}\right)\right]R^{f}_{t+1}\right]}{E_t\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\right]} = 1. \tag{8}$$

Para hacer la estimación de los parámetros de ser necesario se restringirán los valores que pueden tomar, (9), de tal manera que cada parámetro tenga una interpretación económica.

El parámetro β representa un factor de descuento subjetivo, mide que tanto el consumidor representativo valora el futuro respecto al presente, si $\beta = 1$ se valora de la misma manera el futuro que el presente, entre más pequeño sea su valor menor peso se le da a la utilidad que se pueda obtener en el futuro, un valor de $\beta = 0$ significa que el consumidor no le importa lo que pueda ocurrir en el futuro solo el presente.

Las restricciones para θ y η indican que estos parámetros sean no negativos. Para el caso de θ, garantizar que este parámetro sea positivo es afirmar que el modelo planteado se

[2] Ver Apéndice A

cumple. Ya que θ representa el gusto por ahorrar, un valor positivo indicará la magnitud de este para alguna población en específico. El parámetro η en el modelo original representa el coeficiente de aversión relativa al riesgo, un valor negativo en este parámetro indicaría una conducta de amor al riesgo, lo cual no ayuda a explicar el *equity premium puzzle*. Bajo las nuevas preferencias, los parámetros η y θ se utilizan para construir Γ, que representa el coeficiente de aversión relativa al riesgo en un contexto multivariado, las restricciones impuestas intentan garantizar que el valor de Γ sea positivo, de tal manera que muestre una conducta de aversión al riesgo y se pueda explicar el *equity premium puzzle*.

$$\begin{aligned} &\beta \in [0,1] \\ &\eta \in [0,100] \\ &\theta \in [0,100]\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Metodología

Se utilizarán el Método Generalizado de Momentos (GMM) así como una modificación de este llamado Método Generalizado de Momentos Iterativo (IGMM) propuesto por Hansen et al. (1996). A continuación se describen estos métodos de estimación. El GMM propuesto por Hansen (1982) consiste en lo siguiente:

Se quiere estimar el vector de parámetros $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$. El valor verdadero del parámetro θ_0 se caracteriza por satisfacer el vector de $q \times 1$ condiciones de momentos, es decir:

$$E\left[g\left(\theta_0, x_j\right)\right] = 0, \tag{10}$$

donde x_j es un vector de datos de sección cruzada o series de tiempo y $g : \mathbb{R}^n \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^q$ es una función.

La contraparte muestral de la ecuación (10) es:

$$\bar{g}\left(\theta\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g\left(\theta, x_j\right) = 0. \tag{11}$$

De acuerdo a Chaussé et al. (2010), cuanto más condiciones de momentos se tengan más eficiente es el estimador, por lo que en general $q > p$, aunque también es importante tomar en cuenta que como mencionan Newey y Smith (2004), entre más grande sea el número de

condiciones de momentos a estimar el sesgo de este estimador se incrementará. Si quisiéramos utilizar el método de momentos, que consiste en igualar los momentos poblacionales con sus correspondientes momentos muestrales, con $q > p$ este sistema no tendría solución. Lo que se hace entonces es minimizar la función cuadrática $\bar{g}(\theta)' W_n \bar{g}(\theta)$, donde W_n es una matriz de pesos simétrica positiva definida de dimensión $q \times q$.
La matriz W_n óptima que produce estimadores eficientes, es decir, con la menor varianza asintótica, se define de la siguiente manera:

$$W^{\star} = \left\{ \lim_{n \to \infty} Var\left(\sqrt{n}\bar{g}(\theta_0)\right) \equiv \Omega(\theta_0) \right\}^{-1}. \tag{12}$$

Dentro de las propiedades asintóticas del GMM se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{n}\bar{g}(\theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Omega(\theta_0)) \tag{13}$$

donde:

$$\Omega(\theta_0) = plim \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g(\theta, x_i) (g(\theta, x_j))'$$

La matriz $W^{\star}$ esta definida como la inversa de la matriz Ω. Esta matriz puede ser estimada por una matriz de heterosedasticidad y autocorrelación consistente (HAC)

$$\hat{\Omega} = \sum_{s=-(n-1)}^{n-1} k_h(s) \hat{\Gamma}_s(\theta^{\star}), \tag{14}$$

donde $k_h(s)$ es un kernel, normalmente seleccionado entre: Bartlet, Parzen, truncado y *"quadratic spectral"*. h es un ancho de banda que puede ser escogido mediante el procedimiento propuesto por Newey y West (1986). La elección del kernel y el ancho de banda genera múltiples matrices HAC, pero las propiedades asintóticas del estimador de GMM se conservan sin importar la elección del kernel y el ancho de banda. Cabe señalar que para muestras pequeñas los resultados asintóticos no necesariamente se cumplen por lo que la elección de kernel y ancho de banda si podría afectar las propiedades de los estimadores.

$$\hat{\Gamma}_s(\theta^{\star}) = \frac{1}{n} \sum_{j} g(\theta^{\star}, x_j) g(\theta^{\star}, x_{j+s})' \tag{15}$$

donde $\theta^\star$ es un estimador consistente de θ_0. El estimador de GMM se define de la siguiente manera:

$$\hat{\theta}_{GMM} = \arg\min_{\theta} \bar{g}(\theta)\, \hat{\Omega}(\theta^\star)^{-1}\, \bar{g}(\theta)' \tag{16}$$

Este estimador también se conoce como estimador de GMM de dos etapas, ya que el algoritmo que se utiliza para calcularlo es el siguiente:

1. Calcular $\theta^\star = \arg\min_{\theta} \bar{g}(\theta)\, \bar{g}(\theta)'$
2. Calcular la matriz HAC $\hat{\Omega}(\theta^\star)$
3. Calcular $\hat{\theta}_{GMM} = \arg\min_{\theta} \bar{g}(\theta)\, \hat{\Omega}(\theta^\star)^{-1}\, \bar{g}(\theta)'$

Una vez definido el estimador de GMM se puede escribir el algoritmo para calcular el GMM iterativo (IGMM), que queda de la siguiente manera:

1. Calcular $\theta^{(0)} = \arg\min_{\theta} \bar{g}(\theta)\, \bar{g}(\theta)'$
2. Calcular la matriz HAC $\hat{\Omega}\left(\theta^{(0)}\right)$
3. Calcular $\theta^{(1)}_{GMM} = \arg\min_{\theta} \bar{g}(\theta)\, \hat{\Omega}\left(\theta^{(0)}\right)^{-1}\, \bar{g}(\theta)'$
4. Si $\|\theta^{(0)} - \theta^{(1)}\| < tol \Rightarrow \theta^{(1)} = \hat{\theta}_{IGMM}$ si no, $\theta^{(0)} = \theta^{(1)}$ y regresamos al paso 2

donde *tol* es un valor en especifico que dependerá de la precisión que se quiera tener en la estimación, entre más pequeño es este valor más iteraciones se hacen y más preciso es el estimador.

Dadas ciertas condiciones de regularidad, cuando n tiende a infinito:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{GMM} - \theta\right) \xrightarrow{d} N(0, V), \tag{17}$$

donde,

$$V = E\left[\left(\frac{\partial g(\theta_0, x_i)}{\partial \theta}\right)'\right] \Omega(\theta_0)^{-1}\, E\left[\left(\frac{\partial g(\theta_0, x_i)}{\partial \theta}\right)\right]. \tag{18}$$

Entonces, $\hat{\theta} \sim N\left(\theta_0, \hat{V}\frac{1}{n}\right)$.
Si $q > p$ se realiza el *J-test* para verificar que las condiciones de momentos se cumplen. Bajo

$H_0 : E\left[g\left(\theta, x_i\right)\right] = 0$ (*i.e.* que se cumplen las condiciones de momentos), el estadístico de prueba queda de la siguiente manera:

$$n\bar{g}\left(\hat{\theta}_{GMM}\right)'\left[\hat{\Omega}\left(\theta^{\star}\right)\right]^{-1}\bar{g}\left(\hat{\theta}_{GMM}\right) \xrightarrow{d} \chi^2_{q-p}. \tag{19}$$

Tanto el estimador de GMM como el IGMM son asintóticamente eficientes , consistentes y sesgados. Hansen et al. (1996) mencionan que el sesgo de los estimadores GMM e IGMM no es significativamente diferente.

A pesar de las propiedades asintóticas mencionadas, de acuerdo a Hansen y West (2002), el GMM tiene tres problemas principales en la práctica:

1. Las aproximaciones asíntoticas de primer orden para $\hat{\theta}$ y para el estadístico t y el *J-test* no funcionan correctamente para muestras de tamaño estandar.

2. *J-test* suele rechazar muchas veces la especificación a niveles de significancia convencionales.

3. Pequeños cambios en la especificación, la matriz de pesos y los instrumentos suelen tener grandes efectos sobre los valores de los estimadores así como sus p-valores.

Los valores de p y q para la estimación están dados por la dimensión de los parámetros y el número de condiciones de momentos respectivamente. En este caso, los parámetros a estimar son β, η y θ por lo que p=3. El valor de q dependerá del número de condiciones de momentos que sean utilizadas para la estimación, estará determinado por las condiciones de momentos dadas por el modelo y otras variables adicionales llamadas instrumentos, las cuales se explican más adelante.

Datos

Para la implementación econométrica del modelo propuesto por Dreyer et al. (2013) para el caso de México, se requieren datos de población , inflación, consumo, riqueza financiera, rendimiento libre de riesgo, rendimiento del mercado y salarios. Estas series tienen frecuencia trimestral y abarcan el periodo del primer trimestre del 2000 hasta el último trimestre de 2015, teniendo así 64 datos para cada una de las series. La serie de riqueza financiera fue la que limitó el número de datos a utilizar para la estimación, ya que precisamente es esta serie la que solo tiene datos a partir del primer trimestre del 2000, con lo que a pesar de que las demás series si tuvieran datos para años anteriores estos no pudieron ser utilizados. El modelo considera un consumidor representativo, al tener series a nivel agregado se requiere expresarlas en términos per cápita para poder utilizarlas. Se utilizan las series en términos reales para eliminar el efecto que pueda tener el nivel de precios sobre cada una de estas. Las ecuaciones de euler descritas en (33) y (34) utilizan cocientes de consumo y riqueza, utilizando las variables en términos nominales estos cocientes estarían afectados por los niveles de precio de cada uno de los periodos, pero al utilizar variable en términos reales estos cocientes no presente ningún efecto precio. A continuación se describen la fuente y las series que fueron utilizadas:

Inflación.- La serie de inflación se obtuvo a partir del Indice Nacional de Precios al Consumidor (INPC). Se utilizó el último valor del índice en cada trimestre para calcular la inflación trimestral así como para expresar todas las variables en términos reales. La serie fue obtenida del banco de información económica del INEGI.

Población.- Esta serie consiste en la población total de México por trimestre, utilizada para expresar las variables en términos per cápita. La serie fue obtenida del banco de información económica del INEGI.

