



CENTRO DE ESTUDIOS DEMOGRÁFICOS,
URBANOS Y AMBIENTALES

LAS FUNCIONES DE SUPERVIVENCIA EN LA DESCRIPCIÓN
Y ANÁLISIS DE LOS FENÓMENOS DEMOGRÁFICOS:
FECUNDIDAD, MORTALIDAD Y MIGRACIÓN. APLICACIÓN
AL CASO DE MÉXICO

Tesis presentada por

KARLA YUTZIL AVALOS PIÑA

Para optar el grado de

MAESTRA EN DEMOGRAFÍA

Director de tesis

ALEJANDRO MINA VALDÉS

MÉXICO, DF

JULIO DE 2016

DEDICATORIAS

A mi mamá por siempre estar conmigo y ser el máximo ejemplo de amor, dedicación y honestidad

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis Alejandro Mina Valdés por ser la guía para el desarrollo de este trabajo, por su tiempo, ayuda y tolerancia para que esta tesis concluyera con éxito.

A mis padres, por siempre apoyarme para estudiar desde niña y por depositar toda su confianza en mí.

A mis hermanas, Karina y Lulú, por el amor que me han brindado y por estar siempre conmigo en todo momento, sin duda gracias por todos los consejos.

A mi lector de tesis Manuel Ordorica por el tiempo y las recomendaciones que me hizo en la revisión de este trabajo para mejorarlo.

Al Colegio de México, por permitirme formar parte de este programa y por darme la oportunidad de conocer a grandiosas personas y por los momentos alegres.

A mis amigos que siempre estuvieron cerca y que me acompañaron durante estos dos años que me llevó estudiar la maestría.

RESUMEN

La importancia de las funciones de supervivencia se encuentra en que se emplean en la descripción de la tendencia de los fenómenos por edad en el tiempo. En los diversos análisis demográficos se requiere de cuantificar los fenómenos, por lo que existen algunas de las distribuciones que se utilizan para analizar ciertos fenómenos en particular.

Esta tesis es un esfuerzo encaminado a aportar en un mejor desarrollo metodológico de los modelos que utilizan funciones de supervivencia para describir y analizar los fenómenos demográficos. En este trabajo, se destaca el uso de funciones de supervivencia en la descripción y análisis de los fenómenos de mortalidad, fecundidad y migración. Al realizar la comparación de los diferentes métodos y modelos matemáticos, se identificaron diferencias entre los métodos que describen el comportamiento de las variables demográficas. Entre las principales ventajas de los modelos que analizan los fenómenos de mortalidad y fecundidad, se encuentran la parsimonia de los modelos y la vinculación demográfica de sus parámetros. En cuanto al fenómeno de migración, existe un modelo en el que los parámetros no son complejos de interpretar y se observa un vínculo con respecto a los fenómenos demográficos.

Finalmente, las conclusiones y reflexiones finales de los resultados obtenidos en este trabajo de investigación contribuyen a un mejor desarrollo metodológico.

ÍNDICE

Introducción	1
Capítulo I Antecedentes	2
1.1 Leyes de los fenómenos demográficos	2
1.1.1 Mortalidad	2
1.1.2 Fecundidad	7
1.1.3 Migración	8
Capítulo II Marco teórico y conceptual	11
2.1 Funciones de Supervivencia	11
2.2 Métodos de corrección, suavización y ajuste de los datos	20
Capítulo III Metodología y Fuentes de información	23
3.1 Objetivos	23
3.1.1 Objetivo general	23
3.1.2 Objetivos específicos	23
3.2 Fuente de información	23
3.3 Herramientas técnicas metodológicas	23
3.3.1 Tabla de Vida	23
3.3.2 Funciones de Supervivencia	27
3.3.2.1 Mortalidad	27
3.3.2.2 Fecundidad	60
3.3.2.3 Migración	118
Conclusiones	154

Anexos	157
• Mortalidad	157
• Fecundidad	178
• Migración	180
Bibliografía	196

Introducción

Las funciones de supervivencia han sido la base para diferentes métodos matemáticos que se emplean en la descripción de la tendencia de los fenómenos por edad en el tiempo. Dichos modelos de supervivencia se fundamentan en la teoría probabilística y estadística. En ese sentido, existen algunas de las distribuciones que se utilizan para analizar ciertos fenómenos en particular, específicamente en diversos análisis demográficos.

Esta tesis es un esfuerzo encaminado a aportar en un mejor desarrollo metodológico de los modelos que utilizan funciones de supervivencia para describir y analizar los fenómenos demográficos. Es por ello, que el objetivo de este trabajo es destacar el uso de funciones de supervivencia en la descripción y análisis de los fenómenos de mortalidad, fecundidad y migración. A su vez, se busca identificar las diferencias entre los métodos que describen el comportamiento de las variables demográficas.

El primer capítulo de la tesis está dedicado a mostrar como antecedentes las leyes de los fenómenos demográficos y las funciones matemáticas de distribución clásicas. Contiene un apartado por cada uno de los fenómenos de mortalidad, fecundidad y migración.

El segundo capítulo contiene un marco teórico probabilístico básico de las funciones de supervivencia y sus principales conceptos. También se incluye un apartado de métodos de corrección, suavización y ajuste de datos.

En el tercer capítulo, se describen las principales herramientas técnicas metodológicas y las fuentes de información que permiten la aplicación de funciones de supervivencia para cada uno de los fenómenos demográficos básicos en el caso específico de México. En ese sentido, también se incluyen ejemplos de los métodos y modelos demográficos. El último capítulo está dedicado a describir los principales resultados obtenidos de las aplicaciones que se realizaron.

Finalmente, se encuentran las conclusiones y reflexiones finales de los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, los cuales contribuyen a un mejor desarrollo metodológico.

Capítulo I Antecedentes

La obtención de funciones de supervivencia se emplean en la descripción de la tendencia de los fenómenos por edad en el tiempo (Mina, 2009). Los modelos de supervivencia han sido empleados en múltiples análisis demográficos. De acuerdo con Mina (2009), en la práctica algunas de las distribuciones clásicas más utilizadas coherentes con la evidencia empírica son:

- Ley de Moivre
- Primera, Segunda y Tercera Ley de Dormoy
- Ley de Sang
- Ley de Gompertz
- Primera y Segunda Ley de Makeham
- Ley Lazarus
- Ley Weibull
- Ley exponencial
- Logística y bilogística
- Splines cúbicos

Además de las anteriores, existen funciones para la descripción, la corrección y la suavización de los datos. De las distribuciones anteriores, la Ley de Moivre es una distribución clásica y de las más antiguas.

A continuación se describen las funciones de supervivencia que han sido empleadas usualmente en los fenómenos demográficos.

1.1 Leyes de los fenómenos demográficos

1.1.1 Mortalidad

Las funciones de supervivencia en los análisis de mortalidad han sido empleadas para estimar su comportamiento en función de la edad. El procedimiento consiste en elegir una función que tenga una mejor adaptación y que represente adecuadamente el fenómeno de mortalidad, de acuerdo con los datos observados. Por otro lado, se realizan supuestos matemáticos acerca del comportamiento que caracteriza a la función de distribución.

Los modelos propuestos por Brass, Gompertz y Makeham, han sido de los principales modelos que trabajan con funciones de supervivencia para el análisis de la mortalidad.

- Logito Brass

En cuanto al sistema logito de William Brass, es un procedimiento para corregir, ajustar y estimar la mortalidad de una población con información incompleta o inexacta, donde se utiliza un patrón para determinar la mortalidad por edades (Organización de Naciones Unidas, 1986). En este modelo se relacionan dos tablas de vida diferentes, a través de una transformación de los valores de la serie de sobrevivientes a edad exacta x , $(l(x))$, de ambas tablas en logitos. Es decir, se realiza dicha transformación para que las probabilidades de las distintas tablas de vida resulten en una relación lineal:

$$\lambda(l^*(x)) = \alpha + \beta\lambda(l(x)) \quad (1)$$

Donde $l(x)$ y $l^*(x)$ provienen de las dos tablas distintas y la función logito $\lambda(l(x))$ se define como

$$\lambda(l(x)) = Y(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - l(x)}{l(x)} \right)$$

Y de manera general, la función logito de una probabilidad p , $\lambda(p)$ se define como:

$$\lambda(p) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{1 - p} \right)$$

Al tener dos tablas de mortalidad, es posible obtener los valores de α y β tales que cumplan con la ecuación (1). El parámetro α determinará el nivel de la mortalidad y el parámetro β la forma de la mortalidad de la población 1 respecto de la población 2 (Corona, 1972). Los coeficientes se calculan por medio de promedios móviles, donde se divide en dos grupos los logitos de cada población para obtener dos puntos por los cuales pasa una recta que relaciona ambas poblaciones. Entonces los valores de α y β se obtiene de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \text{ y } \alpha = -\beta(X_1) + Y_1$$

Donde $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son los logitos de la población 1 y 2, respectivamente. De acuerdo con Brass, la transformación logito hace que la tabla que se obtiene tenga las propiedades que se

imponen a una tabla de mortalidad. Es importante mencionar que existe la opción de tomar una tabla estándar también propuesta por Brass, en lugar de la tabla de la población 2 (Corona, 1972).

Posteriormente, una vez obtenidos los parámetros se procede corregir y entonces se estiman los logitos de la población 2

$$\hat{Y}^2(x) = \alpha + \beta(Y^1(x))$$

Una vez obtenidos los logitos estimados, se procede a calcular la serie de sobrevivientes a edad x estimada de la población 2

$$\hat{l}^2(x) = \frac{1}{1 + e^{2\hat{Y}^2(x)}}$$

Para la función antilogito se aplica la función antilogística. Donde el supuesto que se realiza es que hay una relación lineal entre el estándar y el observado, que puede modificarse usando hipotéticamente una relación polinómica de grado $n = 2, 3, \dots$, dependiendo la observación gráfica de los logitos observados vs los logitos estándares. Es importante mencionar que en ocasiones existirá la relación lineal y en otras no.

Finalmente, es posible calcular una tabla de mortalidad estimada y corregida, a partir del estándar u otra población para poder realizar las proyecciones a futuro de la mortalidad.

- Gompertz

La función de Gompertz fue propuesta en 1825 y se apoya en dos causas generales de muerte. Por un lado la causalidad, y por otro lado la creciente incapacidad del hombre para resistir a la muerte. Se consideran a su vez las causas biológicas pero no las fortuitas, así la hipótesis general es “la resistencia que tiene el hombre para evitar la muerte disminuye a una tasa proporcional a ella misma, en el tiempo” (Mina, 2001, pág. 132). La ley de Gompertz supone que cada individuo presenta una resistencia a las enfermedades, así como a fallecer por causas naturales, dicha resistencia es decreciente y se encuentra en función de la edad del individuo (Mina, 2006). Entonces, se define la tasa instantánea de mortalidad como:

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{l_x - l_{x+h}}{h l_x} = -\frac{d}{dx} \ln(l_x)$$

Gompertz, al tomar el inverso de ella se tiene una medida que cuantifica la resistencia del individuo a la muerte, entonces:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\mu_x} = -h \frac{1}{\mu_x} \quad (2)$$

Donde h es la tasa a la que disminuye la resistencia del hombre a la muerte. Al resolver la ecuación (2), se obtiene la fuerza de mortalidad

$$\mu_x = BC^x \quad (3)$$

$$\text{con } x \geq 0, B > 0, C > 1$$

Al resolver la ecuación (3) para la serie de sobrevivientes a edad exacta x (l_x) se tiene la ley de Gompertz:

$$l_x = ka^{b^x}$$

Es importante mencionar que la fuerza de mortalidad aumenta con la edad y con un incremento relativo constante. A partir de lo anterior, es posible deducir que dicha fuerza de mortalidad tiene un crecimiento de tipo exponencial (ver ecuación (3)). Los parámetros k , a y b se calculan con el método de los grupos no superpuestos¹, y posteriormente es posible calcular la serie estimada de sobrevivientes a edad exacta x , con la siguiente fórmula:

$$\hat{l}_x = ka^{b^x}$$

- Gompertz-Makeham

La ley de Makeham fue utilizada en un principio para describir el cambio relativo de la serie de sobrevivientes l_x de una tabla de mortalidad, la cual tiene el supuesto de que puede ser descrita por la función de la forma:

$$\mu_x = A + BC^x \quad (4)$$

$$\text{con } x \geq 0, B > 0, C > 1, A > -B$$

¹ Para mayor descripción del método de los grupos no superpuestos ver: Mina, A. (2001). Funciones de sobrevivencia empleados en el análisis demográfico. En *Papeles de Población*. 7(28). pp 131-154.

En esta ley, se enuncian dos leyes de supervivencia. En la primera, se considera la tasa instantánea de mortalidad, ya que añade una constante a la fuerza de mortalidad. Dicha constante es arbitraria, pues representa la mortalidad accidental del individuo (evento fortuito) y es independiente de la edad. La segunda, donde se considera la mortalidad por causas naturales como en la ley de Gompertz. Por lo tanto, la muerte de un individuo es consecuencia de estas dos causas coexistentes: el azar y una resistencia cada vez más débil a la muerte conforme aumenta la edad.

Esta función tiene la ventaja de que ofrece buenos ajustes en las edades intermedias, pero presenta problemas principalmente en edades extremas, como en las edades más jóvenes, ya que en las edades infantiles la mortalidad es decreciente.

Análogo a Gompertz, al resolver la ecuación (4) es posible obtener la serie donde los parámetros k , S , D y C se obtienen de la misma manera, con el método de los grupos no superpuestos.

$$l_x = kS^x D^{c^x}$$

Otro método empleado en el análisis de la mortalidad realizado por Mina (2009) consistió en proyectar la esperanza de vida, a través de una tabla de mortalidad donde se utiliza la serie de sobrevivientes a edad exacta x estimada (l_x). La tabla de mortalidad se realiza con base en los parámetros proyectados a partir de la tendencia histórica de dichos parámetros (Mina, 2009).

- Ley de Moivre

Es una ley simple con facilidad de para los cálculos. Se menciona dada su importancia histórica. Tiene la hipótesis de decremento uniforme con el supuesto de tener un comportamiento lineal con la edad. La expresión de la serie de sobrevivientes a edad exacta x , tiene el supuesto de una progresión aritmética no negativa pero decreciente y se expresa como:

$$l(x) = k(w - x)$$

Donde $l(x)$ es la serie de sobrevivientes a edad exacta x , k es la pendiente interpretada como la velocidad con que decrece la población de la tabla de mortalidad, y w es la edad límite de sobrevivencia de la población.

Otra manera de expresarla es:

$$l(x) = a - bx \quad \text{con } b > 0, a = l(0), w = \frac{l(0)}{b}, 0 < x \leq \frac{l(0)}{b}$$

Donde la fuerza de mortalidad correspondiente a la expresión anterior es:

$$\mu(x) = \frac{b}{l(0) - bx}$$

Es importante mencionar que la fuerza de mortalidad es creciente con la edad, lo que implica una restricción en la utilidad para las edades con valores muy altos. Debido a lo anterior, la recta de Moivre fue recomendada para un rango de edades de 12 a 86 años ya que se ajustaba de mejor manera.

Por otro lado, la probabilidad de muerte se obtiene como:

$${}_nq_x = n \mu(x)$$

La expresión anterior se traduce en que la probabilidad de muerte es directamente proporcional a la tasa instantánea de mortalidad o fuerza de mortalidad. Una de las principales críticas está en la hipótesis de la ley, ya que se realiza el supuesto de que el número de muertes es constante e independiente de la edad.

1.1.2 Fecundidad

En cuanto al análisis de la fecundidad, las funciones de supervivencia han sido utilizadas para realizar ajustes en la estructura por edad de la fecundidad. Los modelos más utilizados son el de Gompertz y Gompertz-Makeham (Mina, 1982).

- Modelo de doble logaritmo de la función Gompertz para obtener las tasas específicas de fecundidad y TGF

La función Gompertz se describe como $Y(x) = ka^{b^x}$. En el caso de la aplicación de la función anterior al fenómeno de la fecundidad, se obtiene la siguiente expresión (Mina, 1982)

$$F(x) = TGF * A^{B^x}$$

El modelo del doble logaritmo de la función Gompertz sirve para realizar dichos ajustes, donde se utiliza una estructura por edad estándar. Este modelo tiene la ventaja de poder desagregar la estructura de la fecundidad en edades individuales, pues se tienen tasas específicas de fecundidad por grupos quinquenales de edades (Mina, 1982). Otro uso del modelo es que permite proyectar la estructura por edad de la fecundidad, esta proyección se realiza a través de observar la tendencia de los parámetros a y b a través del tiempo, de la expresión:

$$\hat{V}(x) = a + b V^S(x)$$

1.1.3 Migración

En cuanto a algunos de los trabajos realizados anteriormente, existe una técnica de indirecta utilizando relaciones de supervivencia para estimar la migración neta por edad, usando datos censales por edad y sexo, así como estimaciones de la mortalidad que son extraídos de tablas de vida (Villa, 1991). Se fundamenta en la ecuación compensadora, donde la migración neta (M) se estima de manera residual:

$$M = \sum_i M_i = N(t+n) - \left[N(t) - \sum_i D_i \right] = N(t+n) - N(t) + \sum_i D_i$$

Donde i representa cada año del periodo comprendido entre t y $t+n$

El efecto de la mortalidad puede ser representado por una relación de supervivencia, es decir, por la probabilidad de que los individuos de una cohorte o un grupo de cohortes sobrevivan n años más. Lo anterior expresa “la proporción de una población hipotéticamente cerrada que lograría sobrevivir de un censo a otro” (Villa, 1991, pág. 31). Por lo tanto, cuando se sustituye las muertes por las relaciones de supervivencia adecuadas, se obtiene

$$M(t, t+n)(x+n) = N(t+n)(x+n) - [N(t)(x) * (n)p(x)]$$

Donde $(n)p(x)$ es una relación de supervivencia o probabilidad de que los individuos a edad x en la población inicial en el momento t , lleguen con vida a edad $x+n$ en el instante $t+n$.

La ecuación anterior es posible expresarla específicamente según edades individuales o agregadas, así como por sexo.

Al aplicar las relaciones de supervivencia a los grupos correspondientes de edades de un censo, se consigue una población esperada, que a su vez es comparada con la observada. Las diferencias son interpretadas como la migración neta (Villa, 1991).

En otro análisis, se calculan tasas intrínsecas de crecimiento y tasa neta reproducción incluyendo el efecto de la migración (Preston & Wang, 2007). Se realiza una extensión de la *TNR* clásica, dicha extensión requiere de un reconocimiento del efecto (positivo o negativo) que tienen las tasas específicas de migración en el tamaño de una cohorte. La tasa intrínseca de crecimiento con la presencia de migración, definida por r^* , es una medida más precisa de qué tan rápido sería eventualmente el crecimiento de una población si se mantienen indefinidamente las tasas específicas de fecundidad, mortalidad y migración actuales. Esta tasa proporciona igual peso a todos los migrantes sin considerar la edad, donde los migrantes se ponderan en r^* por el número de nacimientos futuros esperados a la edad en que llegan al lugar de destino o salen del lugar de origen. Es importante mencionar que r^* no se verá afectada por la migración que ocurre al final del periodo reproductivo.

Preston & Coale (1982) citado en Preston & Wang (2007), mostraron que cualquier distribución por edad se puede expresar como

$$N(a) = N(0)e^{-\int_0^a r(x)dx} e^{\int_0^a i(x)dx} p(a)$$

Donde

$N(a)$, es el número de personas en edad a

$r(x)$, es la tasa de crecimiento a edad x

$i(x)$, es la tasa de migración neta a edad x

$p(a)$, es la probabilidad de sobrevivir desde el nacimiento a edad a , bajo las condiciones actuales de mortalidad

Las funciones anteriores se refieren a condiciones que prevalecen en un momento en el tiempo t . Por otro lado, si se define a $p^*(a)$ como el incremento o decremento proporcional

que se produjera en el tamaño de una cohorte hipotética entre el nacimiento y la edad a , como resultado de las tasas específicas de migración que prevalecen en el tiempo t .

$$p^*(a) = e^{\int_0^a i(x)dx}$$

Entonces análogamente a $p(a)$, que registra el impacto proporcional de las tasas específicas de mortalidad en el tamaño de una cohorte, se obtiene

$$N(a) = N(0)e^{-\int_0^a r(x)dx}p^*(a)p(a)$$

La tasa de reproducción neta en presencia de la migración resulta en:

$$TNR^* = \int_0^{\infty} p^*(a) p(a) m(a)da$$

En otro artículo realizado por Rodríguez Javique et al. (2013) se presenta una versión modificada del análisis de Preston & Wang (2007), donde se descompone los efectos de la migración sobre la TNR , considerando migración interna e internacional (Rodríguez Javique, Turra, de Oliveira Bonifácio, & Wajnman, 2013).

Capítulo II Marco teórico y conceptual

2.1 Funciones de Supervivencia

Las funciones de supervivencia se fundamentan en conceptos básicos de teoría de la probabilidad y métodos estadísticos. Son funciones de distribución matemáticas para una variable aleatoria. Suponiendo X una variable aleatoria que denota el tiempo de supervivencia (o tiempo de vida) de una persona, entonces la función de distribución acumulada es $F_X(x) = P(X \leq x)$ también llamada distribución de falla o distribución del tiempo de vida, donde $x > 0$ y $F_X(0) = 0$ (Elandt-Johnson & Johnson, 1980).

Si X representa la edad a la que ocurre por primera vez un determinado evento, entonces $F_X(x)$ representa la distribución inicial de la edad del evento de interés. No obstante, en análisis de supervivencia la función de supervivencia (o función de distribución de supervivencia) $S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ es más usual e indica la probabilidad de que una persona sobreviva más tiempo que un tiempo específico x , es decir $S_X(x)$ indica la probabilidad de que la variable aleatoria X exceda un tiempo específico x .

En el análisis de supervivencia, como se mencionó anteriormente, usualmente la variable aleatoria X no puede ser negativa y por lo tanto $S_X(0) = 1$, es decir $F_X(0) = 0$.

La función de densidad de probabilidad se define como $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = -\frac{dS_X(x)}{dx}$ y suele llamarse como la curva de las defunciones (si el evento de interés es la muerte), donde por definición $f_X(x)$ es una tasa instantánea absoluta de muerte.

Por otro lado, la tasa instantánea relativa de muerte en un tiempo x se define como $\lambda_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} = -\frac{d \log(S_X(x))}{dx}$. El nombre que recibe esta tasa es hazard rate. En demografía y actuaría se conoce como la fuerza de mortalidad y se denota como $\mu_X(x)$.

El hazard rate definida anteriormente como una función de la variable x , es la función de hazard rate. Por otro lado, la función hazard acumulativa se define como:

$$\Lambda_X(x) = \int_0^x \lambda_X(u) du = -\log S_X(x) \quad (5)$$

Es importante mencionar que la función hazard es de gran interés porque es una medida de potencial instantáneo, mientras que la curva de supervivencia es una medida acumulativa en el tiempo. Por un lado, la función hazard puede ser utilizada para especificar la forma del modelo (curva exponencial, Weibull o lognormal) que se ajuste a los datos observados. Por otro lado, es un mecanismo que, a través de modelos matemáticos, los datos de supervivencia se ajustarán; es decir el modelo de supervivencia usualmente se escribe en términos de la función hazard.

Entonces, la probabilidad condicional de fracaso en el intervalo $(x, x + dx)$ dado que sobrevivió a edad x es posible aproximarla por

$$f_X(x)dx = S_X(x) \lambda_X(x) dx \quad (6)$$

Y por lo tanto $f_X(x) = S_X(x) \lambda_X(x)$

Por otro lado, la función de supervivencia puede ser expresada en dos formas:

1. Por la ecuación (5) se tiene que

$$S_X(x) = \exp\left[-\int_0^x \lambda_X(u)du\right] = \exp[-\Lambda_X(x)] \quad (7)$$

Notar que como el tiempo de vida no puede ser negativo, la función de distribución acumulada (o la función de distribución de supervivencia) reciben el nombre de propias si:

$$\lim_{x \rightarrow 0} F_X(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

Lo equivale a $\lim_{x \rightarrow 0} S_X(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} S_X(x) = 0$

Usando la equivalencia (7) es posible notar que $S_X(x)$ es una función de supervivencia propia, y por lo tanto se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Lambda_X(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \lambda_X(u)du = \infty$$

Es decir, que la función hazard acumulada diverge.

2. Por otro lado, de la ecuación (6) la función de distribución de supervivencia también se puede definir como

$$S_X(x) = \int_0^\infty f_X(u)du = \int_0^\infty \lambda_X(u)S_X(u)du \quad (8)$$

Es importante notar que en la ecuación (7) la función de supervivencia está expresada en términos de tiempo de vida pasado, mientras que en la ecuación (8) la función de supervivencia se expresa en términos de tiempo de vida futura.

En el análisis de la mortalidad (aunque se puede aplicar a cualquier evento dicotómico), la probabilidad condicional de muerte (fracaso) en un intervalo de edad $(x, x + n)$, dado que sobrevivió a edad x , tiene un papel importante. En notación actuarial se denota como ${}_tq_x$. El prefijo t denota la longitud del intervalo sobre el cual la probabilidad fue calculada. Si bien, la notación $q(x, x + t)$ aparentemente es apropiada. No obstante, se utilizará la notación ${}_tq_x$.

Se tiene entonces,

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= P(x < X \leq x + t | X > x) = \frac{\int_x^{x+t} f_X(u)du}{\int_x^\infty f_X(u)du} \\ &= \frac{\int_x^{x+t} \lambda_X(u)S_X(u)du}{\int_x^\infty \lambda_X(u)S_X(u)du} = \frac{S_X(x) - S_X(x + t)}{S_X(x)} \end{aligned}$$

Nótese que $S_X(x) - S_X(x + t)$ es la proporción de muertes entre edades x y $x + t$. Por otro lado, la tasa central denotada como ${}_tm_x$ se define como:

$${}_tm_x = \frac{\int_x^{x+t} \lambda_X(u)S_X(u)du}{\int_x^\infty S_X(u)du} = \frac{S_X(x) - S_X(x + t)}{\int_x^\infty S_X(u)du}$$

La probabilidad condicional de sobrevivir el intervalo de edad x y $x + t$, dado que se sobrevivió a edad x , es:

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \frac{S_X(x + t)}{S_X(x)}$$

Para un conjunto de puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$, con $x_{i+1} - x_i = h_i$ se tiene:

$$S_X(x_k) = \exp \left[- \int_0^{x_k} \lambda_X(u)du \right] = \exp \left[- \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda_X(u)du \right]$$

$$= \prod_{i=0}^{k-1} \exp \left[- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda_X(u) du \right] = \prod_{i=0}^{k-1} h_i p_{x_i} = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - h_i q_{x_i})$$

Para calcular el valor esperado de una variable aleatoria continua X es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda_X(x) S_X(x) dx \quad (9)$$

Y la varianza incondicional es

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E \left[(X - E(X))^2 \right] = E[X^2] - [E(X)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - [E(X)]^2 \quad (10) \end{aligned}$$

Como X no puede tomar valores negativos en el tiempo de supervivencia, por lo que si $x < 0$ entonces $f_X(x) = 0$ y por lo tanto el límite inferior de las integrales (9) y (10) se pueden tomar como 0.

El tiempo mediano de vida futuro se define como la edad y en la que existe una probabilidad del 50% de sobrevivir, dado que se llegó a una edad x y con el supuesto de que $S_X(x)$ es la función de distribución.

$$Me_x = y - x,$$

Donde y , se obtiene de $\frac{S_X(y)}{S_X(x)} = 0.5$

Algunas familias de distribuciones de supervivencia que son especialmente útiles por ajustarse a los datos de supervivencia son descritas a continuación, así como sus principales características (Elandt-Johnson & Johnson, 1980)

- Distribución Uniforme

La función de densidad de una variable aleatoria continua X con distribución uniforme en el intervalo $(a, b]$ es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de distribución correspondiente es

$$F_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{si } a < x \leq b \\ 0, & \text{si } x > b \end{cases}$$

La esperanza y la varianza condicional son

$$E[X] = \frac{1}{2}(a + b)$$

$$Var[X] = \frac{1}{12}(a + b)^2$$

Y el hazard rate es una función creciente para x , definida como

$$\lambda_X(x) = \frac{1}{b-x} \quad \text{si } a < x < b$$

De manera similar, la probabilidad condicional de morir dentro de un intervalo definido es también una función creciente para x . Se define como

$${}_h q_x = 1 - \frac{S_X(x+h)}{S_X(x)} = \frac{h}{b-x}$$

Es importante notar que cuando $a = 0$ y $b = 1$, la distribución es conocida como distribución uniforme estándar. La distribución uniforme truncada es también una distribución uniforme.

- Distribución Exponencial

La función de densidad de la distribución exponencial es

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{con } \lambda > 0, x > 0$$

La función de supervivencia correspondiente es

$$S_X(x) = e^{-\lambda x}$$

La esperanza y la varianza condicional son, respectivamente:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Y el hazard rate es igual a λ , para toda $x > 0$. De manera similar, la probabilidad condicional de morir dentro de un intervalo definido es constante para toda $x > 0$ y se define como

$${}_h q_x = 1 - e^{-\lambda h}$$

Si la función de supervivencia es truncada en un valor por encima de $x = c$, entonces la función de supervivencia truncada es

$$S_X(x|X \leq c) = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}} \text{ si } 0 < x \leq c$$

Cabe aclarar que la función de distribución anterior no es una distribución exponencial, pero si el truncamiento que se da por debajo de $x = c$, entonces se tiene

$$S_X(x|X > c) = e^{-\lambda(x-c)} \text{ si } x > c$$

Donde sí es una distribución exponencial.

- Distribución de Valores Extremos (Gompertz, Gompertz-Makeham y Weibull)

El nombre de distribuciones de valores extremos se aplica a tres tipos de distribuciones límite, que se aproximan a la forma de las distribuciones de valores extremos (ya sea el menor o el mayor) en muestras aleatorias grandes.

A continuación se describen en primer y tercer tipo en el valor extremo menor, ya que son dos distribuciones que se emplean ampliamente en el análisis de supervivencia.

- Distribución Gompertz y Gompertz-Makeham

Son distribuciones del primer tipo de valor extremo (menor). Su función de supervivencia es

$$S_X(x) = \exp[-e^{(x+\xi)/\theta}] \text{ con } -\infty < x < \infty, \theta > 0$$

Si se tiene que

$$\frac{1}{\theta} = a \text{ y } \frac{1}{\theta} e^{\xi/\theta} = R$$

Entonces la función de supervivencia puede escribirse como

$$S_X(x) = \exp\left[-\frac{R}{a}e^{ax}\right] \text{ con } -\infty < x < \infty, R > 0, a > 0$$

La función hazard rate asociada a esta distribución es

$$\lambda_X(x) = Re^{ax}$$

Nótese que en el primer tipo de distribuciones de valor extremo, dichas distribuciones se encuentran definidas para $-\infty < x < \infty$. No obstante para los parámetros R y a , la probabilidad puede disminuir demasiado y por ello resulta conveniente truncar la distribución por debajo de $x = 0$. Entonces la función de supervivencia se define como

$$S_X(x) = \exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right] \text{ con } x > 0, R > 0, a > 0$$

Dicha ecuación es conocida como la distribución de Gompertz y su función hazard rate se define como

$$\lambda_X(x) = Re^{ax}$$

Esta distribución se emplea ampliamente en el trabajo actuarial, pero la notación usual se expresa de la siguiente manera. Si se tiene que los parámetros $R = b$ y $e^a = c$, entonces

$$\lambda_X(x) = bc^x$$

Si le añade una constante A a la función hazard rate para permitir la causa de muerte por accidentes (además de las muertes por causas naturales), entonces se obtiene

$$\lambda_X(x) = A + Re^{ax} = A + bc^x$$

De esta manera se obtiene la función de distribución Gompertz-Makeham.

- Distribución Weibull

Son distribuciones del tercer tipo de valor extremo. Su función de supervivencia es

$$S_X(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\xi}{\theta}\right)^c\right] \text{ con } x > \xi, \theta > 0, c > 0$$

Y el hazard rate se define como

$$\lambda_X(x|X > \xi) = \frac{c}{\theta} \left(\frac{x-\xi}{\theta}\right)^{c-1} = \frac{c}{\theta^c} (x-\xi)^{c-1}$$

Donde ξ y θ son parámetros de posición (*location*) y escala (*scale*), respectivamente. El parámetro c es el de forma (*shape*)^{II}.

- Distribución Gamma

La forma general de la función de densidad de la distribución Gamma es

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (x - \xi)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x-\xi}{\beta}\right) \quad \text{con } x > \xi, \alpha > 0, \beta > 0$$

Donde ξ y β son los parámetros de posición (*location*) y escala (*scale*), respectivamente y α es el parámetro que determina la forma (*shape*) de la función de distribución de densidad. En la mayoría de las aplicaciones, $\xi = 0$ y por lo tanto se tiene una función de densidad de dos parámetros

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad \text{con } \alpha > 0, \beta > 0$$

La esperanza y la varianza condicional son, respectivamente:

$$E[X] = \beta\alpha$$

$$\text{Var}[X] = \beta^2\alpha$$

Cuando se tienen valores específicos de α , se necesitan tablas especiales para evaluar la función de supervivencia, que es de la forma

$$S_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_x^\infty t^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x/\beta}^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$$

- Distribución Lognormal

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución lognormal si $Y = \log X$ tiene una distribución normal. De manera más general $Y = \log X - \sigma$. Si ξ y σ^2 son la media y la varianza, respectivamente entonces la función de densidad se define como

^{II} Se puede demostrar que si X tiene una distribución Weibull, entonces $Y = \log(X - \xi)$ tiene una distribución de tipo 1.

$$f_X(x) = (\sqrt{2\pi} \sigma x)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \xi}{\sigma}\right)^2\right] \quad \text{con } x > 0, \sigma > 0$$

Y la función de distribución acumulada es

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \xi}{\sigma}\right)$$

- Distribución Logística

La función de distribución acumulada para una variable aleatoria X con distribución logística es

$$F_X(x) = \frac{1}{1 + \exp[-(x - \xi)/\theta]}, \text{ con } -\infty < x < \infty, \theta > 0$$

Donde ξ es el parámetro de posición (*location*) y θ es el parámetro de escala (*scale*). Nótese que si $\frac{1}{\theta} = b$ y $\frac{\xi}{\theta} = a$, entonces la función de distribución puede escribirse de la forma

$$F_X(x) = \frac{1}{1 + \exp[a - bx]}, \text{ con } -\infty < x < \infty, b > 0$$

Esta distribución tiene una propiedad conveniente de que las funciones de densidad, de supervivencia y el hazard rate se pueden expresar en funciones simples de la función de la distribución acumulada. Entonces

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = \frac{1}{1 + \exp(bx - a)} = e^{a-bx} F_X(x)$$

$$\lambda_X(x) = -\frac{d \log S_X(x)}{dx} = \frac{b}{1 + \exp(a - bx)} = b F_X(x)$$

Y

$$f_X(x) = \lambda_X(x) S_X(x) = b e^{a-bx} [1 + \exp(a - bx)]^{-2} = b F_X(x) [1 - F_X(x)]$$

Notar que

$$\log \frac{F_X(x)}{1 - F_X(x)} = bx - a$$

2.2 Métodos de corrección, suavización y ajuste de los datos

Una vez descrita la teoría probabilística y los conceptos básicos en el análisis de supervivencia. Posteriormente, se mencionan ciertos señalamientos para tomar en cuenta al analizar fenómenos donde se emplean métodos y modelos matemáticos.

Al realizar el análisis de los fenómenos demográficos se requiere de cuantificarlos y para ello se utiliza gran cantidad de información. En la mayoría de los casos, se presentan errores al captar la información y por lo tanto, la calidad de la información suele ser no satisfactoria. Es por ello que resulta importante realizar una evaluación previa de los datos que se utilicen y de ser necesario corregirlos (Mina, 1982). Una vez realizada la evaluación y la corrección, de ser necesaria, se procede a realizar el ajuste de los datos.

Es importante señalar la distinción entre corrección y suavización de la información, debido a que algunas veces existe la creencia de que se realiza una corrección de los datos cuando únicamente se suaviza el comportamiento de la información (Mina, 1982). Es por ello, que existen métodos y modelos utilizados específicamente para corregir, suavizar y caracterizar el comportamiento de los fenómenos demográficos. A continuación se realiza una breve descripción de algunos de ellos (Mina, 1982).

- Ansley J. Coale

Es un modelo de ajuste y está en función del estándar desarrollado por Coale, corrige la información observada en cuanto a la estructura por edad. Dicho ajuste de corrección no necesariamente tiene que guardar una alta correlación con la información observada, es decir, no necesariamente se exige una alta correlación entre los valores observados y los valores ajustados.

Si los valores observados tienen deficiencias en la captación, el ajuste que se realiza es en función de un estándar que represente el riesgo de presentar el evento del fenómeno que se estudia, el cual se asume que se adaptará a la realidad. Corrige la estructura por edad observada y se obtiene una baja correlación entre lo observado y lo ajustado.

- Modelo Bilogístico

A partir de la existencia de una relación lineal de la proporción del tiempo recorrido con el riesgo de que ocurra el evento (P_x) y la proporción de eventos acumulados (F_x), se suaviza la función de distribución de los primeros eventos ocurridos por edad observada del fenómeno que se analiza. La correlación que se obtenga entre los valores observados y ajustados, dependerá de los valores que se les asignen a los parámetros a y B . Estos parámetros corresponden a la función de la proporción de tiempo del proceso que se analiza, la expresión es la siguiente

$$P_x = \frac{x - a}{B - a}$$

Donde a es la edad de inicio del evento, B es la edad con el riesgo de presentar el evento que se analiza y x es la edad del individuo en años. De manera general, este modelo proporciona una suavización de la estructura observada.

- La función Makeham

Como antecedentes, se encuentra la ley de Gompertz desarrollada por Gompertz que consiste en una ley que describe la experiencia de la mortalidad con el supuesto de que la resistencia del hombre a la muerte decrece a una tasa proporcional a sí misma. En ese sentido, la función Makeham integra a la ley las causas independientes de la edad. Con esta función es posible obtener un ajuste para describir el comportamiento observado de la población que presenta por primera vez el evento (Mina, 1982).

Para estimar los parámetros de la función de ajuste, (K, a, b y d), se utiliza la técnica de minimizar la suma de los errores al cuadrado, es decir obtener la más alta correlación entre los valores observados y los valores ajustados.

Si bien los tres modelos se pueden utilizar para analizar un fenómeno, se debe tener en cuenta que la función Makeham tiende más a describir el comportamiento observado ante dicho fenómeno, pero si la información observada presenta deficiencias en su captación, dicha función no corregirá la información. Por otro lado, si se aplica el modelo de Coale entonces si se realiza la corrección de la información. No obstante, con el ajuste se obtiene la menor

correlación entre los valores observados y los valores ajustados (Mina, 1982). Mientras que con el modelo bilogístico se obtendría una suavización del comportamiento observado.

Si bien los tres modelos sirven para llevar a cabo proyecciones, se requiere que el modelo sea tal donde se obtenga la correlación más alta entre los valores observados y los valores ajustados, así como también que el ajuste obtenido caracterice de mejor manera el comportamiento observado (Mina, 1982).

La determinación del mejor ajuste dependerá de la calidad de captación de la información, su evaluación y el modelo de ajuste seleccionado. Si al realizar la evaluación de la información se obtiene una adecuada captación de la información, entonces probablemente ajuste de suavización sea buena opción. Si la evaluación señala serias deficiencias en la información, posiblemente el mejor ajuste sea tal que se tenga que acercarse a la realidad que se espera. Por otro lado, si la evaluación señala que la información es adecuada y se desea caracterizar o bien resumir la experiencia de la población ante dicho fenómeno, con el fin de proyectar a corto o mediano plazo el comportamiento de éste, posiblemente el mejor ajuste sea emplear un modelo que se adapte lo más adecuadamente posible a dicha realidad observada (Mina, 1982).

Dicho lo anterior, es necesario tener mucha precaución al utilizar los modelos de ajuste, en su empleo y en sus alcances y limitaciones, para tener una idea más clara de la realidad que se analiza. Es por ello que se requiere previamente de conocer las diferencias existentes entre los ajustes que corrigen, suavizan y caracterizan los valores observados.

Entre las recomendaciones por atender se encuentran que el analista debe tener conocimiento profundo del instrumento empleado, y por lo tanto, no se debe emplear el instrumental mecánicamente sin resaltar las hipótesis que considera. Es importante señalar claramente los supuestos en que se basa el modelo de ajuste en cuestión y la verdadera dimensión de los alcances y limitaciones del modelo. Lo anterior es necesario para que sea posible interpretar correctamente los resultados obtenidos con mayor precisión, sin sobrestimar o subestimar el potencial del instrumental empleado. Al tener una adecuada reflexión sobre los alcances y limitaciones del modelo de ajuste empleado, es posible realizar una mejor explicación del fenómeno demográfico que se analiza (Mina, 1982).

Capítulo III Metodología y Fuentes de información

3.1 Objetivos

3.1.1 Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es destacar el uso de funciones de supervivencia en la descripción y análisis de los fenómenos demográficos e identificar las diferencias entre los métodos que describen el comportamiento de las variables demográficas, de acuerdo con la información disponible en México en el periodo 1990-2010.

3.1.2 Objetivos específicos

1. Mostrar la bondad de las herramientas de las distribuciones de supervivencia y, a partir de la conciliación demográfica existente, comparar los métodos para cada uno de los fenómenos demográficos.
2. Describir y presentar las leyes de los fenómenos demográficos: mortalidad, fecundidad y migración
3. Aplicar e interpretar las funciones y el comportamiento de cada uno de sus parámetros

3.2 Fuente de información

La estrategia para cumplir los objetivos propuestos es cuantitativa y se utiliza como fuente de información la información disponible de la conciliación demográfica realizada por CONAPO en México en el periodo 1990-2010. También se utilizan las tablas de mortalidad de la conciliación demográfica realizada por SOMEDE de los años 1990, 1995, 2000, 2005 y 2010 para la República Mexicana.

La unidad de análisis es la población mexicana de 0 a 109 años en México en el periodo de 1990-2010.

3.3 Herramientas técnicas metodológicas

3.3.1 Tabla de Vida

Fue diseñada esencialmente para medir mortalidad de una población en específico, pero tiene diferentes aplicaciones. Es utilizada en varios estudios en fenómenos como longevidad, fecundidad, migración y crecimiento de la población.

Una tabla de vida completa se genera a partir de las tasas de mortalidad por edad específica, y los valores resultantes se utilizan para medir la mortalidad, la función supervivencia y la esperanza de vida. Asume una cohorte hipotética sujeta a las tasas de mortalidad específicas por edad observadas en el período en particular. Por lo tanto, una tabla de vida actual puede ser vista como una foto instantánea de la mortalidad actual. Es un resumen descriptivo de la mortalidad en un año o de un período corto.

Una de sus principales ventajas sobre otros métodos de medición de la mortalidad, es que aquellos no reflejan los efectos de la distribución por edades de una población real y no requieren la adopción de una población estándar para comparaciones aceptables de los niveles de mortalidad de distintas poblaciones. Otra ventaja es que una tabla de vida permite fácilmente hacer ajustes de mortalidad para los grupos de edad.

Existen clasificaciones de las tablas de vida, de acuerdo con la longitud del intervalo de edad en el que sean presentadas las edades. La tabla de vida completa contiene datos para cada año de edad desde el nacimiento hasta la última edad aplicable. Otro tipo de tabla de vida es la abreviada, donde se tiene los datos por intervalos de 5 o 10 años de edad para la mayoría de los rangos de edad.

Los principales componentes de una tabla de mortalidad son (Organización de Naciones Unidas, 1983; Organización de Naciones Unidas, 1986) (Swanson & Siegel, 2004):

${}_n m_x$, tasas específicas de mortalidad por edades. Son calculadas a partir del número de defunciones ocurridas en la población en el grupo de edad entre las edades exactas x y $x + n$, y de los años persona vividos por la población en ese grupo de edad.

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$$

${}_n q_x$, probabilidad de que una persona muera entre las edades exactas x y $x + n$. Es importante mencionar que esta probabilidad es condicional dado que es la probabilidad de que un individuo (estado vivo) pase al otro estado (muera)

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x}$$

${}_n p_x$, probabilidad de que una persona de edad exacta x sobreviva a la edad exacta $x + n$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_n q_x$$

l_x , sobrevivientes a edad exacta x , es decir el número de personas que llegan con vida a edad exacta x . El radix inicial es l_0 que usualmente se le asigna valor de 100,000 para efectos de comparabilidad, se interpreta como el número de personas que se encuentran vivos a la edad cero.

$$l_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n q_x}$$

${}_n d_x$, defunciones entre las edades exactas x y $x + n$, estas defunciones representan las que ocurrieron a los sobrevivientes de edad exacta x y no llegaron vivos a la edad $x + n$

$${}_n d_x = {}_n q_x * l_x = l_x - l_{x+n}$$

${}_n L_x$, número de años persona vividos en el intervalo x y $x + n$. En el cálculo, se utiliza un factor de separación que es el tiempo en promedio que aportaron los que murieron en el intervalo x y $x + n$.

$${}_n L_x = n l_{x+n} + {}_n a_x {}_n d_x = n({}_n a_x * l_x + (1 - {}_n a_x) * l_{x+n})$$

Donde ${}_n a_x$ es el promedio de años persona vividos en el intervalo de edades $(x, x + n)$ por los que fallecen en ese intervalo. Usualmente el valor que se le asigna a ${}_n a_x = 1/2$ para edades intermedias, con el supuesto de que las muertes se distribuyen uniformemente a lo largo del intervalo. En cuanto a las primeras edades y en los últimos grupos de edades, generalmente este supuesto no se cumple, por lo que el valor de ${}_n a_x$ se puede estimar a partir de tablas de vida existentes con la siguiente fórmula:

$${}_n a_x = \frac{{}_n L_x - (n * l_{x+n})}{{}_n d_x}$$

Al conocer ${}_n m_x$, es posible obtener la probabilidad de muerte con la siguiente fórmula:

$${}_n q_x = \frac{n * {}_n m_x}{1 + (n * 1 - {}_n a_x * {}_n m_x)}$$

T_x , número total de años persona vividos de una tabla de mortalidad a partir de la edad exacta x . Expresa el número de años que se esperan por vivir los sobrevivientes a cada edad x , desde que llegan a la edad x hasta que mueran

$$T_x = \sum_{i=x}^{\omega} {}_nL_i = T_{x+n} + {}_nL_x$$

e_x , esperanza de vida a la edad x . Expresa los años que se vivirán en promedio de un grupo de personas al llegar a la edad x , es decir que se esperan por vivir una vez alcanzada la edad x . La esperanza de vida al nacimiento se denota por e_0 . La fórmula para calcular la esperanza de vida a la edad x , es

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Para el supuesto que se utilizará para calcular el último intervalo de edad es el del Método de Greville (Swanson & Siegel, 2004). Entonces, al calcular los años persona vividos en cada uno de los intervalos ${}_nL_x$, si llegamos al último intervalo surge el problema, puesto que en la tabla de vida no contamos con el valor para un siguiente grupo de edad. El supuesto importante es que en el último intervalo de edad, el grupo abierto (por ejemplo de 100 años y más), se asume ${}_nm_x = 1$ porque eventualmente todos los individuos morirán. Por lo tanto:

$$L_{85+} = \frac{{}_nl_x}{{}_nm_x} = \frac{{}_nd_x}{{}_nm_x} = \frac{d_{85+}}{1} = d_{85+}$$

No obstante, la aproximación anterior disminuye considerablemente el valor de la esperanza de vida en el último grupo de edad, es por ello que la expresión más usual es:

$$L_{100+} = \frac{l_{100+}}{m_{100+}}$$

3.3.2 Funciones de Supervivencia

3.3.2.1 Mortalidad

Las similitudes en los patrones de mortalidad que es posible encontrar al analizar las tablas de vida, estimulan la búsqueda de métodos sencillos para describir las relaciones entre la mortalidad de los diferentes países o entre diferentes periodos cuando se analiza al mismo país (Brass, 1971).

Es posible obtener un sistema para describir dichas relaciones de mortalidad utilizando funciones matemáticas. A continuación se describe el sistema propuesto por William Brass, las propiedades del sistema y la transformación logito, así como el significado demográfico de sus parámetros.

Es posible definir las tasas de mortalidad de una población determinada a través de funciones matemáticas donde se especifican dos medidas o parámetros. El sistema que se obtiene, permite generar series de patrones de mortalidad o tablas de mortalidad. De acuerdo con Brass (1971) se pueden utilizar modelos de tablas de mortalidad y su aplicación ha servido para suavizar, ajustar y ampliar los datos limitados y defectuosos provenientes de los países en desarrollo.

La ventaja de utilizar el modelo es que se pueden realizar análisis y estimaciones más confiables debido a que las observaciones resultan más confiables, en especial en esa época donde la calidad de la información era deficiente. Debido a que el modelo reproduce las características principales, sirve para analizar registros no satisfactorios, y a su vez rige condiciones muy similares en la proyección de tendencias pasadas hacia el futuro, incluso para poblaciones con estadísticas demográficas exactas y detalladas (Brass, 1971).

La sencillez del modelo también se encuentra en que, para describir las relaciones entre patrones de mortalidad, dichos patrones dependerán de propiedades fundamentales de la variación de las tasas de mortalidad según la edad. Al examinar las tendencias de la mortalidad de una población, “en la mayor parte del rango los cambios proporcionales en las tasas específicas de mortalidad a lo largo de un periodo limitado no difieren mucho con la edad” (Brass, 1971, pág. 139).

Si se denota a $\mu(x)$ como la tasa instantánea de mortalidad^{III} a edad exacta x , la relación aproximada del cambio se convierte en (Brass, 1971):

$$\mu_1(x) = C \mu_2(x)$$

Donde los subíndices 1 y 2 se refieren a dos tablas de mortalidad en diferentes periodos y C es una constante.

Lo anterior equivale a

$$\frac{l'_1(x)}{l_1(x)} = C \frac{l'_2(x)}{l_2(x)}$$

Donde $l(x)$ es la serie de sobrevivientes a edad exacta x y los apóstrofes denotan la derivada de $l(x)$ con respecto a x . Esta ecuación también implica lo siguiente

$$\ln(l_1(x)) = C \ln(l_2(x))$$

La ecuación anterior es la forma más conveniente de presentarse. Es posible notar que $l_1(x)$ y $l_2(x)$ son cero, ambas la unidad y su logaritmos, cuando x es cero. Entonces si se mantiene una relación entre las tablas de mortalidad de una población a lo largo de un periodo prolongado, es razonable que describa los patrones de mortalidad de poblaciones en distintas etapas de desarrollo (Brass, 1971).

- El sistema logito

Para entender con claridad el concepto y la función que cumple el sistema logito, es necesario partir de la siguiente expresión (Chackiel, 1981)

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(x) = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$

Es posible observar que esta ecuación es una función hiperbólica y tiene propiedades importantes, una de ellas es que cumple con las condiciones de una función de densidad. Es decir

- 1) $f_X(x) \geq 0$ para todo valor de x

^{III} La tasa instantánea de mortalidad a edad exacta x se define como $\mu(a) = -\frac{1}{l(a)} \frac{d(l(a))}{da}$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 x dx = \frac{1}{2} \tan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

En este caso particular, se refiere a una media igual a cero y varianza igual a $\pi^2/12$.

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f^2(x) - [xf(x)]^2 dx = \pi^2/12$$

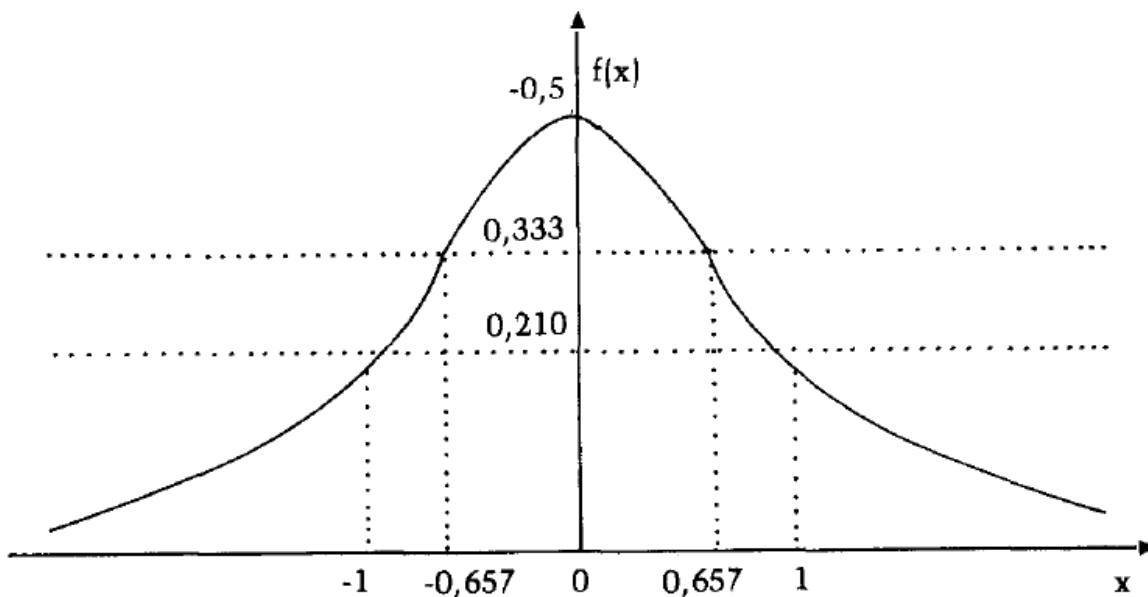
Y la forma general es

$$f_X(x) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech}^2(\alpha + \beta x) \quad (11)$$

Es posible observar dicha función de densidad al graficarla (ver Gráfica 1).