Consumo.- Se utilizaron datos de consumo privado a precios corrientes, que fueron deflactados por el INPC y expresados en términos per cápita. La serie fue obtenida del banco de información económica del INEGI.

Riqueza financiera.- La serie de riqueza financiera, es la serie de posición financiera de los hogares solicitada a BANXICO la cual se define como la diferencia del saldo del ahorro financiero total menos el saldo del endeudamiento con el sistema financiero por parte de los hogares , deflactada y expresada en términos per cápita.

Rendimiento libre de riesgo.- Se utilizaron datos del rendimiento de los CETES 91 días ya que los datos de consumo y riqueza tienen periodicidad trimestral. Se utilizó la tasa de inflación trimestral para calcular los rendimientos reales. La serie fue obtenida del banco de información económica del INEGI.

Rendimiento del mercado.- La serie que refleja el comportamiento global del mercado de valores en México es el Indice de Precios y Cotizaciones (IPC), por lo que se utilizó como una proxy para obtener los rendimientos del mercado. Se calcularon los rendimientos trimestrales a partir de los índices mensuales de la siguiente manera:

$$R_{t,t+3} = \frac{IPC_{t+3} - IPC_t}{IPC_t}.$$

Se utilizó la tasa de inflación trimestral para calcular los rendimientos reales. La serie fue obtenida del banco de información económica del INEGI.

Salarios.- La serie de salarios se obtuvo a partir del promedio diario del salario base de cotización obtenido del banco de información del INEGI. Se multiplicó por 30 este salario promedio diario para calcular el salario base promedio mensual y para obtener el salario real trimestral se calculo el salario real mensual a parir del INPC y después se sumaron los salarios reales mensuales correspondientes a los meses que conformaban el trimestre.

Estimación

Se hizo la estimación del modelo y de los parámetros de interés con R-project de acuerdo a Chaussé (2010). Con solo dos condiciones de momentos no es posible hacer la estimación de los tres parámetros de interés, por lo cual se utilizaron instrumentos, para aumentar el número de condiciones de momentos.

Una variable puede ser utilizada como instrumento si es $I_t - medible$, donde I_t es el conjunto informacional al tiempo t o la sigma-álgebra generada a ese tiempo. Que la variable sea $I_t - medible$ intuitivamente significa que su valor ya es conocido en el tiempo t, es decir, ya forma parte del conjunto informacional.

Ahora, sea z_{t-1} un instrumento $I_t - medible$. Entonces, $E\left[z_{t-1} g\left(\theta, x_j\right) | I_t\right] = E_t\left[z_{t-1} g\left(\theta, x_j\right)\right] = z_{t-1} E_t\left[g\left(\theta, x_j\right)\right]$. Aplicando el operador esperanza no condicional obtenemos que $E\left[E\left[z_{t-1} g\left(\theta, x_j\right) | I_t\right]\right] = E\left[z_{t-1} g\left(\theta, x_j\right)\right]$. Las condiciones de momentos tienen la siguiente forma: $E\left[g\left(\theta, x_j\right) | I_t\right] = 0$. Si multiplicamos ambos lados de la igualdad por cualquier variable z_{t-1} $I_t - medible$ obtenemos $E\left[z_{t-1} g\left(\theta, x_j\right) | I_t\right] = 0$ y aplicando el operador esperanza no condicional a ambos lados de la igualdad obtenemos $E\left[z_{t-1} g\left(\theta, x_j\right)\right] = 0$, por lo que podemos incrementar el número de condiciones de momentos a partir de instrumentos. De manera general podemos expresar las condiciones de momentos cuando se utilizan instrumentos como $E\left[g\left(\theta_0, x_j\right) \otimes z_t\right] = 0$. Para el caso particular de este modelo, si agregamos un instrumento tendríamos cuatro condiciones de momentos (q=4), si agregamos dos instrumentos tendríamos seis (q=6), es decir, cada instrumento que se utilice va a multiplicar a las dos condiciones de momentos originales.

Ahora, la elección de cuántos y cuales instrumentos incluir para hacer la estimación de acuerdo a Dreyer et al. (2013) dependerá de:

1. Que tan buena es su capacidad de identificación, es decir, si su inclusión no viola las condiciones de momentos(J-test[3])

2. Si el incremento de un instrumento mejora las estimaciones.

La propuesta de los autores para la elección de los instrumentos es empezar con pocos e ir aumentando un instrumento a la vez, de tal manera que se pueda observar el efecto de este instrumento sobre las estimaciones que se tenían con el vector de instrumentos anterior así como la mejora de la capacidad de identificación por la inclusión del instrumento. Si hay alguna mejora se sigue utilizando esta instrumento para construir los demás vectores de instrumentos. Si no hay mejora, este instrumento no se incluye en ningún vector de instrumentos. Las variables de las cuales se escogerán los vectores de instrumentos que se utilizaran para la estimación son las siguientes:

$$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{w_t}{w_{t-1}}, \frac{c_{t-1}}{c_{t-2}}, \frac{w_{t-1}}{w_{t-2}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, \frac{y_{t-1}}{y_{t-2}}, R_t^f, R_{t-1}^f, R_t^w, R_{t-1}^w\right], \tag{20}$$

donde los instrumentos consisten en una constante k y rezagos de uno y dos periodos del crecimiento de las variables del modelo (consumo, riqueza, rendimiento libre de riesgo, rendimiento en los activos riesgosos) así como de una variable externa $I_t - medible$ la cual esta denotada por y_t y representa el salario per cápita trimestral. Como se mencionó anteriormente, cualquier variable que pertenezca al conjunto informacional puede ser incluida como instrumento, cuanto más instrumentos se incluyan más sofisticado es la información que posee el inversionista, en este caso, el salario es las única variable externa que se incluye como instrumento, pero se podrían incluir más siempre y cuando su valor este disponible al momento de tomar sus decisiones. La inclusión del salario no viola el supuesto del modelo de que el inversionista solo genera riqueza mediante la inversión en activos riesgosos y no riesgosos, ya que a pesar de que el inversionista no incluye directamente dentro de sus decisiones el salario, al incluirlo como instrumento el inversionista hace más sofisticado su conjunto de

[3] $H_0 : E\left[g\left(\theta, x_j\right)\right] = 0$ v.s $H_a : E\left[g\left(\theta, x_j\right)\right] \neq 0$

información con lo que ahora tomara en cuenta de manera indirecta las fluctuaciones en el nivel de salarios para tomar sus decisiones, tanto de consumo como de proporciones a invertir en los distintos tipos de activos.

A continuación se muestra una tabla de los distintos vectores de instrumentos que se utilizaron para la estimación.

Tabla 1: Vectores de Instrumentos.

Alternativa	Vectores
1	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w\right]$
2	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w, \frac{c_{t-1}}{c_{t-2}}\right]$
3	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w, R_t^f\right]$
4	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w, R_{t-1}^f\right]$
5	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w, R_t^f, \frac{c_{t-1}}{c_{t-2}}\right]$
6	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w, R_{t-1}^w, R_t^f\right]$
7	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{c_{t-1}}{c_{t-2}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w, R_{t-1}^f\right]$
8	$z = \left[k, \frac{c_t}{c_{t-1}}, \frac{c_{t-1}}{c_{t-2}}, \frac{y_t}{y_{t-1}}, R_t^w, R_{t-1}^w, R_{t-1}^f\right]$

La ventaja más importante del GMM es que no requiere ninguna especificación paramétrica de la distribución de las series, solo necesita las condiciones de momentos. Sin embargo es importante que las series utilizadas sean estacionarias. La tabla 2 muestra los resultados de la prueba KPSS[4] para estacionariedad.

Tabla 2: KPSS test para las variables

KPSS-test	P-value
R_f	<0.01
R_w	>0.10
$\frac{c_{t+1}}{c_t}$	>0.10
$\frac{w_{t+1}}{w_t}$	>0.10
$\frac{c_t}{w_t}$	<0.01
$\frac{y_{t+1}}{y_t}$	>0.10

Según los resultados de la tabla 2, se rechaza la hipótesis de estacionariedad para la

[4] H_0 : La serie es estacionaria v.s. H_a : La serie no es estacionaria

series de rendimiento libre de riesgo y para el cociente consumo entre riqueza. La serie de rendimiento libre de riesgo (CETES 91) presenta valores muy altos de hasta 14 % en el año 2000, después tiene una caída y se estabiliza en valores mucho más bajos entre 2 % y 4 %(tasas anualizadas). La presencia de rendimientos muy altos en la serie durante parte de este periodo y bajos en otra parte del periodo no le permite ser estacionaria. La serie del cociente de consumo y riqueza tampoco puede ser considerada estacionaria. Si bien las dos series, consumo y riqueza, tienen una tendencia a la alza, un choque negativo al consumo en el primer trimestre de 2009 que no afectó la tendencia de la riqueza generó que este cociente tuviera una caída considerable, después de este trimestre el consumo se recuperó pero la riqueza continuo creciendo por lo que este cociente se mantuvo en niveles más bajos que antes del 2009. Este choque del consumo impide que la serie sea estacionaria.

Si bien no todas las variables pueden ser consideradas estacionarias, se utilizarán para estimar los parámetros del modelo. El modelo requiere una serie que represente los rendimientos en los activos sin riesgo. Para el caso de México, los CETES son los activos sin riesgo en los que los consumidores invierten, independiente de su duración, ningún otro instrumento aún siendo la serie de sus rendimientos estacionaria representaría de mejor manera los rendimientos en los activos sin riesgo, por lo cual es necesario utilizar la serie de rendimientos de CETES, en este caso, la serie de CETES 91 días.

Respecto a la serie del cociente de consumo y riqueza, es importante señalar que no existe ninguna otra serie para México que pueda representar la riqueza financiera, dado que el modelo incluye el gusto por ahorrar como el crecimiento en la riqueza financiera, la utilización de esta serie se vuelve indispensable para la implementación del modelo. Dreyer et al. (2013) presentan también problemas de estacionariedad con algunas series, los cuales corrigen recortando su muestra. Debido al tamaño de la muestra para México no es posible reproducir lo hecho por Dreyer et al. (2013) con el objetivo de que todas las series sean estacionarias.

Realizar la estimación de esta manera tiene consecuencias sobre los estimadores, ya que las distribución asintótica del GMM planteada por Hansen (1982) esta basada en que las series son estacionarias. Por otra parte, es muy probable que la distribución de una muestra finita, incluso si todas las series son estacionarias, no se comporte como la distribución asintótica.

En las siguientes tablas se presentan los resultados de las estimaciones de los parámetros de interés (β, η, θ) utilizando los distintos vectores de instrumentos de la tabla 1 mediante GMM e IGMM. Se calcularon GMM e IGMM sin restricciones sobre los parámetros con la idea de observar si el mínimo global se encontraba dentro del espacio paramétrico que tiene interpretación económica. Las tablas 3 y 5 son las estimaciones sin restricciones sobre los parámetros de GMM e IGMM respectivamente. Las tablas 4 y 6 son las estimaciones con las restricciones impuestas por (9) de GMM e IGMM respectivamente.