Gráfica 1. Función de densidad de la secante cuadrada hiperbólica

$$f_X(x) = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$



Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

Al integrar la función de densidad, se obtiene la función de distribución. Se denota como

a) Si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$

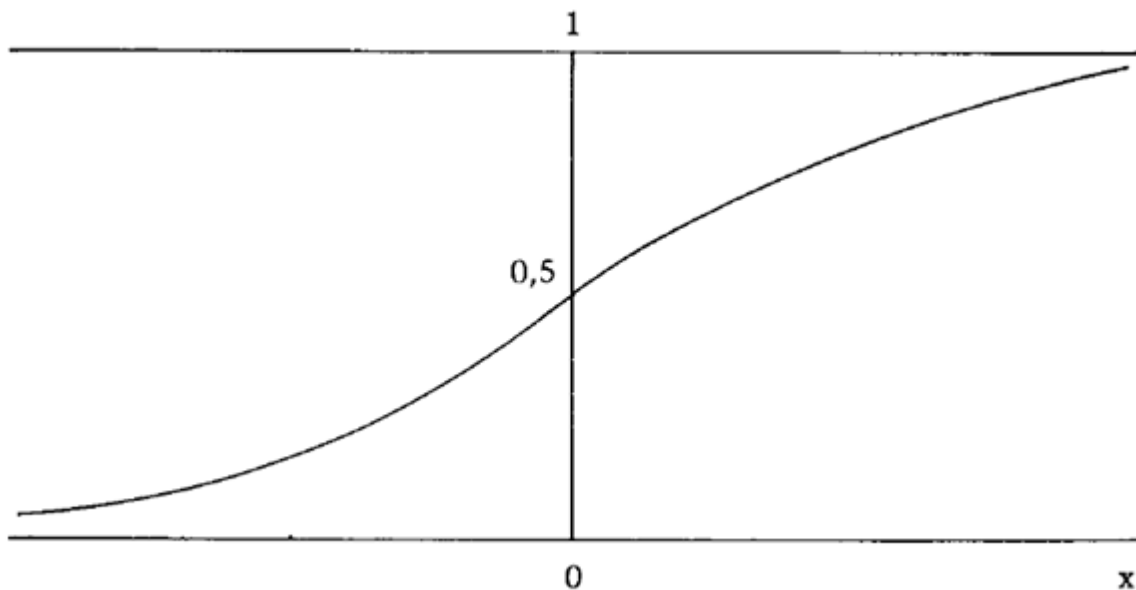
$$F_X(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \operatorname{sech}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left. \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right|_{-\infty}^x = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$$

b) Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 1$

$$F_X(x) = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^x \operatorname{sech}^2(\alpha + \beta x) \, dx = \frac{1}{1 + e^{-2(\alpha + \beta x)}} \quad (12)$$

En ambos casos se reconoce la función logística (ver Gráfica 2)

Gráfica 2. Función de distribución logística $F_X(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$



Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

Entonces se denomina logito a la función que realiza una transformación lineal de la función logística. Se define como

$$\operatorname{logito} P(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P(x)}{1 - P(x)} \right) = Y(x) \quad (13)$$

Si $P(x)$ es la función de distribución de la logística, la ecuación resultante es (por casos)

a) Si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$

$$\text{logito } P(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{1}{1 + e^{-2x}}}{1 - \frac{1}{1 + e^{-2x}}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{e^{-2x}} \right) = x$$

b) Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 1$

$$\text{logito } P(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{e^{-2(\alpha + \beta x)}} \right) = \alpha + \beta x \quad (14)$$

Este concepto también puede analizarse como la función inversa de la función logística. Si la función de distribución de una logística es

$$P(A) = F_x(A) = \frac{1}{1 + e^{-2A}}$$

Entonces se tiene la función logito de $P(A)$

$$A = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P(A)}{1 - P(A)} \right)$$

El sistema logito es un sistema en el que las diferencias de las tasas de mortalidad entre poblaciones en los primeros años de vida, se toman como proporcionales en relación con la probabilidad de morir, es decir $1 - l(x)$ y no con la serie de sobrevivientes de la tabla de vida l_x (Brass, Sobre la escala de mortalidad, 1971). La ecuación que se deriva de lo anterior es la siguiente

$$\frac{1 - l(x)}{l(x)}$$

Si se toma el logaritmo de ella, al ser derivado en los valores de la tasa instantánea de mortalidad a la edad x , la relación supuesta entre dos tablas de mortalidad se convierte en

$$\frac{l'_1(x)}{l_1(x) [1 - l_1(x)]} = C \frac{l'_2(x)}{l_2(x) [1 - l_2(x)]}$$

$$\frac{\mu_1(x)}{[1 - l_1(x)]} = C \frac{\mu_2(x)}{[1 - l_2(x)]} \text{IV}$$

El uso de la constante fija C en la ecuación representará mejor las observaciones que solamente en la relación similar entre las tasas instantáneas de mortalidad. Al integrar la ecuación anterior, es posible obtener la fórmula en función de $l(x)$, como la siguiente

$$\ln\left(\frac{1 - l_1(x)}{l_1(x)}\right) = \alpha_0 + \beta_0 \ln\left(\frac{1 - l_2(x)}{l_2(x)}\right)$$

Donde α_0 y β_0 son dos constantes. Es posible notar que se puede agregar una constante adicional debido a que ambos logaritmos tienden a $-\infty$ cuando x es cero y $l(x)$ es igual a 1. Por lo tanto, se puede escribir como

$$\ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

Donde p es una proporción y q es $1 - p$. Con el multiplicador igual a $\frac{1}{2}$, se obtiene

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

El cual se denomina el logito de p .

$$\text{logito}(p) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

Por lo tanto, la ecuación resultante en términos de logito de $1 - l(x)$ queda de la siguiente manera

$$\text{logito}(1 - l(x)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-l(x)}{l(x)}\right) \text{ (15)}$$

^{IV} En las edades tardías, cuando las $l(x)$ son pequeñas y $1 - l(x)$ se acerca a uno, la ecuación es aproximadamente como antes. Cuando $l(x)$ se acerca a uno en las edades tempranas, los factores de $\frac{1}{1-l_1(x)}$ y $\frac{1}{1-l_2(x)}$ tenderán a anular la diferencia entre $\mu_1(x)$ y $\mu_2(x)$. En las edades medias, cuando las $l(x)$ no se encuentran cerca de uno o cero, el efecto compensador será menor (Brass, 1971)

Una propiedad inmediata del logito es que la relación entre los logitos de dos distribuciones correspondientes a curvas con α y β distintos, para el mismo valor de x , es una relación lineal. Retomando la ecuación (14), si se define a $Y^S(x) = \text{logito } P^S(x)$, $Y^0(x) = \text{logito } P^0(x)$ y $Y^1(x) = \text{logito } P^1(x)$, donde el superíndice S se utiliza para indicar el valor de los parámetros $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ (Chackiel, El modelo de mortalidad de Brass, 1981). Entonces,

$$Y^S(x) = \text{logito } P^S(x) = x \text{ para } \alpha = 0 \text{ y } \beta = 1$$

$$Y^0(x) = \text{logito } P^0(x) = \alpha_0 + \beta_0 x = \alpha_0 + \beta_0 Y^S(x)$$

$$Y^1(x) = \text{logito } P^1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x = \alpha_1 + \beta_1 Y^S(x)$$

Al realizar la diferencia de los dos últimos logitos, se obtiene

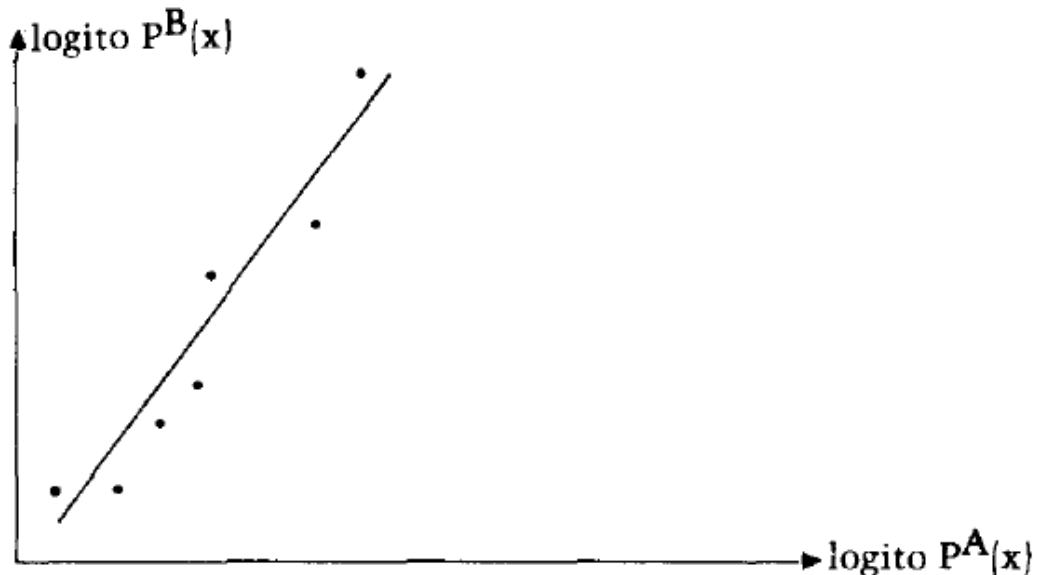
$$Y^1(x) - Y^0(x) = (\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0)x = (\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0)Y^S(x)$$

Si se despeja $Y^1(x)$ y se sustituye $Y^S(x) = \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0}$, se obtiene

$$\begin{aligned} Y^1(x) &= (\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0) \frac{Y^0(x) - \alpha_0}{\beta_0} + Y^0(x) \\ &= \alpha_1 - \frac{\beta_1 \alpha_0}{\beta_0} + \frac{\beta_1}{\beta_0} Y^0(x) = c + d Y^0(x) \end{aligned}$$

El cálculo c y d puede lograrse a través del ajuste de los logitos observados, ya sea con el método de mínimos cuadrados o con algún otro método convencional. Es recomendable realizar un gráfico que debe mostrar la relación lineal entre los puntos de ambos logitos (ver Gráfica 3). Por lo tanto, si se conoce $\text{logito } P^A(x)$ es posible deducir $P^B(x)$ como el antilogito de $c + d \text{logito } P^A(x)$ (Chackiel, 1981).

Gráfica 3. Función antilogito

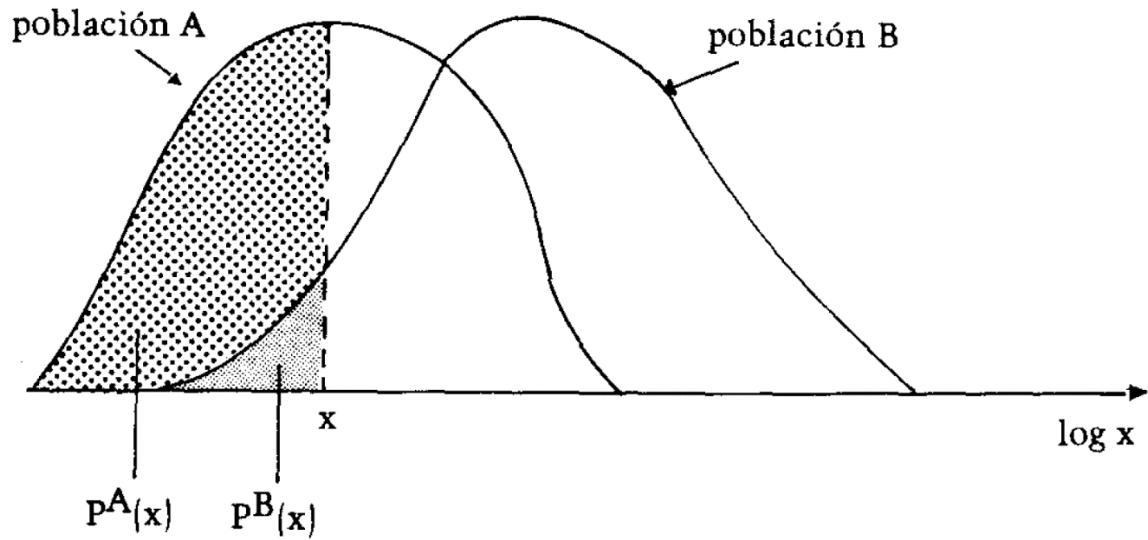


Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

El uso del sistema logito se realizaba con anterioridad en ensayos biológicos, donde la función de densidad expresada por la relación (11) es la curva de respuesta frente a una dosis de droga que se inyecta a los animales. El procedimiento es suministrar una dosis x de determinada droga y, posteriormente, se observan las reacciones para intentar medir el impacto en la mortalidad al suministrar una dosis inferior a x (Chackiel, 1981). Entonces la función de distribución $P(X) = F_X(x)$ está dada por la proporción de los que mueren, es decir, que la función es monótonamente creciente a medida que mueren, siendo la proporción igual a 1.

No obstante, dichas curvas de respuesta del experimento no coinciden con lo planteado en la relación (11). Es por ello que se realiza una transformación en la escala logarítmica en el eje de las abscisas en lugar de un gráfico con respecto a x (ver Gráfica 3). Entonces para una misma dosis en dos poblaciones de ratas $P^A(X)$ y $P^B(X)$, las curvas son diferentes pero por la propiedad de que entre los logitos de ellas existe una relación lineal, se obtiene dicha relación.

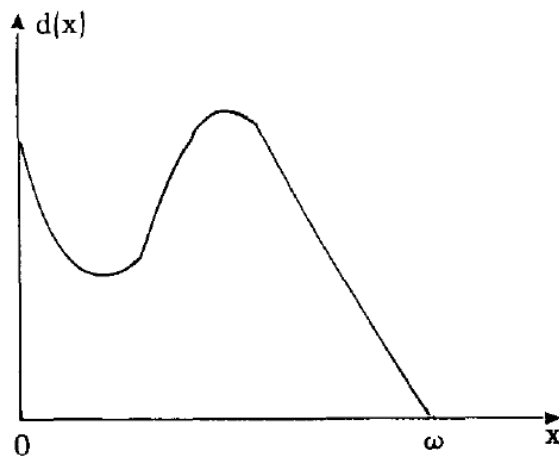
Gráfica 4. Curvas de respuesta transformadas



Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

La variable x denota el tiempo y se expresa en la edad de una cohorte de personas que mueren de manera acumulada a medida que envejecen, y en la edad extrema ω la proporción de muertes es 1. Si se calculan las muertes de la población $d(x)$, a través de una tabla de vida, y si se grafican, es posible observar la curva de las muertes (ver Gráfica 5).

Gráfica 5. Muertes de una población humana ($d(x)$)



Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

No obstante, se debe encontrar una escala apropiada tal que

$$d(x) = l(x)\mu(x) = -\frac{d l(x)}{dx}$$

Se transforme en una expresión similar a (11) y que la integral se aproxime a una logística (12). Entonces, la función de distribución de las muertes que se debe transformar en una curva logística es

$$\int_0^x d(x) dx = \int_0^x -\frac{d l(x)}{dx} dx = -l(x)|_0^x = 1 - l(x)$$

Por lo tanto, con la escala logito se tiene la siguiente relación

$$1 - l(x) \cong \frac{1}{1+e^{-2[\alpha+\beta \logito(1-l^S(x))]} \quad (16)$$

La escala se haría en el logito de una distribución estándar de muertes ($1 - l^S(x)$), lo que implica

$$d(x) = \frac{\beta}{2} \frac{d \logito(1-l^S(x))}{dx} \operatorname{sech}[\alpha + \beta \logito(1 - l^S(x))] \quad (17)$$

Si se aplica la definición de logito (14) a la ecuación (16) se obtiene la relación fundamental entre la tabla de vida estándar y la otra tabla considerada

$$\logito(1 - l^S(x)) = \alpha + \beta \logito(1 - l^S(x))$$

$$Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x) \quad (18)$$

Por lo tanto, queda demostrado que entre el logito de la distribución de las muertes de una tabla de vida estándar y el de otra tabla considerada, se espera una relación lineal donde α y β varían. Si bien la relación es empírica, se debe tener en cuenta que no siempre se logra una buena alineación (Chackiel, 1981).

Entonces, puesto que $\logito l(x) = -\logito[1 - l(x)]$, resulta el mismo sistema, ya sea en términos de las proporciones de los que mueren antes o después de la edad x . La interpretación de la forma de la relación matemática que constituye la base del sistema es importante pues proporciona una escala significativa para su medición (Brass, 1971).

La transformación anterior resulta conveniente ya que las relaciones entre las razones de $l(x)$ de las diferentes secuencias de mortalidad son transformadas por los logitos en una estructura mucho más obvia. De esta manera, en la escala de las $l(x)$ las diferencias entre cualquier par de secuencias, ya sea de manera relativa o absoluta, no presentan ningún patrón simple de edades. Por otro lado, las diferencias logito sólo divergen moderadamente de un nivel constante (Brass, 1971).

Al relacionar las dos tablas de vida, surge la elección de una tabla de vida que sirva de patrón estándar básico. Dicha tabla puede determinarse con base en los objetivos y la información disponible. Por otro lado, resulta conveniente utilizar una secuencia estándar de mortalidad con la cual puedan relacionarse las demás^V. Si existe una relación en línea recta de dos tablas de mortalidad con una tercera en la escala logito, entonces en su relación entre sí también es lineal. Por lo tanto, cualquier serie de tablas de mortalidad interrelacionadas de esa manera puede tomarse como estándar (Brass, 1971). No obstante, en la práctica la linealidad exacta no es estrictamente cierto debido a las desviaciones que pudieran existir con la linealidad.

- Interpretación de parámetros

Brass relaciona los patrones de mortalidad por edades de una tabla de vida estándar con otra tabla considerada, a través de la ecuación (18). Los parámetros de la mortalidad son α y β , y a continuación se realiza la interpretación de ellos.

Si denotamos a los logitos estándares como $Y^S(x)$, la ecuación que relaciona otras secuencias de mortalidad con esta función resulta en la misma ecuación (18). Donde α y β son dos constantes que varían entre las tablas de mortalidad. Es posible notar que $Y^S(x)$ es cero cuando $l^S(x)$ es 0.5, es decir la edad hasta la cual sobreviven la mitad de los nacimientos. Por lo tanto, $Y(x)$ toma el valor de α , donde α es el parámetro que mide el nivel de la mortalidad. Si bien este parámetro mide en cierto sentido el nivel de la mortalidad, dado que el patrón de las tasas específicas de mortalidad con la edad varía con β , el término nivel no está definido completamente. El parámetro β es la pendiente de la mortalidad, es decir, en el

^V Brass menciona que “la tabla estándar de mortalidad debe ser algún tipo de promedio” (Brass, 1971:144)

sistema logito este parámetro hace variar la pendiente y permite representar el curso general de la mortalidad según la edad (Brass, 1971).

Como se mencionó anteriormente, el parámetro que indica el nivel de la mortalidad es α y el parámetro que representa la forma de la mortalidad de acuerdo con la edad es β . Ambos parámetros son dos conceptos estrechamente relacionados y, por lo tanto, las variaciones en uno de ellos repercuten invariablemente en el otro (Chackiel, 1981)

Antes de analizar e interpretar los parámetros, es necesario conocer claramente el comportamiento de $Y(x)$ y $l(x)$ (ver Gráfica 6) (Chackiel, 1981). Se observa que x_1 es la edad donde $l^S(x) = 0.5$, es importante mencionar que en el estándar de Brass el valor de $x_1 = 51$. Entonces, se puede analizar el comportamiento de $Y(x)$ y $l(x)$ por casos:

Si $x \rightarrow 0$, entonces $l^S(x) = 1$; $Y^S(x) \rightarrow -\infty$

Si $0 < x < x_1$, entonces $l^S(x) > 0.5$; $Y^S(x) < 0$

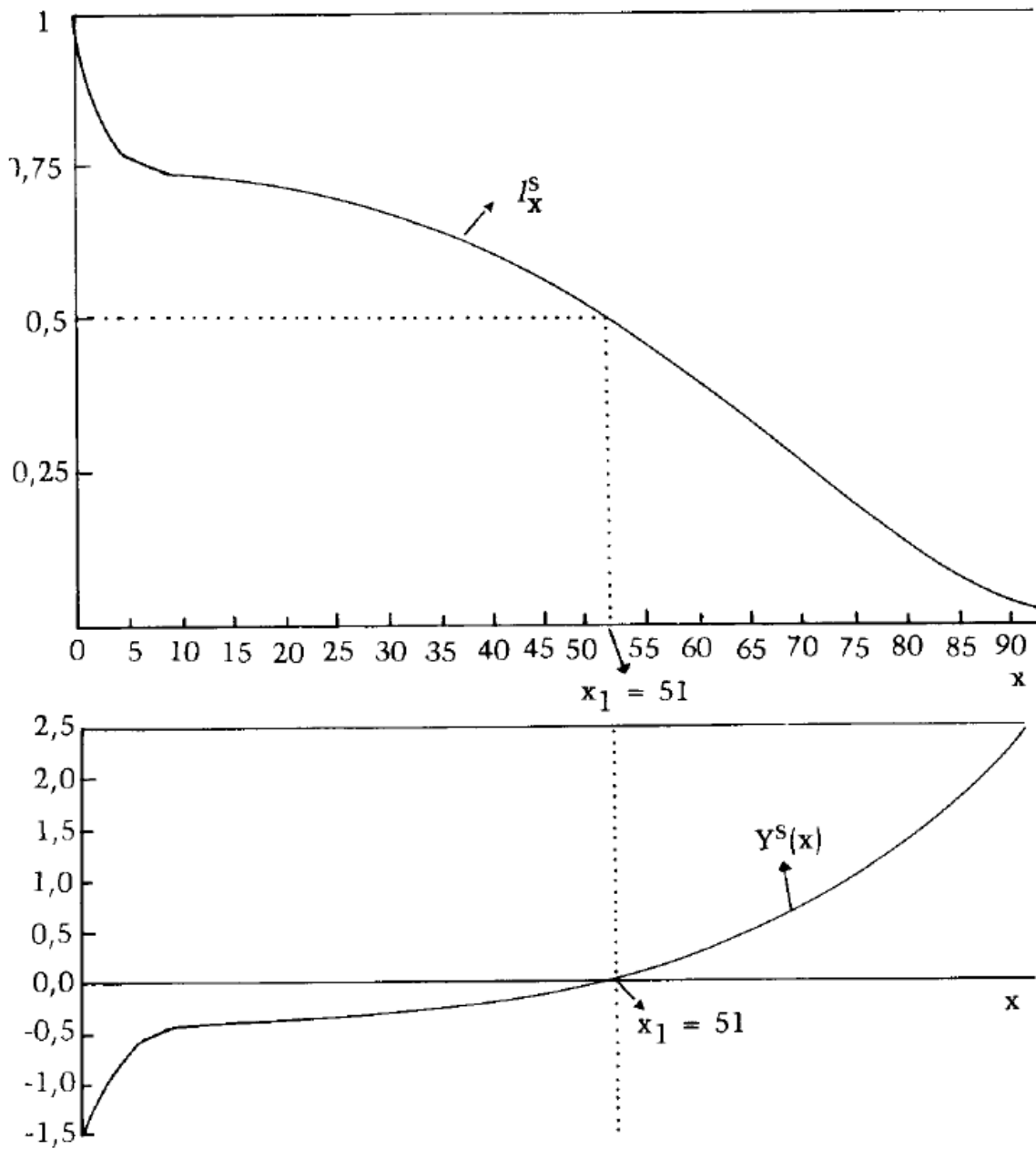
Si $x = x_1$, entonces $l^S(x_1) = 0.5$; $Y^S(x_1) = 0$

Si $x_1 < x < \omega$, entonces $l^S(x) < 0.5$; $Y^S(x) > 0$

Si $x_1 \rightarrow \omega$, entonces $l^S(x) = 0$; $Y^S(x) \rightarrow \infty$

Gráfica 6. Comportamiento de $Y(x)$ y $l(x)$

ESTANDAR GENERAL: FUNCION DE SOBREVIVIENTES l_x^s
Y LOGITO $(1-l_x^s)$

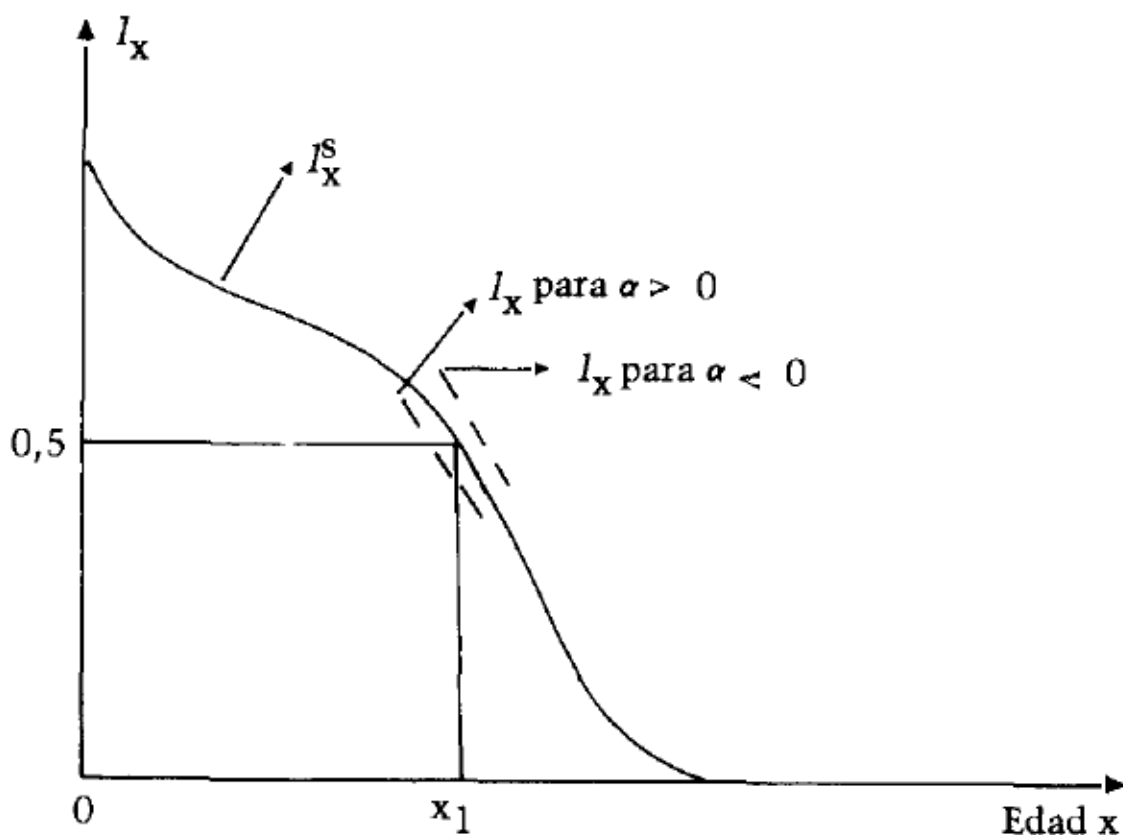


Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

Una vez descrito el comportamiento de $Y(x)$ y $l(x)$, se analiza el comportamiento de los parámetros α y β por todos los casos posibles.

Si $\alpha > 0$, entonces $Y(x_1) > 0$ y por lo tanto $l(x_1) < 0.5$. Es posible notar que el valor de $l(x_1)$ queda por debajo de $l^S(x) = 0.5$ (ver Gráfica 7). Caso contrario ocurre cuando $\alpha < 0$, donde $l(x_1) > 0.5$. Por otro lado, si $l(x_1)$ está por debajo de $l^S(x)$ es porque la mortalidad del estándar es más alta y si $l(x_1)$ está por encima es porque la mortalidad del estándar es más baja (Chackiel, 1981).

Gráfica 7. Interpretación del parámetro α

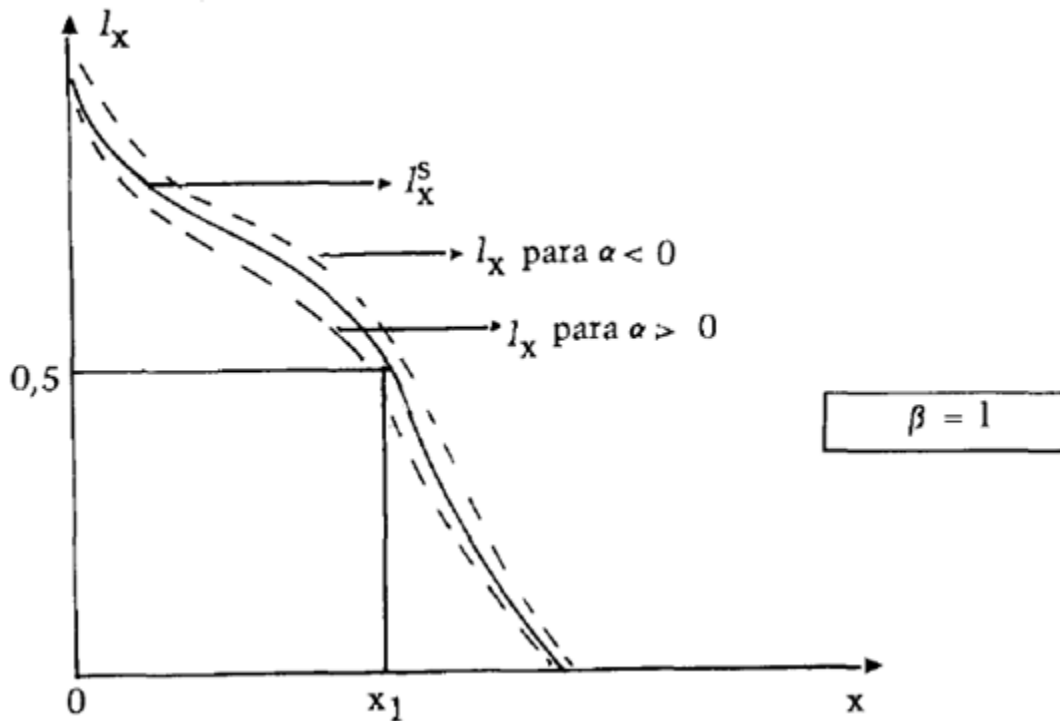


Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

Si $\beta = 1$, $Y(x) - Y^S(x)$ tiene el valor de α en todas las edades y, por lo tanto, las diferencias entre $l(x)$ y $l^S(x)$ son en el mismo sentido en todas las edades. La tabla de vida generada tiene una mortalidad más alta que la estándar (ver Gráfica 8). Ahora con $\beta = 1$, si $\alpha > 0$,

entonces $Y(x) > Y^S(x)$ y por lo tanto $l(x) < l^S(x)$. Pero si $\alpha < 0$, entonces $Y(x) < Y^S(x)$ y por lo tanto $l(x) > l^S(x)$. Por otro lado, para que $\beta = 1$ sea constante, quiere decir que $l(x)$ depende únicamente de α y donde nunca se interseca con $l^S(x)$ (Chackiel, 1981).

Gráfica 8. Interpretación del parámetro α cuando $\beta=1$



Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

Por otro lado, si retomamos la ecuación

$$Y(x) = \alpha + \beta Y^S(x) \quad (18)$$

Y tomamos la diferencia entre $Y(x)$ y $Y^S(x)$, la cual se denota como $D(x)$, entonces se obtiene

$$D(x) = Y(x) - Y^S(x) = \alpha + (\beta - 1) Y^S(x) \quad (19)$$

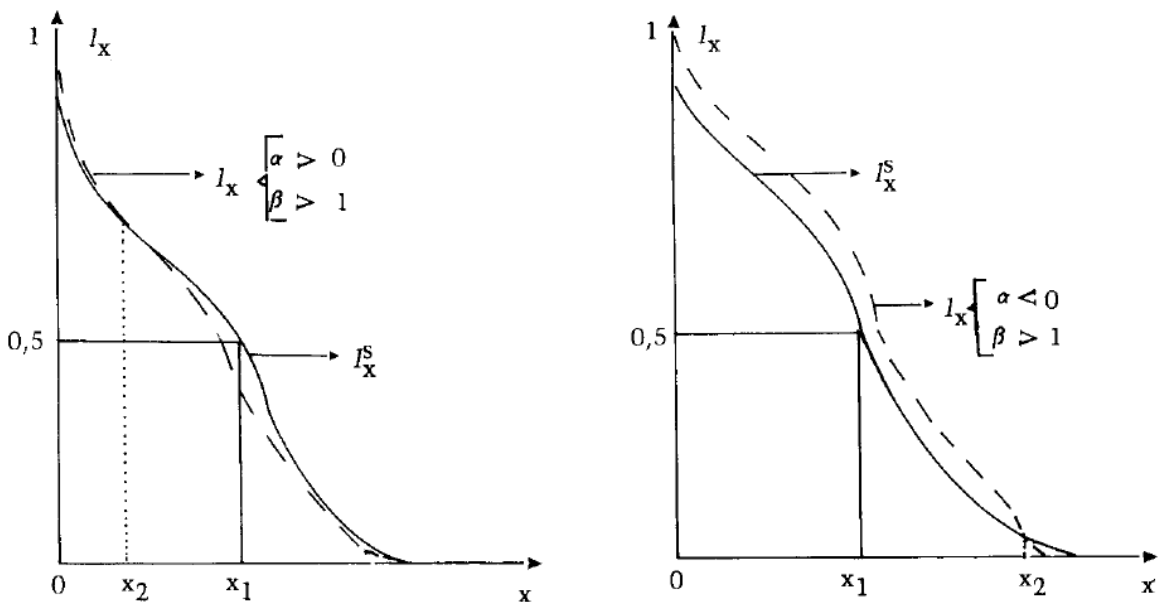
Al comparar tablas empíricas de mortalidad con el sistema de referencia logito, frecuentemente resulta útil examinar $Y(x) - Y^S(x)$ (Brass, 1971).

Cuando $\beta \neq 1$, existe un punto x_2 tal que $Y(x)$ y $Y^S(x)$ se intersecan, así como $l(x)$ y $l^S(x)$. Es decir que la relación (19) se hace cero (Chackiel, 1981).

$$Y^S(x_2) = -\frac{\alpha}{\beta - 1}$$

Si $\beta > 1$, el denominador siempre es > 0 y todo dependerá del signo de α . Si $\alpha > 0$, se tiene que $Y^S(x_2) < 0$, lo que ocurre para $0 < x < x_1$, donde x_1 es la edad mediana, y $l(x_1)$ estaba por debajo de $l^S(x_1)$, entonces la intersección se da entre 0 y x_1 (ver Gráfica 9). No obstante, si $\alpha < 0$ entonces $Y^S(x_2) > 0$ y la intersección se da entre x_1 y ω (Chackiel, 1981).

Gráfica 9. Interpretación de la serie de sobrevivientes $l(x)$ cuando $\beta > 1$



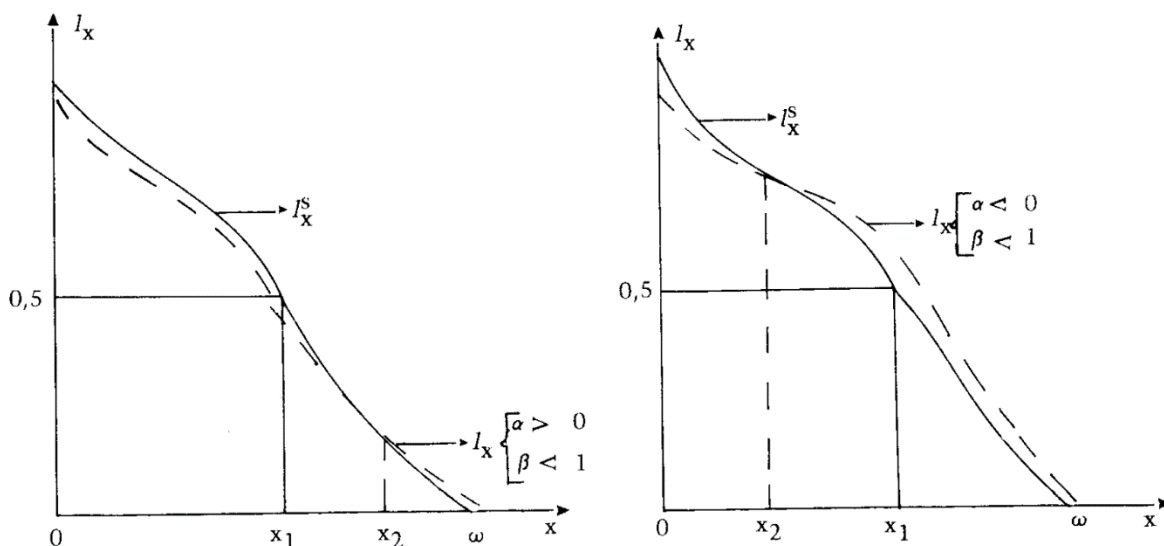
Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

Ahora, al analizar $\beta < 1$ se tiene

$$Y^S(x_2) = -\frac{\alpha}{\beta - 1}$$

Pero con el denominador < 0 , si $\alpha > 0$ entonces $Y^S(x_2) > 0$ lo que ocurre para $x_1 < x < \omega$. Por otro lado, si $\alpha < 0$ entonces $Y^S(x_2) < 0$ cuando $0 < x < x_1$ (ver Gráfica 10).

Gráfica 10. Interpretación de la serie de sobrevivientes l_x cuando $\beta < 1$



Fuente: Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de Población N° 25.

Si $\beta > 1$, la diferencia entre $Y(x)$ y $Y^S(x)$ será menor que α en las edades por debajo de x , tal que $l(x)$ tome el valor de 0.5. Significa que en los últimos grupos de edades, específicamente a partir del grupo donde cambia de signo los logitos, las razones de supervivencia ($l(x)$) de la tabla de vida bajan con mayor rapidez en comparación con la misma población. No obstante, sucede el caso contrario con $\beta < 1$ ya que las razones de supervivencia de la tabla de vida bajan con mayor rapidez en los primeros grupos de edades hasta el grupo donde se observa el cambio de signo de los logitos (Brass, 1971).

Al considerar $D(x)$, por lo general $(\beta - 1)$ se aproxima bastante a cero y las desviaciones con respecto del estándar se exhiben como variaciones alrededor de una constante o de un nivel que cambia lentamente. En cuanto a los valores de $D(x)$, es importante mencionar que, debido a que cada proporción $l(x)$ es derivada de la anterior, al multiplicarla por la probabilidad de sobrevivir al intervalo de edades, las grandes desviaciones de una tabla empírica con respecto al sistema logito de mortalidad no ocurren solamente a edades aisladas, excepto posiblemente en los extremos de la vida. Es decir que en este caso las intersecciones se dan en los años extremos de la vida. Los valores de $D(x)$ consisten en un cambio gradual en el patrón, a medida que las tasas de vida específica a lo largo de un periodo de vida

divergen de aquellas implicadas por el estándar. No obstante, las variaciones y anomalías en los patrones de mortalidad se presentan más claramente en la escala logito, entonces es necesario seleccionar una tabla de vida del sistema de referencia para hacer la comparación, o ajustar una recta a los valores de $l(x)$ en la escala logito (Brass, 1971).

La distribución de las probabilidades de muerte a la edad x es descrita por la función

$$\frac{1}{2} \operatorname{sech}^x(\alpha + \beta x)$$

Donde $-\frac{\alpha}{\beta}$ es la media y la desviación estándar (la medida de la amplitud) es $\frac{1}{\beta}$. Al considerar la proporción de personas que para morir requieren de tener una edad mayor a x , la distribución que se obtiene es

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - l^S(x)}{l^S(x)} \right) = \alpha + \beta x = Y^S(x)$$

La cual es una transformación de la escala de edades x . De este modo, la interpretación del sistema logito es que, si en una escala apropiada, la probabilidad de muerte a una edad determinada puede ser descrita por una distribución simétrica de una sola cúspide. Para diferentes poblaciones, la forma de esta distribución es la misma, pero su ubicación y su amplitud varían (Brass, 1971).

La media $-\frac{\alpha}{\beta}$ puede tomarse como una medida del nivel de la mortalidad. Nótese que al hacer la transformación nuevamente a la escala original, esta medida indica la edad hasta la cual sobreviven la mitad de los nacimientos. Por otro lado, el valor central de la desviación estándar $\frac{1}{\beta}$ se aproxima a uno. Los valores altos de β indican una amplitud relativamente escasa de las edades al morir y viceversa (Brass, 1971).

El parámetro β señala entonces las diferencias de la incidencia de la mortalidad por edades entre la tabla de vida estándar y la otra tabla de vida considerada. No obstante, los valores de α reflejan los niveles de la mortalidad. Se demuestra entonces que las relaciones entre los patrones de mortalidad en las diferentes poblaciones, pueden describirse en forma general mediante una ecuación lineal de dos parámetros en los logitos de las proporciones de

supervivencia. Entre los posibles usos de este modelo se encuentran la evaluación y ajuste de la información conocida, y la construcción de una tabla de vida (Chackiel, 1981).

Al construir las tablas se requieren datos confiables. No obstante, en los países en desarrollo generalmente se carece de información actualizada o bien la calidad de ésta no suele ser satisfactoria. Debido a esta situación, surge la dificultad de la construcción de tablas de mortalidad para analizar los niveles de mortalidad de las poblaciones. Entonces, al realizar una investigación de los cambios de mortalidad a través del tiempo, Brass (1971) sugiere que lo ideal sería una de las tablas de mortalidad de la población en estudio.

- Ejemplos

Debido a la falta de tablas de mortalidad por sexo en los diferentes años vía conciliación demográfica por parte de CONAPO, se tomaron las tablas de mortalidad por sexo de la conciliación demográfica realizada por SOMEDE. A partir de esta información, se utilizaron las tablas de mortalidad por sexo para los años 1990, 1995, 2000, 2005 y 2010.

Con la información proporcionada por las tablas de mortalidad, se aplicó el sistema de mortalidad de William Brass para relacionar las diferentes tablas de vida por sexo para los años 1990, 1995, 2000, 2005 y 2010 (ver Anexo Mortalidad), y posteriormente obtener la transformación de los valores de la serie de sobrevivientes a edad exacta x de las tablas en logitos.

Para indicar los pasos de aplicación, se toma como referencia el año 1990 únicamente como ejemplo para ilustrar el procedimiento, aunque es importante mencionar que dicho procedimiento se realiza para los años anteriormente mencionados. También se indica en los casos donde se realice algún procedimiento particular de un año en específico.

Primeramente, se transforma a la serie de sobrevivientes a edad exacta x de las tablas de manera que el rádix inicial sea 1, es decir, $l_0 = 1$. Una vez obtenida dicha transformación (ver Tabla 1), se procede a realizar la transformación logito por sexo a la serie de sobrevivientes con rádix unitario para todos los años (ver Tabla 2 y Tabla 3).

Tabla 1. Transformación logito de la serie de sobrevivientes a edad exacta x para hombres, República Mexicana 1990

x	n	l_x	$l_{(x)}$	$\lambda_{(1-l(x))}$
0	1	1000000	1	
1-4	4	960213	0.960213	-1.591807455
5-9	5	950825	0.950825	-1.480972332
10-14	5	947542	0.947542	-1.446929207
15-19	5	944060	0.94406	-1.412955018
20-24	5	937434	0.937434	-1.353462178
25-29	5	926488	0.926488	-1.266976218
30-34	5	912325	0.912325	-1.171179745
35-39	5	895979	0.895979	-1.076662087
40-44	5	877091	0.877091	-0.982583253
45-49	5	854020	0.85402	-0.883242493
50-54	5	824237	0.824237	-0.772660807
55-59	5	784605	0.784605	-0.646353427
60-64	5	731620	0.73162	-0.501428683
65-69	5	661886	0.661886	-0.335855109
70-74	5	573131	0.573131	-0.147318569
75-79	5	465986	0.465986	0.068133233
80-84	5	346277	0.346277	0.317722341
85-89	5	226506	0.226506	0.614073239
90-94	5	122927	0.122927	0.982499772
95-99	5	49541	0.049541	1.477072208
100 o más		12222	0.012222	2.196110185

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2. Transformación de logito por año para hombres, República Mexicana 1990-2010

Grupos de edad	Hombres				
	1990	1995	2000	2005	2010
0					
1-4	-2.1026	-2.1026	-2.1026	-2.1026	-2.0352
5-9	-2.0276	-2.0276	-2.0276	-2.0276	-1.9611
10-14	-1.9840	-1.9840	-1.9840	-1.9840	-1.9188
15-19	-1.9217	-1.9217	-1.9217	-1.9217	-1.8660
20-24	-1.7929	-1.7929	-1.7929	-1.7929	-1.7697
25-29	-1.6215	-1.6215	-1.6215	-1.6215	-1.6397
30-34	-1.4615	-1.4615	-1.4615	-1.4615	-1.5101
35-39	-1.3271	-1.3271	-1.3271	-1.3271	-1.3914
40-44	-1.2091	-1.2091	-1.2091	-1.2091	-1.2766
45-49	-1.0938	-1.0938	-1.0938	-1.0938	-1.1560
50-54	-0.9706	-0.9706	-0.9706	-0.9706	-1.0225
55-59	-0.8324	-0.8324	-0.8324	-0.8324	-0.8725
60-64	-0.6756	-0.6756	-0.6756	-0.6756	-0.7048
65-69	-0.4983	-0.4983	-0.4983	-0.4983	-0.5189
70-74	-0.2988	-0.2988	-0.2988	-0.2988	-0.3133
75-79	-0.0737	-0.0737	-0.0737	-0.0737	-0.0847
80-84	0.1838	0.1838	0.1838	0.1838	0.1738
85-89	0.4863	0.4863	0.4863	0.4863	0.4751
90-94	0.8597	0.8597	0.8597	0.8597	0.8444
95-99	1.3584	1.3584	1.3584	1.3584	1.3357
100 o más	2.0817	2.0817	2.0817	2.0817	2.0479

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Transformación logito por año para mujeres, República Mexicana 1990-2010

Grupos de edad	Mujeres				
	1990	1995	2000	2005	2010
0					
1-4	-2.2078	-2.2078	-2.2078	-2.2078	-2.1441
5-9	-2.1291	-2.1291	-2.1291	-2.1291	-2.0649
10-14	-2.0830	-2.0830	-2.0830	-2.0830	-2.0227
15-19	-2.0344	-2.0344	-2.0344	-2.0344	-1.9818
20-24	-1.9631	-1.9631	-1.9631	-1.9631	-1.9232
25-29	-1.8865	-1.8865	-1.8865	-1.8865	-1.8585
30-34	-1.8133	-1.8133	-1.8133	-1.8133	-1.7933
35-39	-1.7352	-1.7352	-1.7352	-1.7352	-1.7196
40-44	-1.6418	-1.6418	-1.6418	-1.6418	-1.6283
45-49	-1.5262	-1.5262	-1.5262	-1.5262	-1.5137
50-54	-1.3856	-1.3856	-1.3856	-1.3856	-1.3738
55-59	-1.2205	-1.2205	-1.2205	-1.2205	-1.2093
60-64	-1.0328	-1.0328	-1.0328	-1.0328	-1.0223
65-69	-0.8249	-0.8249	-0.8249	-0.8249	-0.8151
70-74	-0.5976	-0.5976	-0.5976	-0.5976	-0.5885
75-79	-0.3492	-0.3492	-0.3492	-0.3492	-0.3408
80-84	-0.0738	-0.0738	-0.0738	-0.0738	-0.0661
85-89	0.2408	0.2408	0.2408	0.2408	0.2479
90-94	0.6201	0.6201	0.6201	0.6201	0.6268
95-99	1.1177	1.1177	1.1177	1.1177	1.1240
100 o más	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8405

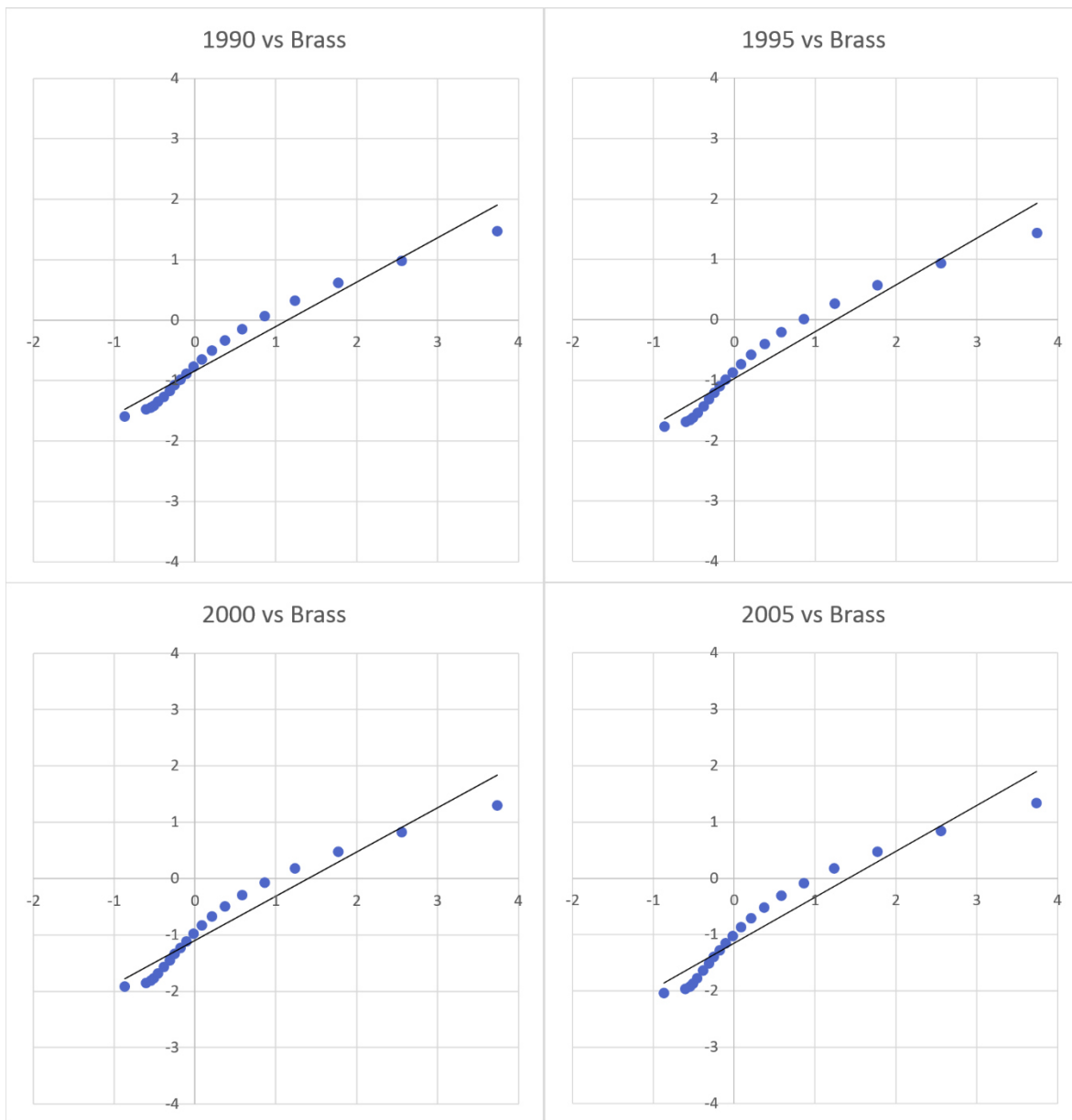
Fuente: Elaboración propia

Al relacionar las tablas de mortalidad de la República Mexicana con el estándar de Brass^{VI}, se espera obtener una relación lineal en todos los años. Para comprobar que dicha relación se cumpla, es necesario graficar los logitos obtenidos para cada uno de los años correspondientes con respecto del logito estándar propuesto por Brass y observar que efectivamente exista dicha relación. No obstante, al graficarlos se observa que el supuesto de

^{VI} Los valores del logito estándar de Brass se encuentran en el Anexo Mortalidad

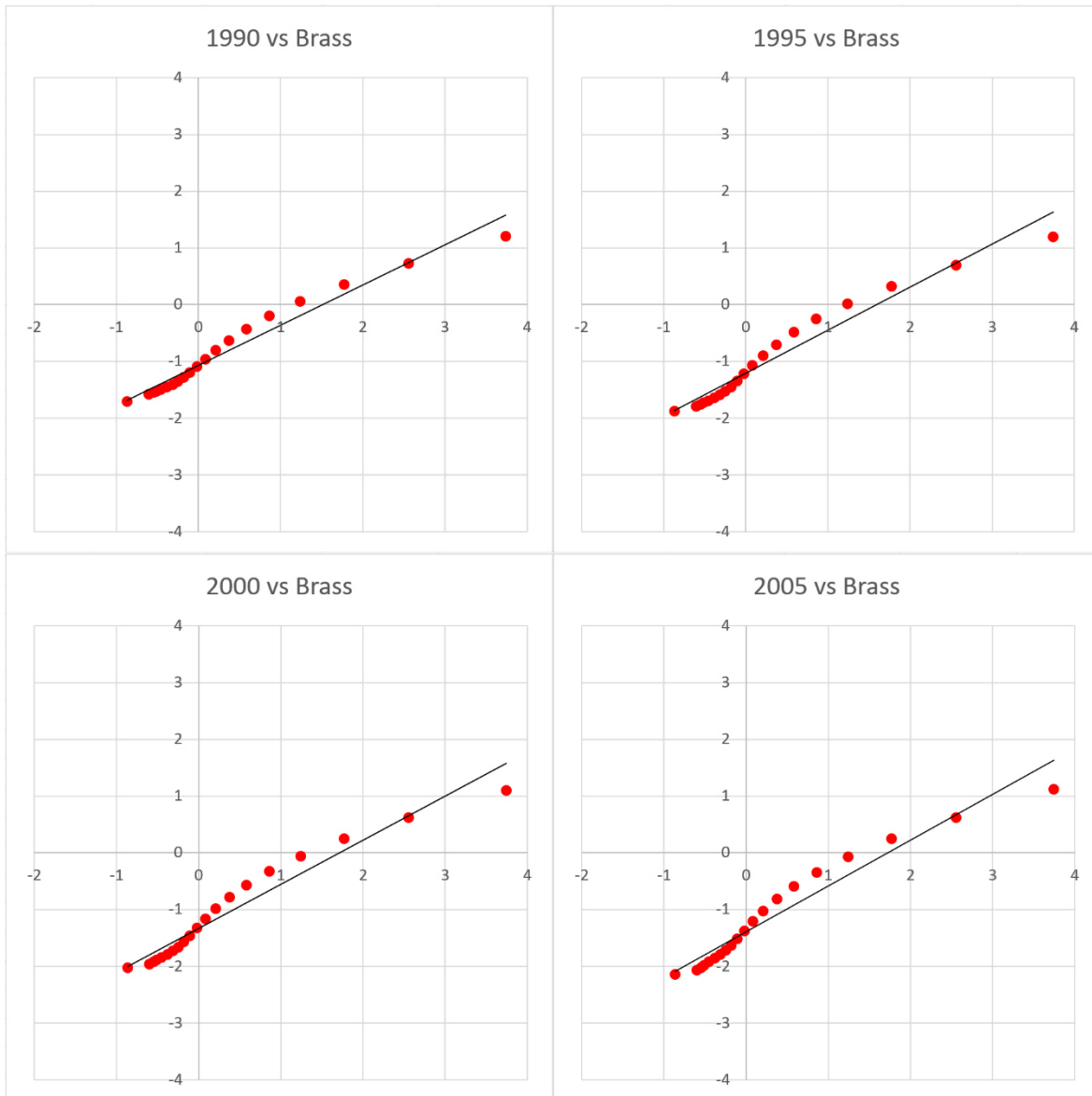
la relación lineal no se cumple en todos los años para ambos sexos (ver Gráfica 11 y Gráfica 12).

Gráfica 11. Función antilogito para hombres vs el estándar de Brass, República Mexicana 1990-2010



Fuente: Elaboración propia

Gráfica 12. Función antilogito para mujeres vs el estándar de Brass, República Mexicana 1990-2010

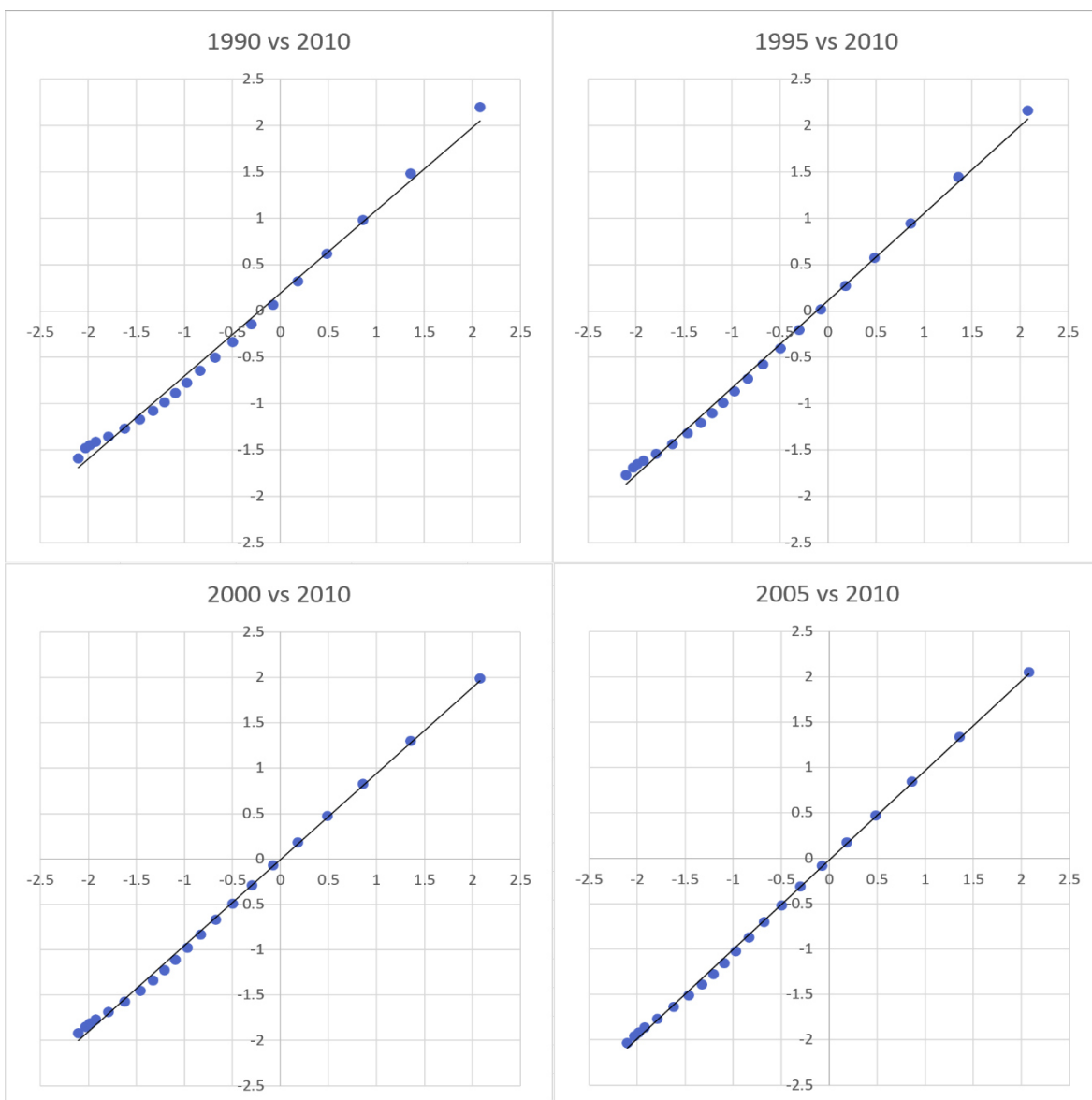


Fuente: Elaboración propia

Lo anterior es debido a que, si bien el estándar de mortalidad de Brass fue creado con base en tablas de mortalidad elegidas de áreas del mundo, dichas características de la mortalidad son diferentes a las del caso específico mexicano. Esas tablas fueron construidas con base en datos que los países, en especial europeos, mostraban (Chackiel, 1981), y por lo tanto, no reflejaba la experiencia mexicana de la mortalidad.

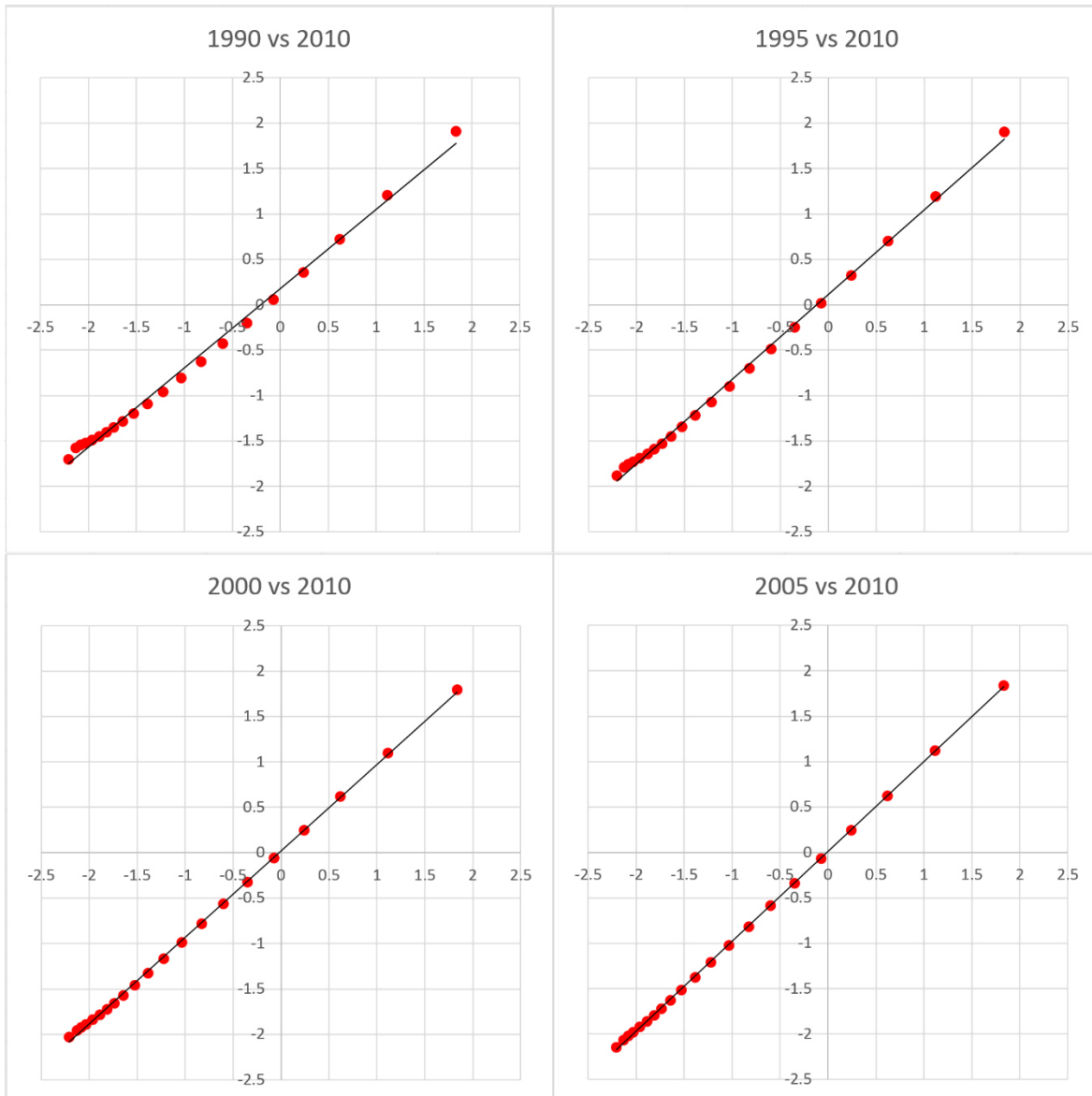
Como se mencionó anteriormente, Brass (1971) sugiere utilizar una de las tablas de mortalidad de la población en estudio cuando se realiza una investigación de los cambios de mortalidad a través del tiempo. Es por ello, que se toma la decisión de utilizar como estándar el logito del año 2010 de la República Mexicana. Por otro lado, al comprobar si se cumple el supuesto de la linealidad para el sistema logito, se observa que dicha relación lineal se cumple para todos los años para ambos sexos (ver Gráfica 13 y Gráfica 14).