Tabla 3: Estimaciones finales usando GMM, punto inicial=(.5,1,1)

Alternativa	β	η	θ	J Test	P-val β	P-val η	P-val θ
1	-12.09	2.91	0.32	0.03	0.01	0.60	0.00
2	-9.05	7.66	0.31	0.00	0.00	0.10	0.00
3	-8.37	5.12	0.32	0.00	0.00	0.23	0.00
4	-6.30	7.09	0.31	0.01	0.00	0.07	0.00
5	-6.76	10.02	0.31	0.00	0.00	0.03	0.00
6	-8.06	4.71	0.31	0.00	0.00	0.09	0.00
7	-5.49	11.39	0.30	0.00	0.00	0.01	0.00
8	-11.72	5.73	0.31	0.00	0.00	0.09	0.00

En la Tabla 3, en todas las especificaciones utilizadas el J-test rechaza la hipótesis de que se cumplen las condiciones de momentos propuestas. Además, al buscar un mínimo global, los valores de los parámetros que minimizan la función no tienen interpretación económica ya que el parámetro β además de tomar valores muy grandes, toma valores negativos.

Tabla 4: Estimaciones finales usando GMM restringido, punto inicial=(.5,1,1)

Alternativa	β	η	θ	J Test	P-val β	P-val η	P-val θ
1	0.00	21.89	0.49	0.00	1.00	0.43	0.00
2	0.19	27.34	0.43	0.00	0.71	0.33	0.00
3	0.00	21.97	0.53	0.00	1.00	0.30	0.00
4	0.00	23.61	0.50	0.00	1.00	0.30	0.00
5	0.00	33.25	0.49	0.00	1.00	0.13	0.00
6	0.00	34.10	0.51	0.00	1.00	1.00	1.00
7	0.06	42.90	0.39	0.00	0.78	0.19	0.00
8	0.00	45.19	0.48	0.00	1.00	0.01	0.00

En la Tabla 4, al imponer las restricciones indicadas en (9), se observa que para todas las especificaciones, el J-test rechaza la hipótesis de que se cumplan las condiciones de momentos.

El parámetro θ es significativo para casi todas las alternativas de instrumentos, el parámetro β no es significativo para ninguna alternativa y el parámetro η solo es significativo para una sola alterantiva.

Tabla 5: Estimaciones finales usando IGMM, punto inicial=(.5,1,1)

Alternativa	β	η	θ	J Test	P-val β	P-val η	P-val θ
1	-15.51	-1.10	0.32	0.61	0.01	0.85	0.00
2	-12.21	2.68	0.32	0.26	0.00	0.57	0.00
3	-2.86	32.95	0.30	0.04	0.09	0.00	0.00
4	-2.16	37.63	0.30	0.03	0.11	0.00	0.00
5	-7.33	13.39	0.31	0.01	0.00	0.01	0.00
6	-1.59	46.84	0.30	0.07	0.16	0.00	0.00
7	-3.65	25.89	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00
8	-11.60	13.47	0.32	0.01	0.00	0.00	0.00

En la Tabla 5, pareciera que la utilización del método IGMM mejora los resultados de las estimaciones, ya que en las alternativas 1,2 y 6 el J-test no rechaza a niveles de significancia convencionales la hipótesis de que se cumplan las condiciones de momentos. El parámetro θ es significativo para cada una de las alternativas y toma valores positivos, el parámetro η también es significativo para algunas alternativas, donde toma valores positivos. Estos dos parámetros tendrían una interpretación económica, pero el parámetro β toma valores muy grandes y negativos, lo cual no tiene ninguna interpretación. A pesar de que se cumplen las condiciones de momentos en algunas alternativas, algunos valores de los estimadores no tienen interpretación económica.

Tabla 6: Estimaciones finales usando IGMM restringido, punto inicial=(.5,1,1)

Alternativa	β	η	θ	J Test	P-val β	P-val η	P-val θ
1	1.00	10.70	0.52	0.00	0.01	0.66	0.42
2	0.00	76.02	0.27	0.00	1.00	0.06	0.00
3	0.00	62.22	0.28	0.00	0.85	0.11	0.00
4	0.00	47.61	0.30	0.00	1.00	0.20	0.00
5	0.00	84.91	0.25	0.00	0.87	0.03	0.00
6	0.01	60.22	0.27	0.00	0.81	0.05	0.00
7	0.00	89.56	0.25	0.00	1.00	0.05	0.00
8	0.00	78.50	0.26	0.00	0.77	0.00	0.00

En la Tabla 6, se tiene el mismo problema que en las tablas 3 y 4. La utilización del método IGMM no logra mejorar los resultados. El J-test rechaza la hipótesis de que se cumplan las condiciones de momentos para todas las especificaciones. Algunos de los parámetros estimados son significativos. En particular, el parámetro θ es significativo en todas las alternativas excepto en la alternativa 1.

Como se mencionó anteriormente, uno de los problemas principales en la práctica del GMM de acuerdo a Hansen y West (2002), es que para muestras de tamaño estándar, el J-test suele rechazar a niveles de significancia convencionales la hipótesis de cumplimiento de las condiciones de momentos, lo cual sucedió en las estimaciones de este modelo.