Gráfica 13. Función antilogito para hombres vs el estándar de 2010, República Mexicana 1990-2005



Fuente: Elaboración propia

Gráfica 14. Función antilogito para mujeres vs el estándar de 2010, República Mexicana 1990-2005



Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, se procede a calcular el valor de los parámetros α y β a través de promedios móviles para todos los años por sexo (ver Tabla 4). Debido a que se trata de un sistema lineal, los valores de α y β corresponden a la ordenada en el origen y la pendiente, respectivamente.

$$\beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y } \alpha = -(\beta * x_1) + y_1$$

Tabla 4. Valores de los parámetros α y β por sexo, República Mexicana 1990-2005

	Hombres				Mujeres			
	1990	1995	2000	2005	1990	1995	2000	2005
X_1	-1.54098	-1.54098	-1.54098	-1.54098	-1.81981	-1.81981	-1.81981	-1.81981
X_2	0.25911	0.25911	0.25911	0.25911	-0.02858	-0.02858	-0.02858	-0.02858
Y_1	-1.18476	-1.34184	-1.48008	-1.55118	-1.39171	-1.57505	-1.71384	-1.78797
Y_2	0.40247	0.34863	0.24191	0.23827	0.12429	0.07371	-0.01154	-0.02029
β	0.88175	0.93910	0.95661	0.99408	0.84634	0.92046	0.95035	0.98685
α	0.17399	0.10529	-0.00596	-0.01931	0.14847	0.10002	0.01561	0.00791

Fuente: Elaboración propia

Una vez obtenidos los valores de los parámetros, se calcula el logito estimado por sexo para cada año con sus respectivos parámetros. Posteriormente, es posible corregir la serie de sobrevivientes a edad exacta x por sexo y para cada año al retomar la ecuación (18)

$$\hat{Y}(x) = \alpha + \beta Y^S(x)$$

Donde $Y^S(x)$ es el logito correspondiente al año 2010, que se utiliza como estándar porque cumple el supuesto de la relación lineal. Es importante recordar la expresión (15) ya que al aplicar el antilogito al logito estimado, se obtiene la serie de sobrevivientes a edad exacta x corregida por sexo y para cada año

$$\hat{l}(x) = \frac{1}{1 + e^{2\hat{Y}(x)}}$$

Posteriormente, es posible realizar la tabla de vida con los principales indicadores por sexo y para los años correspondientes (ver Tabla 5).

Tabla 5. Tabla de vida corregida para hombres, República Mexicana 1990

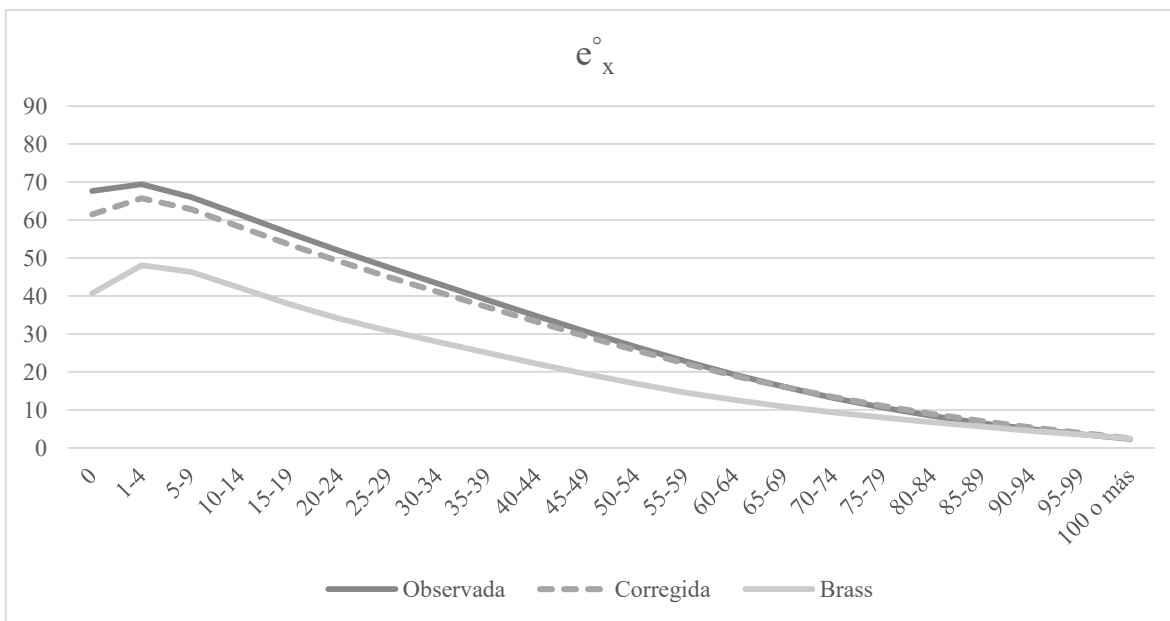
Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e_x°
0	0.07877	0.92123	1,000,000	78,772	960,614	61,498,664	61.50
1-4	0.01672	0.98328	921,228	15,403	3,654,108	60,538,049	65.71
5-9	0.00579	0.99421	905,826	5,248	4,516,009	56,883,941	62.80
10-14	0.00610	0.99390	900,578	5,495	4,489,154	52,367,932	58.15
15-19	0.01147	0.98853	895,083	10,269	4,449,745	47,878,778	53.49
20-24	0.01862	0.98138	884,815	16,479	4,382,875	43,429,033	49.08
25-29	0.02366	0.97634	868,335	20,544	4,290,316	39,046,159	44.97
30-34	0.02687	0.97313	847,791	22,776	4,182,015	34,755,843	41.00
35-39	0.03061	0.96939	825,015	25,255	4,061,936	30,573,827	37.06
40-44	0.03692	0.96308	799,760	29,530	3,924,972	26,511,891	33.15
45-49	0.04714	0.95286	770,229	36,311	3,760,369	22,586,919	29.32
50-54	0.06225	0.93775	733,919	45,689	3,555,369	18,826,550	25.65
55-59	0.08323	0.91677	688,229	57,283	3,297,939	15,271,181	22.19
60-64	0.11122	0.88878	630,946	70,176	2,979,293	11,973,242	18.98
65-69	0.14766	0.85234	560,771	82,805	2,596,843	8,993,949	16.04
70-74	0.19439	0.80561	477,966	92,910	2,157,557	6,397,106	13.38
75-79	0.25375	0.74625	385,057	97,706	1,681,016	4,239,549	11.01
80-84	0.32849	0.67151	287,350	94,392	1,200,770	2,558,532	8.90
85-89	0.42477	0.57523	192,958	81,963	759,882	1,357,762	7.04
90-94	0.55309	0.44691	110,995	61,390	401,498	597,880	5.39
95-99	0.70821	0.29179	49,605	35,130	160,196	196,382	3.96
100 o más	1.00000	0.00000	14,474	14,474	36,185	36,185	2.50

Fuente: Elaboración propia

Al analizar la esperanza de vida observada con la corregida, cuando se aplica el modelo logito tanto con el estándar de Brass como con el estándar del 2010, se observa que la esperanza de vida observada resulta ligeramente mayor que la esperanza de vida corregida para el año 1990 en ambos sexos (ver Gráfica 15 y Gráfica 16). No obstante, al utilizar el logito estándar de Brass se observa que la esperanza de vida disminuye considerablemente. Este comportamiento es consecuencia de que la experiencia de la mortalidad con la que se construyó el estándar de Brass no es reflejo de la experiencia que se observa en el caso específico mexicano. Al analizar los años restantes, se observa que la brecha entre la

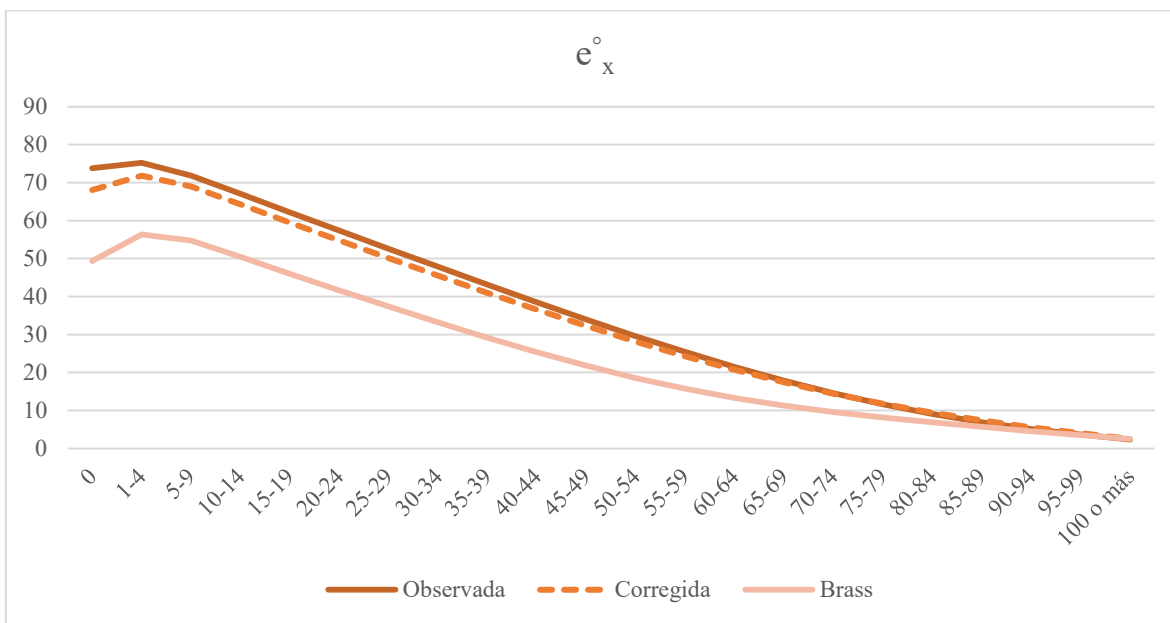
esperanza de vida corregida con la observada disminuye a través del tiempo (ver Anexo Mortalidad).

Gráfica 15. Esperanza de vida para los hombres, República Mexicana 1990



Fuente: Elaboración propia

Gráfica 16. Esperanza de vida para las mujeres, República Mexicana 1990



Fuente: Elaboración propia

- Análisis de la sensibilidad de los parámetros

Una vez realizada la aplicación al caso de México, se analizan las variaciones de la esperanza de vida al nacer en relación con los parámetros α y β . A continuación se muestran las variaciones en el nivel de la mortalidad al modificar los distintos valores de los parámetros, para observar la sensibilidad de ellos respecto con la esperanza de vida. Para lo anterior, se realiza el ejemplo únicamente para el caso de los hombres en el año de 1990.

Es posible observar que el determinante de reducir o aumentar la mortalidad en ciertas edades, es decir el patrón de la mortalidad, es el parámetro β . Si $\beta < 1$, se observa que la mortalidad aumenta en los grupos de edades jóvenes y disminuye en los grupos de edades avanzadas (ver Tabla 6 y Tabla 8). Caso contrario cuando $\beta > 1$, ya que la mortalidad es más alta en los grupos de edades avanzadas en comparación con los grupos de edades jóvenes (ver Tabla 6 y Tabla 8) (Carrier & Hobcraft, 1975).

Tabla 6. Variación en la esperanza de vida al nacimiento de los hombres en relación con los parámetros α y $\beta=0.6$, República Mexicana, 1990

Edad x (en años)	$\alpha=0.5$			$\alpha=0$			$\alpha=-0.5$			$\alpha=-1$		
	l_x	${}_nq_x$	e°_x	l_x	${}_nq_x$	e°_x	l_x	${}_nq_x$	e°_x	l_x	${}_nq_x$	e°_x
0	1,000,000	0.1290	43.52	1,000,000	0.1290	12.31	1,000,000	0.0517	15.80	1,000,000	0.0196	18.57
1	871,038	0.0180	59.84	871,038	0.0180	13.37	948,347	0.0073	15.77	980,356	0.0028	17.99
5	855,347	0.0060	58.20	855,347	0.0060	12.64	941,429	0.0024	14.90	977,625	0.0009	17.04
10	850,218	0.0062	53.93	850,218	0.0062	11.73	939,136	0.0025	13.94	976,713	0.0010	16.06
15	844,952	0.0113	49.62	844,952	0.0113	10.81	936,763	0.0047	12.98	975,768	0.0018	15.08
20	835,367	0.0177	45.78	835,367	0.0177	9.95	932,400	0.0073	12.05	974,021	0.0028	14.11
25	820,593	0.0214	42.44	820,593	0.0214	9.16	925,558	0.0090	11.15	971,262	0.0035	13.15
30	803,042	0.0231	39.25	803,042	0.0231	8.39	917,239	0.0098	10.27	967,873	0.0038	12.21
35	784,485	0.0251	36.01	784,485	0.0251	7.63	908,212	0.0109	9.39	964,153	0.0043	11.26
40	764,786	0.0289	32.73	764,786	0.0289	6.86	898,357	0.0127	8.51	960,040	0.0050	10.32
45	742,670	0.0352	29.47	742,670	0.0352	6.10	886,943	0.0158	7.65	955,208	0.0063	9.38
50	716,505	0.0443	26.33	716,505	0.0443	5.37	872,938	0.0204	6.80	949,174	0.0082	8.45
55	684,736	0.0565	23.35	684,736	0.0565	4.68	855,156	0.0268	5.97	941,344	0.0110	7.54
60	646,048	0.0722	20.55	646,048	0.0722	4.03	832,258	0.0356	5.18	930,972	0.0149	6.65
65	599,415	0.0923	17.92	599,415	0.0923	3.42	802,664	0.0477	4.43	917,058	0.0206	5.78
70	544,081	0.1186	15.45	544,081	0.1186	2.87	764,369	0.0650	3.72	898,145	0.0292	4.93
75	479,571	0.1538	13.10	479,571	0.1538	2.37	714,683	0.0906	3.06	871,942	0.0428	4.13
80	405,821	0.2024	10.86	405,821	0.2024	1.94	649,930	0.1301	2.48	834,620	0.0660	3.39
85	323,685	0.2733	8.72	323,685	0.2733	1.59	565,401	0.1946	1.99	779,561	0.1092	2.73
90	235,232	0.3826	6.66	235,232	0.3826	1.38	455,369	0.3062	1.66	694,449	0.1985	2.21

Fuente: Elaboración propia

Al asignar el valor de la unidad al parámetro β (ver Tabla 7), el parámetro α será considerado como el principal determinante de la intensidad de la mortalidad total (Carrier & Hobcraft, 1975). En este caso, como $\beta > 0$ el valor de α indica entonces si la mortalidad de la tabla de vida estándar es más alta en comparación con la tabla de vida generada ($\alpha > 0$). Por otro lado, si $\alpha < 0$ entonces la mortalidad de la tabla de vida es más alta en comparación con la tabla de vida estándar. Por lo tanto, las variaciones en α serán la causa más importante de cambios en la esperanza de vida al nacimiento (Carrier & Hobcraft, 1975).

Tabla 7. Variación en la esperanza de vida al nacimiento de los hombres en relación con los parámetros α y $\beta=1$, República Mexicana, 1990

Edad x (en años)	$\alpha=0.5$			$\alpha=0$			$\alpha=-0.5$			$\alpha=-1$		
	l_x	nq_x	e°_x	l_x	nq_x	e°_x	l_x	nq_x	e°_x	l_x	nq_x	e°_x
0	1,000,000	0.0398	53.65	1,000,000	0.0398	13.16	1,000,000	0.0150	15.46	1,000,000	0.0056	17.29
1	960,213	0.0098	58.63	960,213	0.0098	12.79	984,986	0.0037	14.73	994,424	0.0014	16.40
5	950,825	0.0035	56.06	950,825	0.0035	11.93	981,329	0.0013	13.79	993,049	0.0005	15.42
10	947,542	0.0037	51.52	947,542	0.0037	10.98	980,040	0.0014	12.81	992,563	0.0005	14.43
15	944,060	0.0070	46.97	944,060	0.0070	10.03	978,666	0.0027	11.83	992,045	0.0010	13.44
20	937,434	0.0117	42.75	937,434	0.0117	9.11	976,035	0.0045	10.87	991,048	0.0017	12.46
25	926,488	0.0153	38.92	926,488	0.0153	8.24	971,639	0.0060	9.93	989,376	0.0022	11.48
30	912,325	0.0179	35.28	912,325	0.0179	7.40	965,854	0.0071	9.00	987,161	0.0027	10.51
35	895,979	0.0211	31.70	895,979	0.0211	6.57	959,040	0.0084	8.08	984,531	0.0032	9.54
40	877,091	0.0263	28.14	877,091	0.0263	5.75	950,975	0.0107	7.17	981,388	0.0041	8.58
45	854,020	0.0349	24.70	854,020	0.0349	4.95	940,838	0.0144	6.26	977,390	0.0056	7.63
50	824,237	0.0481	21.44	824,237	0.0481	4.18	927,259	0.0205	5.38	971,950	0.0080	6.68
55	784,605	0.0675	18.44	784,605	0.0675	3.46	908,271	0.0299	4.53	964,178	0.0119	5.75
60	731,620	0.0953	15.73	731,620	0.0953	2.81	881,097	0.0446	3.73	952,703	0.0182	4.84
65	661,886	0.1341	13.32	661,886	0.1341	2.22	841,804	0.0676	2.97	935,337	0.0288	3.97
70	573,131	0.1869	11.21	573,131	0.1869	1.72	784,931	0.1038	2.29	908,432	0.0470	3.14
75	465,986	0.2569	9.35	465,986	0.2569	1.29	703,440	0.1611	1.70	865,732	0.0800	2.38
80	346,277	0.3459	7.70	346,277	0.3459	0.95	590,143	0.2490	1.21	796,499	0.1413	1.71
85	226,506	0.4573	6.22	226,506	0.4573	0.70	443,209	0.3775	0.85	683,922	0.2561	1.18
90	122,927	0.5970	4.88	122,927	0.5970	0.58	275,878	0.5502	0.66	508,749	0.4535	0.85

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8. Variación en la esperanza de vida al nacimiento de los hombres en relación con los parámetros α y $\beta=1.6$, República Mexicana, 1990

Edad x (en años)	$\alpha=0.5$			$\alpha=0$			$\alpha=-0.5$			$\alpha=-1$		
	l_x	${}_nq_x$	e°_x	l_x	${}_nq_x$	e°_x	l_x	${}_nq_x$	e°_x	l_x	${}_nq_x$	e°_x
0	1,000,000	0.0061	62.31	1,000,000	0.0061	13.87	1,000,000	0.0023	15.31	1,000,000	0.0008	16.50
1	993,903	0.0026	62.34	993,903	0.0026	12.97	997,748	0.0010	14.35	999,170	0.0004	15.52
5	991,329	0.0010	58.76	991,329	0.0010	12.01	996,793	0.0004	13.37	998,818	0.0001	14.52
10	990,341	0.0011	53.91	990,341	0.0011	11.02	996,425	0.0004	12.37	998,682	0.0002	13.53
15	989,244	0.0023	49.06	989,244	0.0023	10.04	996,016	0.0008	11.38	998,531	0.0003	12.53
20	987,017	0.0041	44.34	987,017	0.0041	9.06	995,184	0.0015	10.39	998,223	0.0006	11.53
25	982,949	0.0061	39.80	982,949	0.0061	8.11	993,659	0.0023	9.41	997,658	0.0008	10.54
30	976,973	0.0081	35.40	976,973	0.0081	7.17	991,404	0.0030	8.44	996,820	0.0011	9.55
35	969,091	0.0107	31.10	969,091	0.0107	6.25	988,403	0.0041	7.47	995,702	0.0015	8.56
40	958,682	0.0152	26.91	958,682	0.0152	5.34	984,392	0.0058	6.51	994,201	0.0022	7.58
45	944,085	0.0232	22.86	944,085	0.0232	4.45	978,676	0.0090	5.56	992,048	0.0034	6.60
50	922,192	0.0373	19.06	922,192	0.0373	3.60	969,896	0.0148	4.63	988,710	0.0056	5.63
55	887,787	0.0621	15.60	887,787	0.0621	2.81	955,567	0.0255	3.73	983,182	0.0098	4.67
60	832,656	0.1047	12.58	832,656	0.1047	2.09	931,155	0.0459	2.87	973,521	0.0182	3.74
65	745,497	0.1741	10.07	745,497	0.1741	1.49	888,423	0.0846	2.09	955,839	0.0353	2.85
70	615,720	0.2761	8.08	615,720	0.2761	1.01	813,273	0.1564	1.42	922,114	0.0718	2.02
75	445,708	0.4039	6.57	445,708	0.4039	0.67	686,105	0.2773	0.90	855,940	0.1498	1.30
80	265,668	0.5373	5.40	265,668	0.5373	0.43	495,822	0.4436	0.53	727,760	0.3010	0.74
85	122,923	0.6638	4.46	122,923	0.6638	0.28	275,871	0.6198	0.31	508,741	0.5251	0.39
90	41,328	0.7876	3.64	41,328	0.7876	0.19	104,893	0.7759	0.20	241,587	0.7458	0.22

Fuente: Elaboración propia

Es posible observar que en el caso específico de México, los valores de la esperanza de vida anteriores que se acercan más a la esperanza de vida observada de los hombres en el año de 1990, son los de $\alpha = 0.5$ y $\beta = 1.6$. Por otro lado, al aplicar el sistema logito con el estándar del año 2010, se obtuvieron valores de $\alpha = 0.17399$ y $\beta = 0.88175$. No obstante, los valores de $\alpha = 0.5$ y $\beta = 1.6$ se encuentran por debajo de lo observado en todas las edades, a excepción del grupo de menores de un año (ver Tabla 9).

Tabla 9. Variación en la esperanza de vida al nacimiento de los hombres en relación con los parámetros α y $\beta=1.6$ y los obtenidos con el estándar, República Mexicana, 1990

Edad x (en años)	$\alpha=0.5$ y $\beta=1.6$			$\alpha=0.1740$ y $\beta=0.8816$		
	l_x	${}_nq_x$	e°_x	l_x	${}_nq_x$	e°_x
0	1,000,000	0.0061	62.31	1,000,000	0.0788	61.50
1	993,903	0.0026	62.34	921,228	0.0167	65.71
5	991,329	0.0010	58.76	905,826	0.0058	62.80
10	990,341	0.0011	53.91	900,578	0.0061	58.15
15	989,244	0.0023	49.06	895,083	0.0115	53.49
20	987,017	0.0041	44.34	884,815	0.0186	49.08
25	982,949	0.0061	39.80	868,335	0.0237	44.97
30	976,973	0.0081	35.40	847,791	0.0269	41.00
35	969,091	0.0107	31.10	825,015	0.0306	37.06
40	958,682	0.0152	26.91	799,760	0.0369	33.15
45	944,085	0.0232	22.86	770,229	0.0471	29.32
50	922,192	0.0373	19.06	733,919	0.0623	25.65
55	887,787	0.0621	15.60	688,229	0.0832	22.19
60	832,656	0.1047	12.58	630,946	0.1112	18.98
65	745,497	0.1741	10.07	560,771	0.1477	16.04
70	615,720	0.2761	8.08	477,966	0.1944	13.38
75	445,708	0.4039	6.57	385,057	0.2537	11.01
80	265,668	0.5373	5.40	287,350	0.3285	8.90
85	122,923	0.6638	4.46	192,958	0.4248	7.04
90	41,328	0.7876	3.64	110,995	0.5531	5.39

Fuente: Elaboración propia

3.3.2.2 Fecundidad

La fecundidad es una de las variables demográficas principales. Representa uno de los componentes de la dinámica demográfica y se expresa principalmente a través de indicadores como las tasas específicas por edades y la tasa global de fecundidad^{VII} (TGF) (Mina Valdés, 1982).

Es posible analizar el comportamiento de la fecundidad a través de modelos matemáticos que caractericen dicho comportamiento. Al considerar la TGF se mide la intensidad de los eventos que se presentan del fenómeno, mientras que el calendario se obtiene con la distribución relativa de la fecundidad por edades. En general la intensidad y el calendario se encuentran asociados entre sí. Si bien la TGF mide un nivel determinado de la fecundidad, existen formas distintas de la curva de fecundidad por edades. Es decir, con el patrón de las tasas específicas por edad se obtienen diferentes curvas, por ejemplo, la curva indica si la fecundidad tiene una cúspide temprana, dilatada o tardía. Por otro lado, al observar la curva también es posible conocer la edad media de la fecundidad y la dispersión de indicadores de la estructura (Chackiel, 1979).

A continuación se presentan distintos modelos para analizar el fenómeno de la fecundidad que utilizan funciones de supervivencia.

Antes de describir los modelos, es importante conocer como antecedentes la hipótesis que planteó Gompertz como “la resistencia que tienen las personas para evitar la muerte disminuye a una tasa proporcional a ella misma en el tiempo” (Mina Valdés, 2001, pág. 132). Si bien, al recordar que la tasa específica de mortalidad se define como

$${}_n m_x = \frac{d(x, x+n)}{{}_n L_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{{}_n L_x}$$

Entonces si el intervalo se hace tender a cero, es decir hacerlo cada vez más pequeño como se desee, es posible conocer las personas que mueren en cada instante.

^{VII} Es posible interpretar la TGF como el número de hijos en promedio por mujer al final del periodo reproductivo que una cohorte hipotética de mujeres experimentaría, si se sujetan a las tasas específicas por edad de un momento determinado, y con el supuesto de que la mortalidad sea nula a lo largo del periodo reproductivo (Mina Valdés, 1982).

$$\frac{l_x - l_{x+h}}{h}$$

Entonces si se tiene a la serie de sobrevivientes a edad exacta x como una función con respecto de la edad ($l(x)$) y $h \rightarrow 0$, se tiene el siguiente límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x+h)}{h}$$

Es importante recordar la definición de la derivada de una función

$$\frac{d f(x)}{d x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Por lo tanto, al multiplicar la expresión $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x+h)}{h}$ por -1, se tiene la definición derivada de la siguiente manera

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x+h) - l(x)}{h} = \frac{d l(x)}{d x}$$

Ahora, es posible definir a la tasa instantánea de mortalidad al dividir la expresión anterior por la función $l(x)$

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x+h)}{h l(x)} = \frac{1}{l(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x+h)}{h}$$

Y al desarrollar la parte derecha de la ecuación se tiene

$$\mu(x) = \frac{1}{l(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x+h)}{h} = \frac{1}{l(x)} \left[-\frac{d}{d x} l(x) \right] = \frac{-\frac{d}{d x} l(x)}{l(x)} = -\frac{d}{d x} \ln(l(x))$$

La ecuación anterior expresa a la tasa instantánea de mortalidad ($\mu(x)$) como la derivada negativa respecto de x del logaritmo natural de la función $l(x)$, la cual es una ecuación diferencial y al resolverla para $\mu(x)$ se tiene

$$\int_0^x \mu(y) dy = - \int_0^x \frac{d}{d y} \ln(l(y)) dy$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo, se tiene que el lado derecho de la ecuación es

$$-\ln[l(y)]|_0^x = -\ln\left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)$$

Entonces,

$$\int_0^x \mu(y)dy = -\ln\left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)$$

Y por lo tanto, es posible encontrar una expresión para $l(x)$. Al multiplicar por -1, se tiene que

$$-\int_0^x \mu(y)dy = \ln\left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)$$

Al aplicar la exponencial

$$e^{-\int_0^x \mu(y)dy} = \frac{l(x)}{l(0)}$$

Y al despejar se obtiene

$$l(x) = l(0)e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$$

Si se define al inverso de la tasa instantánea de mortalidad resulta en la resistencia de las personas a la muerte

$$\frac{1}{\mu(x)}$$

Al aplicar la hipótesis de Gompertz, la resistencia que tienen las personas para evitar la muerte disminuye a una tasa proporcional a ella misma en el tiempo, se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\mu(x)} \right] = -h \left[\frac{1}{\mu(x)} \right]$$

$$\frac{\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\mu(x)} \right]}{\frac{1}{\mu(x)}} = -h$$

$$\frac{d}{dx} \ln\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = -h$$

Al integrar para todas las edades se tiene

$$\int_0^x \frac{d}{dy} \ln \left(\frac{1}{\mu(y)} \right) dy = \int_0^x -h dy$$
$$\ln \left[\frac{1}{\mu(y)} \right] \Big|_0^x = -hy \Big|_0^x$$
$$\ln \left[\frac{1}{\mu(x)} \right] - \ln \left[\frac{1}{\mu(0)} \right] = -(hx - 0)$$

Al aplicar leyes de los logaritmos se obtiene

$$\ln \left[\frac{\frac{1}{\mu(x)}}{\frac{1}{\mu(0)}} \right] = -hx$$
$$\ln \left[\frac{\mu(0)}{\mu(x)} \right] = -hx$$

Al aplicar la exponencial

$$\frac{\mu(0)}{\mu(x)} = e^{-hx}$$

Al despejar $\mu(x)$, se obtiene

$$\mu(x) = \mu(0)e^{hx}$$

Si se denota a $\mu(0) = B$ y $e^h = C$, entonces la expresión resultante es

$$\mu(x) = BC^x$$

La cual es una expresión para la tasa instantánea de mortalidad a partir del supuesto de Gompertz. Entonces al aplicar la definición de tasa instantánea de mortalidad para encontrar la expresión de $l(x)$,

$$\mu(x) = BC^x = -\frac{d}{dx} \ln(l(x))$$

Integrando para todas las edades, se tiene que

$$\int_0^x \mu(y) dy = \int_0^x BC^y dy$$

Es importante observar que

$$\begin{aligned} G(y) &= C^y \\ \Rightarrow \ln G(y) &= y \ln C \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} \ln G(y) &= \frac{d}{dy} y \ln C \\ \Rightarrow \frac{\frac{d}{dy} G(y)}{G(y)} &= \ln C \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} G(y) &= G(y) \ln C \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} C^y &= C^y \ln C \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} \frac{C^y}{\ln C} &= C^y \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^x BC^y dy = B \int_0^x C^y dy = B \left[\frac{C^y}{\ln C} \right]_0^x = \frac{B}{\ln C} [C^y]_0^x = \frac{B}{\ln C} [C^x - 1]$$

Entonces la expresión de $l(x)$ que resulta es

$$\begin{aligned} l(x) &= l(0)e^{-\int_0^x \mu(y) dy} = l(0)e^{-\int_0^x BC^y dy} = l(0)e^{-\left[\frac{B}{\ln C}\right][C^x-1]} = l(0)e^{\left[\frac{B}{\ln C}\right][1-C^x]} \\ &= l(0)e^{\left[\frac{B}{\ln C} - \frac{BC^x}{\ln C}\right]} = l(0)e^{\left[\frac{B}{\ln C}\right]} e^{\left[-\frac{BC^x}{\ln C}\right]} \end{aligned}$$

Si se denota a $K = l(0)e^{\left[\frac{B}{\ln C}\right]}$, $a = e^{-\left[\frac{B}{\ln C}\right]}$ y $b = C$

Por consiguiente, la función de supervivencia de Gompertz es de la forma

$$l(x) = Ka^{b^x}$$

Esta función matemática ha sido empleada anteriormente para describir el fenómeno de la fecundidad por diversos autores^{VIII}, en especial para describir las curvas de la fecundidad (Brass, 1977)

- Modelo del doble logaritmo de la función de Gompertz

Este modelo se inspira en ideas de Brass y Kandiah, basados en la función de Gompertz linealizada mediante una función transformación logarítmica. Sirve para realizar ajustes del patrón de fecundidad por edades y obtener una coherencia entre los niveles de fecundidad y la distribución relativa por edades. También permite ajustar irregularidades en la deficiencia de la calidad de la información. Una vez que se realiza el ajuste, es posible proyectar la estructura de la fecundidad por edades (Chackiel, 1979).

Si se define a la fecundidad acumulada como

$$F(x) = \sum_{i=15}^x f_i$$

También conocida como la paridez media, es decir, el número de hijos por mujer a una edad determinada. La representación de dicha fecundidad acumulada mediante la función Gompertz es

$$F(x) = TGF * A^{B^x} \quad (20)$$

Donde

x , es la edad

$F(x)$, es la fecundidad acumulada hasta edad x

TGF , es la tasa global de fecundidad

A y B , son los parámetros que varían alrededor de 0 y 1, respectivamente

Entonces la distribución relativa acumulada se obtiene de la siguiente manera

^{VIII} Brass menciona autores como Wunch y Martin, Murphy y Nagmur.

$$\frac{F(x)}{TGF} = A^{B^x} \quad (21)$$

Al aplicar logaritmo natural se obtiene

$$\ln\left(\frac{F(x)}{TGF}\right) = B^x \ln(A)$$

No obstante, es posible notar que ambos miembros de la igualdad son negativos por lo que ambos se multiplican por -1,

$$-\ln\left(\frac{F(x)}{TGF}\right) = B^x - \ln(A)$$

Y al aplicar de nuevo logaritmo natural se tiene que

$$\ln\left[-\ln\left(\frac{F(x)}{TGF}\right)\right] = x \ln(B) + \ln(-\ln(A)) \quad (22)$$

La expresión anterior constituye una recta de la forma

$$V(x) = \alpha_0 + \beta_0 x \quad (23)$$

Donde $V(x) = \ln\left[-\ln\left(\frac{F(x)}{TGF}\right)\right]$, $\alpha_0 = \ln(-\ln(A))$ y $\beta_0 = \ln(B)$

Al considerar una distribución estándar (modelo) $\frac{F^S(x)}{TGF^S}$, entonces se tiene una recta

$$V^S(x) = \alpha_S + \beta_S x \quad (24)$$

Donde

$$V^S(x) = \ln\left[-\ln\left(\frac{F^S(x)}{TGF^S}\right)\right]$$

Si se cumple que $V(x)$ y $V^S(x)$ tienen un comportamiento lineal cada uno con respecto a la edad x , entonces también existe una relación lineal entre ellos. Es posible demostrar que existe dicha relación lineal, al despejar a x de la ecuación (24), se obtiene

$$x = \frac{1}{\beta_S} V^S(x) - \frac{\alpha_S}{\beta_S}$$

Y al sustituir lo anterior en la expresión (23), se obtiene

$$V(x) = \alpha_0 - \alpha_s \frac{\beta_0}{\beta_s} + \frac{\beta_0}{\beta_s} V^S(x)$$

Donde

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_s \frac{\beta_0}{\beta_s} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\beta_0}{\beta_s}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$V(x) = \alpha + \beta V^S(x) \quad (24)$$

Es posible notar que el desarrollo que se plantea por Chackiel (1979) tiene gran similitud con lo que planteó Brass aplicado al fenómeno de mortalidad a través del sistema logito (ver apartado de 3.4.1 Mortalidad). Al graficar los valores de $V^S(x)$ en el eje de las abscisas y $V(x)$ en el eje de las ordenadas, se puede observar el comportamiento lineal entre ellas. Por otro lado, los valores de α y β se calculan a través de promedios móviles, donde se plantean las siguientes expresiones

$$\bar{V}_1(x) = \alpha + \beta \bar{V}_1^S(x) \quad (25)$$

$$\bar{V}_2(x) = \alpha + \beta \bar{V}_2^S(x) \quad (26)$$

Si se tienen edades de 15 hasta 50 años, entonces las $V(x)$ toman valores quinquenales desde 20 hasta 45, entonces por promedios móviles los valores de $\bar{V}_1(x)$ y $\bar{V}_2(x)$ están dados por

$$\bar{V}_1(x) = \frac{V(20) + V(25) + V(30)}{3}$$

$$\bar{V}_2(x) = \frac{V(35) + V(40) + V(45)}{3}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{20 + 25 + 30}{3} = 25$$

$$\bar{X}_2 = \frac{35 + 40 + 45}{3} = 40$$

Análogamente al utilizar la distribución estándar, sucede para $\overline{V}_1^S(x)$ y $\overline{V}_2^S(x)$. A partir de lo anterior, se toman dos puntos de la siguiente forma

$$P_1 = \left(\frac{V^S(20) + V^S(25) + V^S(30)}{3}, \frac{V(20) + V(25) + V(30)}{3} \right) = \left(\overline{V_1^S}(x), \overline{V_1}(x) \right)$$

$$P_2 = \left(\frac{V^S(35) + V^S(40) + V^S(45)}{3}, \frac{V(35) + V(40) + V(45)}{3} \right) = \left(\overline{V_2^S}(x), \overline{V_2}(x) \right)$$

Entonces, la estimación de los parámetros se obtiene igualando las relaciones (25) y (26)

$$\hat{\beta} = \frac{\overline{V_2}(x) - \overline{V_1}(x)}{\overline{V_2^S}(x) - \overline{V_1^S}(x)}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{V_1}(x) - \beta \overline{V_1^S}(x)$$

Los valores de los parámetros sirven para ajustar las estructuras de la fecundidad. Con dichos valores es posible obtener los valores teóricos y diferenciarlos de los valores observados.

Como se mencionó anteriormente, existe una relación entre el nivel general de la fecundidad y su distribución relativa por edades, esto significa que a su vez existe una relación entre el nivel general de la fecundidad y los parámetros α y β , debido a que éstos últimos definen la estructura de la fecundidad por edades a partir de una estructura estándar de la fecundidad.

Al analizar la tendencia de los parámetros a través del tiempo es posible proyectar la estructura de la fecundidad. El proceso de analizar dichos parámetros considerando las variaciones en la fecundidad, se logra a partir de la siguiente expresión

$$V(x, t) = \alpha(t) + \beta(t) V^S(x, t_s)$$

Donde

t , se refiere a un momento o periodo en específico

t_s , se refiere al momento o periodo de la estructura estándar

- Ejemplos

El modelo permite desagregar la TGF en edades individuales, es decir, a partir de la TGF es posible obtener las tasas específicas de fecundidad por edades individuales y, con ello, la estructura de la fecundidad. Primeramente, se calcula la tasa global de fecundidad para cada año (como la suma de las tasas específicas multiplicada por cinco), con base en la

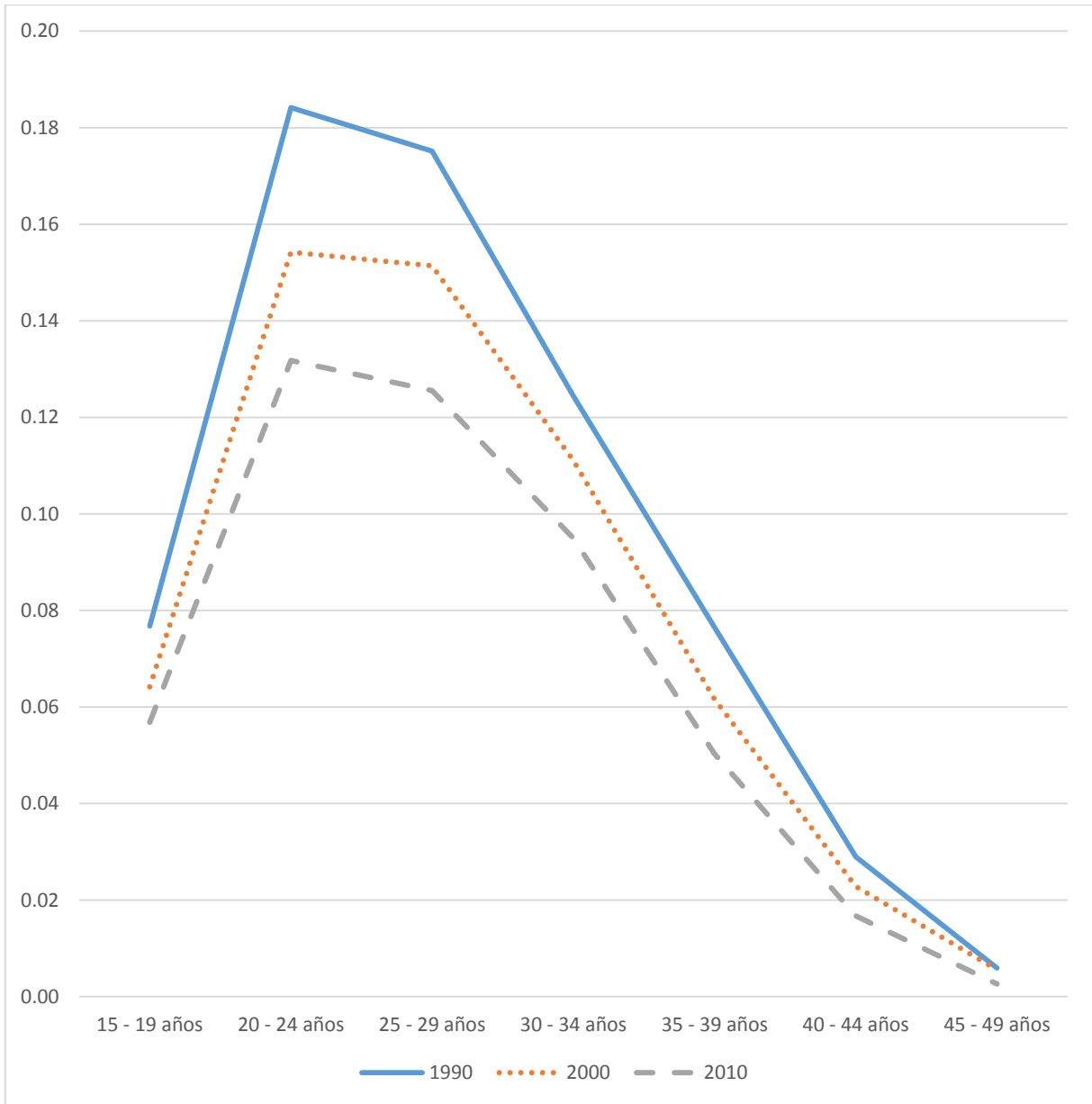
información de la conciliación demográfica realizada por CONAPO correspondiente a los años 1990, 2000 y 2010 (ver Tabla 10 y Gráfica 17).

Tabla 10. Tasas específicas de fecundidad, República Mexicana 1990-2010

Grupos de edad	1990	2000	2010
15 - 19 años	0.07681	0.06420	0.05686
20 - 24 años	0.18415	0.15420	0.13177
25 - 29 años	0.17513	0.15140	0.12554
30 - 34 años	0.12445	0.11110	0.09501
35 - 39 años	0.07656	0.06170	0.05032
40 - 44 años	0.02894	0.02280	0.01671
45 - 49 años	0.00592	0.00560	0.00265
TGF	3.36	2.86	2.39

Fuente: Elaboración propia con datos de la conciliación demográfica CONAPO (2011).

Gráfica 17. Tasas específicas de fecundidad por grupos de edad, República Mexicana 1990-2010



Fuente: Elaboración propia con datos de la conciliación demográfica CONAPO (2011).

Una vez calculada la TGF, se calcula el valor de $F(x)$ y $V(x)$ para los años de 1990, 2000 y 2010 (ver Tabla 11) con las siguientes expresiones definidas anteriormente

$$F(x) = \sum_{i=15}^x f_i \quad \text{y} \quad V(x) = \ln \left[-\ln \left(\frac{F(x)}{TGF} \right) \right]$$

Tabla 11. Cálculo del doble logaritmo de la estructura de la fecundidad acumulada $V(x)$,
República Mexicana 1990-2010

Grupos de Edad	x	1990			2000			2010		
		sf_x	F(x)	V(x)	sf_x	F(x)	V(x)	sf_x	F(x)	V(x)
15-19	15	0,07681	0		0,06420	0		0,05686	0	
20-24	20	0,18415	0,38403	0,77422862	0,15420	0,32100	0,78179	0,13177	0,28432	0,75647
25-29	25	0,17513	1,30478	-0,05566094	0,15140	1,09200	-0,03972	0,12554	0,94315	-0,07082
30-34	30	0,12445	2,18044	-0,83848609	0,11110	1,84900	-0,83373	0,09501	1,57086	-0,86400
35-39	35	0,07656	2,80267	-1,70750735	0,06170	2,40450	-1,76183	0,05032	2,04591	-1,84991
40-44	40	0,02894	3,18549	-2,93212037	0,02280	2,71300	-2,97560	0,01671	2,29751	-3,18769
45-49	45	0,00592	3,33021	-4,72688007	0,00560	2,82700	-4,61970	0,00265	2,38107	-5,19478
50	50		3,35983			2,85500			2,39431	

Fuente: Elaboración propia con datos de la conciliación demográfica CONAPO (2011).

Posteriormente, con los datos anteriores es posible obtener dos puntos y calcular el valor de los parámetros a través de promedios móviles, donde

$$P_1 = \left(\frac{20 + 25 + 30}{3}, \frac{V(20) + V(25) + V(30)}{3} \right) = (\bar{X}_1, \bar{V}_1(x))$$

$$P_2 = \left(\frac{35 + 40 + 45}{3}, \frac{V(35) + V(40) + V(45)}{3} \right) = (\bar{X}_2, \bar{V}_2(x))$$

Entonces,

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{V}_2(x) - \bar{V}_1(x)}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{V}_1(x) - \hat{\beta} \bar{X}_1$$

Los valores de los parámetros estimados correspondientes a los años 1990, 2000 y 2010 (ver Tabla 12) se utilizan para calcular nuevamente los valores de $V(x)$ con las edades desplegadas (ver Tabla 19, Tabla 14 y Tabla 15).

Tabla 12. Valores estimados de los parámetros α y β , República Mexicana 1990-2010

	1990	2000	2010
α	5.09702130	5.11693743	5.52612090
β	-0.20547976	-0.20589953	-0.22342285

Fuente: Elaboración propia.

Los valores estimados de $V(x)$ se calculan con la expresión

$$\hat{V}(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$$

Y los valores de $F(x)$ estimados se obtienen despejando de

$$\hat{V}(x) = \ln \left[-\ln \left(\frac{\hat{F}(x)}{TGF} \right) \right]$$

$$\Rightarrow e^{\hat{V}(x)} = -\ln \left(\frac{\hat{F}(x)}{TGF} \right)$$

$$\Rightarrow -e^{\hat{V}(x)} = \ln \left(\frac{\hat{F}(x)}{TGF} \right)$$

$$\Rightarrow e^{-e^{\hat{V}(x)}} = \frac{\hat{F}(x)}{TGF}$$

$$\Rightarrow \hat{F}(x) = TGF e^{-e^{\hat{V}(x)}}$$

Por último, se realiza la desagregación de la fecundidad acumulada ($\hat{F}(x)$) para obtener la estructura por edad individuales de la fecundidad con la siguiente expresión

$$\hat{f}(x) = \hat{F}(x + 1) - \hat{F}(x)$$

Es importante notar que en la edad de 15 años la fecundidad acumulada es cero, por lo que a la edad de 16 años, la tasa específica desagregada en los 15 años es la fecundidad acumulada a edad 16.

Tabla 13. Desagregación de la estructura de la fecundidad por edades, República Mexicana 1990

x	V(x)	F(x)	$f(x)$
15	2.01482484	0	0.00749
16	1.80934507	0.007487	0.01579
17	1.60386531	0.023276	0.03534
18	1.39838555	0.058615	0.06572
19	1.19290578	0.124337	0.10503
20	0.98742602	0.229368	0.14826
21	0.78194625	0.377633	0.18911
22	0.57646649	0.566744	0.22203
23	0.37098673	0.788776	0.24364
24	0.16550696	1.032414	0.25299
25	-0.03997280	1.285406	0.25114
26	-0.24545257	1.536551	0.24032
27	-0,45093233	1.776876	0.22319
28	-0.65641209	2.000068	0.20229
29	-0.86189186	2.202357	0.17974
30	-1.06737162	2.382092	0.15713
31	-1.27285139	2.539224	0.13557
32	-1.47833115	2.674794	0.11572
33	-1.68381092	2.790513	0.09791
34	-1.88929068	2.888425	0.08226
35	-2.09477044	2.970683	0.06871
36	-2.30025021	3.039390	0.05712
37	-2.50572997	3.096506	0.04730
38	-2.71120974	3.143806	0.03905
39	-2.91668950	3.182853	0.03215
40	-3.12216926	3.215005	0.02642
41	-3.32764903	3.241425	0.02167
42	-3.53312879	3.263098	0.01775
43	-3.73860856	3.280852	0.01453
44	-3.94408832	3.295380	0.01188
45	-4.14956808	3.307257	0.00970
46	-4.35504785	3.316960	0.00792
47	-4.56052761	3.324881	0.00646
48	-4.76600738	3.331345	0.00527
49	-4.97148714	3.336618	0.00430
50	-5.17696690	3.340917	

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 14. Desagregación de la estructura de la fecundidad por edades, República Mexicana 2000

x	V(x)	F(x)	$\hat{f}(x)$
15	2.02844446	0	0.00587
16	1.82254493	0.005866	0.01269
17	1.61664540	0.018554	0.02881
18	1.41074586	0.047362	0.05419
19	1.20484633	0.101553	0.08738
20	0.99894680	0.188936	0.12422
21	0.79304727	0.313157	0.15931
22	0.58714774	0.472471	0.18784
23	0.38124821	0.660314	0.20680
24	0.17534867	0.867110	0.21527
25	-0.03055086	1.082378	0.21409
26	-0.23645039	1.296472	0.20515
27	-0.44234992	1.501624	0.19071
28	-0.64824945	1.692339	0.17297
29	-0.85414898	1.865309	0.15375
30	-1.06004851	2.019062	0.13445
31	-1.26594805	2.153512	0.11601
32	-1.47184758	2.269525	0.09902
33	-1.67774711	2.368549	0.08378
34	-1.88364664	2.452326	0.07037
35	-2.08954617	2.522697	0.05876
36	-2.29544570	2.581461	0.04884
37	-2.50134524	2.630298	0.04043
38	-2.70724477	2.670729	0.03337
39	-2.91314430	2.704095	0.02746
40	-3.11904383	2,731559	0.02256
41	-3.32494336	2.754118	0.01850
42	-3.53084289	2.772617	0.01515
43	-3.73674243	2.787765	0.01239
44	-3.94264196	2.800155	0.01013
45	-4.14854149	2.810281	0.00827
46	-4.35444102	2.818549	0.00675
47	-4.56034055	2.825297	0.00550
48	-4.76624008	2.830800	0.00449
49	-4.97213961	2.835288	0.00366
50	-5.17803915	2.838946	

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 15. Desagregación de la estructura de la fecundidad por edades, República Mexicana 2010

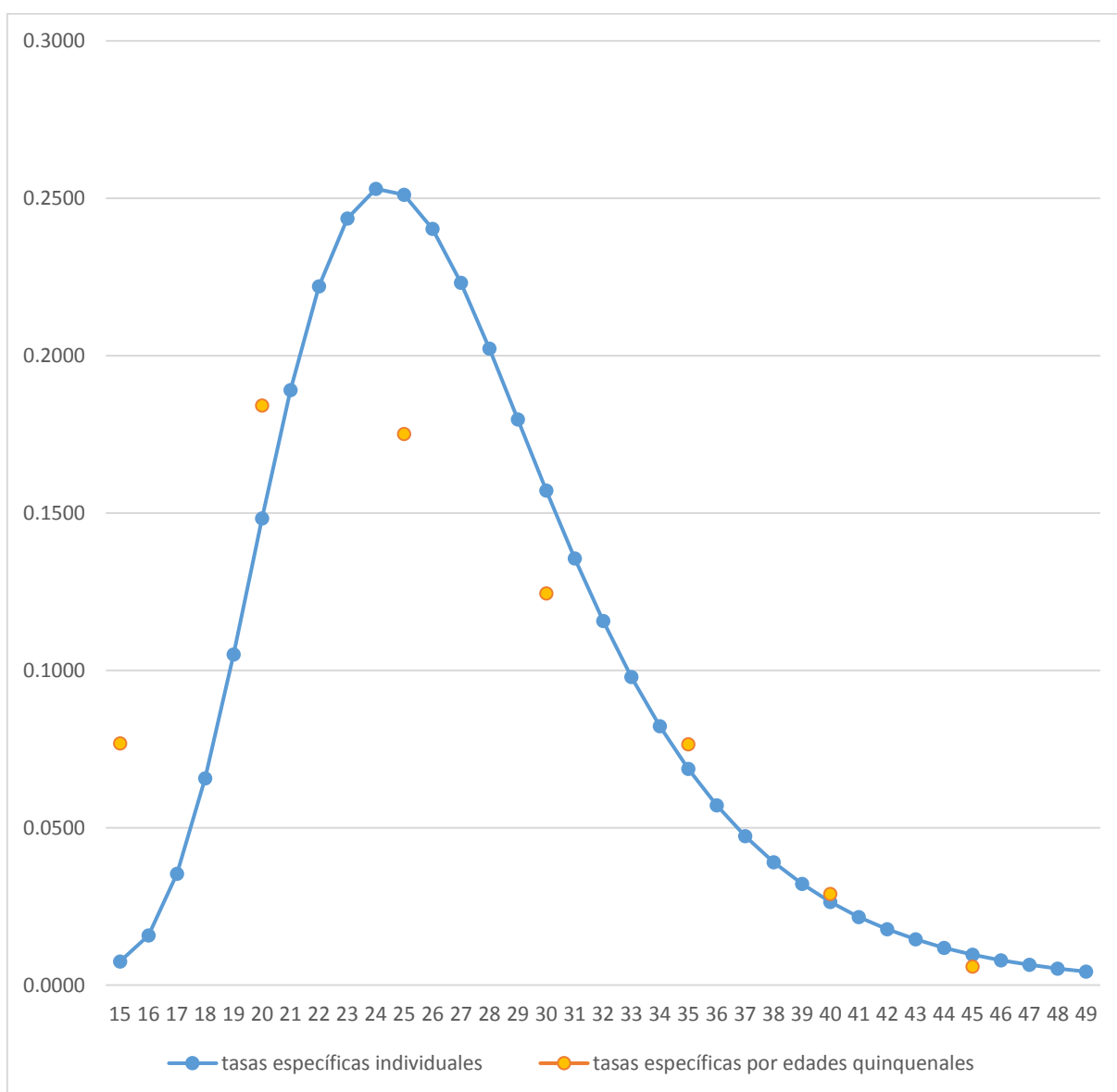
x	V(x)	F(x)	$\hat{f}(x)$
11	3.06846956	0	0.00000
12	2.84504671	0.000000	0.00000
13	2.62162386	0.000003	0.00004
14	2.39820101	0.000040	0.00032
15	2.17477816	0.000361	0.00174
16	1.95135531	0.002101	0.00650
17	1.72793246	0.008601	0.01795
18	1.50450961	0.026547	0.03884
19	1.28108676	0.065385	0.06907
20	1.05766391	0.134453	0.10486
21	0.83424106	0.239316	0.14021
22	0.61081821	0.379521	0.16927
23	0.38739536	0.548787	0.18827
24	0.16397251	0.737058	0.19609
25	-0.05945034	0.933150	0.19376
26	-0.28287319	1.126909	0.18354
27	-0.50629604	1.310449	0.16808
28	-0.72971889	1.478531	0.14982
29	-0.95314174	1.628347	0.13067
30	-1.17656458	1.759021	0.11202
31	-1.39998743	1.871038	0.09470
32	-1.62341028	1.965740	0.07918
33	-1.84683313	2.044918	0.06561
34	-2.07025598	2.110532	0.05399
35	-2.29367883	2.164521	0.04417
36	-2.51710168	2.208692	0.03597
37	-2.74052453	2.244667	0.02919
38	-2.96394738	2.273860	0.02362
39	-3.18737023	2.297481	0.01907
40	-3.41079308	2.316549	0.01536
41	-3.63421593	2.331913	0.01236
42	-3.85763878	2.344274	0.00993
43	-4.08106163	2.354207	0.00797
44	-4.30448448	2.362182	0.00640
45	-4.52790733	2.368579	0.00513
46	-4.75133018	2.373708	0.00411
47	-4.97475303	2.377818	0.00329
48	-5.19817588	2.381110	0.00264

49	-5.42159873	2.383747	0.00211
50	-5.64502158	2.385857	

Fuente: Elaboración propia.

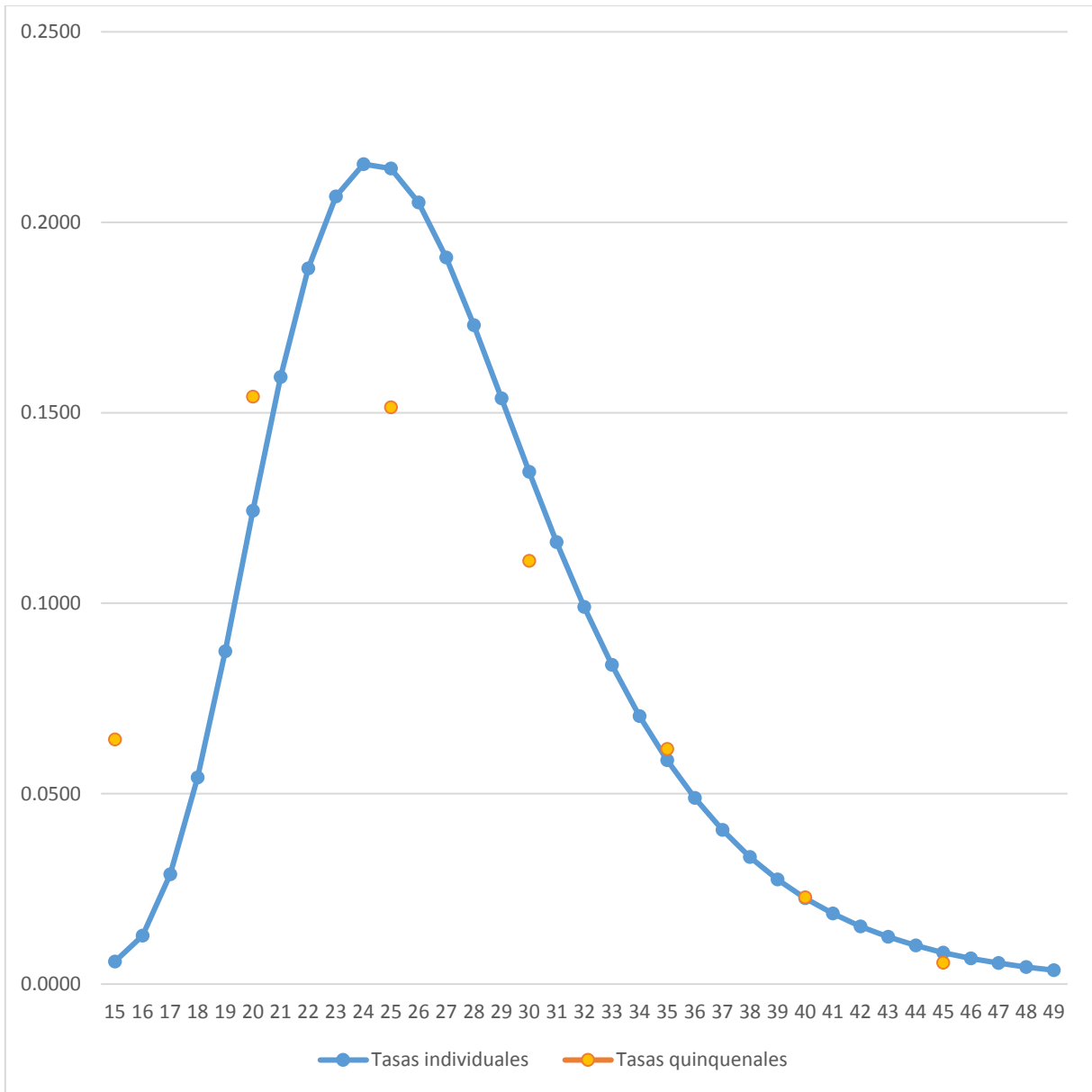
Al graficar la curva de la estructura de la fecundidad para los años correspondientes es posible analizar dicha estructura, así como los cambios en los niveles de fecundidad (ver Gráfica 18, Gráfica 19 y Gráfica 20).

Gráfica 18. Tasas específicas por edades individuales y edades quinquenales, República Mexicana 1990



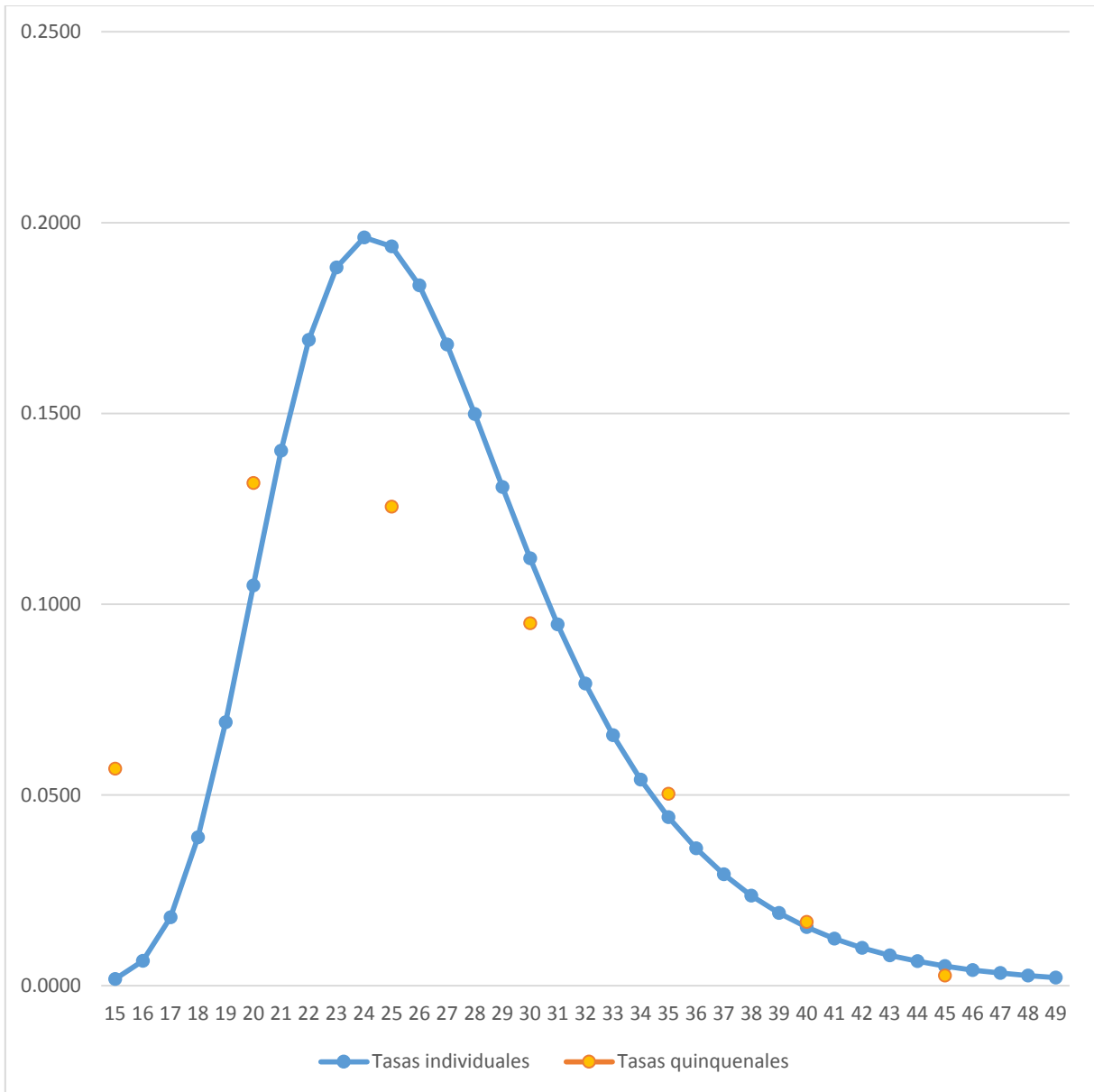
Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 19. Tasas específicas por edades individuales y edades quinquenales, República Mexicana 2000



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 20. Tasas específicas por edades individuales y edades quinquenales, República Mexicana 2010



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, en la mayoría de los países la información de las tasas específicas por edad se obtiene de los datos censales o de encuestas. No obstante, en los países con estadísticas insuficientes surgen los problemas como errores e irregularidades en la información, como por ejemplo la mala declaración de la edad o el número de hijos nacidos vivos que declaran las mujeres.

Debido a lo anterior, el modelo tiene la ventaja de que permite ajustar la estructura de la fecundidad observada. Para ello, requiere de una estructura de la fecundidad por edades estándar. La elección de la estructura de la fecundidad estándar es muy importante ya que en ocasiones dicha distribución resulta muy diferente a la estructura observada.

Heather Booth propone una distribución estándar con la intención de que dicha estructura de la fecundidad estándar fuera de uso universal (Chackiel, 1979) (ver Tabla 16).

Tabla 16. Estándar de la fecundidad de Heather Booth

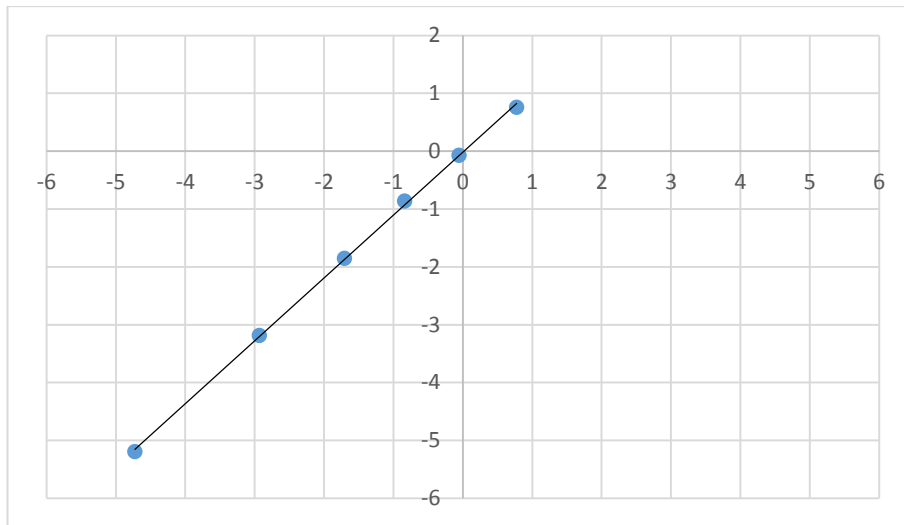
Edad	$V^s(x)$	Edad	$V^s(x)$	Edad	$V^s(x)$
11	3.18852	24	0.10783	37	-1.86597
12	2.70008	25	-0.02564	38	-2.08894
13	2.37295	26	-0.15853	39	-2.33192
14	2.07262	27	-0.29147	40	-2.62602
15	1.77306	28	-0.42515	41	-2.95500
16	1.49286	29	-0.56101	42	-3.32873
17	1.25061	30	-0.70000	43	-3.75984
18	1.04479	31	-0.84272	44	-4.25499
19	0.85927	32	-0.99014	45	-4.80970
20	0.69130	33	-1.14407	46	-5.41311
21	0.53325	34	-1.30627	47	-6.12864
22	0.38524	35	-1.47872	48	-7.07022
23	0.24423	36	-1.66426	49	-8.64839

Fuente: Elaboración propia, con información de Chackiel, J. (1979). *Estructura de la fecundidad por edades: ajuste y proyección mediante la función Gompertz linealizada*. Notas de Población, CELADE, 9-33.

Existe la posibilidad de que dicho estándar no conduzca a resultados satisfactorios, en especial si los valores de los parámetros de α y β se alejan demasiado de 0 y 1 respectivamente, por lo que Chackiel (1979) recomienda realizar pruebas con otras estructuras más apropiadas del caso particular que se analiza. Es por ello que para realizar el

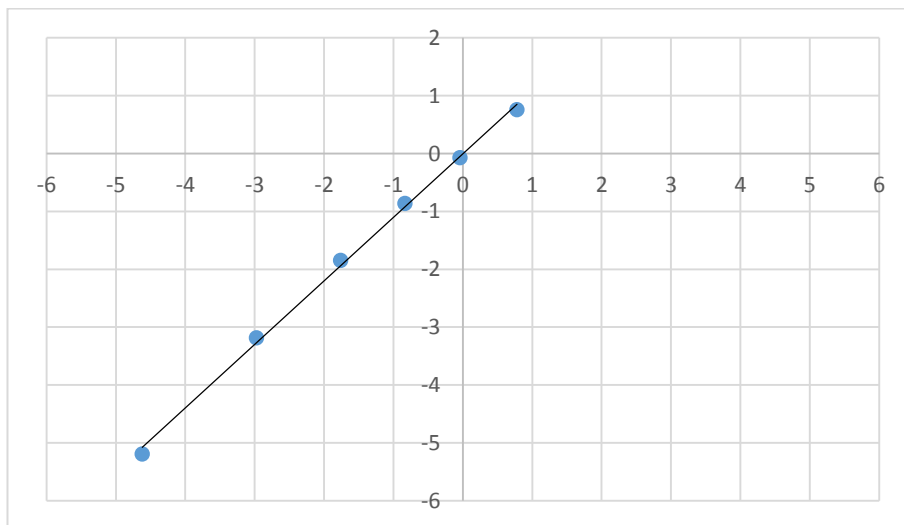
ejemplo de la aplicación del modelo al caso específico mexicano, se toma como estándar a la estructura de la fecundidad de la República Mexicana del año 2010 (ver Tabla 15). Es importante verificar que se cumpla el supuesto de la relación lineal entre $V(x)$ y $V^S(x)$, por ello es necesario graficar los valores del doble logaritmo de la estructura de la fecundidad acumulada del año respectivo y el año estándar (ver Gráfica 21 y Gráfica 22).

Gráfica 21. Doble logaritmo de la estructura de la fecundidad acumulada con respecto al estándar 2010, República Mexicana 1990



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 22. Doble logaritmo de la estructura de la fecundidad acumulada con respecto al estándar 2010, República Mexicana 2000



Fuente: Elaboración propia.

Al verificar el supuesto de la relación lineal entre $V^S(x)$ y $V(x)$, se observa que se cumple satisfactoriamente. Posteriormente, para poder corregir las $V(x)$ observadas en los años anteriores, se calculan los parámetros por medio de la expresión

$$\hat{V}(x) = \alpha + \beta V^S(x) \quad (24)$$

Donde $\hat{V}(x)$ se calcula para los años 1990 y 2000 respectivamente, mientras que el $V^S(x)$ corresponde al año 2010 (ver Tabla 17).

Tabla 17. Doble logaritmo de la estructura de la fecundidad acumulada $V(x)$, República Mexicana 1990-2010

x	$V^o(x)^{1990}$	$V^o(x)^{2000}$	$V^s(x)^{2010}$
15-19			
20-24	0.7742	0.7818	0.7565
25-29	-0.0557	-0.0397	-0.0708
30-34	-0.8385	-0.8337	-0.8640
35-39	-1.7075	-1.7618	-1.8499
40-44	-2.9321	-2.9756	-3.1877
45-49	-4.7269	-4.6197	-5.1948

Fuente: Elaboración propia.

Para estimar los valores de los parámetros α y β para los años 1990 y 2000, se utiliza el método de promedios móviles (ver Tabla 18)

Tabla 18. Valores estimados de los parámetros α y β con respecto al estándar 2010, República Mexicana 1990-2010

	1990	2000	2010
α	0.01470308	0.02423672	0
β	0.91969002	0.92156882	1

Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenidos los valores de los parámetros α y β para los años 1990 y 2000, se realiza la corrección de las $V^o(x)$ respectivamente (ver Tabla 19).

Tabla 19. Corrección del doble logaritmo de la estructura de la fecundidad acumulada $V(x)$,
República Mexicana 1990-2010

x	$\hat{V}^{C.1990}(x)$	$\hat{V}^{C.2000}(x)$	$\hat{V}^{C.2010}(x)$
15-19			
20-24	0.7104	0.7214	0.7565
25-29	-0.0504	-0.0410	-0.0708
30-34	-0.7799	-0.7720	-0.8640
35-39	-1.6866	-1.6806	-1.8499
40-44	-2.9170	-2.9134	-3.1877
45-49	-4.7629	-4.7631	-5.1948

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, es posible obtener las tasas específicas de fecundidad por edades quinquenales (ver Tabla 20 y Gráfica 23) al realizar el procedimiento inverso. Si se tiene el doble logaritmo de la estructura de la fecundidad acumulada corregida con el estándar del año 2010, es posible obtener^{IX}

$$\begin{aligned} \widehat{V}^{C,t}(x) &= \ln \left[-\ln \left(\frac{\widehat{F}^C(x)}{TGF^t} \right) \right] \\ \Rightarrow e^{\widehat{V}^{C,t}(x)} &= -\ln \left(\frac{\widehat{F}^C(x)}{TGF^t} \right) \\ \Rightarrow -e^{\widehat{V}^{C,t}(x)} &= \ln \left(\frac{\widehat{F}^C(x)}{TGF^t} \right) \\ \Rightarrow e^{-e^{\widehat{V}^{C,t}(x)}} &= \frac{\widehat{F}^C(x)}{TGF^t} \\ \Rightarrow \widehat{F}^C(x) &= TGF^t e^{-e^{\widehat{V}^{C,t}(x)}} \end{aligned}$$

^{IX} Es importante mencionar que la notación TGF^t hace referencia a la tasa global de fecundidad en un año t , no confundir con la TGF elevada a la potencia t .

Entonces, para obtener la desagregación de la fecundidad acumulada corregida ($\widehat{F^c}(x)$), es decir la estructura por edad individuales de la fecundidad se utiliza la siguiente expresión

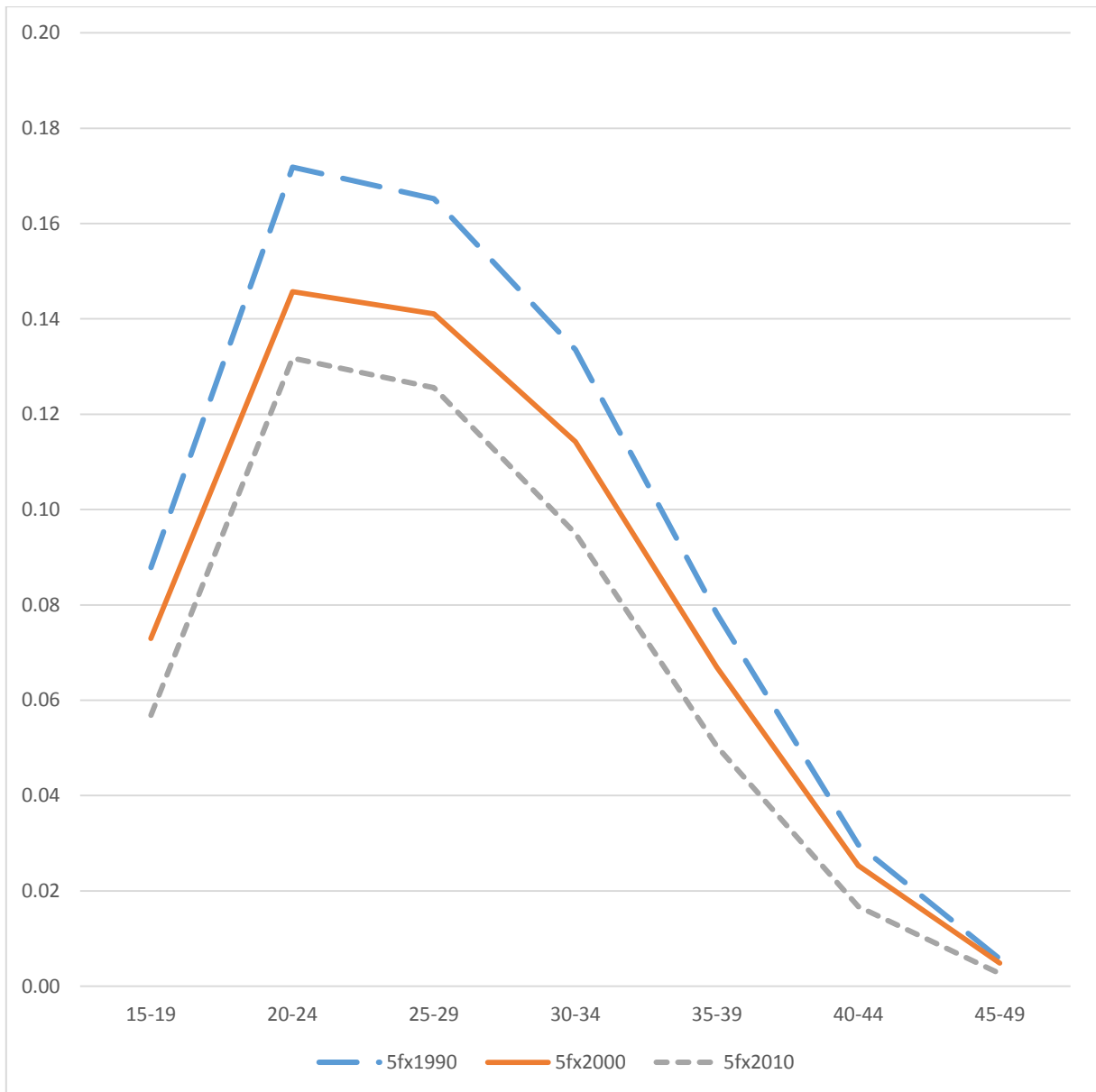
$$\widehat{f^c}(x) = \widehat{F^c}(x + 1) - \widehat{F^c}(x)$$

Tabla 20. Tasas específicas de fecundidad por edades quinquenales corregidas $\widehat{f^c}(x)$, República Mexicana 1990-2010

x	${}_5f_x^{1990}$	${}_5f_x^{2000}$	${}_5f_x^{2010}$
15-19	0.0878	0.0730	0.0569
20-24	0.1718	0.1457	0.1318
25-29	0.1652	0.1410	0.1255
30-34	0.1335	0.1142	0.0950
35-39	0.0782	0.0669	0.0503
40-44	0.0297	0.0253	0.0167
45-49	0.0057	0.0049	0.0026

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 23. Tasas específicas de fecundidad por edades quinquenales corregidas, República Mexicana 1990-2010



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 21. Comparación de la estructura de la fecundidad observada vs ajustada por grupos quinquenales, República Mexicana 1990-2010

x	Estructura observada			Estructura ajustada		
	${}_5f_x^{1990}$	${}_5f_x^{2000}$	${}_5f_x^{2010}$	${}_5f_x^{1990}$	${}_5f_x^{2000}$	${}_5f_x^{2010}$
15-19	0.0768	0.0642	0.0569	0.0878	0.0730	0.0569
20-24	0.1841	0.1542	0.1318	0.1718	0.1457	0.1318
25-29	0.1751	0.1514	0.1255	0.1652	0.1410	0.1255
30-34	0.1244	0.1111	0.0950	0.1335	0.1142	0.0950
35-39	0.0766	0.0617	0.0503	0.0782	0.0669	0.0503
40-44	0.0289	0.0228	0.0167	0.0297	0.0253	0.0167
45-49	0.0059	0.0056	0.0026	0.0057	0.0049	0.0026

Fuente: Elaboración propia.

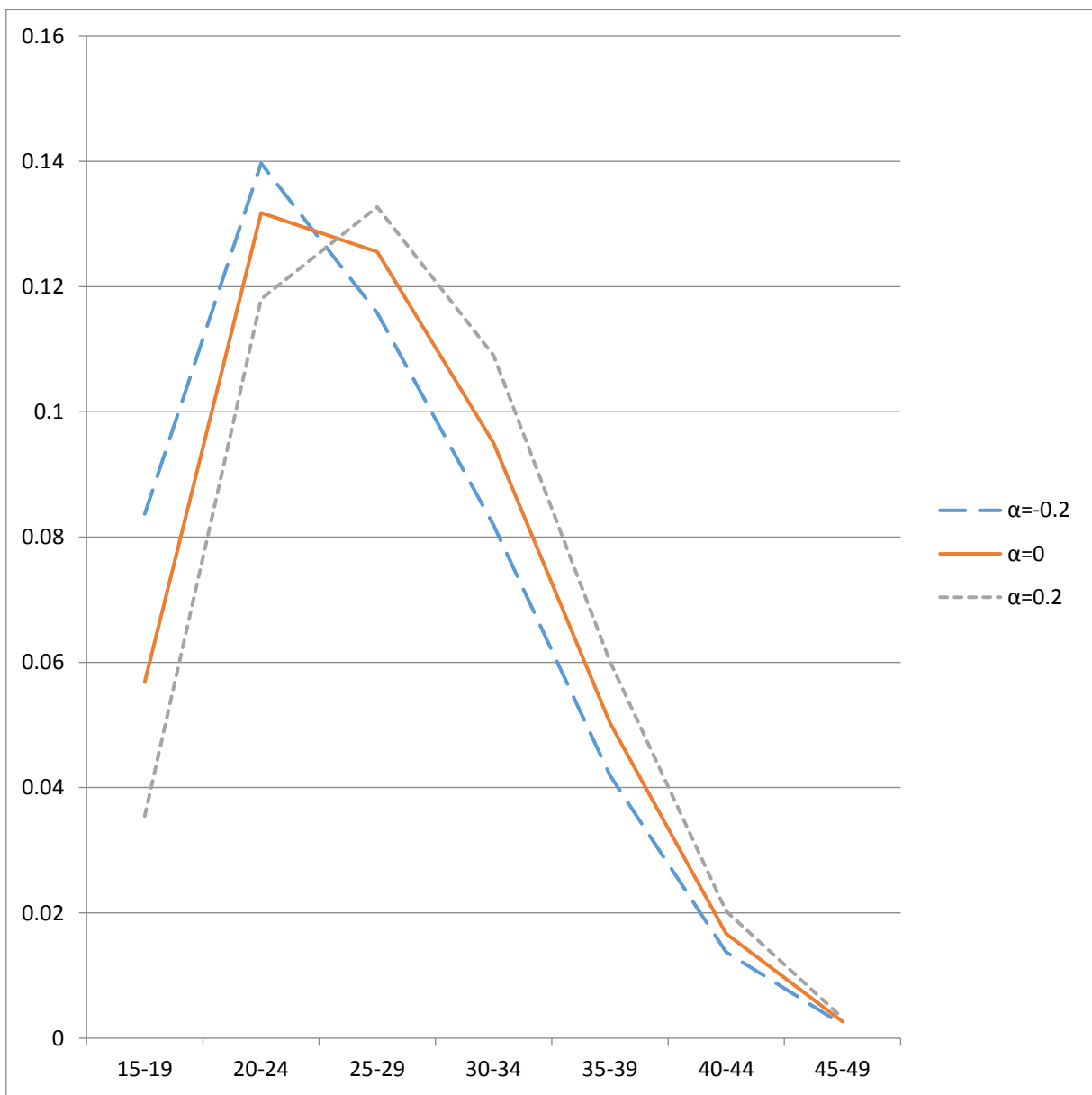
- Interpretación de los parámetros

Los parámetros α y β son los que permiten diferenciar la estructura observada del estándar, donde α representa la diferencia en la edad media de la fecundidad y el parámetro β se encuentra relacionado con la dispersión de las tasas de fecundidad por edades.

Al tener la relación (24), si se toma como constante $\beta = 1$ entonces el valor de α es el que indica la variación (ver Gráfica 24), por lo que si $\alpha < 0$ se tiene que la curva de la fecundidad se traslada hacia la izquierda, mientras que si $\alpha > 0$ se obtiene que la curva de la fecundidad se traslada hacia la derecha.

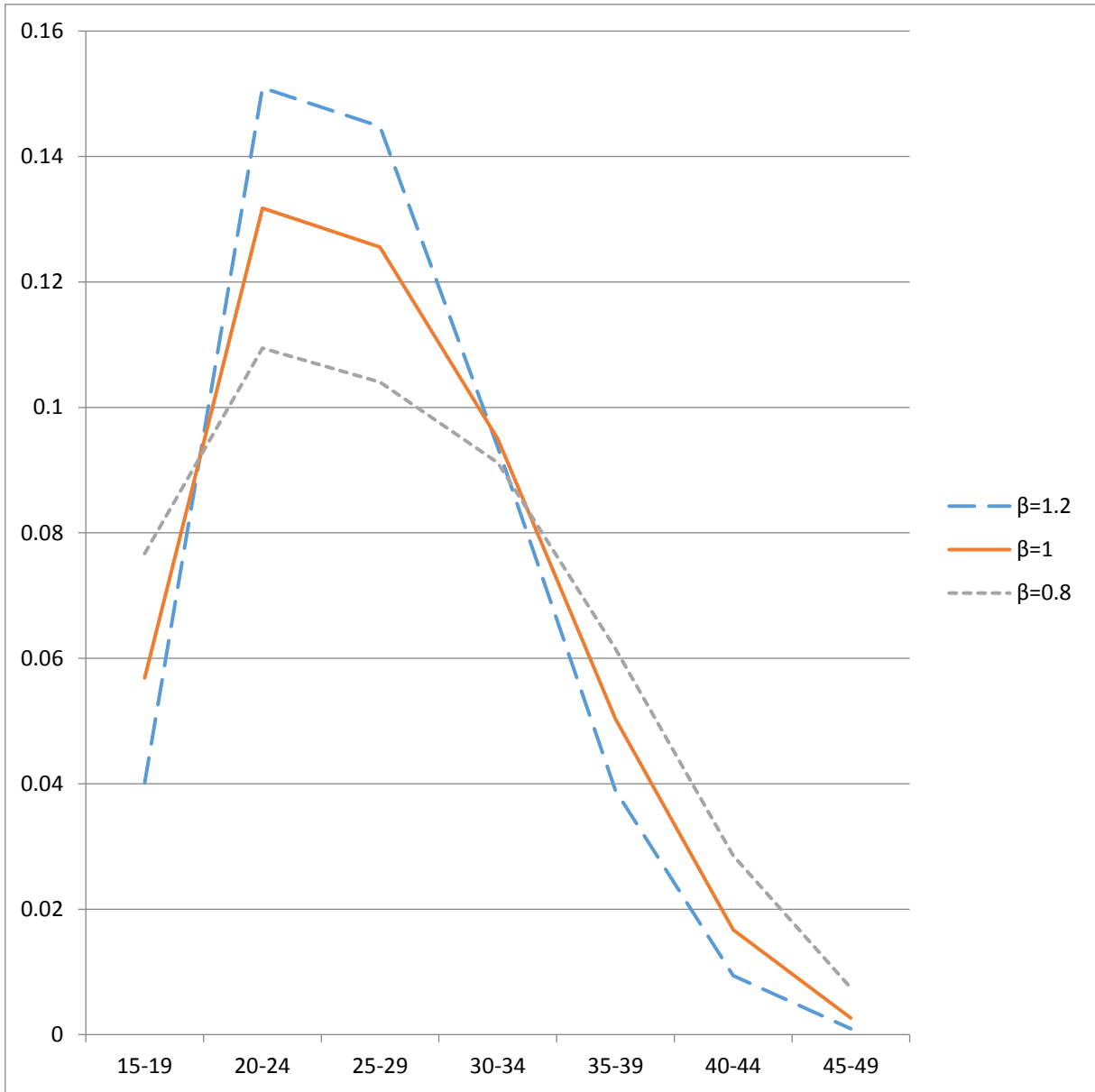
Por otro lado si toma $\alpha = 0$, entonces el valor de β es el parámetro que indica las variaciones. Si $\beta > 0$, existe una mayor concentración de las tasas de fecundidad por edades. Si $\beta < 0$, existe una menor concentración de las tasas de fecundidad por edades (ver Gráfica 25).

Gráfica 24. Modificación de la estructura de la fecundidad con $\beta = 1$ mediante la relación $V(x) = \alpha + \beta V^S(x)$, República Mexicana 2010.



Fuente: Adaptación propia de Chackiel, J. (1979). Estructura de la fecundidad por edades: ajuste y proyección mediante la función Gompertz linealizada. CELADE, Notas de Población N° 20.

Gráfica 25. Modificación de la estructura de la fecundidad con $\alpha = 0$ mediante la relación $V(x) = \alpha + \beta V^S(x)$, República Mexicana 2010



Fuente: Adaptación propia de Chackiel, J. (1979). Estructura de la fecundidad por edades: ajuste y proyección mediante la función Gompertz linealizada. CELADE, Notas de Población N° 20.

- Ley de Makeham

Las primeras aplicaciones de la ley de Makeham fueron en el fenómeno de la mortalidad para describir el cambio relativo de la serie de sobrevivientes a edad exacta x de una tabla de vida, es decir la tasa de instantánea de mortalidad puede ser descrita por una función con distribución exponencial modificada

$$\mu_x = A + BC^x$$

Bajo la anterior hipótesis de variación, la serie de sobrevivientes tiene la siguiente variación

$$l_x = ka^x b^{d^x}, \quad x > 0 \quad (27)$$

Los valores de los parámetros se pueden obtener a través de los métodos (Bocaz, 1974):

- 1) Sistema de selección de pivotes igualmente espaciados
- 2) Método de los grupos no superpuestos
- 3) Método de los grupos superpuestos

A continuación se describe el segundo método. Primeramente se necesita determinar las siguientes condiciones (Mina Valdés, 2001):

- a) Los datos se dividen en cuatro grupos de observaciones sucesivas (y_x)
- b) Cada grupo debe contar con el mismo número de valores observados (m). Los grupos se conforman de la siguiente manera

Primer grupo

x	0	1	2	3	...	$m-1$
y_x	y_0	y_1	y_2	y_3	...	y_{m-1}

Segundo grupo

x	m	$m+1$	$m+2$	$m+3$...	$2m-1$
y_x	y_m	y_{m+1}	y_{m+2}	y_{m+3}	...	y_{2m-1}

Tercer grupo

X	2m	2m+1	2m+2	2m+3	...	3m-1
y_x	y_{2m}	y_{2m+1}	y_{2m+2}	y_{2m+3}	...	y_{3m-1}

Cuarto grupo

X	3m	3m+1	3m+2	3m+3	...	4m-1
y_x	y_{3m}	y_{3m+1}	y_{3m+2}	y_{3m+3}	...	y_{4m-1}

- c) Para linealizar la expresión (27), se calculan los logaritmos decimales (base 10) de las y_x en cada uno de los grupos, es decir

$$\log y_i = \log k a^i b^{d^i} \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, (4m - 1)$$

$$\log y_i = \log k + i \log a + d^i \log b \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, (4m - 1)$$

Se calculan las sumas de dichos logaritmos de cada uno de los grupos, las cuales se denotan como S_0 , S_1 , S_2 y S_3 respectivamente

$$S_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \log y_i = \sum_{i=0}^{m-1} \log k + \sum_{i=0}^{m-1} i \log a + \sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b$$

- d) Para el primer grupo, al desarrollar cada término del miembro derecho, se tiene que

1. $\sum_{i=0}^{m-1} \log k = m \log k$
2. $\sum_{i=0}^{m-1} i \log a$, donde $\sum_{i=0}^{m-1} i$ es una progresión aritmética con el primer término de la sucesión igual a cero, la diferencia en común es 1 y el número de sumandos es m . Por lo tanto, la suma de esta sucesión es $\frac{m(m-1)}{2}$. Entonces,

$$\sum_{i=0}^{m-1} i \log a = \frac{m(m-1)}{2} \log a$$

3. $\sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b$, donde $\sum_{i=0}^{m-1} d^i$ es una progresión geométrica con el primer término de la sucesión igual a d^0 , la razón común en d y el número de sumandos es m . Por lo tanto, la suma de esta sucesión es $\frac{d^0(d^m-1)}{d-1}$. Entonces,

$$\sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b = \frac{d^0(d^m - 1)}{d - 1} \log b$$

De esta manera, la suma para el primer grupo de observaciones es

$$S_0 = m \log k + \frac{m(m-1)}{2} \log a + \frac{(d^m-1)}{d-1} \log b \quad (28)$$

Análogamente, se obtienen las sumas para el resto de los grupos S_1 , S_2 y S_3

$$S_1 = m \log k + \left[m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \frac{d^m(d^m-1)}{d-1} \log b \quad (29)$$

$$S_2 = m \log k + \left[2m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \frac{d^{2m}(d^m-1)}{d-1} \log b \quad (30)$$

$$S_3 = m \log k + \left[3m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \frac{d^{3m}(d^m-1)}{d-1} \log b \quad (31)$$

4. Posteriormente, se calculan las primeras diferencias de la suma S_0 , S_1 , S_2 y S_3 ; denotadas como ΔS_0 , ΔS_1 y ΔS_2 .

La primer diferencia

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0$$

Al sustituir las expresiones (28) y (29), se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta S_0 &= m \log k + \left[m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \frac{d^m(d^m-1)}{d-1} \log b - m \log k \\ &\quad - \frac{m(m-1)}{2} \log a - \frac{(d^m-1)}{d-1} \log b \end{aligned}$$

Al reducir los términos, se obtiene

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m-1)^2}{d-1} \log b \quad (32)$$

La segunda diferencia

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1$$

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= m \log k + \left[2m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \frac{d^{2m}(d^m-1)}{d-1} \log b - m \log k \\ &\quad - \left[m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a - \frac{d^m(d^m-1)}{d-1} \log b \end{aligned}$$

Al reducir términos

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + (d^{2m} - d^m) \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \log b$$

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + (d^m - 1) d^m \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \log b$$

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b \quad (33)$$

La tercera diferencia

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2$$

$$\Delta S_2 = m \log k + \left[3m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \frac{d^{3m}(d^m - 1)}{d - 1} \log b$$

$$-m \log k - \left[2m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a - \frac{d^{2m}(d^m - 1)}{d - 1} \log b$$

Al reducir términos

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + (d^{3m} - d^{2m}) \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \log b$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + (d^m - 1) d^{2m} \frac{(d^m - 1)}{d - 1} \log b$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b \quad (34)$$

5. Una vez obtenidas las primeras diferencias, se calculan las segundas diferencias. Denotadas como $\Delta^2 S_0$ y $\Delta^2 S_1$

Entonces,

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0$$

$$\Delta^2 S_0 = m^2 \log a + d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b - m^2 \log a - \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$

Al reducir términos,

$$\Delta^2 S_0 = (d^m - 1) \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m - 1)^3}{d - 1} \log b \quad (35)$$

Al continuar con $\Delta^2 S_1$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 S_1 &= m^2 \log a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b \\ &\quad - m^2 \log a - d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b \end{aligned}$$

Al reducir términos,

$$\Delta^2 S_1 = d^{2m} - d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$

$$\Delta^2 S_1 = (d^m - 1) d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$

$$\Delta^2 S_1 = d^m \frac{(d^m - 1)^3}{d - 1} \log b \quad (36)$$

6. Con las expresiones anteriores, es posible obtener a su vez expresiones para los parámetros a , b y d .

Para encontrar el parámetro d , se sustituye la expresión (35) en la ecuación (36) y se tiene que

$$\Delta^2 S_1 = d^m \Delta^2 S_0$$

Al despejar el parámetro de interés, se obtiene

$$d^m = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0}$$

$$d = \left(\frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \right)^{1/m} \quad (37)$$

Para encontrar el parámetro b , se retoma la expresión (35) y al despejar el parámetro de interés se tiene que

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m - 1)^3}{d - 1} \log b$$

$$\Delta^2 S_0 \frac{d - 1}{(d^m - 1)^3} = \log b$$

$$\text{Antilog} \left[\Delta^2 S_0 \frac{d-1}{(d^m-1)^3} \right] = \text{Antilog} (\log b)$$

$$b = \text{Antilog} \left[\Delta^2 S_0 \frac{d-1}{(d^m-1)^3} \right] \quad (38)$$

Para encontrar el parámetro a , retomando las expresiones (32) y (35).

Al despejar $\log b$ de la expresión (35), se tiene que

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m-1)^3}{d-1} \log b \quad (35)$$

$$\log b = \Delta^2 S_0 \frac{d-1}{(d^m-1)^3}$$

Y al sustituirla en (32), se tiene que

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m-1)^2}{d-1} \log b \quad (32)$$

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m-1)^2}{d-1} \Delta^2 S_0 \frac{d-1}{(d^m-1)^3}$$

Al reducir los términos, se tiene que

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \Delta^2 S_0 \frac{1}{d^m-1}$$

Si se despeja $\log a$ y al aplicar antilogaritmo, se obtiene el parámetro de interés

$$\log a = \frac{1}{m^2} \left[\Delta S_0 - \Delta^2 S_0 \frac{1}{d^m-1} \right]$$

$$\text{Antilog} (\log a) = \text{Antilog} \left(\frac{1}{m^2} \left[\Delta S_0 - \Delta^2 S_0 \frac{1}{d^m-1} \right] \right)$$

$$a = \text{Antilog} \left(\frac{1}{m^2} \left[\Delta S_0 - \Delta^2 S_0 \frac{1}{d^m-1} \right] \right) \quad (39)$$

Por último, el parámetro k se obtiene a partir de la condición de mínimos cuadrados

$$Y_x = ka^x b^{d^x} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, 4m-1$$

$$\sum_{x=0}^{4m-1} (Y_x - ka^x b^{d^x})^2 = 0 \quad (40)$$

Realizando un cambio de variable, donde $V_x = a^x b^{d^x}$, entonces la expresión anterior resulta como

$$\sum_{x=0}^{4m-1} (Y_x - kV_x)^2 = 0 \quad (41)$$

Al desarrollar el binomio al cuadrado, se obtiene

$$(Y_x - kV_x)^2 = Y_x^2 - 2Y_x kV_x + (kV_x)^2$$

Por el cambio de variable, se tenía que $Y_x = kV_x$, entonces

$$(Y_x - kV_x)^2 = Y_x^2 - 2Y_x^2 + (kV_x)^2$$

$$(Y_x - kV_x)^2 = (kV_x)^2 - Y_x^2$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión (41), se tiene que

$$\sum_{x=0}^{4m-1} ((kV_x)^2 - Y_x^2) = 0$$

$$\sum_{x=0}^{4m-1} ((kV_x)^2) = \sum_{x=0}^{4m-1} Y_x^2$$

Al despejar k^2 , de la expresión anterior se obtiene

$$k^2 = \frac{\sum_{x=0}^{4m-1} Y_x^2}{\sum_{x=0}^{4m-1} V_x^2}$$

Para eliminar el cuadrado de k, se sabe que $Y_x = kV_x$, entonces

$$k = \frac{\sum_{x=0}^{4m-1} Y_x^2}{\sum_{x=0}^{4m-1} V_x^2}$$

Una vez obtenidos los valores de los parámetros a , b , d y k de la función Makeham, es posible realizar variaciones de ellos con el objetivo de obtener una mejor aproximación de los valores observados (Mina Valdés, 2001). Para ello, la función Makeham presenta ciertas variaciones donde los cambios significativos se denotan como dy . En ese sentido, dichos cambios se obtienen a través del siguiente procedimiento.

Al retomar la expresión de la función Makeham

$$Y_x = ka^x b^{d^x} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, 4m - 1$$

Se aplica el logaritmo de la expresión anterior, se tiene que

$$\ln Y_x = \ln (ka^x b^{d^x})$$

$$\ln Y_x = \ln k + x \ln a + d^x \ln b$$

Al calcular la derivada, se tiene que

$$\frac{d}{dY_x} \ln Y_x = \frac{d}{du} (\ln k + x \ln a + d^x \ln b) \quad (42)$$

La derivada del término izquierdo es

$$\frac{d}{dY_x} \ln Y_x = \frac{1}{Y_x} dY_x$$

Y la derivada del lado derecho puede expresarse como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \ln k + \frac{d}{da} x \ln a + \frac{d}{db} d^x \ln b + \frac{\partial}{\partial d} d^x \ln b \\ = \frac{1}{k} dk + \frac{x}{a} da + \frac{d^x}{b} db + \frac{\partial}{\partial d} d^x \ln b \quad (43) \end{aligned}$$

El último término de la expresión anterior se puede expresar de la siguiente manera. Por las propiedades de logaritmo, se tiene

$$\ln d^x = x \ln d$$

Y su derivada es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d} \ln d^x &= \frac{\partial}{\partial d} x \ln d \\ \frac{1}{d^x} \partial d^x &= \frac{x}{d} \partial d \end{aligned}$$

Y la derivada con respecto de d^x es

$$\partial d^x = x d^x \frac{\partial}{\partial d}$$

Por lo tanto, la ecuación (43) puede escribirse como

$$= \frac{1}{k} dk + \frac{x}{a} da + \frac{d^x}{b} db + x d^x \frac{\partial}{\partial d} \ln b$$

Entonces, la ecuación (42) puede escribirse como

$$\frac{1}{Y_x} dY_x = \frac{1}{k} dk + \frac{x}{a} da + \frac{d^x}{b} db + x d^x \frac{\partial}{\partial d} \ln b$$

Ahora, la derivada dY_x de la expresión anterior se obtiene al despejarla

$$dY_x = \frac{Y_x}{k} dk + \frac{x Y_x}{a} da + \frac{d^x Y_x}{b} db + x d^x Y_x \frac{\partial}{\partial d} \ln b$$

Para calcular los valores de los parámetros es necesario linealizar la expresión anterior, entonces al realizar un cambio de variables se tiene que

$$x_1 = dY_x$$

$$x_2 = Y_x$$

$$x_3 = xY_x = xx_2$$

$$x_4 = Y_x d^x = x_2 d^x$$

$$x_5 = xY_x d^x = x_3 d^x$$

$$c_2 = \frac{\partial k}{k}, c_3 = \frac{\partial a}{a}, c_4 = \frac{\partial b}{b}, c_5 = \ln b \frac{\partial}{\partial d}$$

Al realizar el cambio de variables, la expresión resultante tiene forma de una regresión múltiple lineal

$$x_1 = c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5$$

Las diferencias entre los valores teóricos y los valores observados se denotan como dY_x , de tal forma que sea posible calcular los coeficientes de la regresión c_2, c_3, c_4 y c_5 a través de las siguientes ecuaciones normales

$$\sum x_1 x_2 = c_2 \sum x_2 x_2 + c_3 \sum x_2 x_3 + c_4 \sum x_2 x_4 + c_5 \sum x_2 x_5$$

$$\sum x_1 x_3 = c_2 \sum x_2 x_3 + c_3 \sum x_3 x_3 + c_4 \sum x_3 x_4 + c_5 \sum x_3 x_5$$

$$\sum x_1 x_4 = c_2 \sum x_2 x_4 + c_3 \sum x_3 x_4 + c_4 \sum x_4 x_4 + c_5 \sum x_4 x_5$$

$$\sum x_1 x_5 = c_2 \sum x_2 x_5 + c_3 \sum x_3 x_5 + c_4 \sum x_4 x_5 + c_5 \sum x_5 x_5$$

Es posible notar que se trata de un sistema de ecuaciones lineales de cuatro incógnitas, el cual se puede resolver por medio de matrices. Es necesario construir la matriz que se integra por los coeficientes de la regresión y así conocer la solución al sistema. Las anteriores ecuaciones normales se pueden expresar en forma matricial de la siguiente forma

$$A = \begin{vmatrix} \sum x_2x_2 & \sum x_2x_3 & \sum x_2x_4 & \sum x_2x_5 \\ \sum x_2x_3 & \sum x_3x_3 & \sum x_3x_4 & \sum x_3x_5 \\ \sum x_2x_4 & \sum x_3x_4 & \sum x_4x_4 & \sum x_4x_5 \\ \sum x_2x_5 & \sum x_3x_5 & \sum x_4x_5 & \sum x_5x_5 \end{vmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} \sum x_1x_2 \\ \sum x_1x_3 \\ \sum x_1x_4 \\ \sum x_1x_5 \end{vmatrix}$$

Al realizar la siguiente operación matricial, es posible encontrar los coeficientes de la matriz V

$$V = A^{-1}G$$

Con el procedimiento anterior, es posible obtener los valores c_j , y por lo tanto, las primeras correcciones de los valores de los parámetros de la función Makeham k , a , b y d . Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= k(1 + c_2) \\ a_1 &= a(1 + c_3) \\ b_1 &= b(1 + c_4) \\ d_1 &= d \left(\frac{1 + c_5}{\ln b} \right) \end{aligned}$$

Con las primeras correcciones se obtienen nuevos valores teóricos y nuevas diferencias. Es decir, el proceso implica diversas iteraciones hasta que el cambio en el valor de los parámetros estimados tienda a cero, es decir tal que no logren cambiar sensiblemente los valores teóricos obtenidos usando los valores de los parámetros hasta esa iteración (Mina Valdés, 2001).

En general, con cada iteración es posible encontrar valores cada vez más satisfactorios, donde si k_i , a_i , b_i y d_i son los valores de la iteración i , los valores de los parámetros a la iteración $i + 1$ son

$$\begin{aligned}k_{i+1} &= k_i(1 + c_{2i+1}) \\a_{i+1} &= a_i(1 + c_{3i+1}) \\b_{i+1} &= b_i(1 + c_{4i+1}) \\d_{i+1} &= d_i \left(\frac{1 + c_{5i+1}}{\ln b} \right)\end{aligned}$$

Al obtener los valores de los parámetros, es posible obtener una curva creciente o decreciente. Lo anterior dependerá de los valores que adquieren. La variable x que indica la edad es considerada como la variable de tiempo.

Otro caso que puede presentarse es cuando la serie empírica tenga una asíntota superior, entonces la ley de Makeham puede usarse en la forma (Bocaz, 1974)

$$z_x = \frac{(K_1 - y_x)}{y_x} = Ka^x b^{d^x}$$

Donde

z_x , es la serie de sobrevivientes estimada con los parámetros de la ley Makeham (teórica)

y_x , es la serie de sobrevivientes observada

K_1 , es la asíntota superior

Es importante notar que la ley de Makeham es una ley más general que leyes como la exponencial simple y la ley de Gompertz. En el caso se la ley exponencial, $b = 1$ y se tiene que

$$y_x = Ka^x$$

En el caso de la ley de Gompertz, el parámetro $a = 1$ y por lo tanto,

$$y_x = Kb^{d^x}$$

En ese sentido, la ley de Makeham es más flexible en comparación con las dos anteriores.

- Aplicaciones en fecundidad

Es posible utilizar la ley de Makeham para analizar la fecundidad de una cohorte. Las tasas acumuladas de fecundidad por edad y por orden del nacimiento pueden ser descritas por esta ley. La información necesaria para realizar el análisis de una cohorte de mujeres, dado que todas nacieron en un mismo año (t), es el número de nacidos vivos de las mujeres desde su ingreso a la edad fértil, por ejemplo 15 años, hasta que final del periodo reproductivo, por ejemplo 50 años. Además del número de hijos nacidos vivos para las mujeres de edad x , es necesario conocer el orden del nacimiento de los hijos nacidos vivos.

Una vez obtenida dicha información, se realiza una tabla de doble entrada para calcular las tasas de fecundidad acumuladas por edad y orden de nacimiento (ver Tabla 22).

Tabla 22. Tabla de hijos nacidos vivos según orden de nacimiento

Edad	Hijos nacidos vivos (HNV) según orden de nacimiento						Total	
	1	2	...	J	...	$ky +$	Hijos nacidos vivos	Mujeres
15	$HNV_{1,15}$	$HNV_{2,15}$...	$HNV_{j,15}$...	$HNV_{ky+,15}$	$HNV_{\bullet,15}$	M_{15}
16	$HNV_{1,16}$	$HNV_{2,16}$...	$HNV_{j,16}$...	$HNV_{ky+,16}$	$HNV_{\bullet,16}$	M_{16}
17	$HNV_{1,17}$	$HNV_{2,17}$...	$HNV_{j,17}$...	$HNV_{ky+,17}$	$HNV_{\bullet,17}$	M_{17}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
x	$HNV_{1,x}$	$HNV_{2,x}$	⋮	$HNV_{j,x}$	⋮	$HNV_{ky+,x}$	$HNV_{\bullet,x}$	M_x
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
50	$HNV_{1,50}$	$HNV_{2,50}$...	$HNV_{j,50}$...	$HNV_{ky+,50}$	$HNV_{\bullet,50}$	M_{50}
Total	$HNV_{1\bullet}$	$HNV_{2\bullet}$...	$HNV_{j\bullet}$...	$HNV_{ky+\bullet}$	$HNV_{\bullet\bullet}$	M

Fuente: Bocaz, Albino (1974). El uso de la función Makeham como función demográfica. CELADE. Adaptación propia

Lo anterior, se obtiene al dividir los hijos nacidos vivos de cada columna por el total de mujeres a edad x . En ese sentido, las tasas de fecundidad para una mujer de edad x y cuyo orden de hijo nacido vivo es j , está dado por la relación

$$f_{j,x} = HNV_{j,x}/M_x$$

Entonces, es posible obtener el valor de las tasas de fecundidad según orden de nacimiento de las mujeres de edad x (ver Tabla 23).

Tabla 23. Tasas de fecundidad según orden de nacimiento para una mujer de edad x

Edad	$f_{j,x} = HNV_{j,x}/M_x$					
	1	2	...	j	...	ky+
x	$HNV_{1,x}/M_x$	$HNV_{2,x}/M_x$	∴	$HNV_{j,x}/M_x$	∴	$HNV_{ky+,x}/M_x$

Fuente: Bocaz, Albino (1974). El uso de la función Makeham como función demográfica. CELADE. Adaptación propia

Las tasas de fecundidad pueden sumarse para un orden j determinado, y con ello analizar la variación desde el inicio de la fecundidad hasta el término de ésta. Si el intervalo es de 15 a 50 años, por ejemplo, entonces es posible calcular las tasas de fecundidad acumuladas por edad x y orden de nacimiento j con la siguiente relación (ver Tabla 24).

$$F_{j,x} = \sum_{x=15}^{50} f_{j,x}$$

Tabla 24. Tasas de fecundidad por edad x y orden j del nacimiento

Edad	tasas de fecundidad por edad x y orden j del nacimiento	
	Sin acumular	Acumuladas
15	$f_{j,15}$	$F_{j,15}$
16	$f_{j,16}$	$F_{j,16}$
17	$f_{j,17}$	$F_{j,17}$
⋮	⋮	⋮
x	$f_{j,x}$	$F_{j,x}$
⋮	⋮	⋮
50	$f_{j,50}$	$F_{j,50}$

Fuente: Bocaz, Albino (1974). El uso de la función Makeham como función demográfica. CELADE. Adaptación propia

Entonces, de acuerdo con los valores observados de las tasas de fecundidad acumuladas por edad x y por orden de nacimiento j , es posible obtener los valores de los parámetros de la función Makeham

$$F_{j,x} = y_x = K a^x b^{a^x}$$

- Interpretación de los parámetros

Al obtener los valores de los parámetros, es posible observar que el factor a^x comienza a tener cierta importancia para x relativamente grande (Bocaz, 1974). Es importante señalar, que la ley de Makeham se aproxima a cero con valores negativos grandes de x , que en este caso no es una posibilidad debido a que la variable x indica la edad y por esencia es no negativa.

Para valores muy grandes de x , el factor b^{a^x} tiende a 1, y por lo tanto, si el valor de $a > 1$ la función será prácticamente una curva exponencial creciente cóncava hacia arriba, con rango en los números reales (\mathbb{R}) y dominio en $(0, \infty)$. Pero si $0 < a < 1$, entonces la función será

una curva exponencial decreciente cóncava hacia arriba, con rango en los números reales (\mathbb{R}) y dominio en $(0, \infty)$.

Si $a = 1$, $a^x = 1$ entonces se tienen los factores kb^{ax} y para valores muy grandes de x , la ley de Makeham tiende a k .

En el caso de la fecundidad, se debe utilizar un factor tal que se asegure la edad inicial de la fecundidad para esta sea nula (Bocaz, 1974). Dicha forma tiene la siguiente expresión

$$y_x = (x - x_0)^m K a^x b^{ax}$$

Donde

x_0 , es la edad inicial de la fecundidad

$(x - x_0)^m$, es el factor que asegura la edad inicial a la fecundidad

- Otras aplicaciones

La ley de Makeham se aplica para analizar ciertos fenómenos y eventos. Una de ellas es que al usar una tabla modelo de vida, puede ser útil como estándar para reproducir cualquier otra tabla de mortalidad. La tendencia es de relacionar ciertos patrones de mortalidad con la mortalidad observada en un determinado país. Para ello, se utiliza el sistema logito de William Brass para relacionar los logitos estándares con los correspondientes de una tabla de vida para un país determinado. En este caso, la relación que implica lo anterior es la siguiente (Bocaz, 1974)

$$K_1 - z_x = K_2 a^x b^{ax}$$

Donde

$$z_x = \frac{\frac{L_x^S}{T_0^S - L_0^S}}{\frac{L_x^P}{T_0^P - L_0^P}}$$

L_x^S , es el valor L_x de la tabla de vida estándar

T_0^S , es el valor T_0 de la tabla de vida estándar

L_x^P , es el valor L_x de la tabla de vida para el país P

T_0^P , es el valor T_0 de la tabla de vida para el país P

Otra aplicación de la ley de Makeham es para suavizar una estructura de población cerrada con una estructura teórica (Bocaz, 1974). Generalmente, se tomaba como estructura teórica la de una población estacionaria modelo, elegida de algún conjunto de estructuras modelo previamente conocidas.

Si

$\frac{{}_5N_x}{N} = {}_5P_x$, es la proporción de personas censadas entre las edades x y $x + 5$

$\frac{{}_5L_x^S}{T_0^S} = {}_5P_x^S$, es la proporción de personas estacionarias entre las edades x y $x + 5$

Dichas proporciones pueden ser relacionadas entre sí mediante la siguiente relación

$$\frac{{}_5P_x}{1 - {}_5P_x} = \frac{{}_5P_x^S}{1 - {}_5P_x^S} * \frac{k_1}{1 - k_1 M_x}$$

Donde $M_x = K a^x b^{d^x}$ es la función Makeham

Análogamente, la función Makeham puede ser empleada para relacionar una tabla de vida por sexo de un país determinado con una tabla modelo estándar del sexo correspondiente. Si se denota a

${}_5P_x^O = \frac{{}_5L_x^O}{T_0^O}$, es la proporción de personas de la tabla de vida observada entre las edades x y $x + 5$

${}_5P_x^S = \frac{{}_5L_x^S}{T_0^S}$, es la proporción de personas de la tabla de vida estándar entre las edades x y $x + 5$

Entonces, es posible relacionar dichas proporciones mediante la relación

$$\frac{{}_5P_x^O}{1 - {}_5P_x^O} = \frac{{}_5P_x^S}{1 - {}_5P_x^S} * \frac{k_1}{1 - k_1 M_x}$$

Donde $M_x = K a^x b^{d^x}$ es la función Makeham

Asimismo, es posible emplearla para describir la serie de sobrevivientes a edad exacta x , en sí misma, es decir sin recurrir a una tabla de vida estándar. Entonces, la relación que describe a la serie es

$$l_x = \frac{1}{1 + e^{k_1 - M_x}}$$

Siendo $M_x = Ka^x b^{d^x}$ es la función Makeham

También resulta conveniente utilizar la ley de Makeham para resumir proyecciones de población (Bocaz, 1974). Se analizan los cambios de los valores de los parámetros (k , a , b y d) según sean considerados los cambios en la mortalidad y la fecundidad en el tiempo. En este caso, se puede usar un modelo asintótico simple como el siguiente

$$N_g^t = \frac{(K_1)}{1 + M_t}$$

O bien, el caso donde se tengan dos asíntotas

$$N_g^t = K_2 + \frac{(K_1 - K_2)}{1 + M_t}$$

Donde $M_t = Ka^t b^{d^t}$ es la función Makeham y g es el grupo de edades correspondientes

La ley de Makeham también puede ser utilizada si se desea relacionar proyecciones de población con diferentes hipótesis sobre la evolución de la mortalidad y fecundidad, en el caso de una población cerrada. Para lo anterior, es necesario que las proyecciones se refieran a los mismos grupos de edades. Entonces, la expresión para relacionar los valores teóricos de la hipótesis 1 (H_1) con los de la hipótesis 2 (H_2) es la siguiente

$$N_g^t(H_2) = N_g^t(H_1)M_t$$

En cuanto a las aplicaciones de mortalidad, la ley de Makeham puede ser utilizada como curva de tendencia para tasas o probabilidades de muerte, siempre que no se desee una extrapolación muy lejana debido a que los valores pueden ser grandes o pequeños (Bocaz, 1974).