Para el periodo analizado, los rendimientos promedio del IPC y de los CETES 91 fueron de 2.78 % y 0.51 % respectivamente, teniendo un rendimiento en exceso de 2.27 % entre los activos con riesgo y sin riesgo. Si $\theta = 0$, es decir, que las preferencias planteadas no son significativas, se requeriría un coeficiente de aversión relativa al riesgo de η =27.01[5] con el modelo original, un valor muy alto que da lugar al *"equity premium puzzle"*. El coeficiente de aversión relativa al riesgo cuando $\theta \neq 0$ esta construido en función de dos parámetros η y θ, por lo que existen varias combinaciones de estos que podrían explicar el rendimiento en exceso entre los activos con y sin riesgo. Basado en la descomposición planteada por Dreyer et al. (2013), donde expresa rendimientos esperados en función de esperanzas y covarianzas que involucran al factor de descuento estocástico[6] y utilizando las contrapartes muestrales de las covarianzas y esperanzas, se pueden encontrar parámetros β, η y θ que expliquen este rendimiento en exceso con un coeficiente de aversión relativa al riesgo mucho menor que el calculado con el modelo original. Una combinación factible es cuando β =.9, η =5.15 y θ =1.5 lo cual implicaría un gusto por ahorrar significativo para México y además un coeficiente de aversión relativa al riesgo Γ =11.38, mucho menor que el calculado con el modelo original.

Los valores obtenidos de θ en ningún caso superan la unidad, mientras que los valores de η llegan a tomar valores muy grandes, dando lugar a un coeficiente de aversión relativa al riesgo Γ aún mayor que en el obtenido en el modelo original (η) impidiendo explicar el *"equity premium puzzle"*.

[5] $E\left[R_{t+1} - R^f_{t+1}\right] = \eta cov\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}, R_{t+1}\right)$

[6] Ver Apéndice D

Conclusiones

Los resultados de las estimaciones sugieren que el parámetro θ asociado al gusto por ahorrar no es significativo para el caso de México en el periodo de 2000-2015, por lo que la inclusión del ahorro como el crecimiento en la riqueza financiera dentro de la función de utilidad, no tiene ningún efecto sobre las decisiones de los consumidores. Por lo anterior, no es posible obtener un coeficiente de aversión al riesgo que explique de mejor manera el *"equity premium puzzle"*. No se puede descartar del todo que los consumidores deriven utilidad del gusto por ahorrar, ya que el tamaño de la muestra utilizada fue muy pequeño debido a la disponibilidad de los datos de riqueza. Los estimadores de GMM e IGMM tienen en una muestra grande un comportamiento asintótico deseable, pero poco se sabe del comportamiento de estos estimadores para muestras pequeñas. Es importante mencionar que no existe ninguna prueba que nos indique el tamaño necesario de la muestra para que se cumplan las propiedades asintóticas del GMM, sin embargo, entre más observaciones se tengan, más cercano sera el comportamiento de la muestra al asintótico del GMM. Sería interesante analizar este mismo modelo en algunos años con la idea de contar con un mayor número de datos y observar como se comportan las estimaciones.

A. Resolución problema del consumidor

El problema de maximización (6) se puede re-expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V\left(w_t\right) = \max_{\{c_t,\lambda_t\}} \quad & E_t\left[u\left(c_t, \frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right] + \beta E_t\left[V\left(w_{t+1}\right)\right] \\ \text{s.a.} \quad w_{t+1} &= (w_t - c_t)R^w_{t+1} \\ w_0 &= \bar{w} \\ R^w_{t+1} &= \left(1-\lambda_t\right) R^f_{t+1} + \lambda_t R_{t+1} \end{aligned} \tag{21}$$

Las condiciones de primer orden quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial c_t}V\left(w_t\right):E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)+u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{\partial}{\partial c_t}\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]$$
$$+\beta E_t\left[V'\left(w_{t+1}\right)\frac{\partial}{\partial c_t}w_{t+1}\right]=0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_t}V\left(w_t\right):E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{\partial}{\partial \lambda_t}\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]$$
$$+\beta E_t\left[V'\left(w_{t+1}\right)\frac{\partial}{\partial \lambda_t}w_{t+1}\right]=0 \tag{23}$$

Ahora,

$$\frac{\partial}{\partial c_t}w_{t+1}=\frac{\partial}{\partial c_t}(w_t-c_t)R^w_{t+1}=-R^w_{t+1} \tag{24}$$

$$w_{t+1}=(w_t-c_t)R^w_{t+1}\Rightarrow w_{t+1}=(w_t-c_t)\Big(\left(1-\lambda_t\right)R^f_{t+1}+\lambda_t R_{t+1}\Big)$$

$$=(w_t-c_t)\Big(\lambda_t\Big(R_{t+1}-R^f_{t+1}\Big)+R^f_{t+1}\Big) \tag{25}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial \lambda_t}w_{t+1}=(w_t-c_t)\Big(R_{t+1}-R^f_{t+1}\Big)$$

sustituyendo (24) y (25) en (22) y (23) se tiene:

$$E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)-u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\right]-\beta E_t\left[V'\left(w_{t+1}\right)R^w_{t+1}\right]=0 \tag{26}$$

$$E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{(w_t-c_t)\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)}{w_t}\right]$$

$$-\beta E_t\left[V'(w_{t+1})(w_t-c_t)\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\right]=0 \tag{27}$$

$$\Rightarrow E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}-\beta V'(w_{t+1})\right)\right]=0$$

derivando $V(w_t)$ respecto a w_t y aplicando el teorema de la envolvente se tiene lo siguiente:

$$V'(w_t)=E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{\partial}{\partial w_t}\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]+\beta E_t\left[V'(w_{t+1})\frac{\partial}{\partial w_t}w_{t+1}\right]$$

$$\begin{aligned}&=E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{w_tR^w_{t+1}-w_{t+1}}{w_t^2}\right]+\beta E_t\left[V'(w_{t+1})R^w_{t+1}\right]\\&=E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{w_tR^w_{t+1}-(w_t-c_t)R^w_{t+1}}{w_t^2}\right]+\beta E_t\left[V'(w_{t+1})R^w_{t+1}\right]\end{aligned} \tag{28}$$

$$\Rightarrow V'(w_t)=E_t\left[u_2\left(c^*_t,\frac{w_{t+1}}{w^*_t}\right)\frac{c^*_t}{w^{*2}_t}R^w_{t+1}\right]+\beta E_t\left[V'(w_{t+1})R^w_{t+1}\right]$$

Sustituyendo (28) en (26) se obtiene:

$$E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)-u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\right]$$

$$=V'\left(w_t\right)-E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{c_t}{w_t^2}R^w_{t+1}\right]$$

$$\Rightarrow V'\left(w_t\right)=E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]-E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\left(1-\frac{c_t}{w_t}\right)\right] \tag{29}$$

$$=E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]-E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\left(\frac{w_t-c_t}{w_t}\right)\right]$$

$$\Rightarrow V'\left(w_t\right)=E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]-E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{w_{t+1}}{w_t^2}\right]$$

Utilizando (29) se tiene:

$$V'\left(w_{t+1}\right)=E_{t+1}\left[u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right]-E_{t+1}\left[u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right] \tag{30}$$

Sustituyendo (30) en (26)

$$E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]-E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\right]=\beta E_t\left[V'\left(w_{t+1}\right)R^w_{t+1}\right]$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]-E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\right]\\
&=\beta E_t\left[E_{t+1}\left[u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right]R^w_{t+1}\right]\\
&-\beta E_t\left[E_{t+1}\left[u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right]R^w_{t+1}\right]\\
&=\beta E_t\left[E_{t+1}\left[u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)R^w_{t+1}\right]\right]\\
&-\beta E_t\left[E_{t+1}\left[u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}R^w_{t+1}\right]\right]
\end{aligned} \tag{31}$$

$\Rightarrow$ Por Ley de Expectativas Iteradas

$$E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]-E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\right]$$

$$=\beta E_t\left[u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)R^w_{t+1}\right]-\beta E_t\left[u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}R^w_{t+1}\right]$$

Sustituyendo (30) en (27)

$$E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}-\beta V'\left(w_{t+1}\right)\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}\right]=\beta E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)V'\left(w_{t+1}\right)\right]$$

$$=\beta E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)E_{t+1}\left[u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right]\right]$$

$$-\beta E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)E_{t+1}\left[u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right]\right]$$

$$=\beta E_t\left[E_{t+1}\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\left(u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)-u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right)\right]\right] \tag{32}$$

Por Ley de Expectativas Iteradas

$$=\beta E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\left(u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)-u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\ \left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}-\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right]$$

$$+\beta E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\ \left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\left(\frac{1}{w_t}+\beta\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right)-\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right]=0$$

Usando las ecuaciones (31) y (32) se obtienen las ecuaciones de Euler del modelo.

De (31)

$$E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]=E_t\left[u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{R^w_{t+1}}{w_t}\right]$$

$$+\beta E_t\left[u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)R^w_{t+1}\right]-\beta E_t\left[u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}R^w_{t+1}\right]$$

$$=E_t\left[R^w_{t+1}\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}+\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right]$$

$$-\beta E_t\left[R^w_{t+1}u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right]$$

$$=E_t\left[\left(\lambda_t\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)+R^f_{t+1}\right)u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}\right]$$

$$+\beta E_t\left[\left(\lambda_t\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)+R^f_{t+1}\right)u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right]$$

$$-\beta E_t\left[\left(\lambda_t\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)+R^f_{t+1}\right)u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right]$$

$$=\lambda_t E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}+\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right]$$

$$-\beta\lambda_t E_t\left[\left(R_{t+1}-R^f_{t+1}\right)u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w^2_{t+1}}\right]$$

$$+E_t\left[R^f_{t+1}u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}\right]+E_t\left[R^f_{t+1}\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right]$$

$$-\beta E_t\left[u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right]$$

$$=E_t\left[R^f_{t+1}\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}+\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right]$$

$$-\beta E_t\left[R^f_{t+1}u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right] \tag{33}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E_t\left[R^f_{t+1}\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}+\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)-\beta u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right)\right]}{E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]}=1$$

De (32)

$$E_t\left[R_{t+1}\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\left(\frac{1}{w_t}+\beta\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right)-\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right]$$

$$=E_t\left[R^f_{t+1}\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\left(\frac{1}{w_t}+\beta\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right)-\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right]$$

Por (33)

$$E_t\left[R_{t+1}\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\left(\frac{1}{w_t}+\beta\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right)-\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\right)\right] \tag{34}$$

$$=E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\frac{E_t\left[R_{t+1}\left(u_2\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\frac{1}{w_t}+\beta u_1\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)-\beta u_2\left(c_{t+1},\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}\right)\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}^2}\right)\right]}{E_t\left[u_1\left(c_t,\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)\right]}=1$$

Las ecuaciones (33) y (34) son las ecuaciones de Euler que caracterizan al modelo, sustituyendo los valores de u_1 y u_2 de acuerdo a la función de utilidad utilizada se obtienen las ecuaciones (7) y (8) del texto.