Al caso de nupcialidad, se puede aplicar para analizar el riesgo de casarse por primera vez a personas de edad x que aún permanecen solteras (Bocaz, 1974). Donde dicho riesgo puede calcularse mediante la relación

$$r(x'_s) = \frac{g^s(x'_s)}{1 - G^s(x'_s)}$$

Donde

$$x'_s = \frac{(x - x_0)}{m}$$

$$G^s(x'_s) = \int_0^{x'_s} g^s(x_s) dx_s$$

x , es la edad al casarse por primera vez

$g^s(x_s)$, es el patrón estándar de frecuencias de casados por primera vez

$G^s(x'_s)$, es la proporción de casados

x_0 y m , son los parámetros de origen y reducción de escala para referir una distribución observada a la distribución estándar

Por otro lado, la ley de Makeham también puede ser utilizada para describir la probabilidad de que una mujer pase a ser estéril, con base en una tabla decreciente de fecundidad con respecto a la proporción de mujeres estériles a una edad x (Bocaz, 1974). Si se denota a E_x como el número de mujeres estériles a la edad x , entonces la expresión que representa dicha serie es

$$E_x = 100\,000 \frac{1}{1 + e^{k_1 - M_x}}$$

Donde $M_x = Ka^x b^{d^x}$ es la función Makeham y 100,000 es el radix de la tabla de decrecimiento de fecundidad. Es decir la función E_x tiene como límite 100,000.

Otra aplicación es para relacionar el tamaño medio de la familia con la duración del matrimonio. Al tomar el tamaño final de la familia como unidad, entonces es posible expresar el tamaño alcanzado a una determinada edad x como parte de ese tamaño final (Bocaz, 1974).

En cuanto a la amplitud de los intervalos fértiles, se realiza el supuesto de una duración de 30 unidades estándares de tiempo y que en 6 unidades se ha logrado formar el 50% de las familias. Este supuesto se aplica a todas a las edades al casarse excepto los que se casan antes de los 20 años.

Entonces, si se denota a x_0 como la edad a la cual se ha casado el 50% de las mujeres, la escala de tiempo para cualquier mujer que se haya casado por lo menos a la edad de 20 años es

$$t = \frac{6x}{x_0}$$

Para las mujeres que se casan antes de los 20 años entonces resulta

$$c_0 = \frac{6}{x_0}$$

Donde x_0 es la edad a la cual se ha casado el 50% de esas mujeres. La cantidad c_0 se utiliza para todas las edades hasta la edad x_0 y a partir de $x_0 + 1$ hasta $2x_0$ se reduce en 1% por cada unidad que se aumenta en la edad hasta llegar a $2x_0$. Dicho valor se mantiene entre $2x_0 + 1$ hasta $3x_0$. Desde $3x_0 + 1$ en adelante aumenta 1% cada vez que se avanza una unidad hasta el término de la fecundidad.

La función y_x pasa por un máximo frente a

$$x = \log \left[\frac{-\log a}{\log e} * \log b * \log d \right]$$

- Polinomio de William Brass

Las funciones polinomiales tienen la facilidad de graduar las observaciones debido a que se pueden realizar ajustes matemáticos para adaptarse a dichas graduaciones. Al utilizar un polinomio general sin restricciones se necesita de varios términos y parámetros para obtener un buen ajuste. Lo anterior resulta complicado al describir la distribución de la fecundidad específica. No obstante, Brass propuso un polinomio donde el número de parámetros desconocidos pudiera disminuir al incluir restricciones en el polinomio. La función para las aplicaciones de la graduación es la siguiente (Brass, 1974)

$$f(a) = C(a - S)(S + 33 - a)^2, \quad S \leq a \leq S + 33$$

Donde

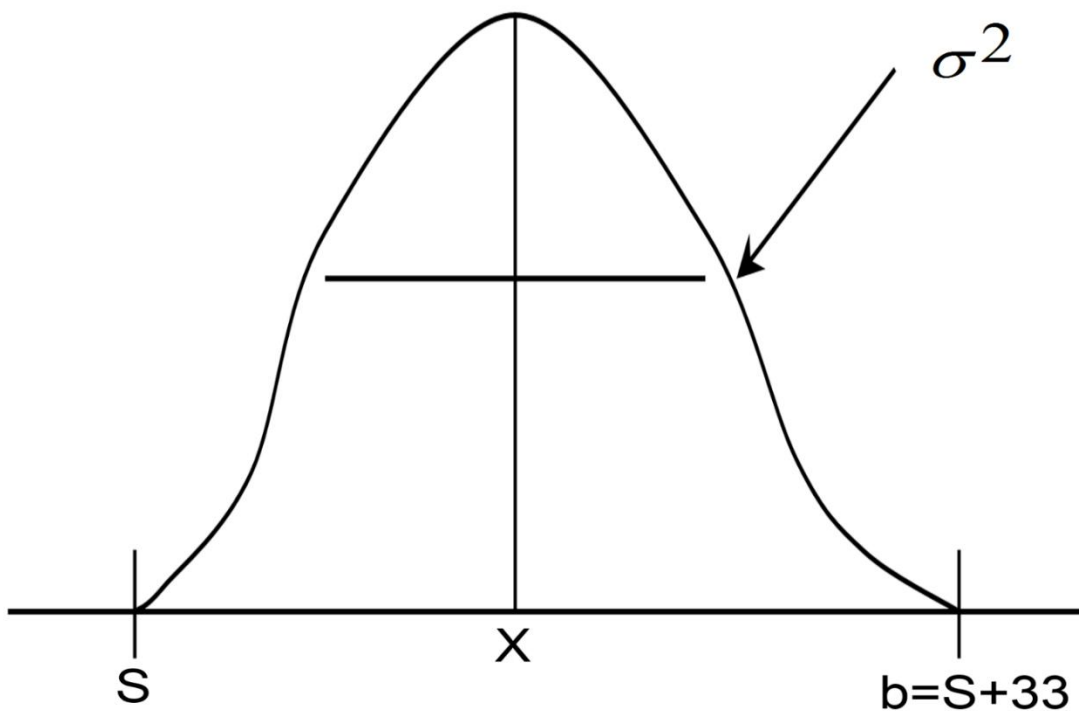
$f(a)$, es la tasa de fecundidad específica de las mujeres de a años de edad

S , es la edad del comienzo del periodo de reproducción

C , es una constante que varía de acuerdo al nivel de la fecundidad

Es importante mencionar que esta función tiene una restricción en el rango s y $s + 33$, donde vale cero, es decir $f(a)$ vale cero cuando a queda del rango s y $s + 33$ (ver Gráfica 26). Al graficar dicho polinomio es posible analizar la distribución empírica de $f(a)$. El rango de 33 años de la función se debe a que en este punto la varianza (43.6) se acerca al promedio para las distribuciones observadas.

Gráfica 26. Polinomio de William Brass



Fuente: Mina (2015). Documento visto en clase de Análisis Demográfico III.

Es posible notar que los dos parámetros que pueden variar para ajustarse a los datos son C y s . El valor de C varía con el nivel de la fecundidad, mientras que el parámetro s es el límite inferior del periodo de reproducción, y a medida que aumenta su valor la curva se desplaza hacia arriba. En particular, si se toma el valor de $s = 15$, el parámetro traslada la curva pero no modifica el patrón de la fecundidad. La media de la función es $s + 13.2$, entonces en el caso particular de que $s = 15$, la media toma el valor de 28.2 y se encuentra cerca del promedio para las distribuciones, con una variación de s entre 13 y 18 (que es el rango de las ubicaciones de los datos observados para casi todas las poblaciones).

La fecundidad acumulada hasta la edad exacta a , $F(a)$, se obtiene con la siguiente expresión

$$F(a) = \int_s^a f(x)dx$$

Es posible obtener el valor de $f(x)$ en un intervalo de edad, por ejemplo de c a d , con $F(d) - F(c)$. La integración de $F(x)$ desde c a d y la división por $(d - c)$ da el promedio correspondiente de niños nacidos vivos por mujer en el correspondiente grupo de edad.

Por lo tanto, es posible obtener los valores de f y F para los grupos quinquenales de edades estándares para una serie de $f(x)$, con s y \bar{m} espaciadas a intervalos de un año en el rango de variación para las distribuciones observadas. Con estas mediciones, posteriormente es posible obtener los factores de multiplicación^x k_i para después poder calcular el promedio de niños nacidos vivos según la siguiente ecuación

$$F_i = \Phi_i + k_i f_i$$

(Chackiel, 1972).

^x Dichos factores los calcula Brass a través del polinomio que se considera, son los multiplicadores que aparecen en el documento Métodos de análisis y estimación. CELADE, Serie D, N° 63, 1970, página 6 y en el Manual IV de las Naciones Unidas página 132. Utiliza $\frac{f_1}{f_2}$ y \bar{m} como pivotes para entrar en las tablas (Chackiel, 1972)

Donde

$$\Phi_i = 5 \sum_{j=0}^{i-1} f_j$$

$$j = 20, 25, 30, \dots, 50$$

A partir de los valores f_i se obtiene la fecundidad acumulada hasta el límite inferior de cada grupo quinquenal de edad, es decir, el número total de hijos nacidos vivos por las mujeres al alcanzar las edades de 20, 25, 30, ..., hasta 50 años (Camisa, 1975).

Es posible desagregar las tasas específicas por edades individuales al utilizar la edad media de la fecundidad y la desviación estándar (Mina, 2015).

$$\bar{X} = \frac{3S + 2b}{5}$$

$$\sigma = \frac{b - S}{5}$$

Entonces, las soluciones al polinomio de William Brass son

$$D = \frac{1}{12} c (b - S)^4$$

Donde D es la descendencia final y los valores de S , b y c se pueden obtener debido a que son las soluciones al polinomio. Dichas soluciones son

$$S = \bar{X} - 2\sigma$$

$$b = \bar{X} + 3\sigma$$

$$c = \frac{12D}{(b - S)^4}$$

- Ejemplo

Primeramente, se calcula la tasa global de fecundidad para cada año (como la suma de las tasas específicas multiplicada por cinco), con base en la información de la conciliación demográfica realizada por CONAPO correspondiente al año 2010 (ver Tabla 25). Es importante mencionar que las tasas de fecundidad por edades quinquenales corresponden a un intervalo de 5 años, por lo que se asume que el valor de dichas tasas corresponde al punto medio del intervalo. Por ejemplo, en el grupo de 15 a 19 años el valor de 0.0569 corresponde a la tasa de fecundidad en edad 17.5 años.

Tabla 25. Tasa Global de fecundidad, República Mexicana 2010.

Grupos de edad	A	f(a)	a*f(a)	TGF
12 - 14 años	13.5	0	0	0
15 - 19 años	17.5	0.0569	0.9951	0.284
20 - 24 años	22.5	0.1318	2.9647	0.659
25 - 29 años	27.5	0.1255	3.4524	0.628
30 - 34 años	32.5	0.0950	3.0878	0.475
35 - 39 años	37.5	0.0503	1.8870	0.252
40 - 44 años	42.5	0.0167	0.7102	0.084
45 - 49 años	47.5	0.0026	0.1258	0.013
Σ		0.48	13.223	2.3943

Fuente: Elaboración propia.

Una vez realizado lo anterior, se procede a calcular los valores de los parámetros del polinomio de William Brass al caso específico mexicano para el año 2010 (ver Tabla 26).

Tabla 26. Estimación de los parámetros del polinomio de William Brass, República Mexicana 2010

Edad media (\bar{X})	27.61
TGF	2.3943
Varianza (σ^2)	44.2735114
Desv.est (σ)	6.65383434
Descendencia final (D)	2.855
Edad al comienzo del periodo de reproducción (S)	14.3059654
B	47.5751371
C	0.00002

Fuente: Elaboración propia.

Al obtener los valores de los parámetros del polinomio, se tiene que el polinomio de Brass es el siguiente

$$f(a) = 0.00002 (a - 14.3060) ((14.3060 + 33) - a)^2$$

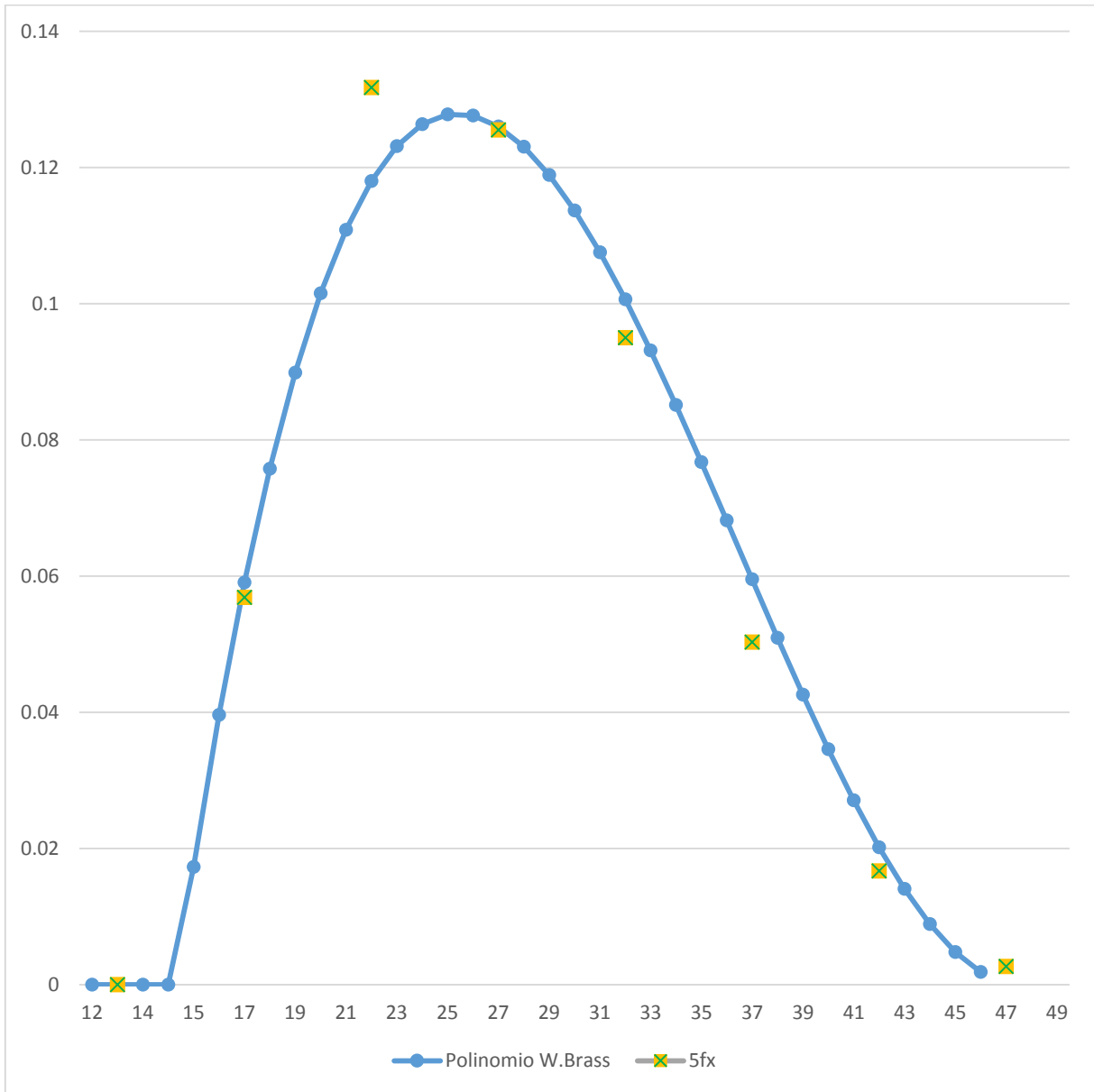
Con ello, es posible obtener la desagregación de las tasas específicas de fecundidad por edades individuales (ver Tabla 27). Al graficar las tasas específicas obtenidas, se puede analizar el ajuste obtenido a través del polinomio (ver Gráfica 27). Se observa que resulta satisfactorio en las edades de 17.5, 27.5, 42.5 y 47.5 años. En las edades intermedias de 32.5 y 37.5 el ajuste resulta ligeramente satisfactorio. No obstante, es posible notar que en la edad de 22.5 años dicho ajuste resulta no satisfactorio, ya que la curva de la fecundidad encontrada a través del polinomio de Brass no representa el punto máximo donde se alcanza la edad tal que la fecundidad es mayor, en particularmente en el caso específico de México en el año 2010.

Tabla 27. Desagregación de las tasas específicas por edades individuales a través del polinomio de William Brass, República Mexicana 2010

Edad	f(a)
12	0
13	0
14	0
14.31	0
15	0.01727
16	0.03961
17	0.05907
18	0.07578
19	0.08989
20	0.10154
21	0.11087
22	0.11803
23	0.12314
24	0.12636
25	0.12782
26	0.12766
27	0.12603
28	0.12306
29	0.11890
30	0.11369
31	0.10756
32	0.10067
33	0.09314
34	0.08512
35	0.07675
36	0.06817
37	0.05952
38	0.05095
39	0.04259
40	0.03458
41	0.02707
42	0.02019
43	0.01409
44	0.00890
45	0.00477
46	0.00184
47	
48	
49	
TGF	2.3946

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 27. Desagregación de las ${}_5f_x$ a través del polinomio de William Brass, República Mexicana 2010



Fuente: Elaboración propia.

- Comparación de los resultados de la desagregación de las tasas específicas por edades individuales a través del modelo de Gompertz vs el polinomio de William Brass

En el apartado de fecundidad, se muestran dos métodos diferentes para la desagregación de tasas específicas por edades individuales con información de la fecundidad a partir de las tasas específicas por edades quinquenales. En este trabajo, se utiliza la información del año 2010 para realizar una comparación de los resultados obtenidos al aplicar ambos métodos y posteriormente se analizan los resultados. Es importante mencionar que las tasas de fecundidad por edades quinquenales corresponden a un intervalo de 5 años, por lo que se asume que el valor de dichas tasas corresponden al punto medio del intervalo, es decir 2.5 años (ver Tabla 28).

Tabla 28. Tasas específicas por edades quinquenales, República Mexicana 2010

Grupos de Edad	Punto medio del intervalo	sf_x
15-19	17.5	0.0569
20-24	22.5	0.1318
25-29	27.5	0.1255
30-34	32.5	0.0950
35-39	37.5	0.0503
40-44	42.5	0.0167
45-49	47.5	0.0026
50	50	
TGF		2.39

Fuente: Elaboración propia con datos de la conciliación demográfica CONAPO (2011).

Al aplicar ambos métodos, se obtiene una desagregación por edades individuales por cada método respectivamente (ver Tabla 29).

Tabla 29. Tasas específicas de fecundidad por edades individuales con la desagregación por el método de Gompertz vs polinomio de W. Brass, República Mexicana 2010

x	Gompertz	Polinomio W. Brass	${}_5f_x$
11	0.0000	0.0000	
12	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0000	0.0000	
14	0.0003	0.0000	
14,31	-	0.0000	
15	0.0017	0.0173	
16	0.0065	0.0396	0.0569
17	0.0179	0.0591	
18	0.0388	0.0758	
19	0.0691	0.0899	
20	0.1049	0.1015	
21	0.1402	0.1109	0.1318
22	0.1693	0.1180	
23	0.1883	0.1231	
24	0.1961	0.1264	
25	0.1938	0.1278	
26	0.1835	0.1277	0.1255
27	0.1681	0.1260	
28	0.1498	0.1231	
29	0.1307	0.1189	
30	0.1120	0.1137	
31	0.0947	0.1076	0.0950
32	0.0792	0.1007	
33	0.0656	0.0931	
34	0.0540	0.0851	
35	0.0442	0.0767	
36	0.0360	0.0682	0.0503
37	0.0292	0.0595	
38	0.0236	0.0509	
39	0.0191	0.0426	
40	0.0154	0.0346	
41	0.0124	0.0271	0.0167
42	0.0099	0.0202	
43	0.0080	0.0141	
44	0.0064	0.0089	
45	0.0051	0.0048	
46	0.0041	0.0018	0.0026

47	0.0033		
48	0.0026		
49			
50			
TGF	2.3837	2.3946	2.3943

Fuente: Elaboración propia.

Al analizar dicha desagregación, es posible observar diferencias considerables en el patrón de las tasas específicas a lo largo de las edades (ver Gráfica 28).

En el caso de la desagregación a través del modelo de Gompertz, se obtiene un patrón de fecundidad donde ésta resulta con niveles menores en las edades tempranas. La fecundidad aumenta considerablemente en la etapa de la adolescencia, específicamente a partir de la edad 16 alcanzando un máximo en la edad 25. Posteriormente, se observa un acelerado descenso de la fecundidad hasta la edad de 35 años. Es en esta edad cuando se observa un descenso no muy acelerado que continúa hasta el fin de periodo de reproducción.

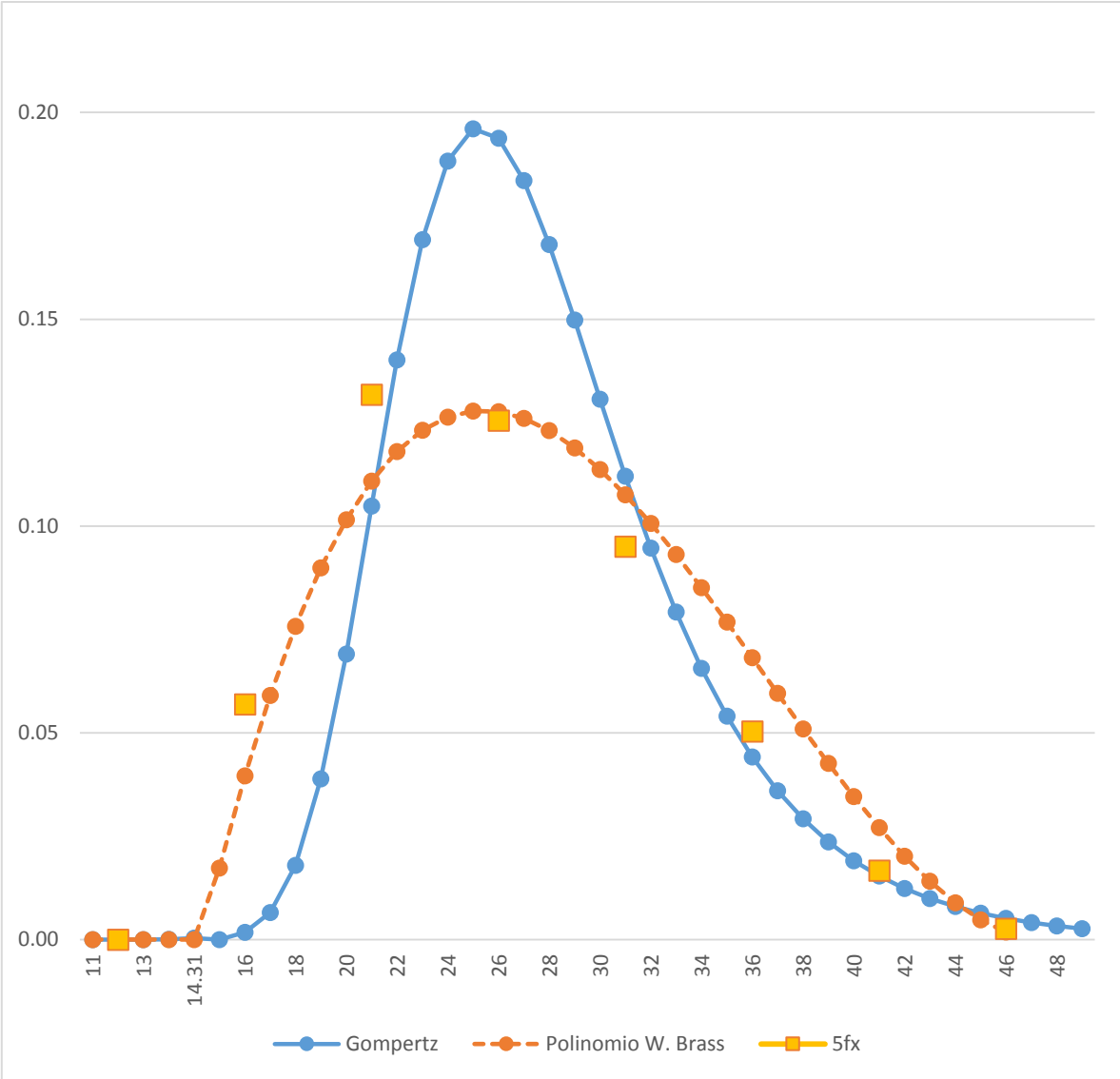
Por otro lado, en el caso de la desagregación a través del polinomio de Brass, se observa que la edad al comienzo de la reproducción es más temprana ya que la curva se encuentra desplazada hacia la izquierda en las edades de la etapa adolescente. El aumento de la fecundidad se observa a partir del comienzo de la edad a la reproducción, aunque no es muy acelerado en comparación con el modelo de Gompertz. El punto máximo de la fecundidad es a la edad de 25 años y a partir de esta edad, se observa un descenso de la fecundidad no muy acelerado.

Es posible notar que los niveles de la fecundidad son mayores en el caso del polinomio de Brass en las edades extremas, caso contrario en el modelo de Gompertz donde los niveles son menores. En el caso de las edades intermedias, sucede el caso inverso ya que el nivel de la fecundidad es mayor con el modelo de Gompertz, en comparación con el ajuste vía polinomio de Brass.

Si se desea describir el comportamiento observado, el polinomio de Brass presenta un mejor ajuste de la tendencia observada de las tasas de fecundidad por edades quinquenales, ya que son consistentes en comparación con los ajustes obtenidos con el ajuste del modelo de

Gompertz. No obstante, se observa que la cúspide de la curva de fecundidad estimada no representa el caso específico de México, tanto en el ajuste vía polinomio de Brass como en el modelo de Gompertz. De acuerdo con los datos observados, la cúspide de la fecundidad es temprana (20 años), mientras que en ambos métodos de desagregación se observa una cúspide en edades tardías (25 años).

Gráfica 28. Desagregación de $1f_x$ por el método de Gompertz vs polinomio de W. Brass, República Mexicana 2010



Fuente: Elaboración propia.

3.3.2.3 Migración

En el estudio del fenómeno de la migración surge la dificultad para la construcción de patrones modelo, entendidos como expresiones matemáticas que tienen la posibilidad de resumir y describir las tendencias que se observan, debido a que es un fenómeno irregular. Si bien la experiencia habla de un fenómeno con irregularidades, se han desarrollado algunos modelos de los patrones de migración.

Los modelos que se describen y aplican en este trabajo son el modelo de Rogers y Castro (1982) y el del uso de polinomios de orden inferior utilizadas definitivamente por tramos para interpolar, conocidas como funciones splines.

En el primer modelo, de acuerdo con los autores Rogers y Castro (1982), se examinaron las irregularidades en el perfil de edades que mostraban los patrones empíricos de las tasas de migración. Dichos patrones modelo de migración observados sirvieron para separar con base en la forma, y con ello, agrupar de acuerdo a las familias de patrones. Entonces los patrones modelo de migración hipotéticos (estimados) pueden adaptarse al estudio sobre el fenómeno de migración, en especial en países con información poco confiable o de calidad no satisfactoria (Rogers & Castro, 1982).

El otro modelo que sirve para analizar los patrones de migración son las funciones splines o funciones de interpolación segmentaria. A continuación se describen ambos métodos y posteriormente se realiza la aplicación al caso de México.

- Modelo de Rogers y Castro

Este modelo fue desarrollado con un programa típico observado de migración por edades. El patrón modelo es la graduación de lo observado y se define como la suma de cuatro componentes que se representan con curvas distintas, cada una con su tasa de ascenso o descenso según sea el caso (Rogers & Castro, 1982):

- 1) Una curva exponencial negativa que representa las edades previas a la actividad económica, con tasa de descenso α_1

- 2) Una curva unimodal sesgada a la izquierda que interpreta a las edades económicamente activas colocada en μ_2 en el eje por edades que muestran tasas de ascenso (λ_2) y descenso (α_2)
- 3) Una curva en forma de campana que constituye a las edades posteriores a la actividad económica o edades poslaborales colocadas en μ_3 en el eje por edades que muestran tasas de ascenso (λ_3) y descenso (α_3)
- 4) Una curva constante (c) que incluye el aumento de la calidad de adecuación proporcionada por la expresión matemática encontrada

La descomposición anterior ilustra un programa típico observado de migración por edades (línea dentada) y su graduación por un patrón modelo (línea sobrepuesta gruesa), lo anterior sugiere la suma de las cuatro curvas (ver Gráfica 29) y la expresión matemática^{XI} es la siguiente (Rogers & Castro, 1982)

$$M(x) = a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2)-e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} + a_3 e^{-\alpha_3(x-\mu_3)-e^{-\lambda_3(x-\mu_3)}} + c \quad (44)$$

Definida para $x = 0,1,21, \dots, z$. Donde

α_1 , es la tasa de descenso de la curva de las edades prelaborales

α_2 , es la tasa de descenso de la curva de la fuerza de trabajo

λ_2 , es la tasa de ascenso de la curva de la actividad económica

λ_3 , es la tasa de ascenso de la curva de las edades poslaborales

α_3 , es la tasa de descenso de la curva de las edades poslaborales en edad de trabajar

c , es la constante

x_l , es el punto mínimo

x_h , es el punto máximo

x_r , es el máximo de retiro

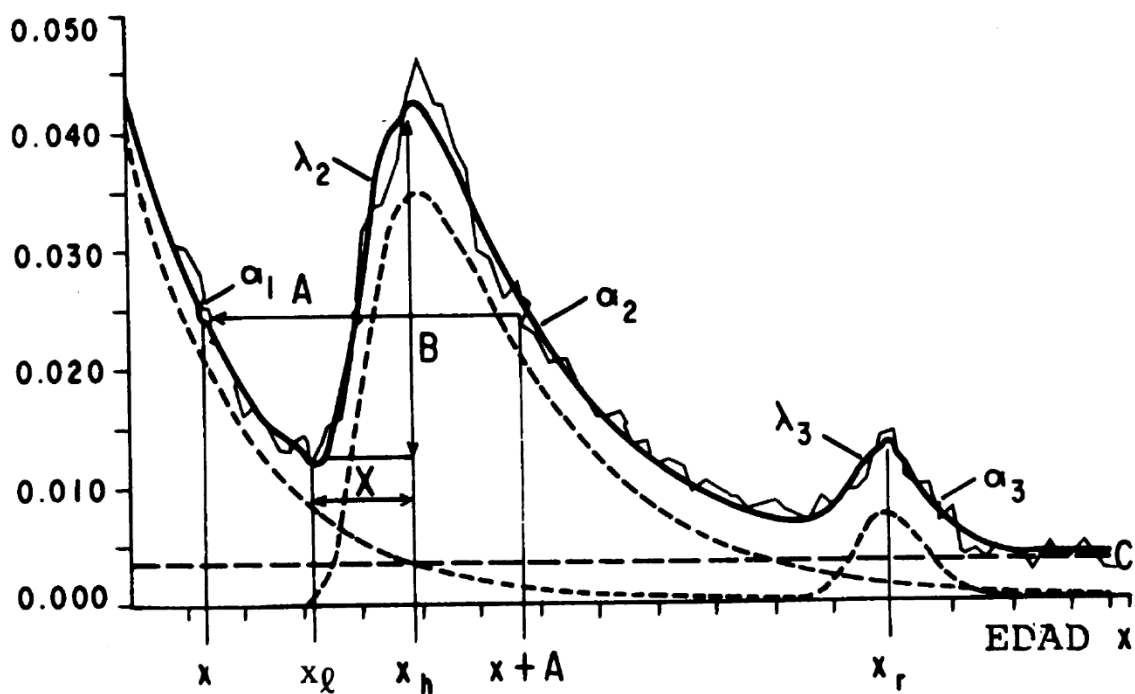
^{XI} Ver Anexo sección de Migración para la construcción de la función matemática

X , es la curva de la actividad económica

A , es la curva de parentesco

B , es el salto

Gráfica 29. Patrón modelo de migración de Rogers y Castro



Fuente: Rogers & Castro (1982). Patrones modelo de migración. En *Demografía y Economía*.

Los once parámetros correspondientes al patrón modelo completo son: α_1 , α_1 , α_2 , α_2 , μ_2 , λ_2 , α_3 , α_3 , μ_3 , λ_3 y c . Y el perfil del patrón modelo completo está definido por siete de los once parámetros: α_1 , α_2 , μ_2 , λ_2 , α_3 , μ_3 y λ_3 . El nivel lo determinan los cuatro parámetros restantes: α_1 , α_2 , α_3 y c .

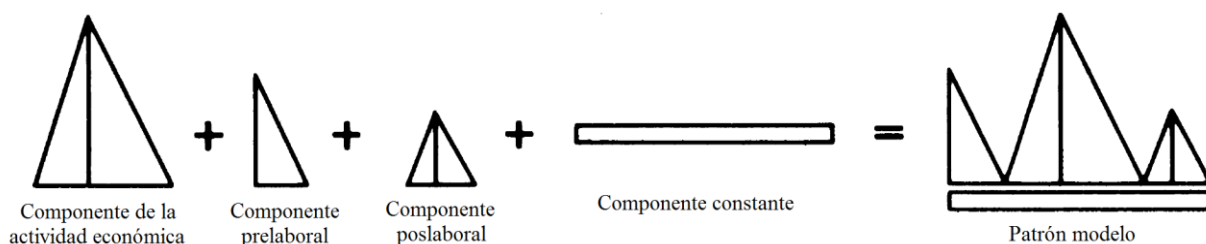
Es importante mencionar que si se producen cambios en el valor de la tasa bruta de migraproducción de un patrón modelo en particular, entonces surge una alteración de manera proporcional en los valores del patrón modelo mientras que el patrón observado no se altera. Sin embargo, también existen otros aspectos del perfil que dependen de la distribución del nivel del patrón entre los componentes de edades previas y posteriores a la participación

económica (fuerza de trabajo), así como la participación del total del nivel correspondiente al término constante c . En caso de que existan patrones de migración sin un máximo de retiro, se pueden representar a través de un modelo reducido con 7 parámetros, es decir se omite el tercer componente de la ecuación (44).

La curva de la fuerza de trabajo respecto a la edad x está asociada con la primera pareja de puntos, X , definida como la diferencia en años entre las edades máximas y el punto mínimo, es decir, $X = x_h - x_l$. El incremento en la tasa de migración de individuos en edades x_h sobre los x_l , se la nombrará salto (B).

Para caracterizar un patrón modelo de migración observado, se comienza con la curva central de la actividad económica y se añaden los componentes de las edades prelaborales y poslaborales y el componente constante (ver Gráfica 30).

Gráfica 30. Componentes fundamentales del patrón modelo de migración de Rogers y Castro



Fuente: Rogers & Castro (1982). Patrones modelo de migración. En *Demografía y Economía*.

Para obtener una valoración de la calidad de ajuste que proporciona el patrón modelo, se calcula el error medio absoluto como por ciento del recurso observado. La expresión es la siguiente

$$E = \frac{\frac{1}{n} \sum_x \hat{M}(x) + M(x)}{\frac{1}{n} \sum_x M(x)} * 100$$

Si bien se sabe que el fenómeno de migración es altamente selectivo por edades, para analizarlo es necesario de medidas que representen y ayuden a comprender los patrones y la dinámica de la migración. Una de las medidas de migración es la tasa bruta de migración que se define como el cociente del número de migrantes que deja una población en particular localizada en espacio y tiempo, y el número de personas en promedio expuestas al riesgo de

convertirse en migrantes, es decir el número de personas-año. Otro indicador es la tasa de migraproducción bruta (*TBM*) definida como la suma de las tasas de migración por edades individuales, análoga a la tasa de reproducción bruta fecundidad en el fenómeno de fecundidad.

En cuanto a la cercanía de las tasas de migración de los niños con la de sus padres, sugiere otro cambio importante en los patrones de migración observados. Se define la curva de parentesco observada A , como el promedio de los valores A_x calculados en aumento para el número de años entre cero y el punto bajo x_l , donde $x - A_x$ es una edad obtenida por interpolación, ya que por cada punto x en el máximo posterior de la curva de migración se obtiene la edad $x - A_x$ con una tasa idéntica de migración en parte del punto bajo anterior a la curva de migración.

Por otro lado, es posible analizar el patrón de migración por edades específicas observadas (o graduadas), al hacer referencia a: la altura de una edad en particular, a la ubicación de los máximos o líneas máximas, a las curvas del patrón que van junto al perfil por edad, a los cocientes entre una altura en particular o curvas, a áreas bajo la curva en ciertas partes y a las distancias horizontales y verticales entre alturas y ubicaciones importantes (Rogers & Castro, 1982).

Las medidas que describen la caracterización de un patrón modelo de migración por edades, se pueden agrupar en las siguientes categorías y subcategorías: medidas básicas y medidas derivadas.

Las medidas básicas son los 11 parámetros fundamentales y sus cocientes:

Alturas: a_1, a_2, a_3 y c

Ubicación: μ_2, μ_3

Curvas: $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_2, \alpha_3, \lambda_3$

Cocientes: $\delta_{1,c} = \frac{a_1}{c}, \delta_{1,2} = \frac{a_1}{a_2}, \delta_{3,2} = \frac{a_3}{a_2}, \beta_{1,2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \sigma_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}, \sigma_3 = \frac{\lambda_3}{\alpha_3}$

Las medidas derivadas son las propiedades del patrón modelo:

Áreas: $TBM, \%(0-14), \%(15-64), \%(65+)$

Ubicación: \bar{n}, x_l, x_h, x_r

Distancias: X, A, B

De acuerdo con los autores, “el cociente $\delta_{1,c} = \frac{a_1}{c}$ mide la distribución de la fracción de su nivel al componente constante. Los cocientes $\delta_{1,2} = \frac{a_1}{a_2}$ y $\delta_{3,2} = \frac{a_3}{a_2}$ reflejan la división del remanente entre los tres (o dos) componentes” (Rogers & Castro, 1982, pág. 279). Con lo anterior, es posible describir la descomposición del patrón modelo de migración junto con las dimensiones verticales y horizontales.

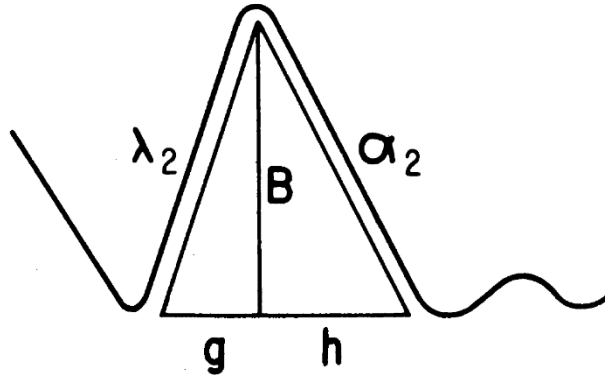
Los patrones de migración pueden tener un máximo temprano o tardío, según la ubicación de μ_2 en el eje horizontal. Se define entonces como patrones de máximo temprano a los que tienen menos de 19 años, y patrones de máximo tardío a los de más de 22 años.

La altura de los componentes de la actividad económica y la prelaboral y poslaboral, la determinan los parámetros a_2 y a_1 , respectivamente. El cociente $\frac{a_2}{a_1}$ indica el grado de "dominación laboral" (Rogers & Castro, 1982, pág. 279), mientras que $\delta_{1,2} = \frac{a_1}{a_2}$ es el índice de la dependencia infantil que mide el nivel en el cual los niños efectúan la migración junto con sus padres. Entonces mientras más bajo es el valor de $\delta_{1,2}$, más bajo es el grado de la dependencia infantil que muestra un patrón de migración y, por lo tanto, mayor es su dominancia laboral. De acuerdo con los autores, lo anterior sugiere una clasificación dicotómica de los patrones de migración en las categorías dependientes infantiles y dominancia de edades activas. Se puede aplicar un argumento análogo a la curva de edades poslaborales con $\delta_{3,2} = \frac{a_3}{a_2}$ como el índice. A su vez, el valor del parámetro λ_3 se interpreta para identificar la dominancia de retiro, en especial si presenta valores elevados. Si los valores son positivos señala la presencia del máximo de retiro mientras que un valor de cero indica su ausencia.

Al analizar el nivel de migración relativa de los que se encuentran en edades de trabajar con respecto de los niños y pensionados, se analiza la dominancia de edades activas. Por otro lado, la asimetría laboral se refiere a la curva de la asimetría de la curva en forma de campana que describe el perfil de la migración de la actividad económica. En esta curva, si se traza una línea perpendicular que conecta el máximo con la base de la curva en forma de campana

(es decir, el salto, B), y se divide la base en dos segmentos g y h (ver Gráfica 31), entonces si se realiza el cociente $\frac{h}{g}$ se tiene un indicador de asimetría de la curva.

Gráfica 31. Curva de la asimetría de la curva en forma de campana del modelo de migración de Rogers y Castro



Fuente: Rogers & Castro (1982). Patrones modelo de migración. En *Demografía y Economía*.

No obstante, es posible notar que el cociente $\sigma_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$ (el índice de la asimetría laboral) se relaciona considerablemente con el cociente anterior $\left(\frac{h}{g}\right)$ debido a la siguiente relación:

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_2} \sim \frac{B}{g} \div \frac{B}{h} = \frac{h}{g}$$

donde \sim denota proporcionalidad. Debido a lo anterior, σ_2 se puede utilizar para clasificar los patrones de migración de acuerdo con su grado de asimetría laboral. Si se aplica un argumento análogo a la curva de las edades poslaborales, entonces $\sigma_3 = \frac{\lambda_3}{\alpha_3}$ puede definirse como el índice de la asimetría de retiro.

Es importante tomar en cuenta que al "sumar" una curva de las edades prelaborales de un nivel dado al componente de la fuerza de trabajo, se tiene que considerar algunas indicaciones de su contorno. En ese sentido, si las tasas de migración de los niños reflejan las de sus padres, entonces α_1 debe ser casi igual a α_2 , y por lo tanto el índice de regularidad de la curva paterna, $\beta_{1,2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, debe ser cercano a la unidad.

De las medidas anteriores, las que dependen del nivel de la migración son la altura, las áreas y distancias verticales y el salto^{XII}. En cuanto al perfil de la migración por edades, los parámetros del patrón modelo que lo determinan son $\alpha_1, \alpha_2, \mu_2, \lambda_2, \alpha_3, \mu_3$ y λ_3 . Los patrones sin un máximo de retiro se reducen a cuatro parámetros: $\alpha_2, \alpha_3, \mu_2$ y λ_2 , mismos que definen la actividad económica; y los patrones que tienen una curva de retiro obtienen un parámetro adicional α_3 .

Los autores definen tres conjuntos de patrones modelo de migración (Tabla 30):

- 1) El patrón con 11 parámetros con máximo de retiro
- 2) El patrón alterno de 9 parámetros con curva de retiro
- 3) El patrón simple sin máximo ni curva de retiro

Tabla 30. Clasificación cruzada de patrones de migración que definen una docena de familias promedio

Patrón/Medida	Máximo	Dominancia	Simetría	Regularidad
Máximo de retiro	+	+	+	+
Curva de retiro	+	+	+	+
Forma reducida	+	+	+	+

Fuente: Rogers & Castro (1982). Patrones modelo de migración. En *Demografía y Economía*.

Para obtener el valor estimado de los parámetros, se ajusta la información para adecuar el patrón modelo mediante el procedimiento de minimización funcional, mejor conocido como el algoritmo modificado de Levenberg-Marquardt. A partir de esto, es posible obtener el valor estimado de los parámetros.

En la mayoría de los modelos y estudios de la dinámica de la migración, y de población en general, se recomienda realizar modelos separados por sexo para analizar si el fenómeno es selectivo por sexo. Si bien anteriormente se indicaba que los hombres se movilizaban más en comparación con las mujeres, es importante analizar los cambios que ocurren a través del

^{XII} “Las diferencias tan diversas en las tasas brutas de migración otorgan una elevación a las curvas y a las relaciones verticales entre los patrones que no son comparables cuando se examinan visualmente. Entonces, debe recurrirse a la normalización de las áreas bajo las curvas de migración, por ejemplo, efectuar una revisión general de la escala a la unidad de la TBM.”(Rogers & Castro, 1982, pp. 283)

tiempo y del espacio en cuanto a los patrones de migración masculina y femenina. A su vez, como la migración ocurre en el tiempo y en el espacio, los estudios de los patrones deben delinear su ocurrencia respecto a los intervalos de tiempo, así como en el sistema de áreas geográficas.

- Análisis de sensibilidad de los parámetros

Al analizar los patrones de migración, es posible examinarlos de acuerdo con los valores de los parámetros más importantes. Entonces, de acuerdo al nivel de migración se analizan los valores de los parámetros a_1 , a_2 , a_3 y c ; o bien se analizan las tasas brutas de migración asociadas.

A su vez, es posible distinguir patrones con un máximo de retiro de aquellos donde no se tiene. También se puede analizar la tasa de descenso λ_2 si es relativamente baja o elevada, así como la edad media \bar{n} .

Por otro lado, es importante analizar las medidas descritas anteriormente (ver Gráfica 1) tales como el punto mínimo (x_l), el punto máximo (x_h) y el máximo de retiro (x_r). Así como la curva de la fuerza de trabajo asociada con la primera pareja de puntos, X , y el incremento en la tasa de migración de individuos en edades x_h y x_l , el que se define como salto B .

El cociente de los dos parámetros verticales a_1 y a_2 , es la medida de la importancia relativa de la migración de niños en el patrón modelo de migración. Los patrones con un índice de dependencia infantil ($\delta_{1,2} = \frac{a_1}{a_2}$) de un quinto o menos se denominan dominancia de edades activas, mientras que los valores de más de dos quintos se denominan dominancia de dependencia infantil (Rogers & Castro, 1982).

Los patrones de migración con componentes de actividad económica que toman la forma de curva en forma de campana relativamente simétrica, se denominan patrones de simetría de edades activas y el valor en el índice de asimetría ($\sigma_2 = \frac{\lambda_2}{a_2}$) es menor que 2. Mientras que los patrones de asimetría de edades activas toman valores de 5 o más.

En cuanto al índice de regularidad del cambio de parentesco, si bien el valor es cercano a la unidad, los valores de $\beta_{1,2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ que son menores a cuatro quintos, o más elevados de seis quintos, se denominan irregulares.

A continuación se examina analíticamente la forma en la que se producen cambios en algunos de los parámetros más importantes en los perfiles por edades del patrón modelo de acuerdo con los autores.

Se analiza la doble curva exponencial que describe el componente de la actividad económica, denotada como $f_2(x)$, por razones de conveniencia analítica (Rogers & Castro, 1982)

$$f_2(x) = a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2) - e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} \quad (45)$$

Se observa que si $\alpha_2 = \lambda_2$, la función alcanza un máximo en el punto y_h cuando $x_h = \mu_2$

Al analizar el caso más general donde $\alpha_2 \neq \lambda_2$, si se deriva (45) para ambas variables e igualando a cero, se llega a la siguiente expresión

$$x_h = \mu_2 - \frac{1}{\lambda_2} \ln \left[\frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right] \quad (46)$$

$$y_h = a_2 \left[\frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right]^{\alpha_2/\lambda_2} e^{-\alpha_2/\lambda_2} \quad (47)$$

Nótese que la expresión (46) no depende de a_2 y la expresión (47) no depende de μ_2 . Ahora si $\lambda_2 > \alpha_2$, entonces $x_h > \mu_2$ pero si $\lambda_2 = \alpha_2$ entonces las dos ecuaciones anteriores se simplifican y se obtiene

$$x_h = \mu_2$$

$$y_h = \frac{a_2}{e}$$

Entonces, con base en las relaciones anteriores, como μ_2 afecta a x_h se puede analizar la variación de x_h como una función de α_2 y λ_2 . En cuanto a y_h , se tiene que es independiente de μ_2 y varía proporcionalmente con a_2 que a su vez su variación depende fundamentalmente de las dos variables α_2 y λ_2 .

Si se grafican los valores de x_h contra los de α_2 , para una λ_2 fija, se observa que incrementos en α_2 llevan a decrementos en x_h . Análogamente, si se grafican los valores de x_h contra los de λ_2 , para una α_2 fija, se observa que el aumento en λ_2 llevan a incrementos en x_h y la tasa a la que aumenta x_h disminuye rápidamente en la medida en que x_h se aproxima a su asíntota (Rogers & Castro, 1982).

Por otro lado, al graficar los valores y_h contra los de α_2 , para una λ_2 fija, se observa un aumento en forma de U que alcanza su mínimo en $\alpha_2 = \lambda_2$ y a medida que incrementa λ_2 la forma de U se amplía.

Al derivar la función (45) es posible examinar la tasa de cambio proporcional de la función $f_2(x)$, y por lo tanto, analizar la influencia de los parámetros α_2 y λ_2 en el componente de la actividad económica. La expresión es la siguiente

$$\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} = -\alpha_2 + \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-\mu_2)} \quad (48)$$

La ecuación (48) define la tasa de cambio como la suma de dos componentes: $-\alpha_2$ y la exponencial (el segundo término de la ecuación). Es importante notar que los parámetros α_2 y λ_2 no son tasas de ascenso y descenso, respectivamente, pero dichos parámetros se encuentran relacionados con las tasas reales.

El componente de la actividad económica en el perfil por lo general, traslada a x_h a una edad ligeramente más joven y aumenta y_h en cerca de $a_1 e^{-\alpha_1 x_h}$ (cifra que no tiene mucho peso). El aumento en el término constante c , afecta únicamente a y_h en el valor de la constante. Debido a lo anterior, la tasa de migración en la edad x_h se puede expresar como

$$M(x_h) \cong a_1 e^{-\alpha_1 x_h} + y_h + c$$

La curva de parentesco definida como A , es la variable que interrelaciona los componentes de la edad prelaboral y de la actividad económica. Por conveniencia analítica se analizan los parámetros fundamentales con base a su dependencia. Entonces si se supone que α_1 y α_2 son aproximadamente iguales, para las edades inmediatas posteriores a x_h la componente de la actividad económica del patrón modelo de migración se puede aproximar por la función

$$a_1 e^{-\alpha_2(x_2-\mu_2)}$$

Es importante recordar que si la curva de edades prelaborales está dada por $a_1 e^{-\alpha_2 x_1}$, entonces si $\alpha_1 = \alpha_2$ es posible igualar las dos funciones para resolver la diferencia en edades denominada como cambio de parentesco. La expresión es la siguiente

$$A = X_2 - X_1 = \mu_2 + \frac{1}{\alpha_2} \ln\left(\frac{1}{\delta_{1,2}}\right) \quad (49)$$

Al analizar la ecuación (49), es posible notar que el cambio de parentesco aumentará cuando aumenten los valores de μ_2 y disminuirá cuando los valores de α_2 y $\delta_{1,2}$ aumenten.

Una vez que se describe la forma en la que se producen cambios en algunos de los parámetros más importantes de acuerdo con el análisis de la función del patrón modelo, se describen gráficamente los tres términos del patrón de migración de Rogers y Castro.

Como se mencionó anteriormente, el patrón modelo de Rogers y Castro está compuesto por la suma de tres funciones. Los valores de los parámetros que se utilizan se toman únicamente para ejemplificar los cambios que surgen al alterar, ya sea aumentar o reducir, su valor (ver Tabla 31).

Tabla 31. Valores de los parámetros del patrón modelo de Rogers y Castro

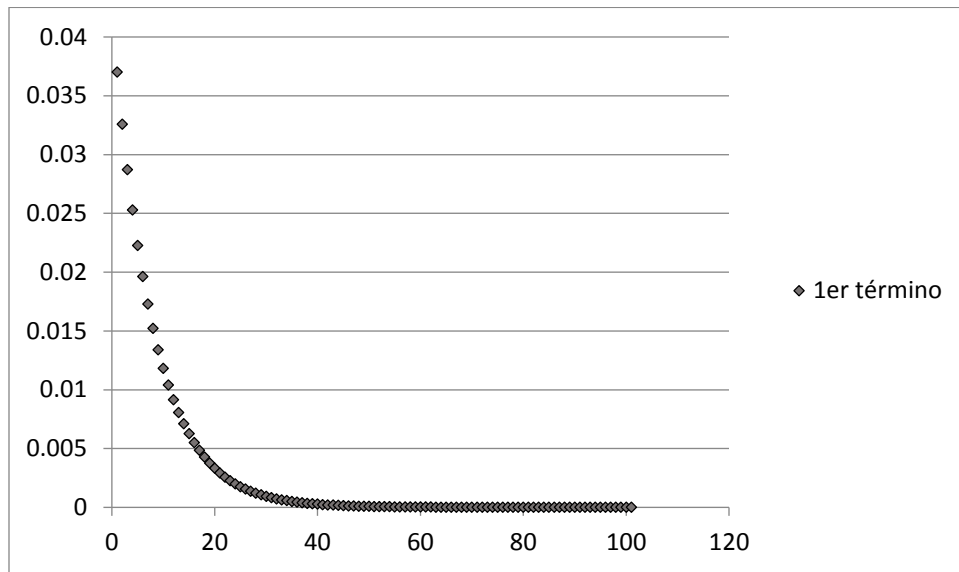
Parámetro	Valor
a_1	0.037
a_2	0.081
a_3	0.00027
c	0.003
α_1	0.127
α_2	0.124
α_3	0.204
μ_2	21.42
μ_3	99.32
λ_2	0.231
λ_3	0.042

Fuente: Elaboración propia

Entonces, al graficar los tres términos de manera separada se obtienen:

Primer término: $a_1 e^{-\alpha_1 x}$

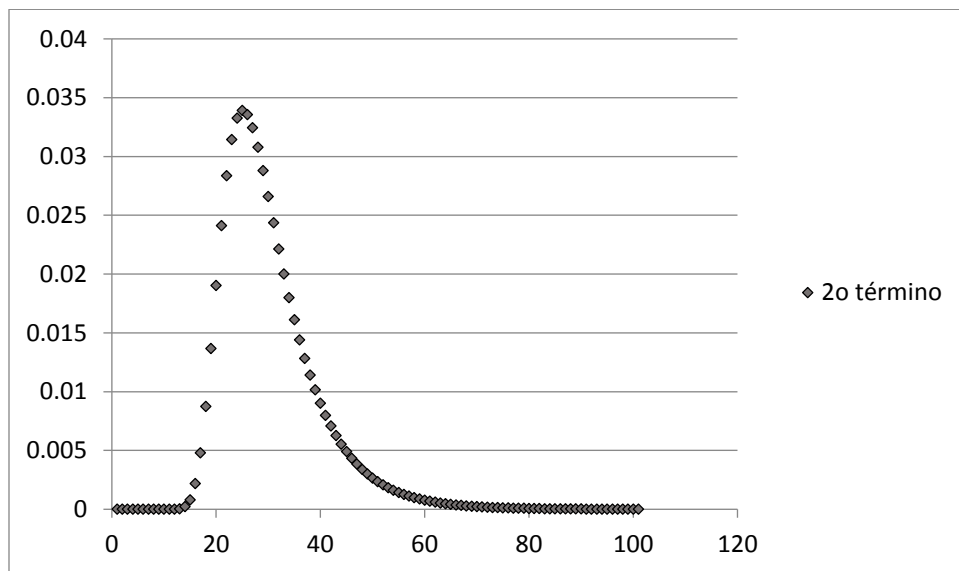
Gráfica 32. Primer término de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



Fuente: Elaboración propia

Segundo término: $a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2)} - e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}$

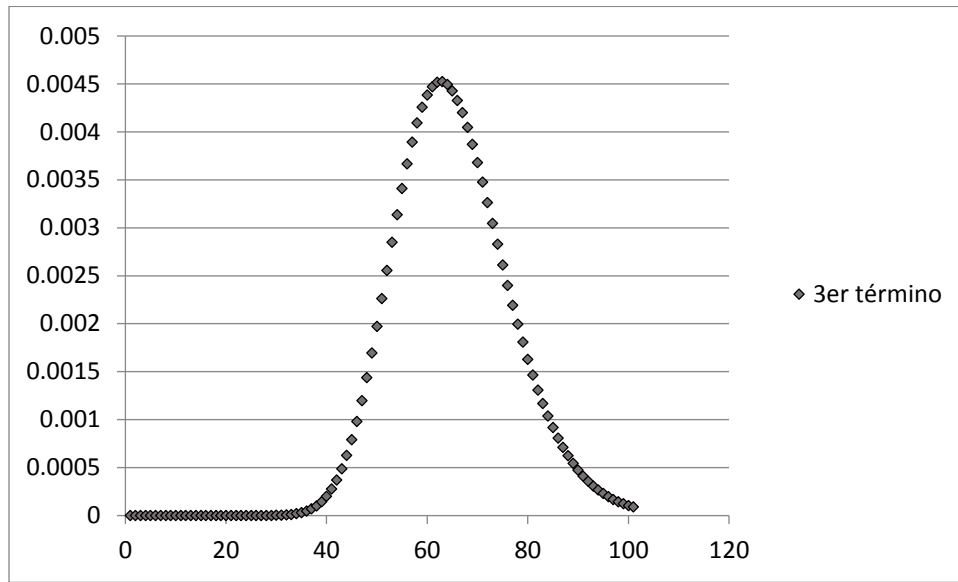
Gráfica 33. Segundo término de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



Fuente: Elaboración propia

Tercer término: $a_3 e^{-\alpha_3(x-\mu_3)} - e^{-\lambda_3(x-\mu_3)}$

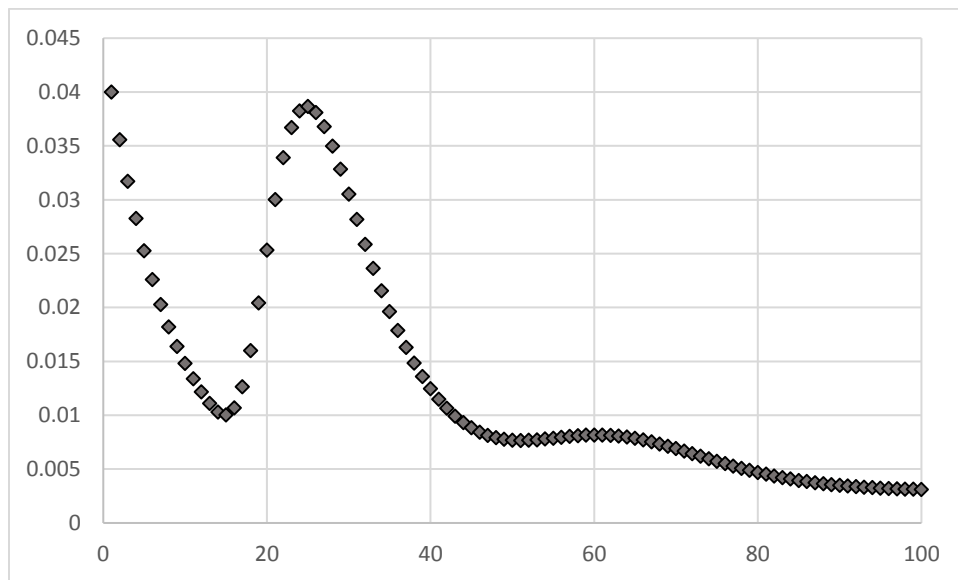
Gráfica 34. Tercer término de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



Fuente: Elaboración propia

Y al sumar las curvas anteriores, es decir los tres términos, se obtiene el perfil por edades del patrón modelo completo de migración de Rogers y Castro (ver Gráfica 35).

Gráfica 35. $M(x)$ del patrón modelo de migración de Rogers y Castro



Fuente: Elaboración propia

Después de describir gráficamente las funciones correspondientes a los tres términos del perfil por edades del patrón modelo, se analizan cada uno de los parámetros de acuerdo a su valor, si aumenta o disminuye (ver Tabla 31). En ese sentido, se aumentará y disminuirá el valor de los 11 parámetros para observar el comportamiento de cada uno de ellos en el patrón modelo (ver Tabla 33). Estos aumentos y disminuciones en los valores de los parámetros no son proporcionales, es decir, el aumento o la disminución varían de acuerdo a la sensibilidad de los parámetros. Entonces, se obtienen 22 casos para el análisis de la sensibilidad de los parámetros^{XIII} (ver Gráfica 36).

Tabla 32. Cambios en los valores de los parámetros de la función del patrón modelo de Rogers y Castro

Parámetro	Valor	Aumento	Reducción
a_1	0.037	0.1	0
a_2	0.081	0.16	0.04
a_3	0.00027	0.0005	0
c	0.003	0.05	0
α_1	0.127	0.7	0.05
α_2	0.124	0.25	0.06
α_3	0.204	0.25	0.01
μ_2	21.42	42	10
μ_3	99.32	150	30
λ_2	0.231	0.5	0.105
λ_3	0.042	0.1	0.035

Fuente: Elaboración propia

Al analizar los cambios en los valores de los parámetros, se observa que los parámetros a_1 , a_2 , a_3 y c se asocian al nivel de la migración (ver Gráfica 19). Un aumento en el valor de ellos corresponde a un aumento en el nivel, y en el caso contrario, una disminución en su valor corresponde un descenso en el nivel. El parámetro a_1 modifica el nivel de la curva de las edades prelaborales, mientras que el parámetro a_2 modifica el nivel de la curva de las

^{XIII} Cada una de las gráficas aparecen en la parte del Anexo Migración.

edades laborales, en cuanto al parámetro a_3 se observa que el cambio surge en el nivel de la curva de edades poslaborales. Por último, el parámetro c traslada la curva completa del patrón modelo del perfil por edades.

Por otro lado, se observa que los parámetros son α_1 , α_2 , μ_2 , λ_2 , α_3 , μ_3 y λ_3 son los que determinan el perfil de la migración por edades. El parámetro α_1 modifica la forma de la curva de las edades prelaborales, el cambio se observa especialmente en la pendiente de la curva, mientras que el parámetro α_2 modifica la forma de curva de las edades laborales, en cuanto al parámetro α_3 se observa que el cambio surge en el la forma de la curva de edades poslaborales.

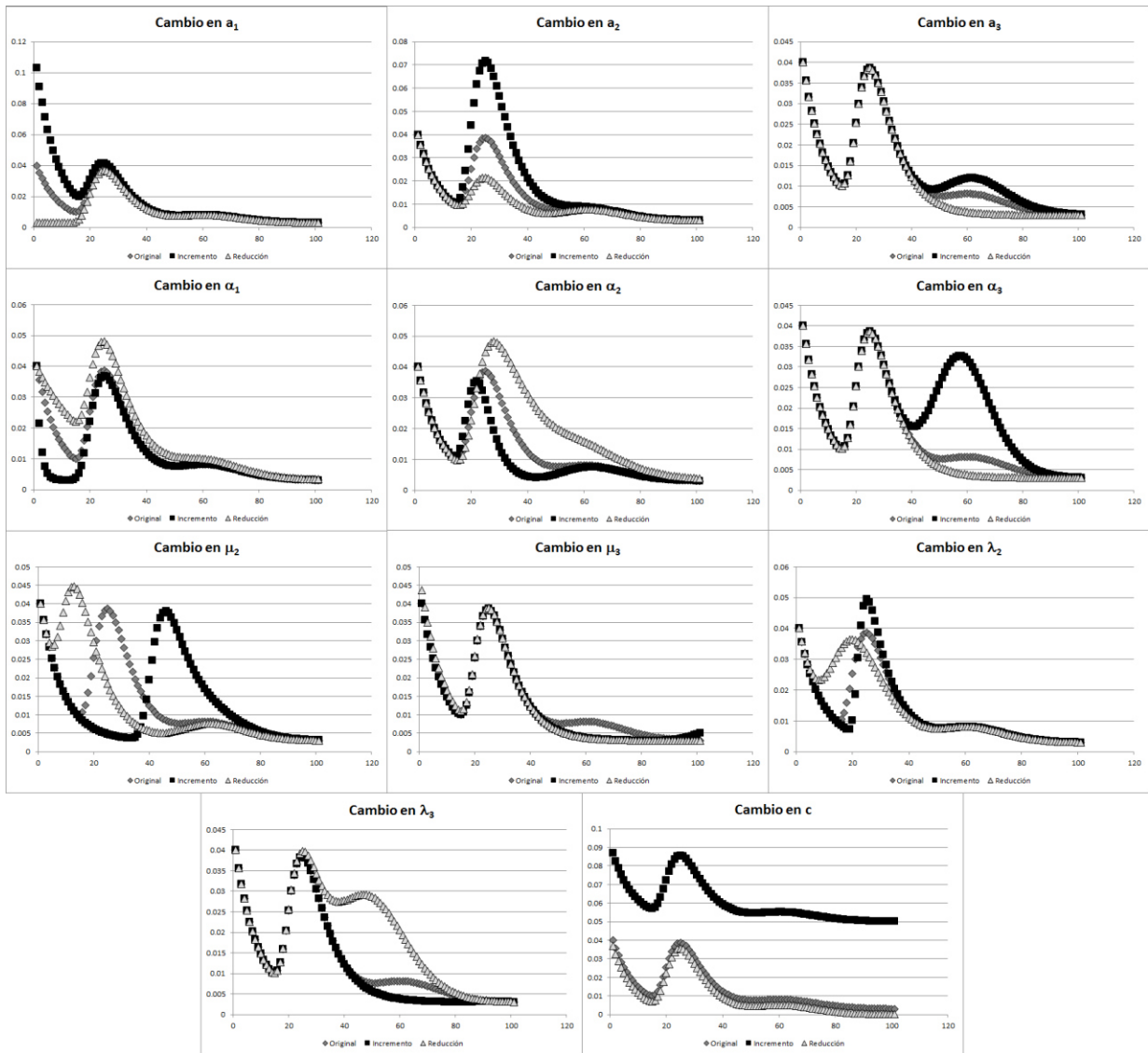
El parámetro μ_2 modifica la ubicación de la curva de las edades prelaborales y la traslada hacia la derecha o izquierda dependiendo de la reducción o el aumento en su valor, respectivamente. También se observa que se traslada el punto máximo x_h y el punto mínimo x_l .

El parámetro μ_3 a su vez modifica la ubicación, en este caso de la curva de las edades poslaborales, ya que traslada la curva hacia la derecha o izquierda, si el valor se reduce o aumenta. También se observa que se traslada la ubicación del punto máximo de retiro x_r .

El parámetro λ_2 modifica la forma de la curva de las edades laborales, pues se traslada hacia arriba o abajo. También se observa que se modifica el ascenso de la curva ya que se modifica la pendiente, a su vez traslada la ubicación del punto máximo x_h y el punto mínimo x_l .

Por último, el parámetro λ_3 modifica la forma de la curva de las edades poslaborales, se observa que modifica el ascenso de la curva pues traslada la curva hacia arriba o abajo dependiendo de la reducción o el aumento en su valor. También se observa que se traslada el punto máximo de retiro x_r .

Gráfica 36. Cambios en los valores de los parámetros de la función Rogers y Castro



Fuente: Elaboración propia

- Polinomio de grado n

Las funciones polinómicas se definen a través de un polinomio de la siguiente manera

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + jx + h$$

Donde n es un número entero positivo que indica el grado del polinomio, donde el polinomio consta de $n + 1$ parámetros. Es posible notar que el coeficiente del grado del polinomio es

diferente cero. No obstante, los demás coeficientes pueden ser o no ser diferentes de cero. El dominio de las funciones polinómicas es \mathbb{R} .

El uso de las funciones polinómicas de grado n resultan una herramienta del análisis numérico para interpolar $n + 1$ puntos.

- Ejemplos

Si bien la función propuesta por Rogers y Castro que modela al fenómeno de la migración tiene 11 parámetros, el ajuste polinómico correspondiente a dicha función es un polinomio de grado 10. Para realizar el ajuste, se utiliza la información de los inmigrantes y emigrantes de la República Mexicana por edades individuales en el año 2010 por sexo (ver Tabla 33).

Tabla 33. Inmigrantes y emigrantes internacionales por edades individuales por sexo, República Mexicana 2010

Inmigrantes						Emigrantes					
Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres
0	2,428	1,925	46	1,237	367	0	3,967	3,570	46	1,341	919
1	3,596	2,889	47	1,135	345	1	3,183	3,062	47	1,200	860
2	5,099	4,092	48	1,024	321	2	2,795	2,735	48	1,072	811
3	4,275	3,450	49	955	309	3	2,438	2,495	49	955	768
4	3,370	2,741	50	878	295	4	2,117	2,278	50	852	729
5	2,878	2,351	51	802	279	5	1,950	2,100	51	762	692
6	2,675	2,193	52	743	266	6	1,709	1,931	52	683	657
7	2,335	1,919	53	680	251	7	1,613	1,822	53	614	625
8	1,816	1,504	54	620	238	8	1,618	1,764	54	552	599
9	1,153	984	55	551	225	9	1,729	1,745	55	498	577
10	786	695	56	498	213	10	1,966	1,821	56	453	555
11	755	682	57	461	205	11	2,348	1,955	57	412	530
12	743	687	58	427	197	12	2,872	2,150	58	376	502
13	721	687	59	401	190	13	3,526	2,406	59	344	472
14	676	668	60	374	181	14	4,271	2,701	60	316	442
15	643	640	61	347	171	15	5,163	3,040	61	290	414
16	655	621	62	324	162	16	5,625	3,395	62	268	389
17	736	619	63	304	153	17	6,334	3,740	63	249	366
18	910	639	64	286	144	18	6,996	4,038	64	232	343
19	1,152	680	65	264	132	19	7,817	4,177	65	214	320
20	1,432	733	66	245	121	20	8,328	4,740	66	197	299
21	1,724	793	67	229	111	21	8,669	4,893	67	181	280
22	2,031	858	68	202	98	22	8,744	4,933	68	167	265
23	2,368	935	69	176	87	23	8,646	4,893	69	155	253
24	2,685	1,013	70	150	76	24	8,476	4,802	70	143	243
25	3,013	1,105	71	128	67	25	8,241	4,644	71	133	234

26	3,257	1,177	72	112	61	26	7,892	4,410	72	122	226
27	3,393	1,222	73	97	54	27	7,464	4,134	73	112	217
28	3,490	1,258	74	84	49	28	6,994	3,843	74	103	208
29	3,483	1,263	75	71	43	29	6,502	3,552	75	95	201
30	3,438	1,249	76	61	38	30	6,014	3,273	76	86	193
31	3,390	1,229	77	54	35	31	5,550	3,010	77	78	182
32	3,300	1,191	78	46	31	32	5,114	2,760	78	71	168
33	3,187	1,137	79	40	29	33	4,704	2,525	79	62	157
34	3,076	1,077	80	34	26	34	4,320	2,313	80	53	141
35	2,919	1,005	81	28	23	35	3,956	2,125	81	46	122
36	2,758	932	82	24	21	36	3,611	1,955	82	41	90
37	2,619	865	83	21	20	37	3,288	1,801	83	39	79
38	2,454	792	84	18	18	38	2,994	1,661	84	3	2
39	2,276	719	85	13	16	39	2,728	1,534	85	0	0
40	2,114	652	86	12	16	40	2,487	1,419	86	0	0
41	1,945	587	87	10	13	41	2,264	1,317	87	0	0
42	1,782	531	88	8	9	42	2,053	1,225	88	0	0
43	1,617	479	89	5	7	43	1,853	1,141	89	0	0
44	1,467	435	90	0	0	44	1,666	1,062	90	0	0
45	1,339	396	100	0	0	45	1,496	986	100	0	0

Fuente: Elaboración propia

Para realizar el ajuste polinómico a la información de inmigrantes y emigrantes de la República Mexicana para el año 2010, se utiliza el programa Curves Expert para obtener los valores de los coeficientes. El polinomio de grado 10 es el siguiente:

$$ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + jx + k$$

Al obtener el valor de los coeficientes del polinomio (a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k) se obtiene el ajuste de la función polinómica (ver Tabla 34).

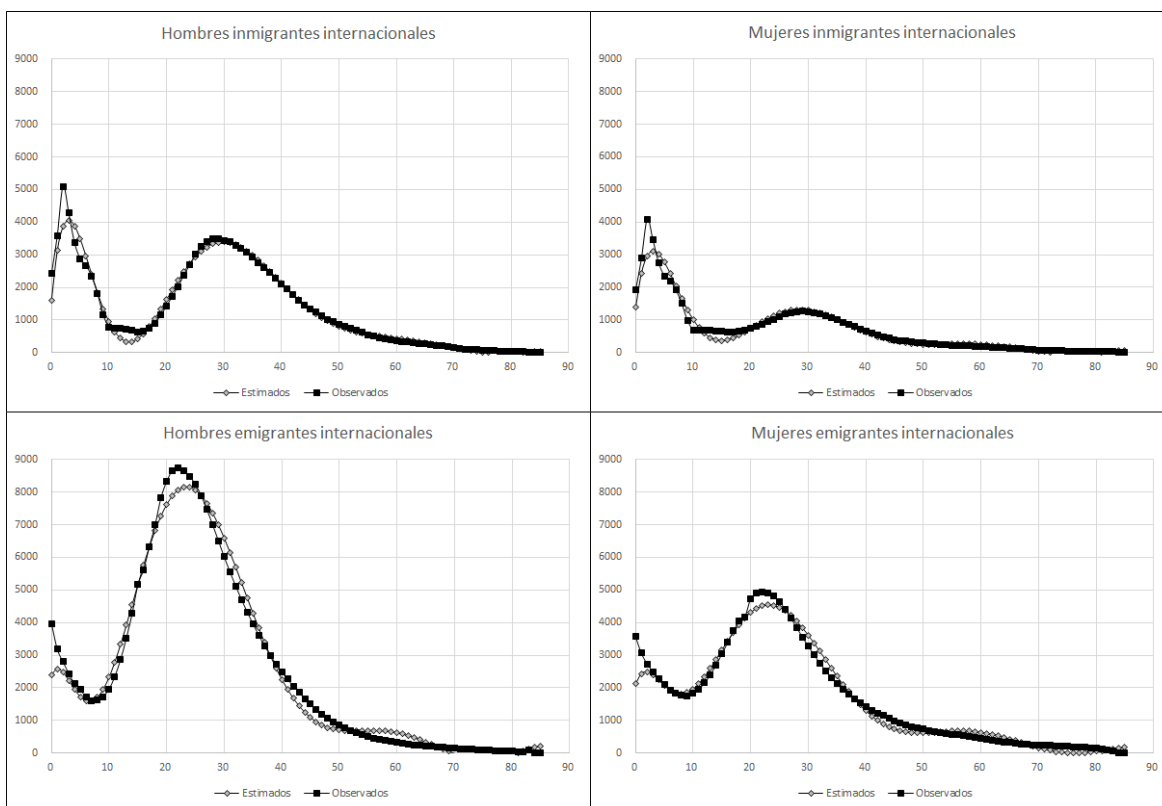
Tabla 34. Coeficientes del polinomio de grado 10 para inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo, República Mexicana 2010

Coeficiente	Inmigración		Emigración	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
a	1613.3237058000000000	1399.7181303000000000	2403.3193694400000000	2122.9621336000000000
b	1984.2793590600000000	1352.1762722000000000	387.4793111360000000	484.3505407850000000
c	-519.0243076700000000	-345.3105861870000000	-242.4108919650000000	-196.5718349510000000
d	50.1420462001000000	33.0424962956000000	38.0024555679000000	26.3861573395000000
e	-2.4739896663100000	-1.6481277111500000	-2.4722660794100000	-1.6235800364800000
f	0.0713488189852000	0.0485429084851000	0.0855527624877000	0.0548658911999000
g	-0.0012778375309300	-0.0008914961649480	-0.0017485451298800	-0.0011088409514700
h	0.0000144348179901	0.0000103362546318	0.0000218665379695	0.0000137889516460
i	-0.0000001002145208	-0.0000000736091133	-0.0000001647116298	-0.0000001035685608
j	0.0000000003908723	0.0000000002941162	0.0000000006871692	0.0000000004314639
k	-0.0000000000006561	-0.0000000000005050	-0.0000000000012208	-0.0000000000007660

Fuente: Elaboración propia

Una vez obtenidos los valores de los coeficientes del polinomio, es posible calcular los valores de estimados de los inmigrantes y emigrantes por edad según sexo y, posteriormente, es posible comparar dicho ajuste con la información de migración observada (ver Gráfica 37).

Gráfica 37. Ajuste polinómico de los inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo, República Mexicana 2010



Fuente: Elaboración propia

Al analizar el ajuste polinómico a la información, se obtuvieron los siguientes resultados (ver Tabla 35). Se observa que los valores del coeficiente de correlación son cercanos a la unidad, lo cual indica que el ajuste es bueno. De manera general, el ajuste menos satisfactorio se observa en las edades de 0 a 10 años tanto para inmigración como emigración internacional, para hombres y mujeres (ver Gráfica 37).

Tabla 35. Error estándar y coeficiente de correlación del ajuste polinómico de grado $n=10$ de inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo, República Mexicana 2010

	Inmigración		Emigración	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Error Estándar	258.6847183	223.3691762	422.614635	323.2160329
Coefficiente de correlación	0.9805312	0.9589641	0.9881263	0.9783187

Fuente: Elaboración propia

- Análisis de sensibilidad de los parámetros

En este apartado se analizan los parámetros y se observa el comportamiento en cuanto a la modificación de la curva de la migración, en este caso se utiliza como ejemplo la curva de los emigrantes internacionales para las mujeres. En ese sentido, se aumentará y disminuirá el valor de los 11 coeficientes para observar el comportamiento de cada uno de ellos (ver Tabla 36).

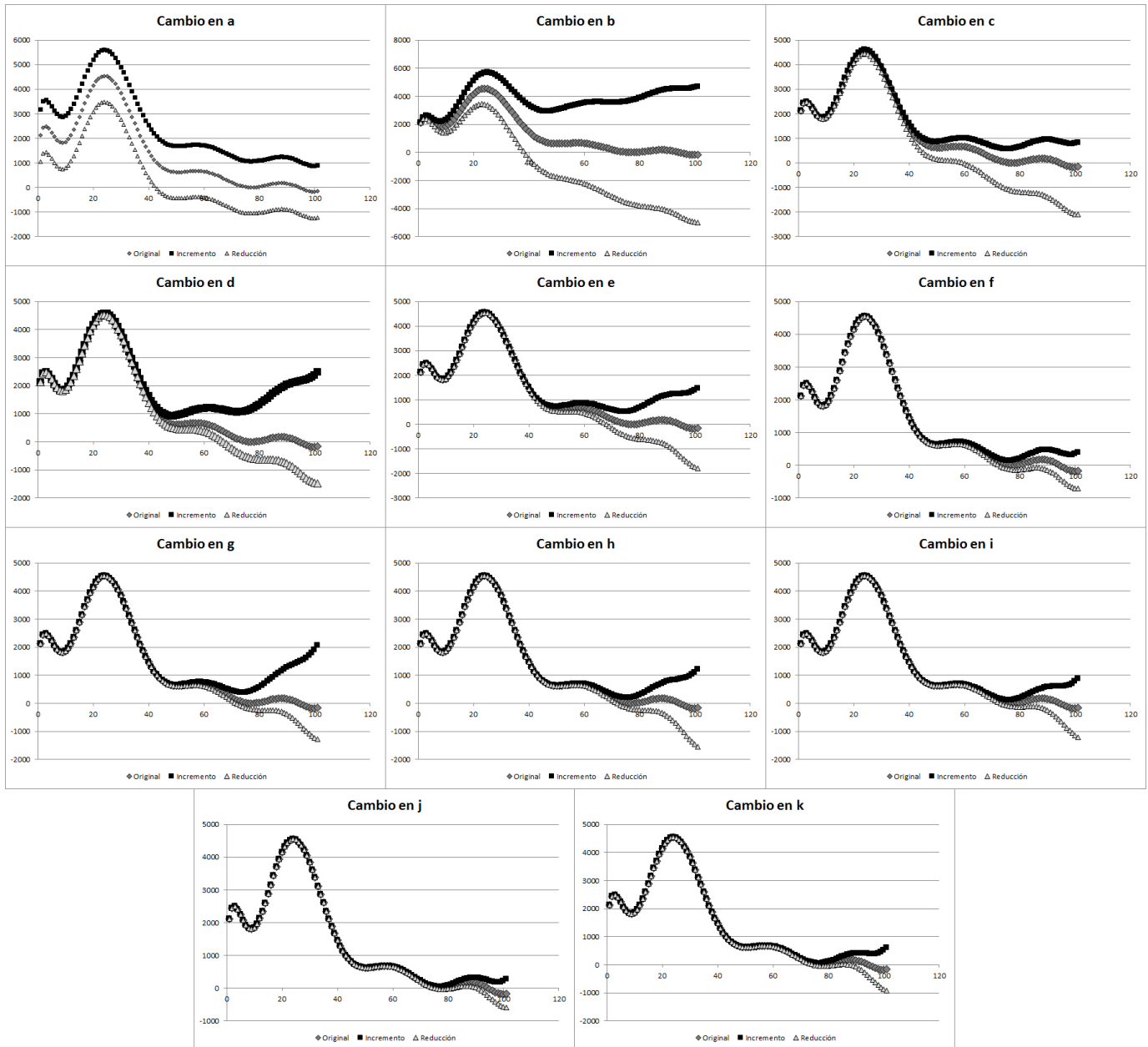
Tabla 36. Cambios en los valores de los parámetros de la función polinómica de grado $n=10$

Parámetro	Valor	Aumento	Reducción
A	2122.9621336	3184.4432004	1061.4810668
B	484.3505407850	532.7855948635	435.9154867065
C	-196.571834951000	-196.473549033525	-196.766441067602
D	26.3861573395000	26.3887959552339	26.3848380316330
E	-1.62358003648000	-1.62356380067964	-1.62359627228036
F	0.0548658911999000	0.0548659460657912	0.0548658363340088
G	-0.00110884095147000	-0.00110883873378810	-0.00110884206031095
H	0.0000137889516460000	0.0000137889654349516	0.0000137889378570484
I	-0.000000103568560842	-0.000000103568457273	-0.000000103568664411
J	0.000000000431463902	0.000000000431464333	0.000000000431463470
K	-0.000000000000766046	-0.000000000000766038	-0.000000000000766053

Fuente: Elaboración propia

Al analizar los cambios en los valores de los parámetros, es posible notar la sensibilidad de dichos coeficientes lo cual es posible examinar gráficamente (ver Gráfica 38). Se observa que si el coeficiente pertenece a un grado mayor de x , la curva del patrón se modifica en cuanto al nivel y en las edades prelaborales. A medida que surgen los cambios en los coeficientes que pertenecen a un grado menor de x , el patrón de la curva se modifica en las edades laborales y conforme aumenta el grado de x se modifican las edades poslaborales.

Gráfica 38. Cambios en los valores de los coeficientes de la función polinómica de grado $n=10$



Fuente: Elaboración propia

- Splines Cúbicos

Una herramienta útil que proporciona el análisis numérico son los splines. Este instrumento técnico consiste en una interpolación de $n + 1$ puntos. Si se tienen $n + 1$ puntos:

$$P_i(x_i, y_i)$$

Donde $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$

De los cuales se desea interpolar la función f . Para realizar la interpolación polinómica segmentada se realiza el supuesto de que las abscisas se encuentren ordenadas, es decir,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Las abscisas no necesariamente tienen que ser equidistantes. Si bien en el análisis numérico es posible utilizar polinomios de n -ésimo orden para interpolar entre $n+1$ puntos, la ventaja de utilizar polinomios de un menor grado es que se evitan oscilaciones que surgen al aplicar polinomios de grado mayor, en especial de grado mayor a 3.

Se le conoce como interpolación segmentaria a los polinomios de orden inferior aplicados a un subconjunto de datos. Dichos polinomios conectados se llaman funciones de interpolación segmentaria (*spline functions*) (Mina, 2011). Entonces las curvas de tercer grado para conectar cada par de datos se llaman funciones de interpolación cúbica segmentaria (*cubic splines*).

La idea de la interpolación es encontrar polinomios cúbicos denotados como $s_i(x)$, para $i = 0, 1, \dots, n$, que interpolen dicha función f en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Es decir, el objetivo de la interpolación cúbica segmentaria es obtener polinomios de tercer grado $n=3$ para cada uno de los intervalos entre nodos de la forma:

$$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

La función $S(x)$ se llama spline cúbica a trozos en $[x_0, x_n]$ si existen polinomios cúbicos $s_0(x), s_1(x), \dots, s_{n-1}(x)$ tales que

$$S(x) = s_i(x) \text{ en } [x_i, x_{i+1}] \text{ para } i = 0, 1, \dots, n - 1$$

Donde $S(x), S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $a = x_0$ y $b = x_n$. Entonces para los $n + 1$ puntos ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) existen n intervalos y por lo tanto $4n$ incógnitas constantes por evaluar. Para realizar dicha evaluación se requieren de las siguientes condiciones: (Salamanca, 2016):

1. $S(x)$ es un polinomio de grado 3 en cada uno de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$. Se denota a $s_i(x)$ en $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ a cada uno de estos polinomios que se unen bajo ciertas reglas de continuidad. Resulta obvio que $s_i(x)$ únicamente está definido en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$
2. La función pasa por todos los puntos de la tabla, es decir $S(x_i) = y_i, \forall i = 0, \dots, n$.
Lo que significa que

$$S_j(x_j) = y_j$$

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1}, \forall j = 0, 1, \dots, n - 1$$

3. $S(x)$ es de clase C^2 en (a, b) . En particular, esto implica que la primera derivada de $S(x)$ cumpla con lo siguiente:

$$S_k'(x_{k+1}) = S_{k+1}'(x_{k+1}), \forall k = 0, 1, \dots, n - 2$$

Lo anterior significa que las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales. Por otro lado, en cuanto a la segunda derivada se tiene

$$S_k''(x_{k+1}) = S_{k+1}''(x_{k+1}), \forall k = 0, 1, \dots, n - 2$$

Dicha expresión significa que las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

4. Finalmente, las segundas derivadas en los nodos inicial y final son ceros. Lo que significa que

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

Esta última condición se interpreta visualmente de que la función sea una línea recta en los nodos finales, y se dice que el spline es una interpolación segmentaria “natural”. Entonces, las condiciones anteriores se traducen en un sistema de ecuaciones lineales. Si se tienen 4 puntos, la forma en la que se expresa dicho sistema es la siguiente:

Los splines deben pasar por todos los puntos,

$$a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + d_1 = y_1$$

$$a_1x_2^3 + b_1x_2^2 + c_1x_2 + d_2 = y_2$$

$$a_2x_2^3 + b_2x_2^2 + c_2x_2 + d_2 = y_2$$

$$a_2x_3^3 + b_2x_3^2 + c_2x_3 + d_2 = y_3$$

$$a_3x_3^3 + b_3x_3^2 + c_3x_3 + d_3 = y_3$$

$$a_3x_4^3 + b_3x_4^2 + c_3x_4 + d_3 = y_4$$

Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales,

$$\frac{\partial}{\partial x} a_1x_2^3 + \frac{\partial}{\partial x} b_1x_2^2 + \frac{\partial}{\partial x} c_1x_2 + \frac{\partial}{\partial x} d_1 = \frac{\partial}{\partial x} a_2x_2^3 + \frac{\partial}{\partial x} b_2x_2^2 + \frac{\partial}{\partial x} c_2x_2 + \frac{\partial}{\partial x} d_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} a_2x_3^3 + \frac{\partial}{\partial x} b_2x_3^2 + \frac{\partial}{\partial x} c_2x_3 + \frac{\partial}{\partial x} d_2 = \frac{\partial}{\partial x} a_3x_3^3 + \frac{\partial}{\partial x} b_3x_3^2 + \frac{\partial}{\partial x} c_3x_3 + \frac{\partial}{\partial x} d_3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x} a_1x_2^3 + \frac{\partial^2}{\partial x} b_1x_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x} c_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x} d_1 = \frac{\partial^2}{\partial x} a_2x_2^3 + \frac{\partial^2}{\partial x} b_2x_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x} c_2x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x} d_2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x} a_2x_3^3 + \frac{\partial^2}{\partial x} b_2x_3^2 + \frac{\partial^2}{\partial x} c_2x_3 + \frac{\partial^2}{\partial x} d_2 = \frac{\partial^2}{\partial x} a_3x_3^3 + \frac{\partial^2}{\partial x} b_3x_3^2 + \frac{\partial^2}{\partial x} c_3x_3 + \frac{\partial^2}{\partial x} d_3$$

Las segundas derivadas en los nodos inicial y final son cero,

$$\frac{\partial^2}{\partial x} a_1x_1^3 + \frac{\partial^2}{\partial x} b_1x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x} c_1x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x} d_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x} a_3x_4^3 + \frac{\partial^2}{\partial x} b_3x_4^2 + \frac{\partial^2}{\partial x} c_3x_4 + \frac{\partial^2}{\partial x} d_3 = 0$$

Entonces, dicho sistema de ecuaciones lineales (12 ecuaciones) es posible expresarlo en un sistema matricial de la siguiente manera:

$$C = X^{-1}Y$$

Donde,

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$X =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} x_2^3 & \frac{\partial}{\partial x} x_2^2 & \frac{\partial}{\partial x} x_2 & \frac{\partial}{\partial x} 1 & -\frac{\partial}{\partial x} x_2^3 & -\frac{\partial}{\partial x} x_2^2 & -\frac{\partial}{\partial x} x_2 & -\frac{\partial}{\partial x} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} x_3^3 & \frac{\partial}{\partial x} x_3^2 & \frac{\partial}{\partial x} x_3 & \frac{\partial}{\partial x} 1 & -\frac{\partial}{\partial x} x_3^3 & -\frac{\partial}{\partial x} x_3^2 & -\frac{\partial}{\partial x} x_3 & -\frac{\partial}{\partial x} 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x} x_2^3 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_2^2 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_2 & \frac{\partial^2}{\partial x} 1 & -\frac{\partial^2}{\partial x} x_2^3 & -\frac{\partial^2}{\partial x} x_2^2 & -\frac{\partial^2}{\partial x} x_2 & -\frac{\partial^2}{\partial x} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_3^3 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_3^2 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_3 & \frac{\partial^2}{\partial x} 1 & -\frac{\partial^2}{\partial x} x_3^3 & -\frac{\partial^2}{\partial x} x_3^2 & -\frac{\partial^2}{\partial x} x_3 & -\frac{\partial^2}{\partial x} 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x} x_1^3 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_1^2 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_1 & \frac{\partial^2}{\partial x} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_4^3 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_4^2 & \frac{\partial^2}{\partial x} x_4 & \frac{\partial^2}{\partial x} 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_3 \\ y_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si las matrices X y Y son conocidas, únicamente se necesita calcular la inversa de la matriz X (denotada como X^{-1}) para posteriormente obtener los valores de los coeficientes que se expresan en la matriz C .

- Ejemplo

A continuación se realiza la aplicación de la herramienta de las funciones spline definidas por tramos con interpolación, dando lugar al ajuste de las curvas de splines con base en la información de los inmigrantes y emigrantes internacionales por edades quinquenales por sexo, para el caso de México en el año 2010 de la conciliación demográfica realizada por CONAPO (ver Tabla 37).

Tabla 37. Inmigrantes y emigrantes internacionales por edades quinquenales por sexo, República Mexicana 2010

Edad	Inmigrantes		Emigrantes	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
0-4	18,768	15,097	14,501	14,141
5-9	10,859	8,951	8,619	9,362
10-14	3,681	3,418	14,983	11,032
15-19	4,097	3,198	31,934	18,390
20-24	10,241	4,333	42,863	24,261
25-29	16,636	6,025	37,093	20,583
30-34	16,390	5,884	25,703	13,880
35-39	13,026	4,313	16,578	9,075
40-44	8,924	2,684	10,322	6,163
45-49	5,689	1,739	6,064	4,345
50-54	3,723	1,329	3,463	3,302
55-59	2,338	1,030	2,084	2,636
60-64	1,633	811	1,355	1,954
65-69	1,115	549	913	1417
70-74	571	307	612	1129
75-79	272	174	392	901
80-84	125	108	223	409
85-89	47	61	0	0
90 y más	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia con base en la información de la conciliación demográfica CONAPO (2015).

Para realizar la aplicación de los splines cúbicos a los inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo de la República Mexicana en el año 2010, es necesario definir 4 puntos para cada uno de ellos (ver Tabla 38).

Tabla 38. Puntos a utilizar de los inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo, República Mexicana 2010

Puntos (x_i, y_i)	Inmigrantes				Emigrantes			
	Hombres		Mujeres		Hombres		Mujeres	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	0	18,768	0	15,097	0	14,501	0	14,141
2	10	3,681	10	3,418	5	8,619	5	9,362
3	25	16,636	25	6,025	20	42,863	20	24,261
4	55	2,338	55	1,030	55	2,084	55	2,636

Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, es posible calcular la matriz de los coeficientes de los splines cúbicos definidos en cada uno de los tramos. Primeramente se definen las matrices X y Y , y posteriormente se calcula X^{-1} que es la inversa de la matriz X . De esta manera, al multiplicar las matrices $X^{-1} * Y$ se obtiene la matriz de los coeficientes para inmigrantes y emigrantes por sexo, definida como la matriz C (ver Tabla 39).

Tabla 39. Coeficientes estimados a través de splines cúbicos para inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo, República Mexicana 2010

Coeficientes	Inmigrantes		Emigrantes	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
a1	5.46473759	2.94385085	21.06786258	11.60675166
b1	-0.000000000000003	-0.000000000000001	-0.000000000000005	-0.000000000000002
c1	-2055.21609698	-1462.24721450	-1703.14489613	-1245.97072725
d1	18768.46368002	15097.11512585	14501.12345035	14140.69814958
a2	-5.24310640	-2.54170071	-10.37468674	-5.52336045
b2	321.23531993	164.56654679	471.63823980	256.95168167
c2	-5267.56929628	-3107.91268236	-4061.33609512	-2530.72913561
d2	29476.30767770	20582.66668536	18431.44211534	16281.96216351
a3	0.79997400	0.28956674	1.43659966	0.70904710
b3	-131.99571050	-47.77851228	-237.03894405	-116.99277125
c3	6063.20646441	2200.71379435	10112.20758189	4948.15992292
d3	-64946.82366139	-23655.88728720	-76058.84906477	-33577.29822670

Fuente: Elaboración propia

Esto significa que existe un polinomio de grado $n=3$ entre cada uno de los puntos que se definieron anteriormente (ver Tabla 38). Por ejemplo, para los hombres inmigrantes internacionales los polinomios ajustados son los siguientes:

$$5.4647 * (x_1)^3 + (-0.000000000000003) * (x_1)^2 + (-2055.22) * (x_1) + 18768 = 18,768$$

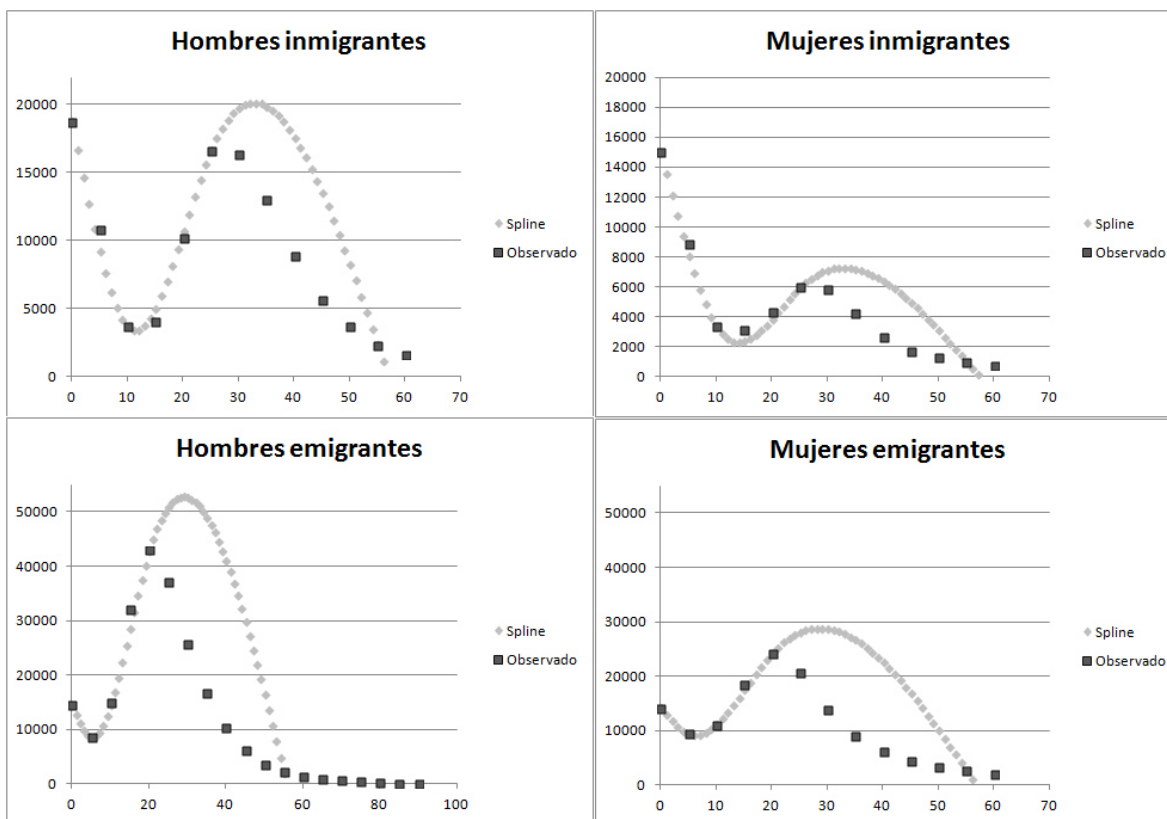
Donde $x_1 = 0$ (ver Tabla 9). Análogamente sucede para los puntos restantes tanto en inmigración como emigración, para ambos sexo. Al calcular los valores de los coeficientes de los polinomios de grado $n=3$, es posible obtener el número de inmigrantes y emigrantes por edades individuales ajustados vía splines cúbicos (ver Tabla 40) y posteriormente analizar el ajuste obtenido al comparar gráficamente lo estimado con lo observado (ver Gráfica 39).

Tabla 40. Inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo ajustados vía splines cúbicos, República Mexicana 2010

Inmigrantes						Emigrantes					
Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres
0	18,768	15,097	31	19,997	7,278	0	14,501	14,141	31	52,423	28,509
1	16,719	13,638	32	20,126	7,330	1	12,819	12,906	32	51,878	28,197
2	14,702	12,196	33	20,144	7,343	2	11,263	11,742	33	51,136	27,788
3	12,750	10,790	34	20,057	7,318	3	9,961	10,716	34	50,203	27,285
4	10,897	9,437	35	19,870	7,256	4	9,037	9,900	35	49,090	26,693
5	9,175	8,154	36	19,586	7,159	5	8,619	9,362	36	47,804	26,015
6	7,618	6,960	37	19,211	7,029	6	8,801	9,155	37	46,355	25,257
7	6,256	5,871	38	18,749	6,868	7	9,554	9,263	38	44,750	24,422
8	5,125	4,906	39	18,206	6,678	8	10,814	9,653	39	42,999	23,515
9	4,255	4,083	40	17,587	6,459	9	12,519	10,292	40	41,110	22,540
10	3,681	3,418	41	16,895	6,215	10	14,607	11,146	41	39,091	21,501
11	3,424	2,925	42	16,136	5,946	11	17,016	12,184	42	36,952	20,402
12	3,463	2,593	43	15,315	5,655	12	19,684	13,370	43	34,701	19,248
13	3,768	2,407	44	14,436	5,343	13	22,548	14,672	44	32,346	18,043
14	4,305	2,353	45	13,504	5,012	14	25,546	16,058	45	29,897	16,791
15	5,045	2,413	46	12,524	4,663	15	28,615	17,494	46	27,361	15,497
16	5,956	2,574	47	11,501	4,299	16	31,695	18,946	47	24,748	14,165
17	7,005	2,821	48	10,440	3,920	17	34,721	20,382	48	22,066	12,798
18	8,163	3,137	49	9,345	3,530	18	37,633	21,769	49	19,323	11,402
19	9,396	3,507	50	8,221	3,129	19	40,367	23,073	50	16,529	9,980
20	10,674	3,917	51	7,073	2,720	20	42,863	24,261	51	13,692	8,536
21	11,966	4,352	52	5,906	2,304	21	45,068	25,307	52	10,820	7,076
22	13,239	4,795	53	4,725	1,882	22	46,980	26,208	53	7,922	5,603
23	14,463	5,232	54	3,534	1,457	23	48,607	26,968	54	5,008	4,122
24	15,605	5,647	55	2,338	1,030	24	49,959	27,593	55	2,084	2,636
25	16,636	6,025	56	1,142	603	25	51,044	28,085	56		1,150
26	17,528	6,354	57		178	26	51,870	28,450	57		
27	18,281	6,632	58			27	52,446	28,691	58		
28	18,899	6,862	59			28	52,781	28,814	59		
29	19,388	7,045	60			29	52,883	28,821	60		
30	19,753	7,183	61			30	52,761	28,718	61		

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 39. Inmigrantes y emigrantes internacionales por sexo ajustados vía splines cúbicos, República Mexicana 2010



Fuente: Elaboración propia

Con base en los resultados obtenidos, se observa que este método respeta las concavidades que se tienen en las primeras edades con base en la experiencia mexicana observada. No obstante, debido a que en este método únicamente se emplearon cuatro puntos, el ajuste en las edades adultas resulta menos satisfactorio. Para corregir lo anterior, se recomienda utilizar un mayor número de puntos. La elección de los puntos debe ser un nodo tal que el ajuste del spline cúbico definido en el intervalo anterior no se ajuste de manera satisfactoria. En este caso en particular, el quinto punto puede ser, para el caso de la inmigración la edad 25 y en el caso de la emigración la edad 20. Es importante mencionar que los nodos a elegir pueden ser los que se consideren necesarios.

- Comparación de los resultados obtenidos vía splines, polinomio y función del patrón modelo de Rogers y Castro

Para analizar el fenómeno de la migración, se describieron y analizaron tres métodos diferentes: el patrón modelo de Rogers y Castro, ajuste polinómico y los splines cúbicos. A continuación se realiza una comparación entre los tres métodos.

Primeramente, en el apartado anterior al comparar el modelo de Rogers y Castro con el ajuste polinómico respecto con la curva de migración, se observa que el patrón de Rogers y Castro tiene la ventaja de ser un modelo con parámetros de fácil interpretación, pues es posible indicar el significado de cada uno de ellos y su relación con la fuerza de trabajo. Mientras que en los once parámetros del ajuste polinómico, surge la dificultad de que no tienen una interpretación individual directa. También, se observa que la sensibilidad de los coeficientes del ajuste polinómico es considerablemente mayor en comparación con los parámetros del patrón modelo de Rogers y Castro. Esto a su vez contribuye a la dificultad en la interpretación directa.

Al analizar las ventajas del ajuste polinómico, se observa que los coeficientes del polinomio son fáciles de estimar en comparación con la función de Rogers y Castro, ya que para estimar los parámetros de este último se requiere un procedimiento matemático mayor al del ajuste polinómico. Otra de sus ventajas es que tiene un coeficiente de correlación muy cercano a la unidad y, por lo tanto, tiene mayor facilidad en lograr un buen ajuste de la información.

Por otro lado, en este apartado se realiza un ajuste de splines cúbicos a la función de Rogers y Castro con el valor de los parámetros previamente definidos (ver Tabla 31)^{XIV}. Con base en los valores de dichos parámetros, se estima la curva del patrón modelo de Rogers y Castro. Es importante recordar la expresión de dicha función:

$$M(x) = a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2)-e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} + a_3 e^{-\alpha_3(x-\mu_3)-e^{-\lambda_3(x-\mu_3)}} + c \quad (44)$$

^{XIV} Los valores de los parámetros del patrón modelo de Rogers y Castro son: $a_1=0.037$, $a_2=0.081$, $a_3=0.00027$, $c=0.003$, $\alpha_1=0.127$, $\alpha_2=0.124$, $\alpha_3=0.204$, $\mu_2=21.42$, $\mu_3=99.32$, $\lambda_2=0.231$ y $\lambda_3=0.042$

Donde x es la edad y $M(x)$ es el valor que toma la función, que se denotará como $Y(x)$. Posteriormente, se eligen los puntos a utilizar para realizar el ajuste vía splines cúbicos. Los nodos a utilizar en este caso son siete (ver Tabla 41).

Tabla 41. Nodos a utilizar para el ajuste vía splines cúbicos de la función de Rogers y Castro

Nodos	X_i	Y_i
1	0	0.04
2	15	0.01069730
3	25	0.03810069
4	45	0.00843614
5	65	0.00770229
6	85	0.00383960
7	95	0.00320556

Fuente: Elaboración propia

Entonces, para calcular los coeficientes de los polinomios de grado $n=3$ definidos en cada uno de los tramos, se realiza la multiplicación de matrices

$$C = X^{-1}Y$$

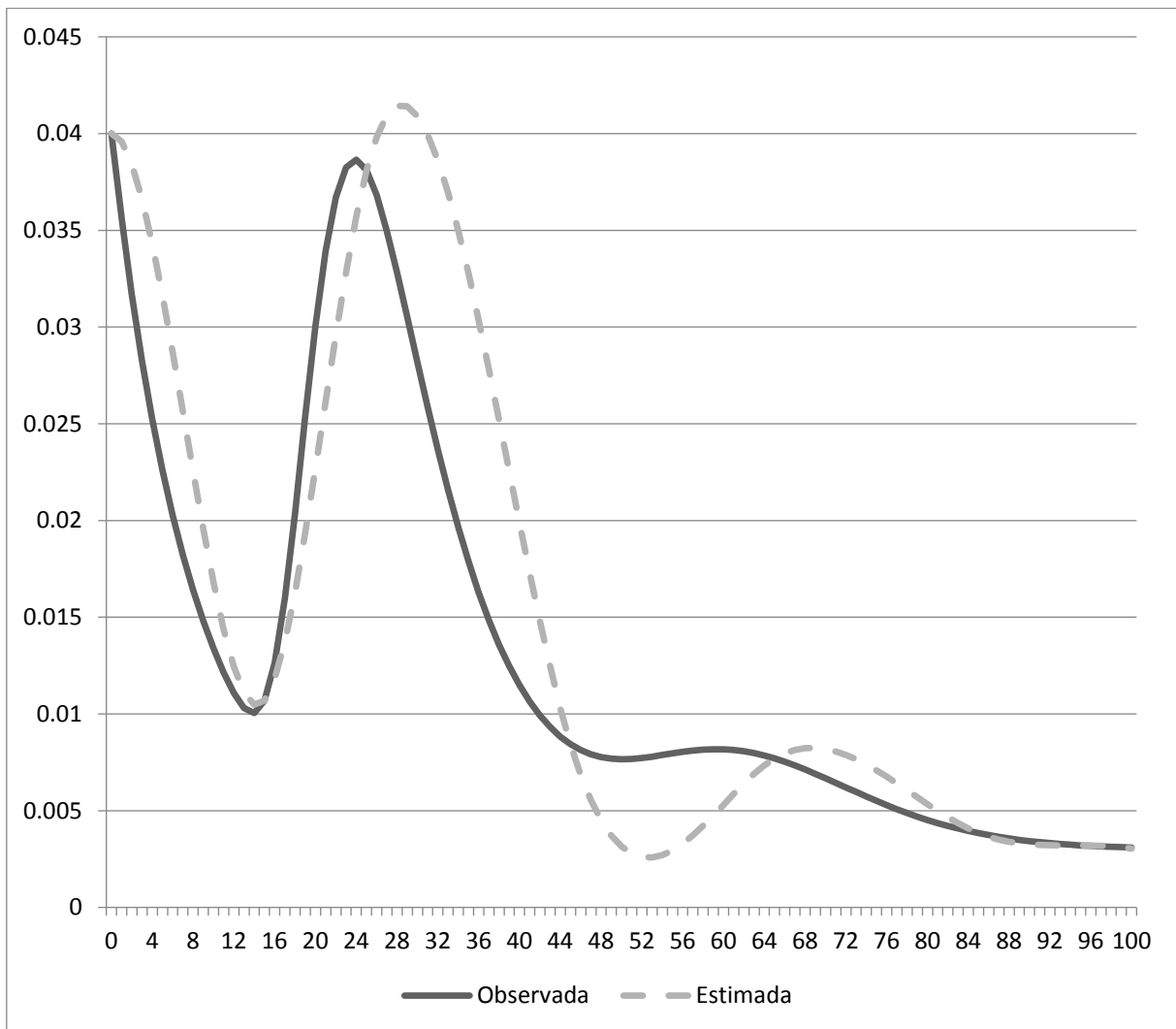
Una vez calculados los coeficientes (ver Tabla 42), es posible obtener la función de Rogers y Castro estimada vía splines cúbicos y a su vez compararlas gráficamente (ver Gráfica 40). Al analizar dicho ajuste, se observa que la función estimada modela la curva de la migración con un patrón de edades más tardías en comparación la función del patrón modelo de Rogers y Castro, ya que la curva se desplaza ligeramente a la derecha, lo que ocasiona que también el punto máximo se desplace. No obstante, dicho punto se encuentra ligeramente por arriba del punto máximo de la función de Rogers y Castro. A partir de este punto, se observa una disminución en las tasas de migración que continúa hasta edades adultas. Y es en la función estimada donde se observa que este descenso es más pronunciado, y a partir de las edades de 50-52 comienza un considerable aumento en la curva de migración en comparación con la función de Rogers y Castro. Se observa que este descenso tiene una caída más suave y se presenta en edades más tempranas. De manera general, se observa que el problema del ajuste surge en las edades adultas mayores debido a que la concavidad no se ajusta completamente a la función observada, aunque si lo hace para el resto de las edades.

Tabla 42. Valores de los coeficientes del ajuste vía splines cúbicos de la función de Rogers y Castro

Coeficiente	Valor	Coeficiente	Valor
a1	0.00002037	a4	-0.00000337
b1	-0.00043573	b4	0.00060665
c1	0.00000000	c4	-0.03588230
d1	0.04000000	d4	0.70142982
a2	-0.00002743	a5	0.00000122
b2	0.00171495	b5	-0.00028777
c2	-0.03226021	c5	0.02225461
d2	0.20130107	d5	-0.55820332
a3	0.00000824	a6	-0.00000086
b3	-0.00095983	b6	0.00024158
c3	0.03460940	c6	-0.02273938
d3	-0.35594568	d6	0.71662630

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 40. Ajuste vía splines cúbicos de la función de Rogers y Castro



Fuente: Elaboración propia

Es importante mencionar que la elección de los siete puntos para estimar los valores de los coeficientes de los splines cúbicos definidos por segmentos, se realiza como un primer acercamiento del ajuste vía splines cúbicos a la función de Rogers y Castro. Es por ello, que en las edades adultas el ajuste no resulta tan aproximado. No obstante, este modelo tiene la ventaja de que la elección de los puntos sean tales que el ajuste sea muy similar al deseado, es decir el modelo es flexible en cuanto a la elección de los puntos y para que la curva estimada se aproxime tanto como se desee.

Conclusiones

En el caso del fenómeno de mortalidad, el ajuste del método de logito a este fenómeno es mediante un modelo con dos parámetros, α y β , y se puede decir que es parsimonioso. El cálculo de la estimación de parámetros no resulta complejo y al interpretar dichos parámetros se observa una vinculación demográfica. El parámetro α indica el nivel de la mortalidad mientras que el parámetro β hace variar la pendiente, y por lo tanto, modifica el patrón de la mortalidad. Por otro lado, el modelo sirve para obtener una desagregación por edades individuales de las tasas específicas por edades quinquenales, lo cual es una ventaja, en caso de no contar con información por edades individuales.

En cuanto a la corrección a través de este modelo, corrige satisfactoriamente en los años no muy alejados. No obstante, si se desea corregir la información de años muy alejados, la esperanza de vida se reduce considerablemente, y por lo tanto, se observa que no refleja la experiencia observada para el caso específico mexicano en los años más alejados. En ese sentido, la elección del estándar es muy importante. Dicho estándar debe cumplir con el supuesto de linealidad entre de las $V(x)$, ya que de otra manera no refleja la experiencia del caso específico que se observa y se analiza. Si bien, este método sirve para la corrección de años anteriores, al observar la tendencia histórica de los parámetros es posible proyectar hacia años futuros.

En los ejemplos al fenómeno de fecundidad, se realizaron y llevaron a cabo dos métodos para la desagregación de las tasas específicas de fecundidad por edades quinquenales en edades individuales: el método de Gompertz y el polinomio de William Brass.

Ambos métodos tienen la ventaja de obtener tasas específicas de fecundidad por edades individuales. Estos métodos no constan de un mayor número de parámetros. No obstante, se observa un patrón de fecundidad diferenciado entre ambos.

Una ventaja del polinomio de Brass, es que el método estima la edad de inicio a la fecundidad, mientras que el método de Gompertz no. Por otro lado, al obtener la desagregación de las tasas de fecundidad por edades quinquenales se observa que en el método de Gompertz es posible obtener las tasas específicas de últimas edades, mientras que en la desagregación vía polinomio de Brass sólo se llega hasta la edad de 45 años.

Es importante mencionar que una limitación que se observa en ambos métodos es que no se refleja la cúspide de la fecundidad para el caso específico mexicano. De acuerdo con los datos observados, la cúspide es temprana y al obtener la desagregación por ambos métodos la cúspide que se refleja es tardía.

Entonces, si se desea corregir el patrón de las tasas específicas, el método de Gompertz se puede preferir al polinomio de Brass, pero si lo que se desea describir la tendencia de la información observada, probablemente el polinomio es preferible al método de Gompertz. La determinación del mejor ajuste dependerá de la calidad de captación de la información, su evaluación y el modelo de ajuste seleccionado.

A su vez, al observar la tendencia de los valores de los parámetros en el tiempo, se puede proyectar a corto o mediano plazo el comportamiento del fenómeno de fecundidad que se analiza.

En cuanto al fenómeno de migración, el método de Rogers y Castro consta de una curva de migración que se constituye por once parámetros. Este mayor número de parámetros implica que no se puede concluir que el modelo sea parsimonioso. Sin embargo, el fenómeno de migración resulta en uno de los más complejos de analizar matemáticamente. El cálculo de los once parámetros requiere de métodos de mayor nivel matemático. No obstante, dichos parámetros no son complejos de interpretar y se observa un vínculo con respecto a los fenómenos demográficos.

En el caso del método del ajuste polinómico, el cálculo para la estimación de los coeficientes es sencillo y tiene una mayor facilidad de ajuste a la información observada. No obstante, se observa que los parámetros son considerablemente sensibles. En ese sentido, surge la dificultad de que no tienen una interpretación individual directa y, por lo tanto, no se observa directamente una vinculación con los fenómenos demográficos.

Con respecto al ajuste por el método de splines cúbicos, se observa que el método respeta concavidades de la información observada. Tiene la ventaja de que la elección de los puntos sean tales que el ajuste sea muy similar al deseado, es decir que el modelo es flexible en cuanto a la elección de los puntos, para que la curva estimada se aproxime demasiado. Se puede concluir que el ajuste del modelo es satisfactorio en la descripción de la información

observada y, al emplear este tipo de curvas (splines), es posible presentar las simulaciones que permiten obtener escenarios futuros de las series de inmigrantes y emigrantes que dan lugar a las proyecciones de la migración mexicana para años posteriores por sexo y por periodos.

Los tres métodos anteriores resaltan diferencias entre sexos y por edades. A su vez, al observar la tendencia de los parámetros en diferentes periodos es posible proyectar a futuro la curva de migración.