B. Teorema de la Envolvente

$$\begin{aligned} V(s) = \max_{a} \quad & F(a,s) \\ \text{s.a.} \quad & g(a,s) = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

donde $a \in \mathbb{R}^l$ es un vector de decisiones y $s \in \mathbb{R}^n$ es un vector de parámetros. $g, F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. $a^\star(s)$ denota el vector de decisiones óptimo, el cual solo depende del vector de parámetros s.

$$\mathcal{L} = F(a,s) - \lambda g(a,s) \tag{36}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V(a^\star(s), s)}{\partial s_i} = \frac{\partial F(a^\star(s), s)}{\partial s_i} - \lambda^\star(s) \frac{\partial g(a^\star(s), s)}{\partial s_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(a^\star(s), s, \lambda(s))}{\partial s_i} \tag{37}$$

donde s_i denota el elemento i del vector de parámetros s.

C. Coeficiente de Aversión relativa al riesgo

Para una función de utilidad $u(x)$ el coeficiente de aversión relativa al riesgo es $-\frac{u''(x)}{u'(x)}x$. Por lo que (4) proviene de aplicar esta formula a la transformación $(\cdot)^{(1-\eta)(1+\theta)}$.

$$u(x) = \frac{x^{(1-\eta)(1+\theta)}}{1-\eta}$$

$$u'(x) = \frac{(1-\eta)\,(1+\theta)\,x^{(1-\eta)(1+\theta)-1}}{1-\eta}$$

$$u''(x) = \frac{(1-\eta)\,(1+\theta)\,((1-\eta)\,(1+\theta)-1)\,x^{(1-\eta)(1+\theta)-2}}{1-\eta} \tag{38}$$

$$\Rightarrow -\frac{u''(x)}{u'(x)}x = -\frac{\frac{(1-\eta)(1+\theta)((1-\eta)(1+\theta)-1)x^{(1-\eta)(1+\theta)-2}}{1-\eta}}{\frac{(1-\eta)(1+\theta)x^{(1-\eta)(1+\theta)-1}}{1-\eta}}x$$

$$= -\left((1-\eta)\,(1+\theta)-1\right) = 1-(1-\eta)\,(1+\theta) = \Gamma$$

D. Factor de descuento estocástico

$$z_{t+1} = \left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)} \left[\theta \frac{c_t}{w_t}\frac{w_t}{w_{t+1}} + \beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\eta}\left(\frac{\frac{w_{t+2}}{w_{t+1}}}{\frac{w_{t+1}}{w_t}}\right)\left(1-\theta\frac{c_{t+1}}{w_{t+1}}\right)\right]$$

Entonces (7) y (8) pueden escribirse como:

$$1 = \frac{E\left[z_{t+1}R_{t+1}\right]}{E\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\right]} = \frac{Cov\left(z_{t+1}, R_{t+1}\right) + E\left[z_{t+1}\right]E\left[R_{t+1}\right]}{E\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\right]}$$

$$\Rightarrow E\left[R_{t+1}\right] = \frac{E\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\right] - Cov\left(z_{t+1}, R_{t+1}\right)}{E\left[z_{t+1}\right]} \tag{39}$$

$$\Rightarrow E\left[R^f_{t+1}\right] = \frac{E\left[\left(\frac{w_{t+1}}{w_t}\right)^{\theta(1-\eta)}\right] - Cov\left(z_{t+1}, R^f_{t+1}\right)}{E\left[z_{t+1}\right]}$$

$$\Rightarrow E\left[R_{t+1} - R^f_{t+1}\right] = \frac{Cov\left(z_{t+1}, R^f_{t+1}\right) - Cov\left(z_{t+1}, R_{t+1}\right)}{E\left[z_{t+1}\right]}$$

Referencias

Barberis, N., Huang, M., Santos, T., et al. (2001). Prospect theory and asset prices. *The Quarterly Journal of Economics*, 116(1):1–53.

Breeden, D. T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of financial Economics*, 7(3):265–296.

Chaussé, P. et al. (2010). Computing generalized method of moments and generalized empirical likelihood with r. *Journal of Statistical Software*, 34(11):1–35.

Dreyer, J. K., Schneider, J., and Smith, W. T. (2013). Saving-based asset-pricing. *Journal of Banking & Finance*, 37(9):3704–3715.

Hansen, B. E. and West, K. D. (2002). Generalized method of moments and macroeconomics. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(4):460–469.

Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1029–1054.

Hansen, L. P., Heaton, J., and Yaron, A. (1996). Finite-sample properties of some alternative gmm estimators. *Journal of Business & Economic Statistics*, 14(3):262–280.

Hansen, L. P. and Singleton, K. J. (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1269–1286.

Kahneman, D. and Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 263–291.

Kihlstrom, R. E. and Mirman, L. J. (1974). Risk aversion with many commodities. *Journal of Economic Theory*, 8(3):361–388.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, pages 13–37.

Marshall, A. (2009). *Principles of economics: unabridged eighth edition*. Cosimo, Inc.

Mehra, R. and Prescott, E. C. (1985). The equity premium: A puzzle. *Journal of monetary Economics*, 15(2):145–161.

Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 867–887.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pages 768–783.

Newey, W. K. and Smith, R. J. (2004). Higher order properties of gmm and generalized empirical likelihood estimators. *Econometrica*, 72(1):219–255.

Newey, W. K. and West, K. D. (1986). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelationconsistent covariance matrix.

Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3):425–442.