De manera general, se identificaron las principales diferencias entre los métodos de acuerdo al fenómeno demográfico que se analiza. Se observaron ventajas y desventajas metodológicas. Las principales ventajas en los fenómenos de mortalidad y fecundidad, residen en la parsimonia de los modelos y en la vinculación demográfica de los parámetros. Y dentro de las principales desventajas se encuentran para el caso del fenómeno de la migración, donde surge la dificultad en describir dicho fenómeno y por lo tanto, los métodos descritos en este trabajo requieren de un mayor número de parámetros donde a veces resulta complicada su interpretación individual.

Queda pendiente por analizar cuál de los métodos es el mejor ajuste, lo cual en parte depende de la información observada. Si se requiere de una suavización, descripción o corrección en el nivel o en el patrón del fenómeno demográfico que se analiza. La elección del mejor ajuste dependerá entonces de las necesidades que la información captada requiera. A su vez, se recomienda utilizar la función logística para analizar cualquiera de los tres métodos demográficos, que debido al tiempo disponible para la realización de este trabajo, no fue posible incorporar.

Finalmente, el presente trabajo buscó contribuir en un mejor desarrollo metodológico en el estudio de los fenómenos demográficos al analizar cada componente demográfico por separado y al realizar sus respectivas aplicaciones al caso específico mexicano. A su vez, dentro de estas aplicaciones, se analizó la sensibilidad de los parámetros de cada método, así como también se realizó su interpretación y vinculación demográfica.

Anexos

- **Mortalidad**

Tabla A. 1 Tabla de vida para hombres, República Mexicana 1990

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.039787	0.040037	1,000,000	39,787	966,455	67,605,323	67.61
1-4	0.009777	0.002456	960,213	9,388	3,821,135	66,638,868	69.40
5-9	0.003453	0.000692	950,825	3,283	4,745,915	62,817,733	66.07
10-14	0.003675	0.000736	947,542	3,482	4,729,004	58,071,818	61.29
15-19	0.007019	0.001409	944,060	6,626	4,703,746	53,342,814	56.50
20-24	0.011677	0.002349	937,434	10,946	4,659,799	48,639,069	51.89
25-29	0.015287	0.003081	926,488	14,163	4,597,015	43,979,269	47.47
30-34	0.017917	0.003616	912,325	16,346	4,520,735	39,382,254	43.17
35-39	0.021081	0.004261	895,979	18,888	4,432,640	34,861,519	38.91
40-44	0.026304	0.005331	877,091	23,071	4,327,730	30,428,879	34.69
45-49	0.034874	0.007098	854,020	29,783	4,195,545	26,101,149	30.56
50-54	0.048083	0.009853	824,237	39,632	4,021,936	21,905,604	26.58
55-59	0.067531	0.013977	784,605	52,985	3,790,247	17,883,668	22.79
60-64	0.095315	0.020014	731,620	69,734	3,483,185	14,093,420	19.26
65-69	0.134094	0.028736	661,886	88,755	3,086,471	10,610,236	16.03
70-74	0.186947	0.041215	573,131	107,145	2,595,948	7,523,764	13.13
75-79	0.256894	0.058865	465,986	119,709	2,027,700	4,927,816	10.58
80-84	0.345882	0.083395	346,277	119,771	1,427,722	2,900,116	8.38
85-89	0.457290	0.117856	226,506	103,579	868,303	1,472,394	6.50
90-94	0.596988	0.168034	122,927	73,386	425,607	604,091	4.91
95-99	0.753295	0.235088	49,541	37,319	150,070	178,484	3.60
100 o más	0.997627	0.430142	12,222	12,193	28,414	28,414	2.32

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 2 Tabla de vida para hombres, República Mexicana 1995

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.028185	0.028283	1,000,000	28,185	975,297	69,608,742	69.61
1-4	0.004931	0.001236	971,815	4,792	3,877,190	68,633,445	70.62
5-9	0.002364	0.000473	967,023	2,286	4,829,400	64,756,255	66.96
10-14	0.002955	0.000592	964,737	2,851	4,816,561	59,926,855	62.12
15-19	0.005997	0.001203	961,886	5,768	4,795,010	55,110,294	57.29
20-24	0.010354	0.002082	956,118	9,900	4,755,830	50,315,284	52.62
25-29	0.013777	0.002774	946,218	13,036	4,698,480	45,559,454	48.15
30-34	0.016227	0.003272	933,182	15,143	4,628,035	40,860,974	43.79
35-39	0.019172	0.003872	918,039	17,601	4,546,170	36,232,939	39.47
40-44	0.024117	0.004882	900,438	21,716	4,447,850	31,686,769	35.19
45-49	0.032321	0.006570	878,722	28,401	4,322,531	27,238,919	31.00
50-54	0.045059	0.009219	850,321	38,315	4,155,671	22,916,388	26.95
55-59	0.063951	0.013212	812,006	51,929	3,929,917	18,760,717	23.10
60-64	0.091142	0.019096	760,077	69,275	3,626,640	14,830,800	19.51
65-69	0.129406	0.027663	690,802	89,394	3,229,502	11,204,160	16.22
70-74	0.182003	0.040018	601,408	109,458	2,731,564	7,974,658	13.26
75-79	0.252192	0.057636	491,950	124,066	2,146,582	5,243,093	10.66
80-84	0.342187	0.082326	367,884	125,885	1,520,308	3,096,512	8.42
85-89	0.455291	0.117197	241,999	110,180	928,962	1,576,203	6.51
90-94	0.596697	0.167925	131,819	78,656	456,511	647,241	4.91
95-99	0.754077	0.235450	53,163	40,089	160,919	190,730	3.59
100 o más	0.997629	0.438571	13,074	13,043	29,810	29,810	2.28

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 3 Tabla de vida para hombres, República Mexicana 2000

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.021121	0.021167	1,000,000	21,121	981,059	71,940,031	71.94
1-4	0.002961	0.000741	978,879	2,898	3,909,427	70,958,972	72.49
5-9	0.001849	0.000370	975,981	1,805	4,875,400	67,049,546	68.70
10-14	0.002495	0.000500	974,176	2,431	4,864,801	62,174,145	63.82
15-19	0.005058	0.001014	971,745	4,915	4,846,440	57,309,345	58.98
20-24	0.008544	0.001716	966,830	8,261	4,813,490	52,462,905	54.26
25-29	0.011070	0.002226	958,569	10,611	4,766,310	47,649,414	49.71
30-34	0.012978	0.002613	947,958	12,303	4,709,020	42,883,105	45.24
35-39	0.015713	0.003167	935,655	14,702	4,641,495	38,174,085	40.80
40-44	0.020498	0.004142	920,953	18,878	4,557,540	33,532,590	36.41
45-49	0.028306	0.005742	902,075	25,534	4,446,480	28,975,050	32.12
50-54	0.040214	0.008208	876,541	35,249	4,294,460	24,528,570	27.98
55-59	0.057690	0.011880	841,292	48,534	4,084,892	20,234,110	24.05
60-64	0.082773	0.017267	792,758	65,619	3,799,269	16,149,217	20.37
65-69	0.118131	0.025103	727,139	85,898	3,420,057	12,349,949	16.98
70-74	0.166989	0.036420	641,241	107,080	2,936,869	8,929,892	13.93
75-79	0.232735	0.052616	534,161	124,318	2,357,269	5,993,023	11.22
80-84	0.318029	0.075450	409,843	130,342	1,719,198	3,635,754	8.87
85-89	0.427405	0.108167	279,501	119,460	1,093,306	1,916,556	6.86
90-94	0.568817	0.157225	160,041	91,034	566,237	823,250	5.14
95-99	0.732592	0.225485	69,007	50,554	213,099	257,014	3.72
100 o más	0.996857	0.418882	18,453	18,395	43,915	43,915	2.38

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 4 Tabla de vida para hombres, República Mexicana 2005

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.016785	0.016811	1,000,000	16,785	984,738	72,464,569	72.46
1-4	0.002672	0.000669	983,215	2,627	3,927,340	71,479,831	72.70
5-9	0.001710	0.000342	980,588	1,677	4,898,750	67,552,491	68.89
10-14	0.002346	0.000470	978,911	2,297	4,888,800	62,653,741	64.00
15-19	0.004943	0.000991	976,614	4,827	4,870,995	57,764,941	59.15
20-24	0.008306	0.001668	971,787	8,072	4,838,750	52,893,945	54.43
25-29	0.010623	0.002136	963,715	10,238	4,792,970	48,055,196	49.86
30-34	0.012316	0.002478	953,477	11,743	4,738,015	43,262,225	45.37
35-39	0.014810	0.002984	941,734	13,947	4,673,785	38,524,210	40.91
40-44	0.019321	0.003902	927,787	17,926	4,594,090	33,850,425	36.49
45-49	0.026847	0.005442	909,861	24,427	4,488,185	29,256,335	32.15
50-54	0.038523	0.007856	885,434	34,110	4,341,782	24,768,150	27.97
55-59	0.055922	0.011506	851,324	47,608	4,137,372	20,426,368	23.99
60-64	0.081245	0.016935	803,716	65,298	3,854,884	16,288,996	20.27
65-69	0.117405	0.024939	738,418	86,694	3,474,467	12,434,112	16.84
70-74	0.167955	0.036650	651,724	109,460	2,983,300	8,959,645	13.75
75-79	0.236643	0.053615	542,264	128,323	2,387,625	5,976,344	11.02
80-84	0.326344	0.077795	413,941	135,087	1,727,538	3,588,719	8.67
85-89	0.440804	0.112469	278,854	122,920	1,081,016	1,861,182	6.67
90-94	0.585190	0.163464	155,934	91,251	544,854	780,166	5.00
95-99	0.746935	0.232097	64,683	48,314	197,097	235,312	3.64
100 o más	0.997190	0.427136	16,369	16,323	38,215	38,215	2.33

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 5 Tabla de vida para hombres, República Mexicana 2010

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.014698	0.014716	1,000,000	14,698	986,547	72,004,457	72.00
1-4	0.002375	0.000594	985,302	2,340	3,936,291	71,017,910	72.08
5-9	0.001548	0.000310	982,962	1,522	4,910,995	67,081,619	68.24
10-14	0.002458	0.000492	981,440	2,412	4,901,163	62,170,624	63.35
15-19	0.006123	0.001228	979,028	5,995	4,880,152	57,269,461	58.50
20-24	0.010903	0.002193	973,033	10,609	4,838,635	52,389,309	53.84
25-29	0.013979	0.002816	962,424	13,454	4,778,475	47,550,674	49.41
30-34	0.015488	0.003122	948,970	14,698	4,708,090	42,772,199	45.07
35-39	0.017202	0.003470	934,272	16,071	4,631,150	38,064,109	40.74
40-44	0.020760	0.004196	918,201	19,062	4,543,320	33,432,959	36.41
45-49	0.027424	0.005561	899,139	24,658	4,433,990	28,889,639	32.13
50-54	0.038424	0.007835	874,481	33,601	4,288,297	24,455,648	27.97
55-59	0.055369	0.011389	840,880	46,559	4,087,777	20,167,351	23.98
60-64	0.080486	0.016770	794,321	63,932	3,811,329	16,079,574	20.24
65-69	0.116769	0.024796	730,389	85,287	3,437,843	12,268,245	16.80
70-74	0.167899	0.036637	645,102	108,312	2,953,076	8,830,402	13.69
75-79	0.237793	0.053910	536,790	127,645	2,361,950	5,877,326	10.95
80-84	0.329436	0.078673	409,145	134,787	1,704,268	3,515,376	8.59
85-89	0.446205	0.114223	274,358	122,420	1,059,719	1,811,108	6.60
90-94	0.591978	0.166088	151,938	89,944	528,114	751,389	4.95
95-99	0.752960	0.234920	61,994	46,679	187,843	223,274	3.60
100 o más	0.997192	0.431038	15,315	15,272	35,431	35,431	2.31

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 6 Tabla de vida para mujeres, República Mexicana 1990

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.032229	0.032382	1,000,000	32,229	972,499	73,746,889	73.75
1-4	0.008970	0.002252	967,771	8,681	3,852,853	72,774,390	75.20
5-9	0.002739	0.000549	959,090	2,627	4,788,884	68,921,536	71.86
10-14	0.002142	0.000429	956,463	2,049	4,777,195	64,132,652	67.05
15-19	0.002916	0.000584	954,414	2,783	4,765,115	59,355,457	62.19
20-24	0.003873	0.000776	951,631	3,686	4,748,945	54,590,342	57.37
25-29	0.004892	0.000981	947,945	4,637	4,728,135	49,841,397	52.58
30-34	0.006416	0.001287	943,308	6,052	4,701,405	45,113,262	47.82
35-39	0.008960	0.001800	937,256	8,398	4,665,275	40,411,857	43.12
40-44	0.013086	0.002634	928,858	12,155	4,613,891	35,746,581	38.48
45-49	0.019535	0.003946	916,703	17,908	4,538,720	31,132,690	33.96
50-54	0.029405	0.005969	898,795	26,429	4,427,842	26,593,970	29.59
55-59	0.044299	0.009060	872,366	38,645	4,265,067	22,166,128	25.41
60-64	0.066523	0.013761	833,721	55,462	4,029,628	17,901,060	21.47
65-69	0.099251	0.020883	778,259	77,243	3,697,512	13,871,432	17.82
70-74	0.146546	0.031613	701,016	102,731	3,246,897	10,173,920	14.51
75-79	0.213047	0.047644	598,285	127,463	2,670,229	6,927,024	11.58
80-84	0.302858	0.071228	470,822	142,592	1,993,342	4,256,794	9.04
85-89	0.420443	0.105958	328,230	138,002	1,289,874	2,263,453	6.90
90-94	0.570326	0.157797	190,228	108,492	672,280	973,578	5.12
95-99	0.738891	0.228382	81,736	60,394	250,947	301,299	3.69
100 o más	0.997189	0.422669	21,342	21,282	50,351	50,351	2.36

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 7 Tabla de vida para mujeres, República Mexicana 1995

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.022741	0.022802	1,000,000	22,741	979,948	75,379,676	75.38
1-4	0.004433	0.001111	977,259	4,332	3,899,933	74,399,728	76.13
5-9	0.001810	0.000362	972,927	1,761	4,860,236	70,499,795	72.46
10-14	0.001689	0.000338	971,166	1,640	4,851,734	65,639,559	67.59
15-19	0.002525	0.000506	969,526	2,448	4,841,515	60,787,825	62.70
20-24	0.003206	0.000642	967,078	3,100	4,827,645	55,946,310	57.85
25-29	0.003893	0.000780	963,978	3,753	4,810,510	51,118,665	53.03
30-34	0.005272	0.001057	960,225	5,062	4,788,471	46,308,155	48.23
35-39	0.007743	0.001555	955,163	7,396	4,757,320	41,519,685	43.47
40-44	0.011733	0.002333	947,767	11,120	4,655,445	36,762,364	38.79
45-49	0.017922	0.003617	936,647	16,787	4,641,250	32,106,919	34.28
50-54	0.027406	0.005557	919,860	25,210	4,536,221	27,465,669	29.86
55-59	0.041822	0.008543	894,650	37,416	4,379,572	22,929,448	25.63
60-64	0.063552	0.013127	857,234	54,479	4,149,674	18,549,876	21.64
65-69	0.095895	0.020141	802,755	76,980	3,820,677	14,400,203	17.94
70-74	0.143155	0.030826	725,775	103,898	3,367,798	10,579,526	14.58
75-79	0.210317	0.046963	621,877	130,791	2,779,836	7,211,728	11.60
80-84	0.301868	0.070955	491,086	148,243	2,080,384	4,431,892	9.02
85-89	0.422126	0.106491	342,843	144,723	1,345,803	2,351,509	6.86
90-94	0.574319	0.159310	198,120	113,784	698,049	1,005,706	5.08
95-99	0.743348	0.230440	84,336	62,691	257,856	307,656	3.65
100 o más	0.997136	0.433392	21,645	21,583	49,800	49,800	2.30

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 8 Tabla de vida para mujeres, República Mexicana 2000

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.017003	0.017032	1,000,000	17,003	984,714	77,109,589	77.11
1-4	0.002613	0.000654	982,997	2,569	3,926,591	76,124,875	77.44
5-9	0.001413	0.000283	980,428	1,385	4,898,681	72,198,284	73.64
10-14	0.001466	0.000293	979,043	1,435	4,891,634	67,299,603	68.74
15-19	0.002267	0.000454	977,608	2,216	4,882,505	62,407,969	63.84
20-24	0.002810	0.000563	975,392	2,741	4,870,110	57,525,464	58.98
25-29	0.003329	0.000667	972,651	3,238	4,855,155	52,655,354	54.14
30-34	0.004493	0.000901	969,413	4,356	4,836,180	47,800,199	49.31
35-39	0.006642	0.001333	965,057	6,410	4,809,266	42,964,019	44.52
40-44	0.010141	0.002018	958,647	9,722	4,720,334	38,154,754	39.80
45-49	0.015627	0.003150	948,925	14,829	4,707,535	33,434,420	35.23
50-54	0.024119	0.004883	934,096	22,529	4,614,100	28,726,885	30.75
55-59	0.037173	0.007575	911,567	33,886	4,473,012	24,112,785	26.45
60-64	0.057085	0.011752	877,681	50,102	4,262,904	19,639,772	22.38
65-69	0.087106	0.018212	827,579	72,087	3,957,132	15,376,868	18.58
70-74	0.131582	0.028160	755,492	99,409	3,527,762	11,419,736	15.12
75-79	0.195739	0.043361	656,083	128,421	2,957,027	7,891,975	12.03
80-84	0.284637	0.066251	527,662	150,192	2,258,633	4,934,948	9.35
85-89	0.403523	0.100665	377,470	152,318	1,499,998	2,676,314	7.09
90-94	0.556953	0.152783	225,152	125,399	803,757	1,176,316	5.22
95-99	0.730735	0.224639	99,753	72,893	308,576	372,559	3.73
100 o más	0.996910	0.418499	26,860	26,777	63,983	63,983	2.38

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 9 Tabla de vida para mujeres, República Mexicana 2005

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.013545	0.013562	1,000,000	13,545	987,682	77,506,585	77.51
1-4	0.002318	0.000580	986,455	2,287	3,941,018	76,518,903	77.57
5-9	0.001391	0.000278	984,168	1,369	4,917,425	72,577,886	73.75
10-14	0.001466	0.000293	982,799	1,441	4,910,380	67,660,460	68.84
15-19	0.002309	0.000462	981,358	2,266	4,901,136	62,750,080	63.94
20-24	0.002884	0.000578	979,092	2,824	4,888,395	57,848,944	59.08
25-29	0.003294	0.000660	976,268	3,216	4,873,300	52,960,549	54.25
30-34	0.004261	0.000854	973,052	4,146	4,854,890	48,087,249	49.42
35-39	0.006192	0.001242	968,906	5,999	4,829,526	43,232,359	44.62
40-44	0.009461	0.001883	962,907	9,110	4,746,220	38,402,833	39.88
45-49	0.014695	0.002961	953,797	14,016	4,733,926	33,656,614	35.29
50-54	0.022926	0.004638	939,781	21,545	4,645,001	28,922,688	30.78
55-59	0.035753	0.007281	918,236	32,830	4,509,007	24,277,687	26.44
60-64	0.055577	0.011432	885,406	49,208	4,303,778	19,768,680	22.33
65-69	0.085847	0.017937	836,198	71,785	4,000,993	15,464,902	18.49
70-74	0.131235	0.028081	764,413	100,318	3,570,098	11,463,909	15.00
75-79	0.197407	0.043770	664,095	131,097	2,990,329	7,893,812	11.89
80-84	0.289842	0.067662	532,998	154,485	2,274,365	4,903,483	9.20
85-89	0.413315	0.103715	378,513	156,445	1,494,494	2,629,118	6.95
90-94	0.569848	0.157616	222,068	126,545	785,088	1,134,624	5.11
95-99	0.742680	0.230137	95,523	70,943	292,251	349,536	3.66
100 o más	0.997396	0.427970	24,580	24,516	57,284	57,284	2.33

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 10 Tabla de vida para mujeres, República Mexicana 2010

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.011944	0.011956	1,000,000	11,944	989,081	77,701,546	77.70
1-4	0.002030	0.000508	988,056	2,006	3,948,015	76,712,465	77.64
5-9	0.001346	0.000269	986,050	1,327	4,926,929	72,764,450	73.79
10-14	0.001559	0.000312	984,723	1,535	4,919,770	67,837,521	68.89
15-19	0.002568	0.000514	983,188	2,525	4,909,630	62,917,751	63.99
20-24	0.003192	0.000639	980,663	3,130	4,895,495	58,008,121	59.15
25-29	0.003528	0.000707	977,533	3,449	4,879,050	53,112,626	54.33
30-34	0.004362	0.000874	974,084	4,249	4,859,795	48,233,576	49.52
35-39	0.006161	0.001236	969,835	5,975	4,834,235	43,373,781	44.72
40-44	0.009315	0.001854	963,860	8,978	4,751,970	38,539,546	39.98
45-49	0.014433	0.002908	954,882	13,782	4,739,935	33,787,576	35.38
50-54	0.022529	0.004557	941,100	21,202	4,652,450	29,047,641	30.87
55-59	0.035194	0.007165	919,898	32,375	4,518,453	24,395,191	26.52
60-64	0.054822	0.011273	887,523	48,656	4,315,743	19,876,739	22.40
65-69	0.084878	0.017726	838,867	71,201	4,015,801	15,560,996	18.55
70-74	0.130064	0.027813	767,666	99,846	3,587,563	11,545,195	15.04
75-79	0.196123	0.043455	667,820	130,975	3,009,279	7,957,632	11.92
80-84	0.288636	0.067335	536,845	154,953	2,292,446	4,948,353	9.22
85-89	0.412431	0.103439	381,892	157,504	1,508,725	2,655,907	6.95
90-94	0.569411	0.157450	224,388	127,769	793,547	1,147,182	5.11
95-99	0.742608	0.230095	96,619	71,750	295,612	353,635	3.66
100 o más	0.997346	0.427468	24,869	24,803	58,023	58,023	2.33

Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la conciliación demográfica SOMEDE (2011)

Tabla A. 11. Logito estándar de Brass

Edad x (en años)	Logito	Edad x (en años)	Logito	Edad x (en años)	Logito
0	$-\infty$	24	-0.3963	48	-0.0572
1	-0.8670	25	-0.3829	49	-0.0395
2	-0.7152	26	-0.3686	50	-0.0212
3	-0.6552	27	-0.3549	52.5	0.0286
4	-0.6219	28	-0.3413	55	0.0832
5	-0.6015	29	-0.3280	57.5	0.1428
6	-0.5879	30	-0.3150	60	0.2100
7	-0.5766	31	-0.3020	62.5	0.2873
8	-0.5666	32	-0.2889	65	0.3746
9	-0.5578	33	-0.2759	67.5	0.4720
10	-0.5498	34	-0.2627	70	0.5818
11	-0.5431	35	-0.2496	72.5	0.7105
12	-0.5365	36	-0.2364	75	0.8673
13	-0.5296	37	-0.2230	77.5	1.0505
14	-0.5220	38	-0.2094	80	1.2490
15	-0.5131	39	-0.1956	82.5	1.4828
16	-0.5043	40	-0.1817	85	1.7555
17	-0.4941	41	-0.1676	87.5	2.0760
18	-0.4824	42	-0.1530	90	2.4774
19	-0.4694	43	-0.1381	92.5	2.9031
20	-0.4551	44	-0.1229	95	3.4534
21	-0.4401	45	-0.1073	97.5	4.6046
22	-0.4248	46	-0.0911	100	∞
23	-0.4103	47	-0.0743		

Fuente: Brass, W. (1971). Sobre la escala de la mortalidad

Tabla A. 12. Tabla de vida corregida para hombres, República Mexicana 1995

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.04253	0.95747	1,000,000	42,526	978,737	66,509,533	66.51
1-4	0.00694	0.99306	957,474	6,643	3,816,611	65,530,796	68.44
5-9	0.00330	0.99670	950,832	3,138	4,746,314	61,714,185	64.91
10-14	0.00410	0.99590	947,694	3,887	4,728,752	56,967,871	60.11
15-19	0.00825	0.99175	943,807	7,783	4,699,578	52,239,119	55.35
20-24	0.01403	0.98597	936,024	13,131	4,647,293	47,539,541	50.79
25-29	0.01833	0.98167	922,893	16,916	4,572,175	42,892,247	46.48
30-34	0.02119	0.97881	905,977	19,196	4,481,896	38,320,073	42.30
35-39	0.02457	0.97543	886,781	21,787	4,379,440	33,838,177	38.16
40-44	0.03030	0.96970	864,995	26,213	4,259,441	29,458,737	34.06
45-49	0.03973	0.96027	838,782	33,327	4,110,593	25,199,296	30.04
50-54	0.05401	0.94599	805,455	43,504	3,918,517	21,088,703	26.18
55-59	0.07445	0.92555	761,952	56,729	3,667,934	17,170,186	22.53
60-64	0.10267	0.89733	705,222	72,404	3,345,102	13,502,252	19.15
65-69	0.14065	0.85935	632,819	89,007	2,941,575	10,157,150	16.05
70-74	0.19075	0.80925	543,811	103,730	2,459,732	7,215,574	13.27
75-79	0.25553	0.74447	440,082	112,453	1,919,275	4,755,842	10.81
80-84	0.33744	0.66256	327,629	110,556	1,361,752	2,836,567	8.66
85-89	0.44149	0.55851	217,072	95,835	845,773	1,474,815	6.79
90-94	0.57589	0.42411	121,237	69,819	431,637	629,042	5.19
95-99	0.73215	0.26785	51,418	37,646	162,975	197,405	3.84
100 o más	1.00000	0.00000	13,772	13,772	34,430	34,430	2.50

Fuente: Elaboración propia

Tabla A. 13 Tabla de vida corregida para hombres, República Mexicana 2000

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.02456	0.97544	1,000,000	24,564	987,718	71,774,350	71.77
1-4	0.00328	0.99672	975,436	3,202	3,895,341	70,786,632	72.57
5-9	0.00204	0.99796	972,234	1,985	4,856,209	66,891,291	68.80
10-14	0.00274	0.99726	970,249	2,662	4,844,591	62,035,082	63.94
15-19	0.00553	0.99447	967,587	5,348	4,824,565	57,190,491	59.11
20-24	0.00925	0.99075	962,239	8,901	4,788,942	52,365,926	54.42
25-29	0.01185	0.98815	953,338	11,300	4,738,440	47,576,984	49.91
30-34	0.01375	0.98625	942,038	12,950	4,677,815	42,838,544	45.47
35-39	0.01647	0.98353	929,088	15,302	4,607,184	38,160,728	41.07
40-44	0.02126	0.97874	913,786	19,425	4,520,366	33,553,544	36.72
45-49	0.02902	0.97098	894,361	25,953	4,406,922	29,033,179	32.46
50-54	0.04071	0.95929	868,408	35,353	4,253,657	24,626,257	28.36
55-59	0.05762	0.94238	833,055	48,004	4,045,263	20,372,600	24.46
60-64	0.08156	0.91844	785,051	64,025	3,765,190	16,327,337	20.80
65-69	0.11490	0.88510	721,025	82,843	3,398,018	12,562,147	17.42
70-74	0.16066	0.83934	638,182	102,531	2,934,581	9,164,129	14.36
75-79	0.22231	0.77769	535,651	119,080	2,380,552	6,229,548	11.63
80-84	0.30312	0.69688	416,570	126,270	1,767,175	3,848,996	9.24
85-89	0.40876	0.59124	290,300	118,662	1,154,845	2,081,821	7.17
90-94	0.54864	0.45136	171,638	94,167	622,771	926,976	5.40
95-99	0.71465	0.28535	77,471	55,365	248,941	304,206	3.93
100 o más	1.00000	0.00000	22,106	22,106	55,265	55,265	2.50

Fuente: Elaboración propia

Tabla A. 14 Tabla de vida corregida para hombres, República Mexicana 2005

Hombres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.01655	0.98345	1,000,000	16,547	991,727	72,864,003	72.86
1-4	0.00262	0.99738	983,453	2,574	3,928,666	71,872,276	73.08
5-9	0.00167	0.99833	980,879	1,642	4,900,292	67,943,610	69.27
10-14	0.00230	0.99770	979,237	2,248	4,890,566	63,043,319	64.38
15-19	0.00483	0.99517	976,989	4,721	4,873,142	58,152,753	59.52
20-24	0.00811	0.99189	972,268	7,887	4,841,623	53,279,611	54.80
25-29	0.01036	0.98964	964,381	9,992	4,796,927	48,437,987	50.23
30-34	0.01200	0.98800	954,389	11,451	4,743,319	43,641,061	45.73
35-39	0.01441	0.98559	942,938	13,591	4,680,714	38,897,742	41.25
40-44	0.01879	0.98121	929,347	17,461	4,603,084	34,217,028	36.82
45-49	0.02609	0.97391	911,886	23,789	4,499,960	29,613,944	32.48
50-54	0.03741	0.96259	888,098	33,227	4,357,421	25,113,984	28.28
55-59	0.05430	0.94570	854,871	46,421	4,158,302	20,756,563	24.28
60-64	0.07892	0.92108	808,450	63,806	3,882,736	16,598,261	20.53
65-69	0.11420	0.88580	744,644	85,037	3,510,629	12,715,525	17.08
70-74	0.16377	0.83623	659,607	108,021	3,027,985	9,204,897	13.96
75-79	0.23159	0.76841	551,587	127,743	2,438,575	6,176,912	11.20
80-84	0.32089	0.67911	423,844	136,005	1,779,204	3,738,337	8.82
85-89	0.43565	0.56435	287,838	125,398	1,125,696	1,959,133	6.81
90-94	0.58105	0.41895	162,440	94,385	576,238	833,437	5.13
95-99	0.74414	0.25586	68,055	50,642	213,668	257,199	3.78
100 o más	1.00000	0.00000	17,412	17,412	43,531	43,531	2.50

Fuente: Elaboración propia

Tabla A. 15 Tabla de vida corregida para mujeres, República Mexicana 1990

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.06588	0.93412	1,000,000	65,876	967,062	68,052,404	68.05
1-4	0.01581	0.98419	934,124	14,771	3,706,952	67,085,342	71.82
5-9	0.00473	0.99527	919,352	4,351	4,585,884	63,378,390	68.94
10-14	0.00367	0.99633	915,001	3,360	4,566,606	58,792,506	64.25
15-19	0.00495	0.99505	911,641	4,517	4,546,915	54,225,900	59.48
20-24	0.00651	0.99349	907,124	5,906	4,520,858	49,678,985	54.77
25-29	0.00811	0.99189	901,219	7,313	4,487,811	45,158,128	50.11
30-34	0.01048	0.98952	893,906	9,364	4,446,120	40,670,316	45.50
35-39	0.01434	0.98566	884,542	12,686	4,390,994	36,224,197	40.95
40-44	0.02042	0.97958	871,856	17,800	4,314,778	31,833,203	36.51
45-49	0.02948	0.97052	854,055	25,182	4,207,323	27,518,425	32.22
50-54	0.04256	0.95744	828,874	35,273	4,056,186	23,311,102	28.12
55-59	0.06089	0.93911	793,601	48,321	3,847,201	19,254,916	24.26
60-64	0.08604	0.91396	745,280	64,124	3,566,089	15,407,715	20.67
65-69	0.11988	0.88012	681,156	81,655	3,201,642	11,841,625	17.38
70-74	0.16462	0.83538	599,501	98,692	2,750,773	8,639,983	14.41
75-79	0.22302	0.77698	500,808	111,689	2,224,820	5,889,210	11.76
80-84	0.29844	0.70156	389,119	116,128	1,655,278	3,664,391	9.42
85-89	0.39747	0.60253	272,992	108,506	1,093,693	2,009,113	7.36
90-94	0.53062	0.46938	164,486	87,279	604,230	915,419	5.57
95-99	0.69387	0.30613	77,206	53,571	252,103	311,190	4.03
100 o más	1.00000	0.00000	23,635	23,635	59,087	59,087	2.50

Fuente: Elaboración propia

Tabla A. 16 Tabla de vida corregida para mujeres, República Mexicana 1995

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.03486	0.96514	1,000,000	34,858	982,571	72,679,336	72.68
1-4	0.00633	0.99367	965,142	6,112	3,848,342	71,696,765	74.29
5-9	0.00257	0.99743	959,029	2,460	4,788,995	67,848,423	70.75
10-14	0.00238	0.99762	956,569	2,279	4,777,147	63,059,428	65.92
15-19	0.00354	0.99646	954,290	3,382	4,762,992	58,282,281	61.07
20-24	0.00447	0.99553	950,907	4,251	4,743,909	53,519,289	56.28
25-29	0.00539	0.99461	946,656	5,101	4,720,528	48,775,380	51.52
30-34	0.00723	0.99277	941,555	6,809	4,690,752	44,054,851	46.79
35-39	0.01050	0.98950	934,746	9,816	4,649,190	39,364,100	42.11
40-44	0.01567	0.98433	924,930	14,495	4,588,414	34,714,910	37.53
45-49	0.02347	0.97653	910,435	21,369	4,498,754	30,126,497	33.09
50-54	0.03501	0.96499	889,066	31,126	4,367,516	25,627,743	28.83
55-59	0.05183	0.94817	857,940	44,464	4,178,540	21,260,227	24.78
60-64	0.07598	0.92402	813,476	61,806	3,912,864	17,081,687	21.00
65-69	0.11005	0.88995	751,670	82,722	3,551,544	13,168,823	17.52
70-74	0.15717	0.84283	668,948	105,139	3,081,892	9,617,279	14.38
75-79	0.22087	0.77913	563,809	124,527	2,507,727	6,535,387	11.59
80-84	0.30473	0.69527	439,282	133,861	1,861,756	4,027,660	9.17
85-89	0.41411	0.58589	305,421	126,479	1,210,905	2,165,904	7.09
90-94	0.55615	0.44385	178,942	99,518	645,914	954,999	5.34
95-99	0.72168	0.27832	79,424	57,319	253,822	309,085	3.89
100 o más	1.00000	0.00000	22,105	22,105	55,262	55,262	2.50

Fuente: Elaboración propia

Tabla A. 17 Tabla de vida corregida para mujeres, República Mexicana 2000

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.01997	0.98003	1,000,000	19,975	990,013	76,978,712	76.98
1-4	0.00293	0.99707	980,025	2,868	3,914,364	75,988,700	77.54
5-9	0.00157	0.99843	977,157	1,539	4,881,938	72,074,336	73.76
10-14	0.00163	0.99837	975,618	1,589	4,874,120	67,192,397	68.87
15-19	0.00251	0.99749	974,029	2,444	4,864,038	62,318,278	63.98
20-24	0.00310	0.99690	971,586	3,008	4,850,409	57,454,240	59.13
25-29	0.00365	0.99635	968,578	3,534	4,834,055	52,603,831	54.31
30-34	0.00490	0.99510	965,044	4,724	4,813,410	47,769,776	49.50
35-39	0.00718	0.99282	960,320	6,898	4,784,353	42,956,366	44.73
40-44	0.01087	0.98913	953,422	10,359	4,741,210	38,172,013	40.04
45-49	0.01655	0.98345	943,063	15,605	4,676,299	33,430,803	35.45
50-54	0.02518	0.97482	927,457	23,358	4,578,891	28,754,504	31.00
55-59	0.03820	0.96180	904,099	34,539	4,434,148	24,175,613	26.74
60-64	0.05766	0.94234	869,560	50,138	4,222,454	19,741,465	22.70
65-69	0.08644	0.91356	819,422	70,833	3,920,026	15,519,012	18.94
70-74	0.12844	0.87156	748,589	96,147	3,502,576	11,598,986	15.49
75-79	0.18853	0.81147	652,441	123,005	2,954,694	8,096,410	12.41
80-84	0.27205	0.72795	529,436	144,031	2,287,103	5,141,716	9.71
85-89	0.38560	0.61440	385,405	148,612	1,555,495	2,854,614	7.41
90-94	0.53622	0.46378	236,793	126,974	866,529	1,299,119	5.49
95-99	0.71217	0.28783	109,819	78,210	353,568	432,590	3.94
100 o más	1.00000	0.00000	31,609	31,609	79,022	79,022	2.50

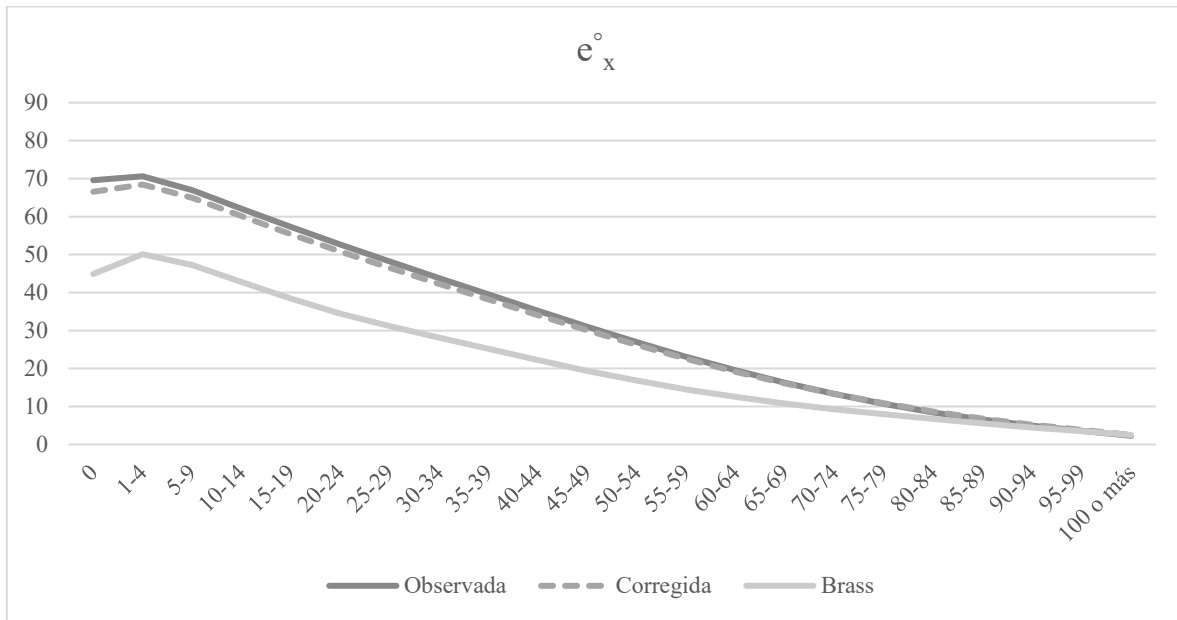
Fuente: Elaboración propia

Tabla A. 18 Tabla de vida corregida para mujeres, República Mexicana 2005

Mujeres							
Grupos de edad	nq_x	np_x	l_x	nd_x	nL_x	T_x	e°_x
0	0.01337	0.98663	1,000,000	13,369	993,316	77,897,060	77.90
1-4	0.00227	0.99773	986,631	2,243	3,942,037	76,903,745	77.95
5-9	0.00136	0.99864	984,388	1,342	4,918,583	72,961,707	74.12
10-14	0.00144	0.99856	983,046	1,412	4,911,698	68,043,124	69.22
15-19	0.00226	0.99774	981,634	2,219	4,902,620	63,131,425	64.31
20-24	0.00282	0.99718	979,414	2,764	4,890,162	58,228,805	59.45
25-29	0.00322	0.99678	976,650	3,146	4,875,388	53,338,643	54.61
30-34	0.00416	0.99584	973,505	4,053	4,857,392	48,463,255	49.78
35-39	0.00604	0.99396	969,452	5,860	4,832,611	43,605,863	44.98
40-44	0.00923	0.99077	963,592	8,891	4,795,735	38,773,252	40.24
45-49	0.01432	0.98568	954,701	13,667	4,739,340	33,977,517	35.59
50-54	0.02231	0.97769	941,035	20,991	4,652,695	29,238,177	31.07
55-59	0.03475	0.96525	920,043	31,973	4,520,284	24,585,482	26.72
60-64	0.05398	0.94602	888,070	47,941	4,320,499	20,065,197	22.59
65-69	0.08339	0.91661	840,129	70,062	4,025,491	15,744,699	18.74
70-74	0.12765	0.87235	770,067	98,300	3,604,587	11,719,208	15.22
75-79	0.19257	0.80743	671,768	129,363	3,035,431	8,114,621	12.08
80-84	0.28404	0.71596	542,405	154,067	2,326,856	5,079,190	9.36
85-89	0.40741	0.59259	388,337	158,214	1,546,152	2,752,335	7.09
90-94	0.56500	0.43500	230,123	130,019	825,569	1,206,182	5.24
95-99	0.73957	0.26043	100,104	74,034	315,437	380,613	3.80
100 o más	1.00000	0.00000	26,070	26,070	65,176	65,176	2.50

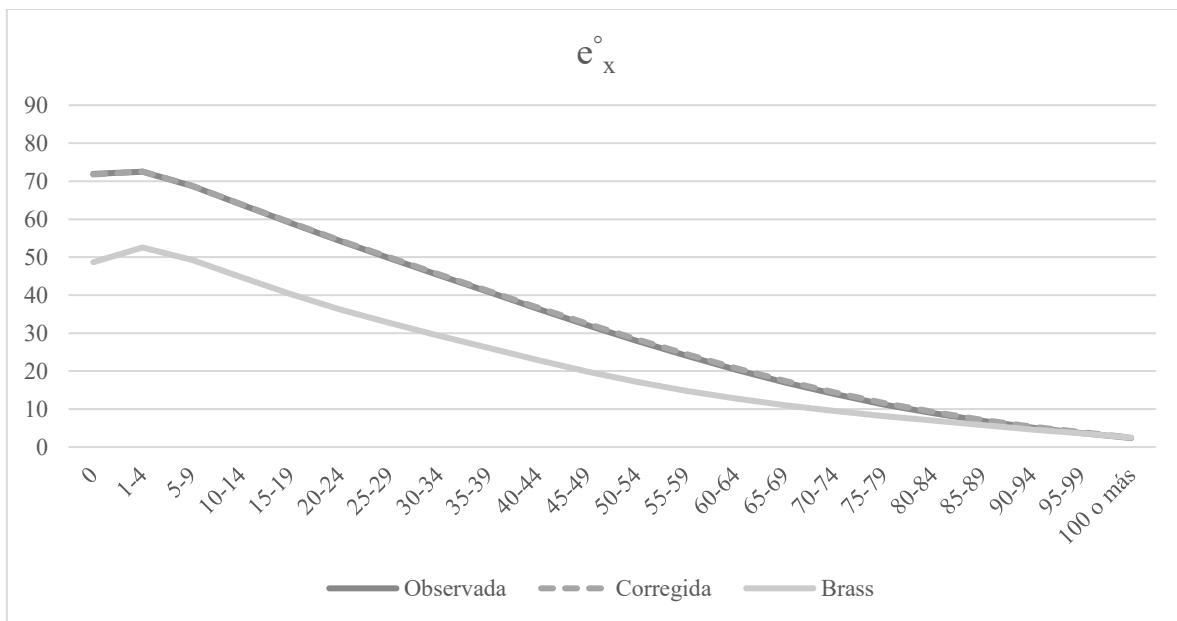
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 1 Esperanza de vida para los hombres, República Mexicana 1995



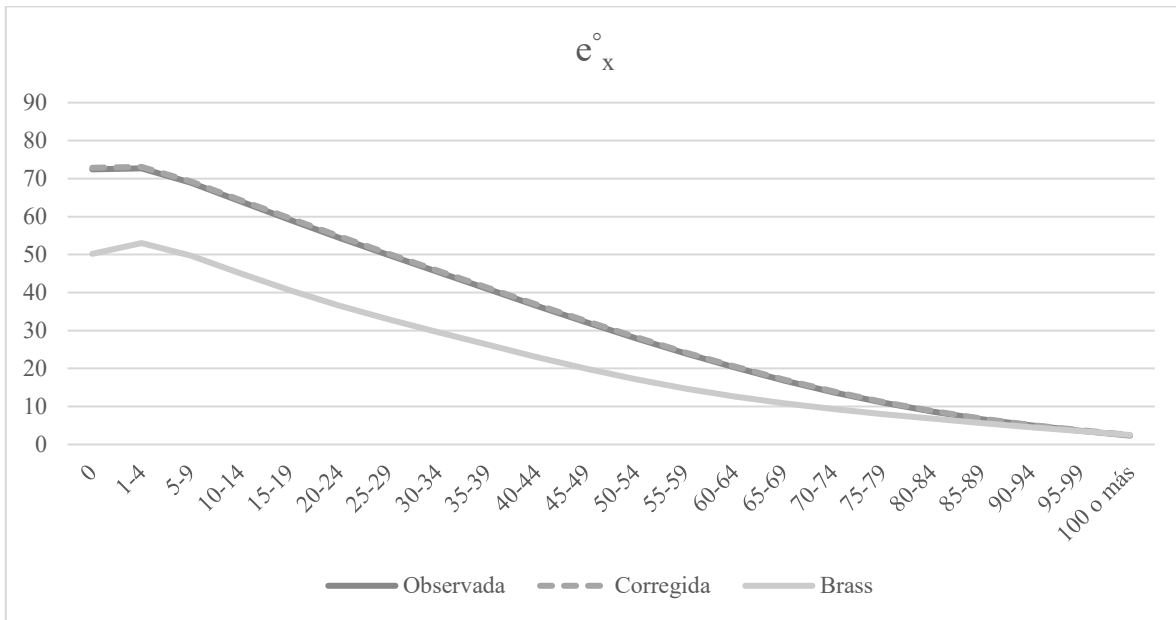
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 2 Esperanza de vida para los hombres, República Mexicana 2000



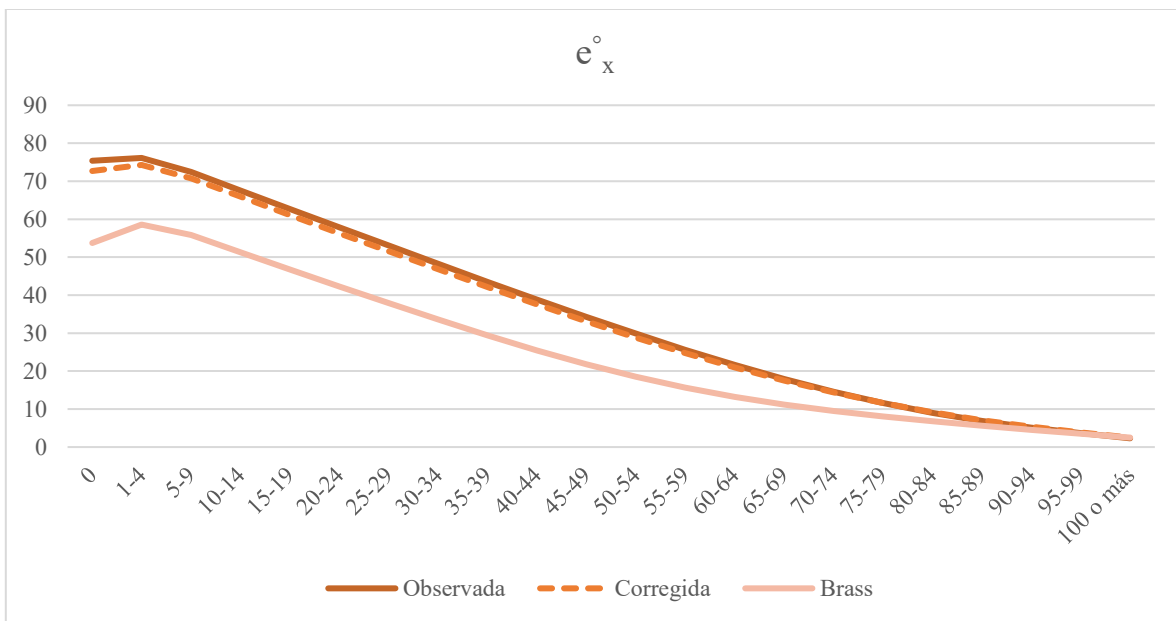
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 3 Esperanza de vida para los hombres, República Mexicana 2005



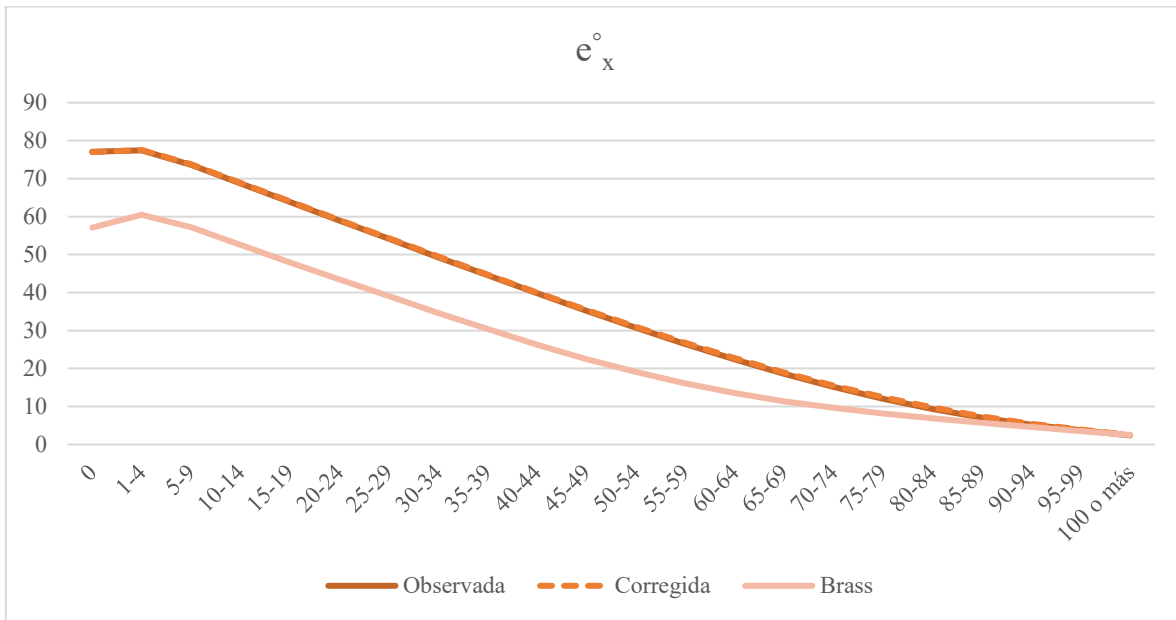
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 4 Esperanza de vida para las mujeres, República Mexicana 1995



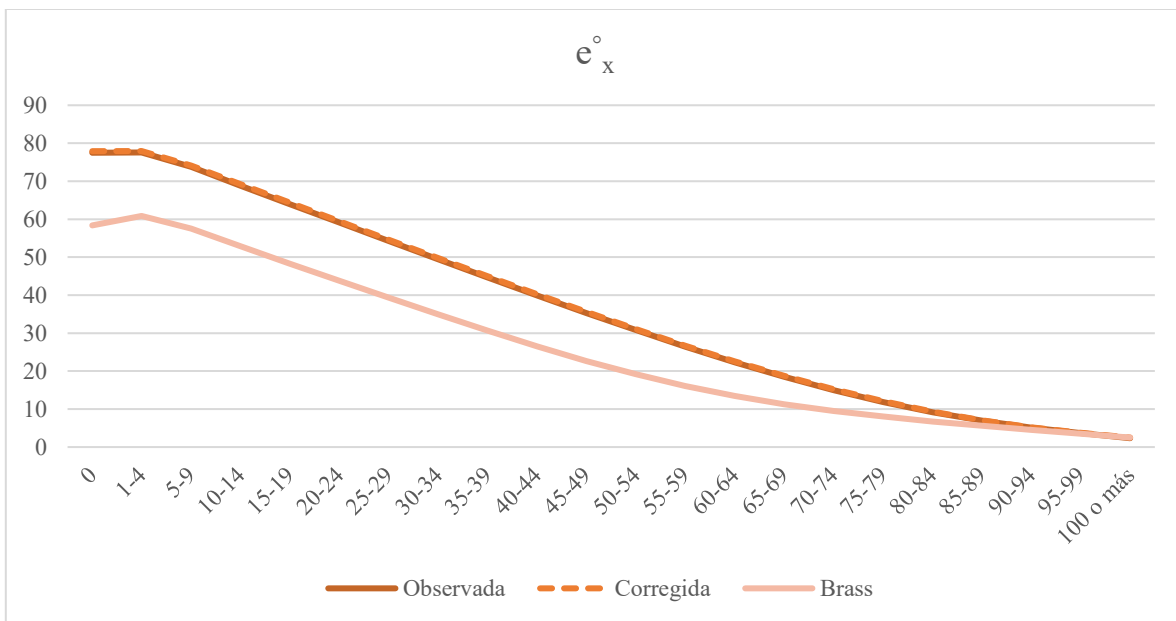
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 5 Esperanza de vida para las mujeres, República Mexicana 2000



Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 6 Esperanza de vida para las mujeres, República Mexicana 2005



Fuente: Elaboración propia

- **Fecundidad**

Tabla A. 19 Tasas específicas desagregadas por edades individuales, República Mexicana
1990-2010

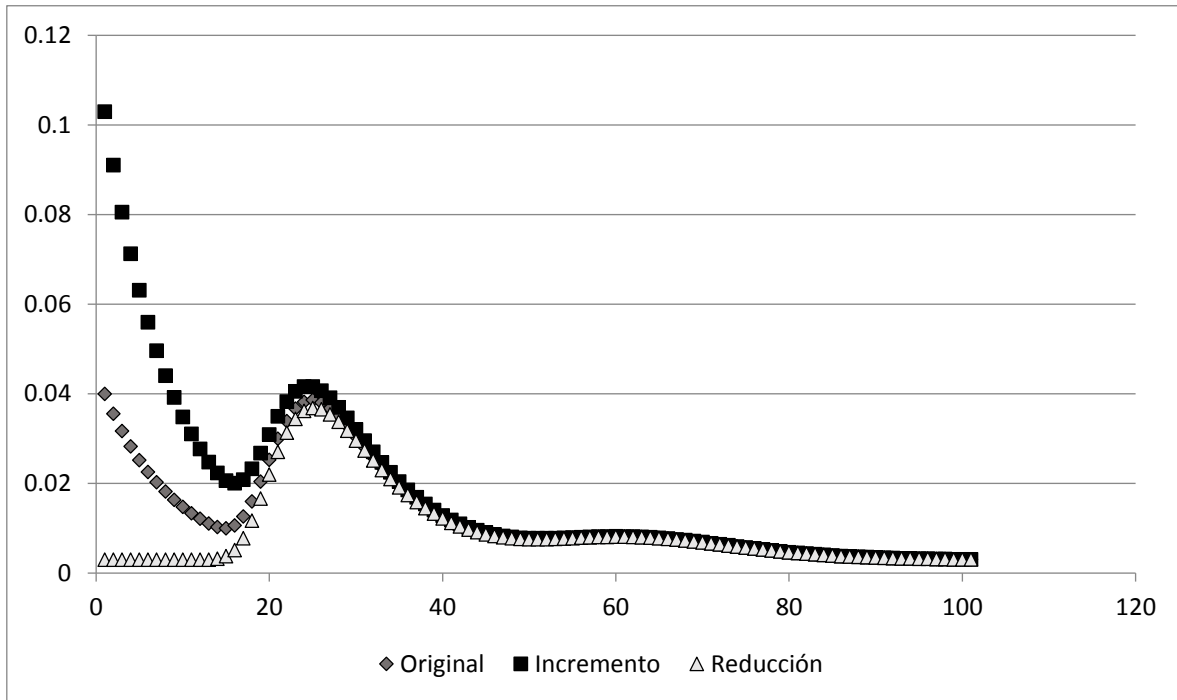
x	$V^s(x)$	$F^s(x)/TGF$	$F^{SA}(x)^{1990}$	$F^{SA}(x)^{2000}$	$F^{SA}(x)^{2010}$	${}_1f_x^{1990SA}$	${}_1f_x^{2000SA}$	${}_1f_x^{2010SA}$
11	3.06847	0.00000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
12	2.84504671	3.3815E-08	1.1361E-07	0.000000	0.000000	0.000003	0.000003	0.000002
13	2.62162386	1.0591E-06	3.5586E-06	0.000003	0.000003	0.000052	0.000044	0.000037
14	2.39820101	1.6646E-05	5.5926E-05	0.000048	0.000040	0.000450	0.000383	0.000321
15	2.17477816	0.0001507	0.00050632	0.000430	0.000361	0.002443	0.002076	0.001741
16	1.95135531	0.00087769	0.00294888	0.002506	0.002101	0.009120	0.007750	0.006499
17	1.72793246	0.00359215	0.01206902	0.010256	0.008601	0.025183	0.021399	0.017946
18	1.50450961	0.01108741	0.0372518	0.031655	0.026547	0.054501	0.046312	0.038839
19	1.28108676	0.02730868	0.09175254	0.077966	0.065385	0.096919	0.082357	0.069067
20	1.05766391	0.0561552	0.18867193	0.160323	0.134453	0.147150	0.125040	0.104863
21	0.83424106	0.09995197	0.33582165	0.285363	0.239316	0.196745	0.167183	0.140206
22	0.61081821	0.15850996	0.53256654	0.452546	0.379521	0.237523	0.201834	0.169265
23	0.38739536	0.22920493	0.77008964	0.654380	0.548787	0.264193	0.224497	0.188271
24	0.16397251	0.3078379	1.03428308	0.878877	0.737058	0.275168	0.233823	0.196092
25	-0.05945034	0.38973731	1.30945119	1.112700	0.933150	0.271893	0.231040	0.193758
26	-0.28287319	0.47066187	1.58134396	1.343740	1.126909	0.257554	0.218855	0.183540
27	-0.50629604	0.54731875	1.83889809	1.562595	1.310449	0.235863	0.200423	0.168082
28	-0.72971889	0.61751959	2.07476099	1.763018	1.478531	0.210231	0.178643	0.149816
29	-0.95314174	0.68009153	2.28499206	1.941661	1.628347	0.183369	0.155817	0.130673
30	-1.17656458	0.73466829	2.46836073	2.097478	1.759021	0.157189	0.133571	0.112017
31	-1.39998743	0.78145316	2.62554995	2.231049	1.871038	0.132891	0.112923	0.094701
32	-1.62341028	0.82100592	2.7584405	2.343972	1.965740	0.111108	0.094413	0.079178
33	-1.84683313	0.85407531	2.86954803	2.438385	2.044918	0.092074	0.078239	0.065614
34	-2.07025598	0.88147954	2.96162161	2.516624	2.110532	0.075760	0.064377	0.053989

35	-2.29367883	0.90402831	3.03738163	2.581001	2.164521	0.061984	0.052670	0.044171
36	-2.51710168	0.92247672	3.09936515	2.633671	2.208692	0.050482	0.042897	0.035975
37	-2.74052453	0.93750191	3.14984724	2.676568	2.244667	0.040966	0.034810	0.029193
38	-2.96394738	0.94969465	3.19081277	2.711378	2.273860	0.033146	0.028166	0.023621
39	-3.18737023	0.95956014	3.22395916	2.739544	2.297481	0.026757	0.022737	0.019068
40	-3.41079308	0.96752404	3.25071651	2.762281	2.316549	0.021560	0.018320	0.015364
41	-3.63421593	0.97394092	3.27227615	2.780601	2.331913	0.017346	0.014739	0.012361
42	-3.85763878	0.97910361	3.28962191	2.795341	2.344274	0.013939	0.011845	0.009933
43	-4.08106163	0.9832523	3.3035608	2.807185	2.354207	0.011190	0.009509	0.007975
44	-4.30448448	0.98658297	3.31475129	2.816694	2.362182	0.008977	0.007628	0.006397
45	-4.52790733	0.98925489	3.32372846	2.824323	2.368579	0.007197	0.006116	0.005129
46	-4.75133018	0.99139702	3.33092568	2.830439	2.373708	0.005767	0.004901	0.004110
47	-4.97475303	0.9931136	3.33669307	2.835339	2.377818	0.004620	0.003926	0.003292
48	-5.19817588	0.99448861	3.34131288	2.839265	2.381110	0.003699	0.003144	0.002636
49	-5.42159873	0.99558968	3.34501229	2.842409	2.383747	-3.345012	-2.842409	-2.383747
50								

Fuente: Elaboración propia.

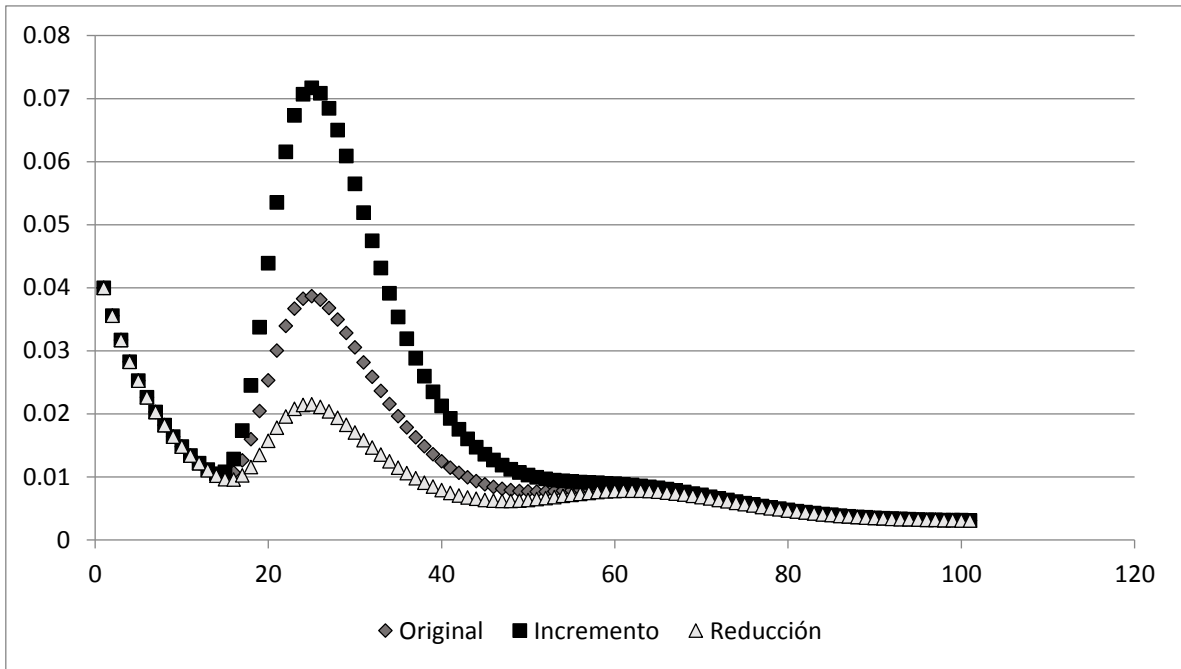
- **Migración**

Gráfica A. 7 Cambios en el valor del parámetro a_1 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



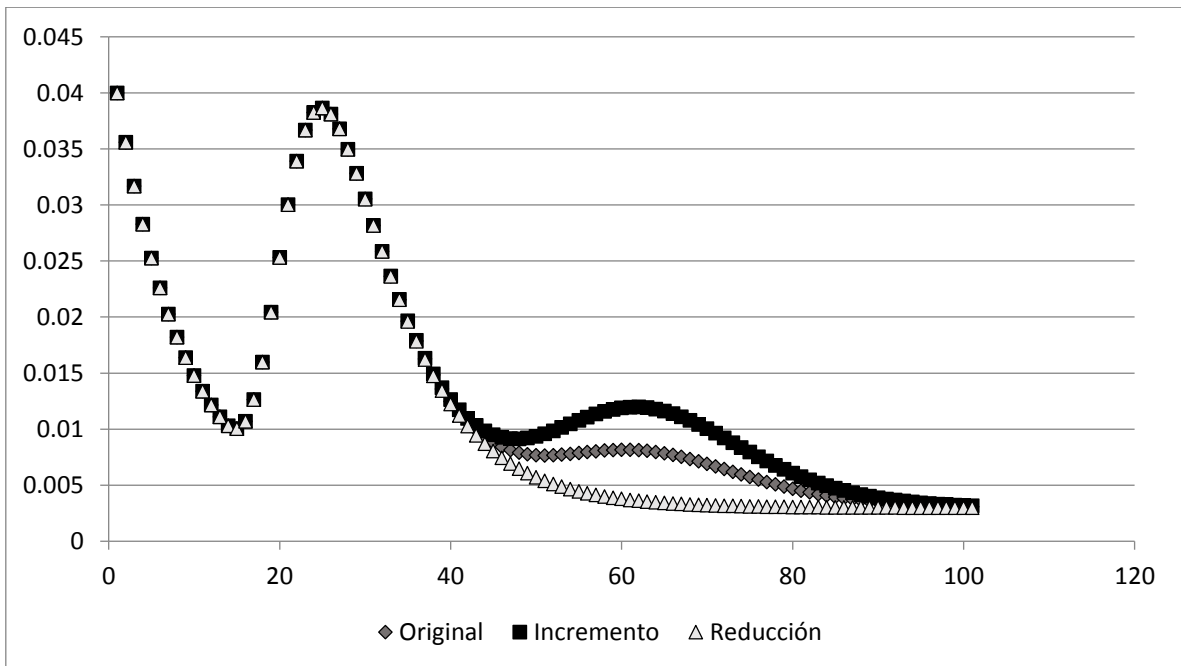
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 8 Cambios en el valor del parámetro a_2 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



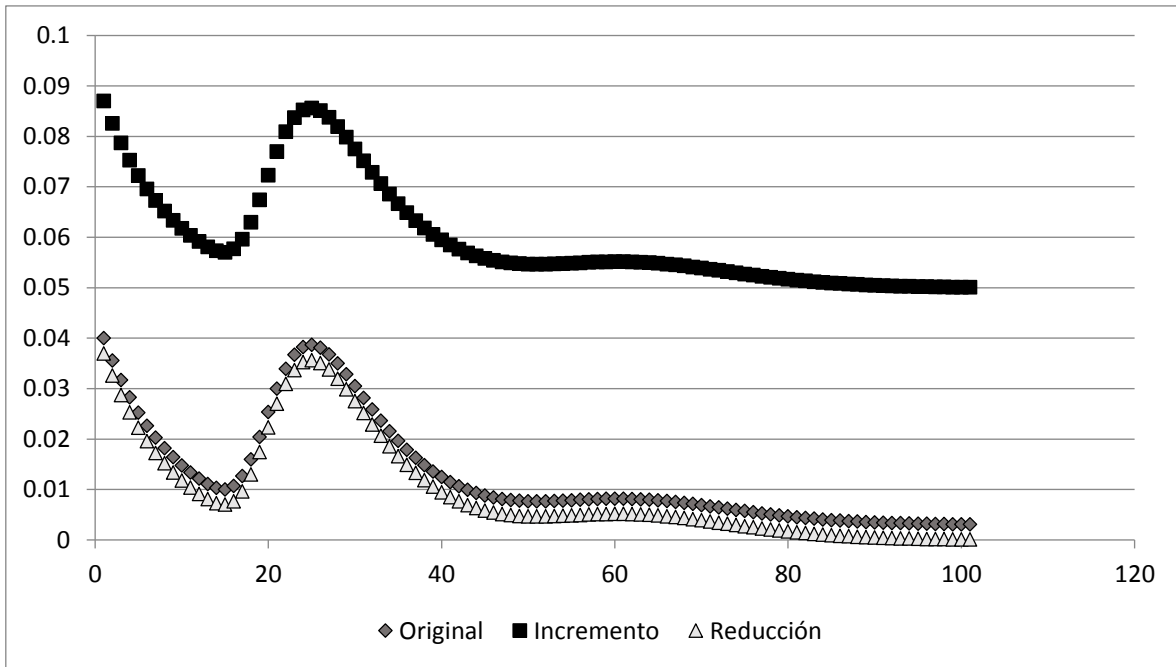
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 9 Cambios en el valor del parámetro a_3 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



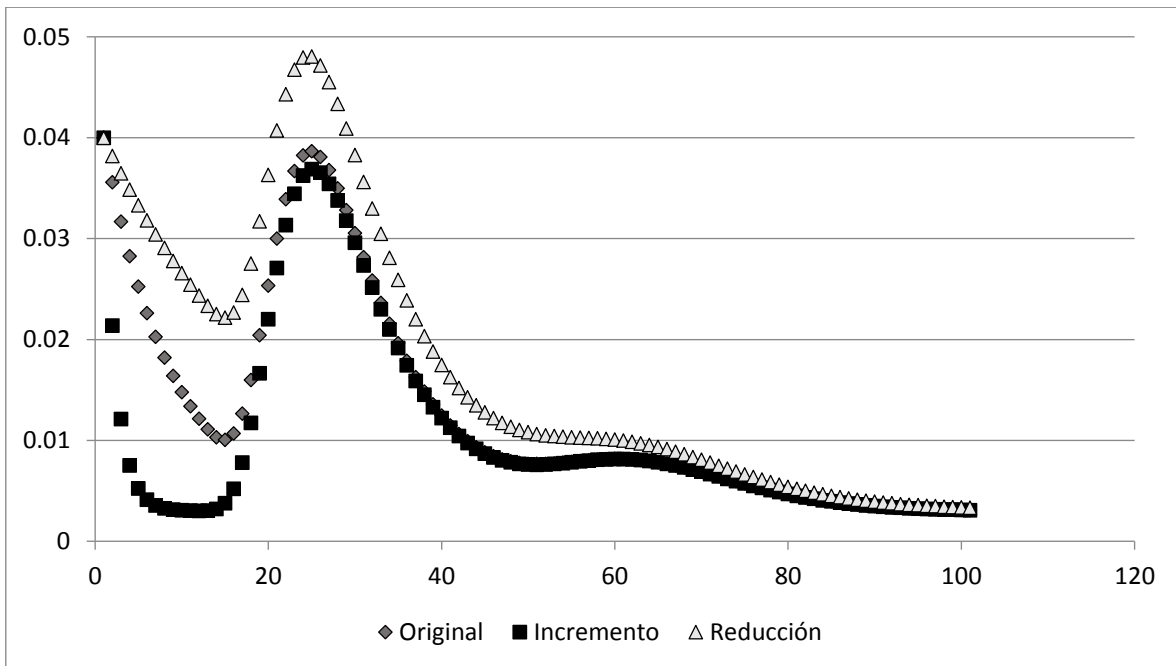
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 10 Cambios en el valor del parámetro c de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



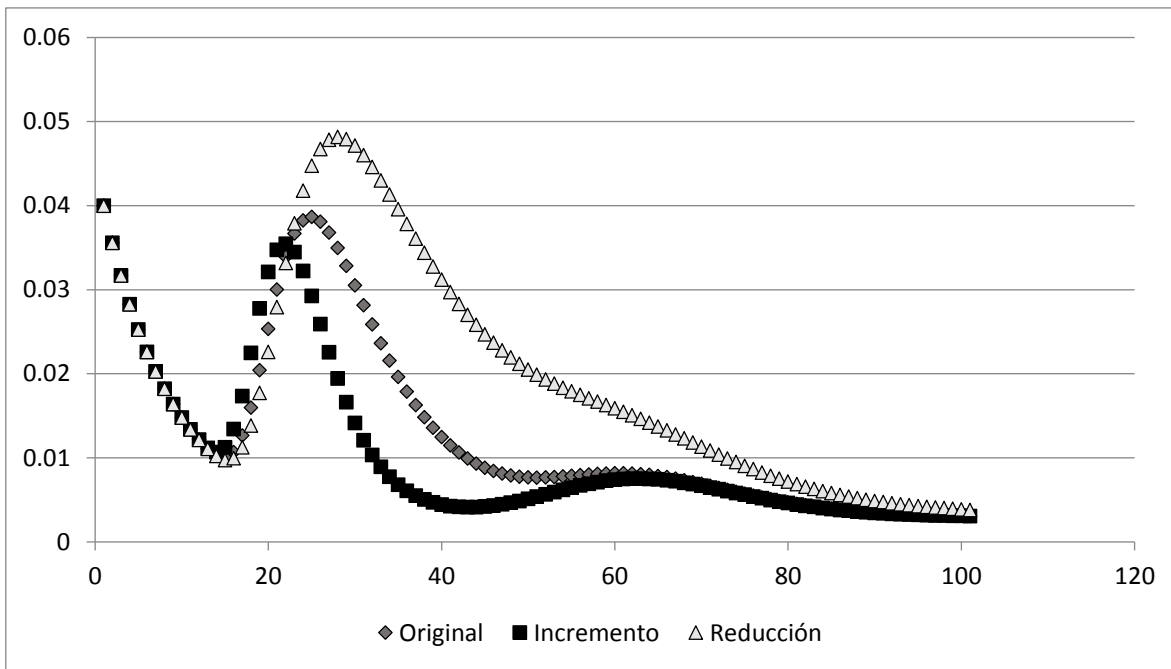
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 11 Cambios en el valor del parámetro α_1 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



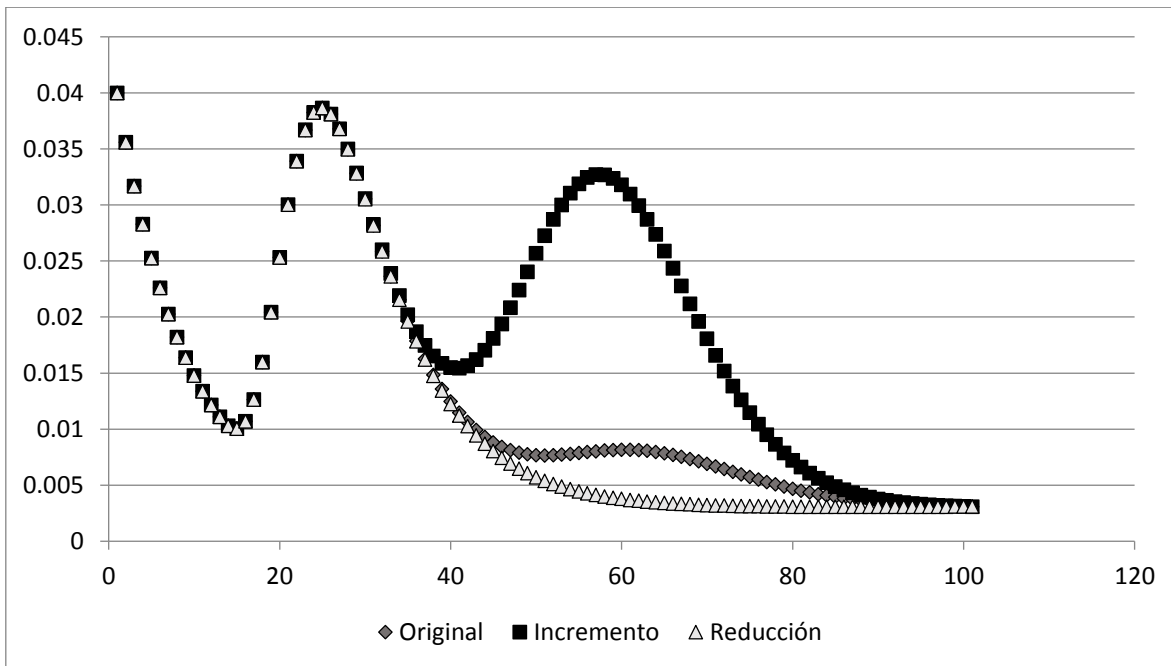
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 12 Cambios en el valor del parámetro α_2 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



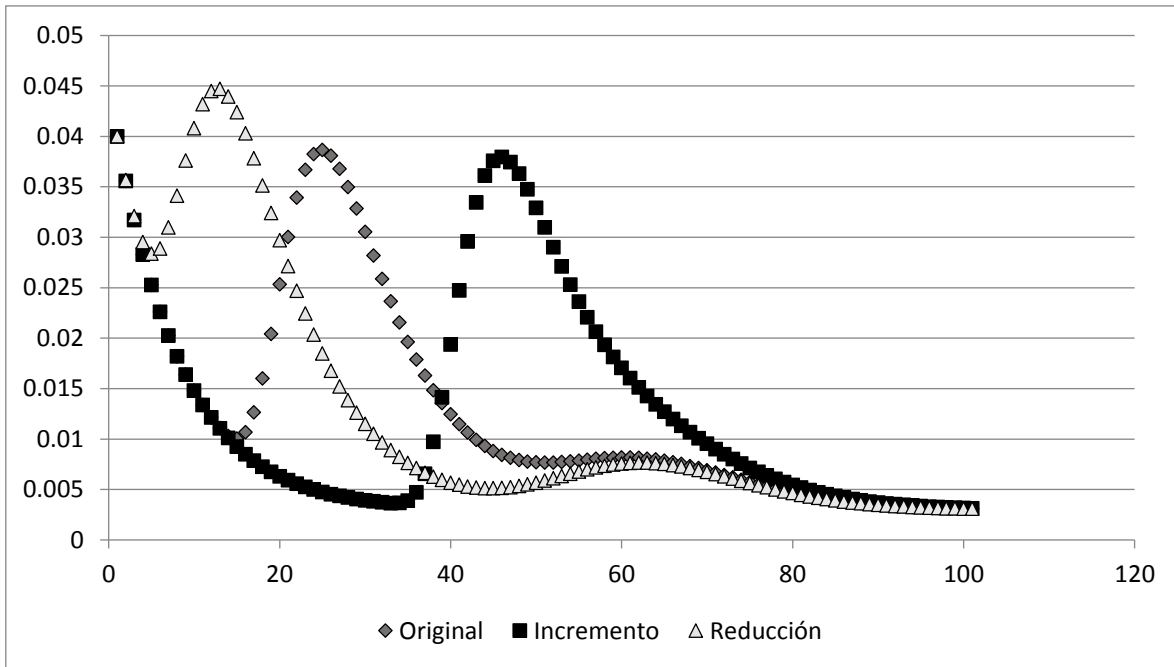
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 13 Cambios en el valor del parámetro α_3 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



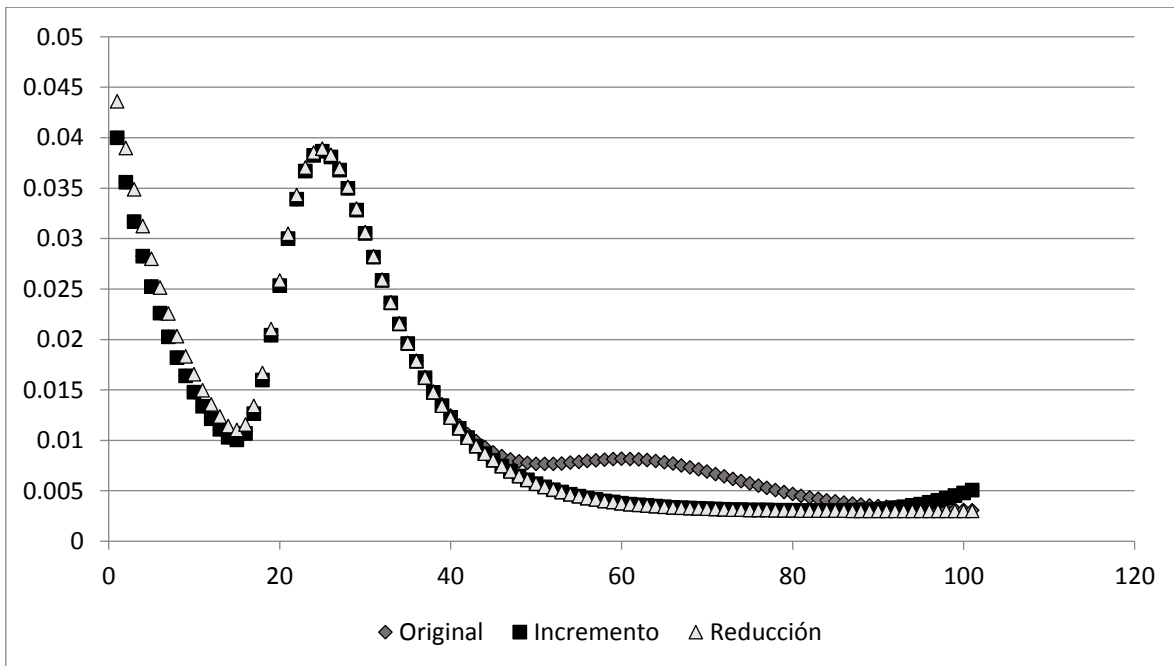
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 14 Cambios en el valor del parámetro μ_2 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



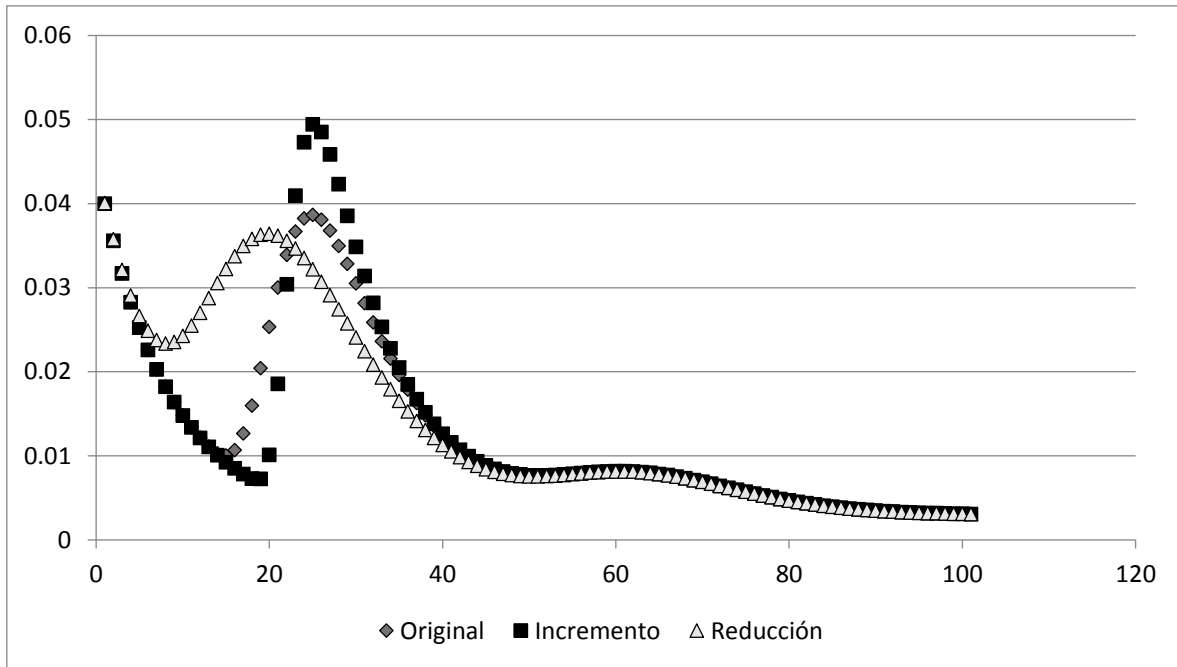
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 15 Cambios en el valor del parámetro μ_3 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



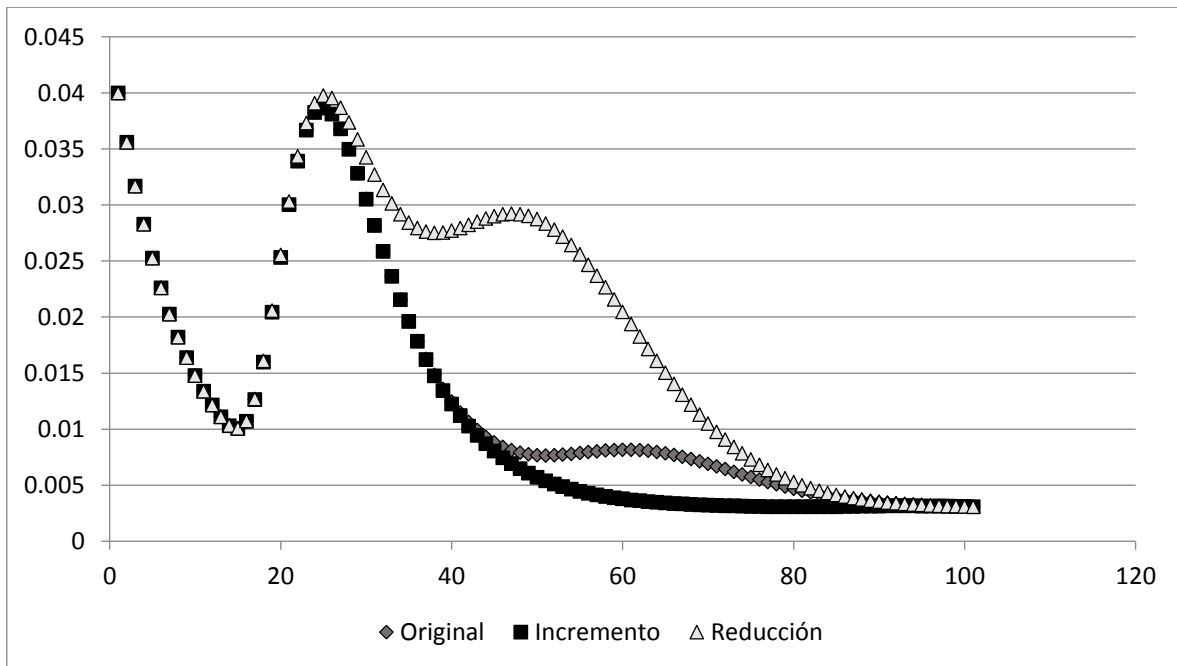
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 16 Cambios en el valor del parámetro λ_2 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



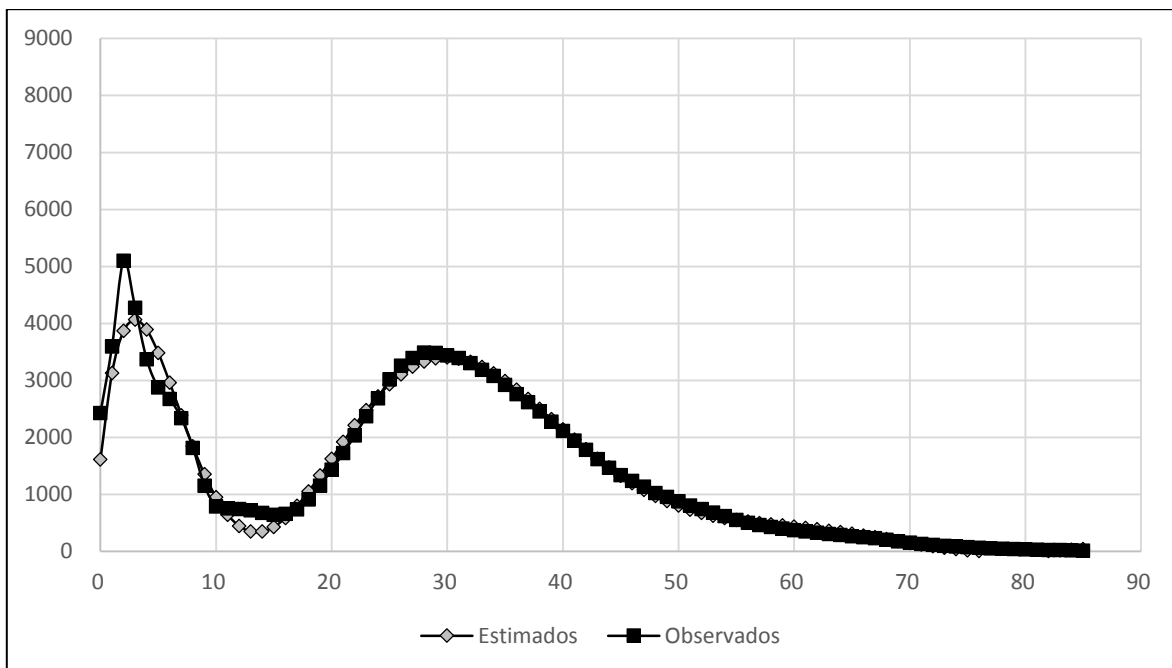
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 17 Cambios en el valor del parámetro λ_3 de la función del patrón modelo de Rogers y Castro



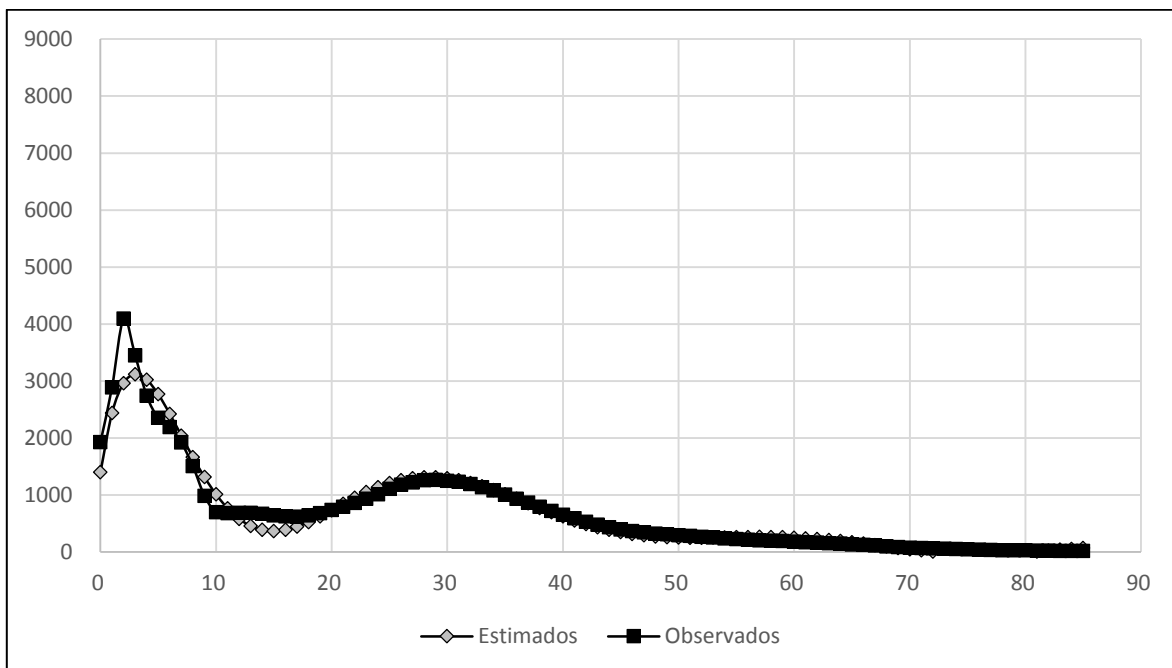
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 18 Ajuste polinómico de hombres inmigrantes internacionales, República Mexicana 2010



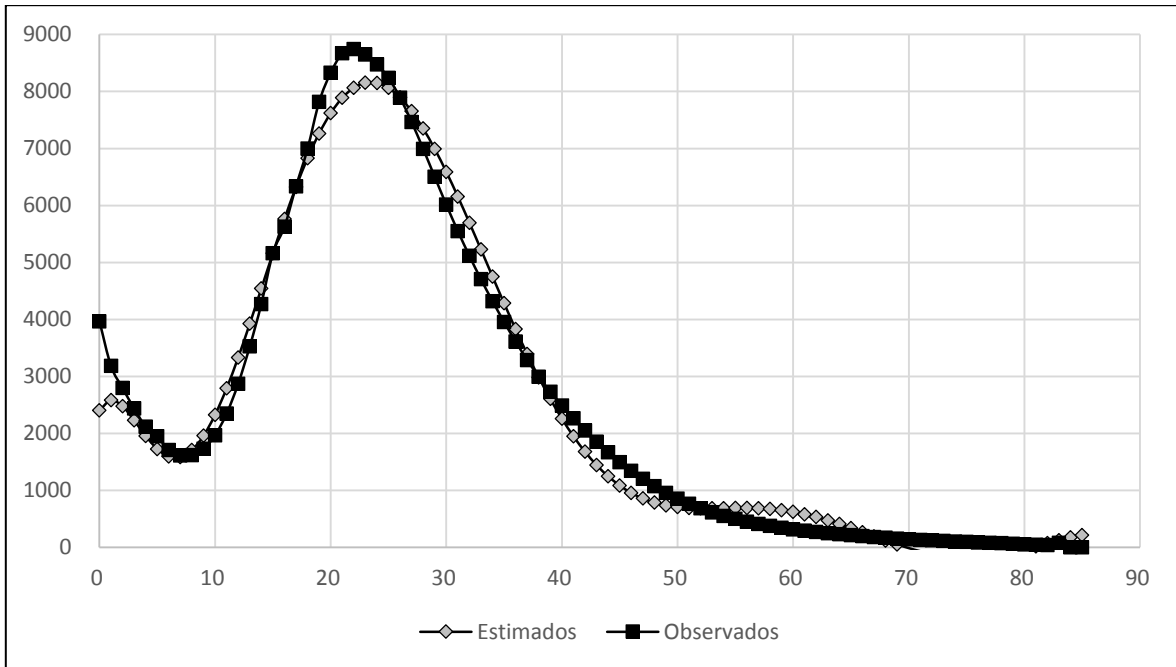
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 19 Ajuste polinómico de mujeres inmigrantes internacionales, República Mexicana 2010



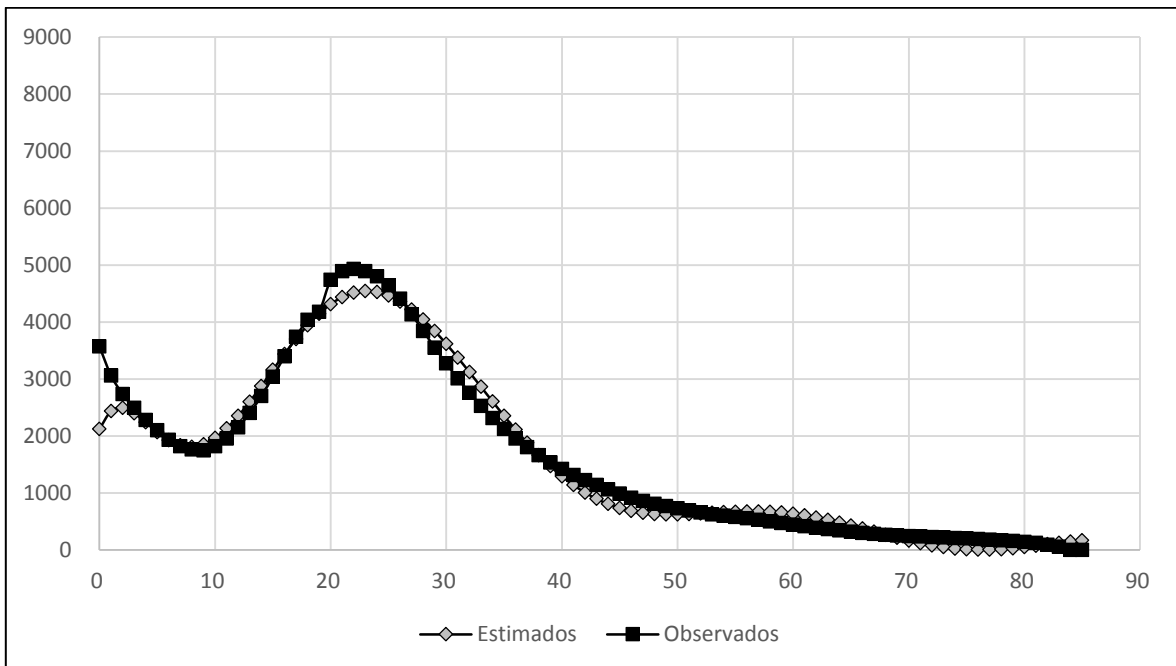
Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 20 Ajuste polinómico de hombres emigrantes internacionales, República Mexicana 2010



Fuente: Elaboración propia

Gráfica A. 21 Ajuste polinómico de mujeres emigrantes internacionales, República Mexicana 2010



Fuente: Elaboración propia

Se ha observado que el patrón del calendario de frecuencias del evento “primer matrimonio” tiene una forma básica en diferentes poblaciones, con diferencias únicamente en el área, el origen y la escala horizontal. Es posible demostrar que el calendario representativo puede ser aproximado por una función de frecuencia en forma cerrada, la cual es la distribución límite de una convolución de un número infinito de componentes distribuidos exponencialmente. De igual manera, es posible representar dicho calendario con una convolución de distribuciones normales y con tres retrasos (o demoras) distribuidos exponencialmente (Coale & McNeil, 1972).

Dada la existencia de una curva estándar, la proporción de mujeres casadas en edad x , excluyendo a aquellas que nunca presentaron el evento (célibes definitivos), puede comportarse como una función de probabilidad (Coale & McNeil, 1972). Sea $F(x)$ la función de distribución que se busca. Entonces, al ajustar una función de distribución probabilística, usualmente se grafica la distribución empírica para encontrar una relación lineal. No obstante, la distribución estándar de las primeras nupcias no conduce a dicha relación lineal. Si se aplica el mismo procedimiento a la función de riesgo:

$$r(x) = \frac{F'(x)}{1-F(x)} \quad (1)$$

Es posible encontrar un ajuste muy cercano al riesgo empírico de una doble exponencial:

$$r(x) = 0.17e^{-4.411e^{-0.309x}} \quad (2)$$

De acuerdo con Coale (Coale & McNeil, 1972), se sugiere que la ecuación (2) puede ser utilizada para representar el riesgo estándar al primer matrimonio. Sin embargo, la función de distribución correspondiente a (2) ni su derivada (la función de frecuencias) pueden ser representadas en su forma cerrada (*closed form*), así como tampoco son evidentes las implicaciones en cuanto al comportamiento de la función de riesgo (Coale & McNeil, 1972).

De acuerdo con las sugerencias de un demógrafo matemático en 1971, Griffith Feeney, se sugirió una posibilidad de que la curva de distribución del primer matrimonio sea la convolución de una distribución que describa la edad de entrada al evento (primer matrimonio) y una distribución de retrasos entre la entrada y el matrimonio real. Dicha

distribución del retraso puede ser un exponencial simple y la distribución de la entrada al matrimonio puede ser una normal (Coale & McNeil, 1972).

La sugerencia anterior proviene de un procedimiento alternativo de ajustar una función de distribución, que se basa en que la función de distribución buscada es la convolución de un simple número de componentes (posiblemente infinito). En dado caso, cuando la función de riesgo se aproxime a una asíntota, r , la convolución contiene al menos un componente que se distribuye exponencialmente, que puede ser eliminado al aplicar la siguiente expresión:

$$F_1(x) = F(x) + \frac{F'(x)}{r} \quad (3)$$

En la expresión (3), $F_1(x)$ es la distribución resultante después de que el término exponencial fue eliminado. Al derivar dicha expresión, es posible notar que $F(x)$ es la convolución de $F_1(x)$ y, por la fórmula de una convolución, la distribución exponencial $1 - e^{-rx}$ es

$$F(x) = \int_0^x F_1(z) r e^{-r(x-z)} dz \quad (4)$$

Entonces, al integrar ambos lados de la ecuación (4), se obtiene

$$F'(x) = F_1(x)r - r \int_0^x F_1(z) r e^{-r(x-z)} dz = F_1(x)r - rF(x)$$

Que conduce a la ecuación (3).

El valor de $F_1(x)$ se calcula al seleccionar el valor de r como la asíntota de la función de riesgo (0.174 en el caso de la función de distribución del primer matrimonio estandarizada), y luego, al diferenciar numéricamente la función de distribución empírica. Al realizar los cálculos anteriores, se tiene que la función de riesgo $r_1(x)$ que corresponde a la distribución residual $F_1(x)$ (hipotéticamente la distribución del ingreso en el estado de preparación para el matrimonio) se aproxima a una constante (0.483) cuando $x \rightarrow \infty$. Si la distribución de $F_1(x)$ es normal, tal como se sugiere Feeney, entonces $r_1(x)$ debe ser lineal asintóticamente con pendiente positiva (Coale & McNeil, 1972).

Si se realiza una repetida aplicación de la fórmula (3), se confirma que la distribución correspondiente a la función de riesgo (2) produce asíntotas

$$r = 0.174,$$

$$r_1 = 0.174 + 0.309,$$

$$r_2 = 0.174 + 2 (0.309),$$

$$r_3 = 0.174 + 3 (0.309), \dots$$

Al remover el n-ésimo componente de los componentes exponenciales se obtiene una distribución residual $F_n(x)$, donde

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + \frac{F_{n-1}(x)}{r_{n-1}} \quad (5)$$

Es importante notar que al quitar el n-ésimo componente, la media de la distribución residual se reduce en $\frac{1}{r_{n-1}}$, y la varianza en $\frac{1}{r^2_{n-1}}$. Dado que $\sum \frac{1}{r_{n-1}}$ es una serie armónica que diverge (aunque $\sum \frac{1}{r^2_{n-1}}$ converge), el procedimiento no se puede repetir indefinidamente sin reducir la media residual a $-\infty$ (Coale & McNeil, 1972).

Entonces, es posible resolver la dificultad anterior al añadir un apropiado término constante a $F_n(x)$ cada vez que se remueve otro componente exponencial. Lo anterior tiene el efecto de conservar la media de la distribución residual sin cambios, mientras que se reduce la varianza. Para lograr representar la distribución correspondiente al riesgo de "doble exponencial" (2) como una convolución infinita de distribuciones exponenciales (con media corregida) más un término constante, primeramente, se tiene que

$$X_n = a + \sum_{j=1}^n \left(Z_j - \frac{1}{\alpha + (j-1)\lambda} \right) \quad (6)$$

Donde Z_j son independientes con una distribución exponencial con media $\frac{1}{\alpha + (j-1)\lambda}$. Es posible escribir explícitamente la distribución de X_n (Coale & McNeil, 1972). Por el teorema 1 siguiente^{XV}:

^{XV} Para la demostración del teorema ver: Coale, A. & McNeil, D. (1972). The Distribution by Age of the Frequency of First Marriage in a Female Cohort. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 743-749

La distribución límite de $X_n = a + \sum_{j=1}^n \left(Z_j - \frac{1}{\alpha + (j-1)\lambda} \right)$ cuando $n \rightarrow \infty$ tiene función de frecuencia

$$\bar{g}(x) = \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)} e^{-\alpha(x-\mu) - e^{-\lambda(x-\mu)}}$$

Donde $\mu = \alpha + \left(\frac{1}{\lambda}\right) \psi\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$, Γ indica la función Gamma y $\psi = \Gamma'/\Gamma$ denota la función digamma

Se tiene entonces que X_n tiene una distribución límite $\bar{G}(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ con función de frecuencia (Coale & McNeil, 1972)

$$\bar{g}(x) = \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)} e^{-\alpha(x-\mu) - e^{-\lambda(x-\mu)}} \quad (7)$$

Entonces por el teorema 2 siguiente^{XVI}:

La función de riesgo asociada a la función de frecuencia posee una expansión:

$$\bar{r}(x) = \alpha \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+\alpha}{\lambda}\right)} e^{-\lambda j(x-\mu)} \right\}^{-1}$$

Se tiene que la función de riesgo de distribución posee la expansión

$$\bar{r}(x) = \alpha \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1+\alpha}{\lambda}\right)} e^{-\lambda j(x-\mu)} \right\}^{-1} \quad (8)$$

Es importante notar que $\bar{r}(x)$ y $r(x)$ son esencialmente diferentes, entonces la expresión dada por la ecuación (2) no puede ser representada como convolución infinita de la forma

^{XVI} Para la demostración del teorema ver: Coale, A. & McNeil, D. (1972). The Distribution by Age of the Frequency of First Marriage in a Female Cohort. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 743-749

(6). No obstante, en la práctica, si bien el procedimiento de remover los componentes exponenciales no distingue entre ambas, se desea conocer si la distribución dada por la ecuación (7) ajusta a los datos de la ecuación (2) (Coale & McNeil, 1972).

Para ello, el parámetro a es la media empírica con base en el calendario estándar de la fecundidad, α es el valor calculado de la asíntota de la función de riesgo empírica y λ es el valor que asegura una concordancia entre la función $\bar{g}(x)$ con la curva estándar en la vecindad de la moda. Por lo tanto, efectivamente es posible reemplazar la distribución de frecuencia estándar de las tasas del primer matrimonio por $\bar{g}(x)$, dada la ecuación (7) con los parámetros a , α y λ . La expresión anterior tiene la ventaja de ser una función de frecuencia simple y de forma cerrada (Coale & McNeil, 1972).

Ahora bien, una vez definido el modelo se procede a examinar las implicaciones que tiene su comportamiento (Coale & McNeil, 1972). Al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la expresión (6), se tiene

$$\begin{aligned}\bar{X}(x) &= a + \sum_{j=1}^{\infty} \left(Z_j - \frac{1}{\alpha+(j-1)\lambda} \right) \quad (9) \\ &= \sum_{j=1}^m Z_j + Y_m\end{aligned}$$

Donde

$$Y_m = a - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\alpha+(j-1)\lambda} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \left(Z_j - \frac{1}{\alpha+(j-1)\lambda} \right) \quad (10)$$

Lo anterior quiere decir que \bar{X} es la convolución de m componentes distribuidos exponencialmente con un componente adicional (Y_m). Al denotar la distribución de frecuencias de Y_m y $\sum_{j=1}^m Z_j$ por $g_m(x)$ y $h_m(x)$, respectivamente, es posible mostrar por el teorema 1 y por el teorema 3^{XVII}:

^{XVII} Para la demostración del teorema ver: Coale, A. & McNeil, D. (1972). The Distribution by Age of the Frequency of First Marriage in a Female Cohort. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 743-749

La distribución de frecuencias $\bar{g}(x)$ se puede escribir como la convolución de $g_m(x)$ y $h_m(x)$, donde

$$g_m(x) = \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{\lambda}\right)} e^{-(\alpha+m\lambda)(x-\mu)-e^{-\lambda(x-\mu)}}$$

Que se tiene

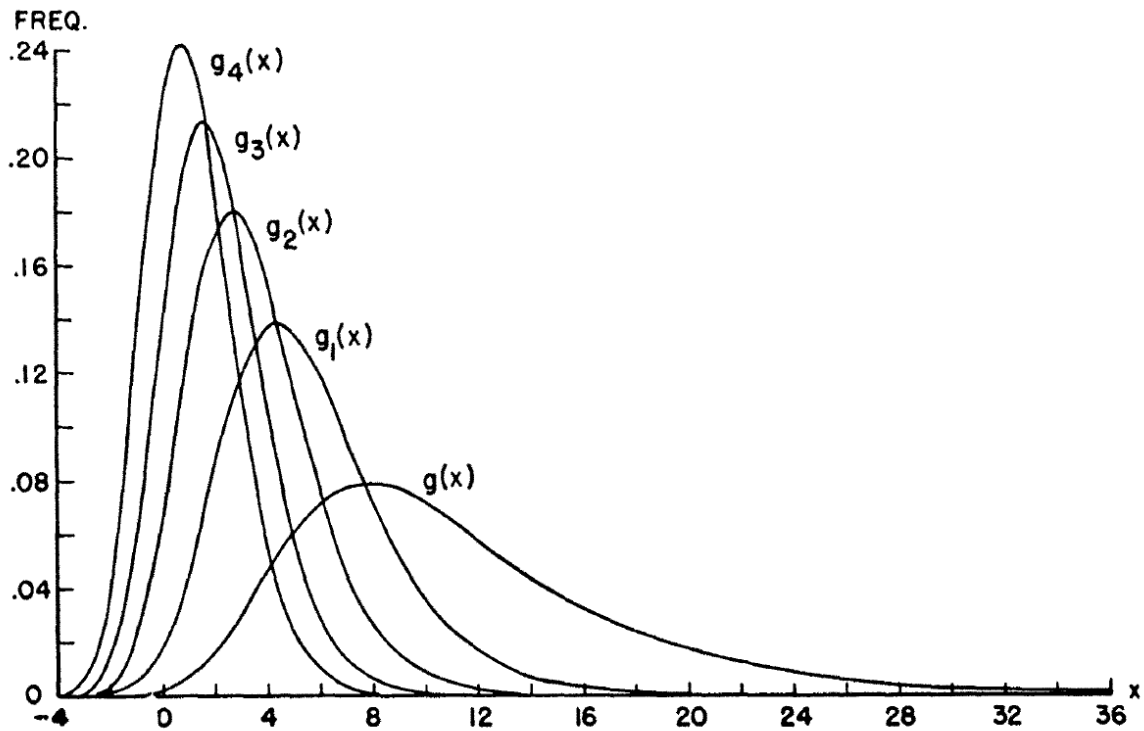
$$g_m(x) = \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{\lambda}\right)} e^{-(\alpha+m\lambda)(x-\mu)-e^{-\lambda(x-\mu)}} \quad (11)$$

$$h_m(x) = \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)(m-1)!} (1 - e^{-\lambda z})^{m-1} e^{-ax} \quad (12)$$

Donde Y_m puede ser considerado como el término residual después de la eliminación de m componentes exponencialmente distribuidos. Cuando se grafica su distribución de la frecuencia $g_m(x)$ surge un patrón: la distribución residual se vuelve cada vez menos sesgada, ya que cada componente se remueve, acercándose a la forma de una distribución normal (ver Gráfica A. 22) (Coale & McNeil, 1972).

El hecho anterior sugiere que la distribución teórica $\bar{G}(x)$ (y por lo tanto con la distribución empírica del primer matrimonio) podría ser cercanamente aproximada por la convolución de: una distribución normal y un número moderado de componentes exponenciales con valores medios en progresión armónica (Coale & McNeil, 1972). El ajuste que se obtiene con tres retrasos es muy cercano, entonces el ajuste de esta convolución al calendario estándar de los primeros matrimonios es esencialmente tan bueno como el ajuste de $\bar{g}(x)$ en sí (Coale & McNeil, 1972).

Gráfica A. 22 La función residual $g_m(x)$



Fuente: Coale, A. & McNeil, D. (1972). The Distribution by Age of the Frequency of First Marriage in a Female Cohort. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 743-749

Es posible prever de la similitud de estas curvas, a partir de la comparación de los cumulantes de $\bar{g}(x)$ con los de la convolución de $h_3(x)$ y una curva normal (con misma media y varianza de $g_3(x)$). Los cumulantes de una curva normal mayor a la segunda son cero. En ese sentido, el cumulante (de cualquier orden) de una convolución es la suma de los correspondientes cumulantes de los componentes. Si bien el r -ésimo cumulante de una distribución exponencial se^{-sx} es $(r-1)! \left(\frac{1}{s}\right)^r$, por lo tanto el r -ésimo cumulante de $h_m(x)$ es $(r-1)! \sum_1^m \{\alpha + (j-1)\lambda\}^{-r}$ y el r -ésimo cumulante de $\bar{g}(x)$ es $(r-1)! \sum_1^\infty \{\alpha + (j-1)\lambda\}^{-r}$.

Entonces, la convolución de $h_3(x)$ y una curva normal (con la misma media y la varianza como $g_3(x)$) tiene exactamente la misma media y la varianza como $\bar{g}(x)$, únicamente el tercer cumulante difiere en

$$(r - 1)! \sum_1^3 \{\alpha + (j - 1)\lambda\}^{-r}$$

Cabe señalar que si $h_1(x)$ eran suficientemente cerca de una distribución normal, es posible sustituir $\bar{g}(x)$ por la convolución de una distribución normal y sólo un retraso exponencial. El modelo es más exacto y el componente normal puede ser considerado como el tiempo para alcanzar una edad al matrimonio, mientras que los términos exponenciales pueden ser interpretados como los retrasos adicionales antes de que finalmente se alcanza el evento de matrimonio.

Bibliografía

- Bocaz, A. (1974). El uso de la ley de Makeham como función demográfica. CELADE, 37-64.
- Brass, W. (1971). Sobre la escala de mortalidad. En CELADE, *Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados* (págs. 135-180). San José, Costa Rica, Serie E, No. 14: CELADE.
- Brass, W. (1974). Apéndice A. Nota sobre el método de Brass sobre estimación de la fecundidad. En W. Brass, *Métodos para estimar la fecundidad y la mortalidad en poblaciones con datos limitados* (págs. 74-76). Santiago, Chile: CELADE, Serie E, N° 14.
- Brass, W. (1977). Estimaciones de la fecundidad total a partir del número medio de hijos por mujer (P_i). Estimaciones de la fecundidad total con datos de la Encuesta Mundial de la Fecundidad. En W. Brass, *4 lecciones de William Brass* (págs. 47-68). Santiago, Chile. Serie D, N° 91: CELADE.
- Camisa, Z. (1975). Tasas de fecundidad por edad a partir de datos sobre fecundidad retrospectiva y fecundidad actual. En Z. Camisa, *Introducción al estudio de la fecundidad* (págs. 53-70). San José, Costa Rica: CELADE.
- Carrier, N., & Hobcraft, J. (1975). Capítulo II. Sistemas de tablas modelos de vida. En CELADE, *Estimaciones demográficas para sociedades en desarrollo* (págs. 1-8). San José, Costa Rica: CELADE.
- Chackiel, J. (1972). Distribución interna. Costa Rica, CELADE.
- Chackiel, J. (1979). Estructura de la fecundidad por edades: ajuste y proyección mediante la función Gompertz linealizada. *Notas de Población, CELADE*, 9-33.
- Chackiel, J. (1981). El modelo de mortalidad de Brass. CELADE, Notas de población.
- Coale, A., & McNeil, D. (1972). The Distribution by Age of the Frequency of First Marriage in a Female Cohort. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 743-749.

- Corona, R. (1972). *Determinación de la mortalidad por medio de las técnicas de William Brass, con especial referencia al sistema logito*. San José, Costa Rica: Distribución interna.
- Elandt-Johnson, R., & Johnson, N. (1980). 3. Survival Distributions. En R. Elandt-Johnson, & N. Johnson, *Survival Models and Data Analysis* (págs. 50-79). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Mina, A. (1982). Desagregación de la estructura de la fecundidad por edades empleando la función Gompertz. *Demografía y Economía*, 27-45.
- Mina, A. (1982). Uso y abuso de los modelos de ajuste en la demografía. *Revista de Estadística y Geografía*, 31-45.
- Mina, A. (2001). Funciones de supervivencia empleados en el análisis demográfico. *Papeles de Población*, 131-154.
- Mina, A. (2006). Ley de la mortalidad mexicana. Funciones de Supervivencia. *Estudios Demográficos y Urbanos, El Colegio de México*, 431-456.
- Mina, A. (2009). Uso de las funciones de supervivencia en las ciencias sociales y en los estudios de población: Aplicación al caso de México. *Papeles de Población*, 53-74.
- Mina, A. (2011). La obtención y proyección de tablas de mortalidad empleando curvas spline. *Papeles de Población*, 49-72.
- Organización de Naciones Unidas. (1983). *Tablas modelo de mortalidad para países en desarrollo*. New York.
- Organización de Naciones Unidas. (1986). *Manual X. Técnicas indirectas de estimación demográfica*. New York.
- Preston, S. H., & Wang, H. (2007). Intrinsic growth rates and net production rates in presence of migration. *Population and Development Review*, 657-666.
- Rodríguez Javique, D. C., Turra, C. M., de Oliveira Bonifácio, G. M., & Wajnman, S. (2013). Efectos de la migración sobre el crecimiento poblacional a largo plazo de las provincias cubanas. *R. bras. Est. Pop.*, 429-444.

- Rogers, A., & Castro, L. (1982). Patrones modelo de migración. *Demografía y Economía*, 267-327.
- Romo Viramontes, R., Ruiz Guzmán, L., & Velázquez Isidro, M. (2011). El papel de la migración en el crecimiento de la población: análisis de los componentes de la dinámica demográfica a nivel entidad federativa, 2000-2010. *La Situación demográfica de México 2011*, 187-208.
- Salamanca, U. d. (25 de Abril de 2016). *Universidad de Salamanca*. Obtenido de [http://campus.usal.es/~mpg/Personales/PersonalMAGL/Docencia/MetNumTema2T eo\(09-10\).pdf](http://campus.usal.es/~mpg/Personales/PersonalMAGL/Docencia/MetNumTema2T eo(09-10).pdf)
- Swanson, H., & Siegel, J. (2004). 12. Mortality. En H. Swanson, & J. Siegel, *The Methods and Materials of Demography* (pág. 819). San Diego, California: Elsevier Academic Press.
- Swanson, H., & Siegel, J. (2004). 13. The Life Table. En H. Swanson, & J. Siegel, *The Methods and Materials of Demography* (pág. 819). San Diego, California: Elsevier Academic Press.
- Villa, M. (1991). *Introducción al análisis de la migración*. CELADE.